

Старинова О.Л., Шевченко О.П.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ КОМПЛАНАРНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ МЕЖДУ КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ

Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию перелете космического аппарата (КА) между круговыми компланарными орбитами с нефиксированной угловой дальностью в центральном гравитационном поле одного притягивающего тела. КА движется действием двигателей малой тяги с солнечной энергоустановкой, мощность которой пропорциональна квадрату гелиоцентрического расстояния. Будем считать, что скорость истечения рабочего тела настолько велика, чтобы можно было пренебречь изменением массы КА время перелета.

Положение КА будем описывать в плоской полярной системе координат безразмерным фазовым вектором $X = (r, \varphi, V_r, V_\varphi)$. В соответствии с формализмом принципа максимума Понтрягина введем вектор сопряженных переменных $\bar{P} = (P_r, P_\varphi, P_1, P_2)$ составим гамильтониан

$$H = \left(\frac{dX}{dt} \right)^T \cdot P = P_r V_r + P_\varphi \frac{V_\varphi}{r} + P_1 \left(\frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{a_0}{r^2} \cos \lambda \right) + P_2 \left(-\frac{V_r V_\varphi}{r} + \frac{a_1}{r^2} \sin \lambda \right). \quad (1)$$

Из условия его максимума найдем оптимальное управление:

$$\sin \lambda = \frac{P_2}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}, \quad \cos \lambda = \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}. \quad (2)$$

При нефиксированной угловой дальности, согласно условию трансверсальности $P_\varphi(r) = 0$ и так как $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, получим $P_\varphi(t) = 0$.

Таким образом, задача об оптимальном по быстродействию перелете между круговыми компланарными орбитами сводится к следующей двухточечной двухпараметрической

красной задаче. Требуется найти такие начальные значения $\lambda_0 = \arctg \frac{P_2}{P_1}$

$B = \sqrt{P_1^2(t_0) + P_2^2(t_0)}$ ($P_1 = \pm 1$ - из условия нормировки), чтобы на концах оптимальной

траектории выполнялись начальное и конечное условия:

$$X(t_0) = (r_0 = 1, \varphi_0 = 0, V_{r,0} = 0, V_{\varphi,0} = 1).$$

$$\bar{X}(T) = \left(r_k, \varphi_k - \text{arctg} \frac{V_{\varphi}}{V_r}, V_{r0} = 0, V_{\varphi0} = \frac{1}{\sqrt{r_k}} \right)$$

Начальные условия соответствуют круговой орбите с безразмерным радиусом $r_0 = 1$, а конечные – круговой орбите $\sqrt{(\Delta V_r)^2 + (\Delta V_\varphi)^2}$ и r_k .

Функция невязок $f = \sqrt{(\Delta V_r)^2 + (\Delta V_\varphi)^2}$ (выход из интегрирования осуществляется по r_k) краевой задачи очень чувствительна к начальным значениям подбираемых параметров и носит многоэкстремальный, «овражистый» характер. Например, на рис. 1 показана такая зависимость в окрестности оптимального решения (для $r_k = 0.6$, $a_0 = 0.6$). По поведению функции невязок видно, что вблизи оптимального решения ($\Delta\lambda = 0$, $\Delta B = 0$) при этих начальных условиях существует второй локальный минимум с другим значением функционала. Поэтому ухудшается сходимость и сужается область устойчивости численного решения краевых задач.

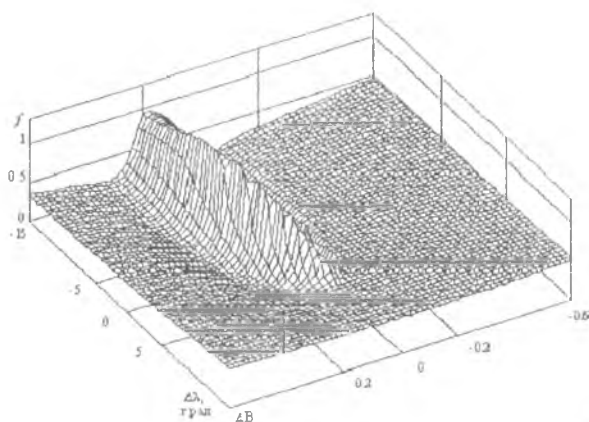


Рис. 1. Зависимость функции невязок краевой задачи для $r_k = 0.6$, $a_0 = 0.6$ $f = \sqrt{(\Delta V_r)^2 + (\Delta V_\varphi)^2}$ от отклонения параметров краевой задачи $\Delta\lambda = 0$, $\Delta B = 0$ от оптимального решения λ_0 и B

Использование в качестве начального приближения для подбираемых параметров результатов аналитического решения при $\lambda = \text{const}$ [1] позволило существенно улучшить сходимость краевых задач. Было получено множество решений краевой задачи для диапазонов радиусов конечных орбит $r_k \in [0.1, 5]$ и начальных уровней ускорения $a_0 \in [0.001, 5]$. За-

зависимости длительности и угловой дальности перелета $T(r_k, a_0)$, $\varphi(r_k, a_0)$ показаны на рис. 2. Аналогичные зависимости получены для начальных параметров красной задачи $\lambda_0(r_k, a_0)$.

Были предприняты попытки получить интерполирующие функции Лагранжа для зависимостей и автоматизировать этот процесс (решается красная задача с новыми параметрами — добавляется новая составляющая к интерполирующей функции). Однако большая размерность массивов входных данных приводила к получению интерполирующих функций большого порядка и получению неудовлетворительных по точности значений в точках, отличных от узлов интерполяции.

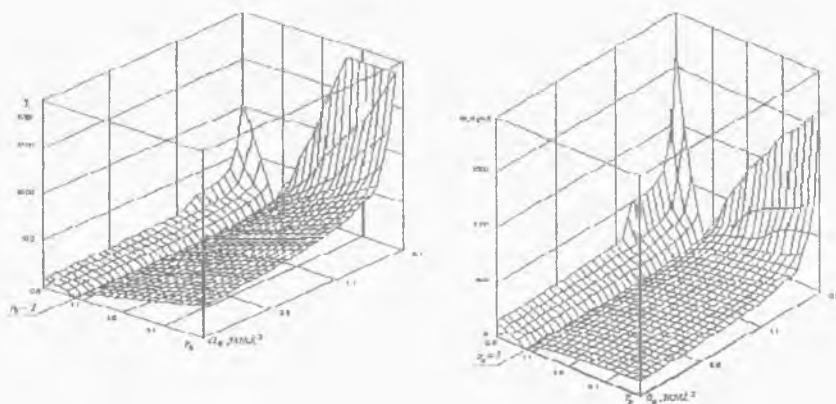


Рис. 2. Зависимости баллистических параметров перелета $T(r_k, a_0)$, $\varphi(r_k, a_0)$ от параметров

Так как интересующие зависимости получены в результате численного решения краевых задач и содержат ошибки вычисления, то нельзя ожидать, что интерполирующая функция решит задачу наилучшим образом. Кроме того, желательно, чтобы кривая проходила через измеренные точки так, чтобы некоторая заданная мера для отклонений была минимальной. Таким образом, существует задача выравнивания результатов измерения и подобной «удобной» функции, которая хорошо описывала бы результаты измерения (построение «сглаживающего» полинома). Для этого использовался метод наименьших квадратов с приемом выравнивания [2]:

$$\sigma_{\min} (f(r_k^i, a_0^i) - y(r_k^i, a_0^i)) = \sum_{i=1}^n (f(r_k^i, a_0^i) - y(r_k^i, a_0^i))^2. \quad (3)$$

т.е. за меру приближения численной зависимости $f(r_k^i, a_0^i)$ функциями семейства $y(r_k^i, a_0^i)$

ибрана сумма квадратов разностей.

В качестве функций семейства $y(r_k^i, a_0^i)$ последовательно избирались линейные и квадратичные зависимости, а также полиномы третьей и четвертой степени от двух переменных. Для оценки адекватности аппроксимирующих зависимостей использовалась формула погрешности:

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(a_0^i, r_k^i) - y(a_0^i, r_k^i)}{f(a_0^i, r_k^i)} \right| \cdot 100\%. \quad (4)$$

Удовлетворительная степень адекватности $\Delta \leq 5\%$ была получена для всех исследуемых зависимостей при использовании полиномов четвертой степени. Например, на рис. 3 показаны значения аппроксимирующих полиномов и полученные численно значения длительности перелета для $r_k = 1.5$.

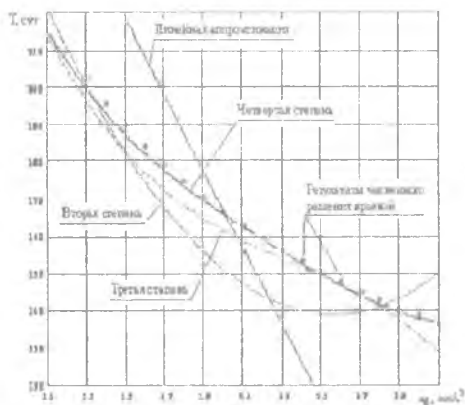


Рис. 3. Результаты аппроксимации зависимости длительности перелета T от начального уровня безразмерного ускорения a_0 (показан для $r_k = 1.5$)

Полученные аппроксимационные зависимости для баллистических параметров имеют вид:

$$y_r(r_k, a_0) = -10.054a_0^3 r_k + 7.864a_0^4 - 56.090a_0^3 + 128.957a_0^2 + 75.362a_0^2 r_k + 1.923a_0^2 r_k^2 - 54.335a_0 - 234.991a_0 r_k - 3.762a_0 r_k^2 - 1.000a_0 r_k^3 - 415.399 + 747.203r_k - 166.706r_k^2 + 44.100r_k^3 - 3.477r_k^4,$$

$$y_p(r_k, a_0) = -1.838a_0^3 r_k + 2.788a_0^4 - 24.530a_0^3 + 75.525a_0^2 + 20.948a_0^2 r_k - 1.033a_0^2 r_k^2 - 61.929a_0 - 124.129a_0 r_k - 21.767a_0 r_k^2 - 1.756a_0 r_k^3 - 370.384 + 795.187r_k - 326.963r_k^2 + 64.928r_k^3 - 4.877r_k^4.$$

Эти зависимости можно использовать в качестве первого приближения к решению динамической части проектно-баллистической задачи оптимизации КА с двигателями малой тяги с солнечной энергоустановкой, что позволяет автоматизировать процесс решения краевых

вых задач для более сложных моделей движения КА, например, с учетом изменения m или эллиптичности стартовой и финишной орбит.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ишков С.А., Милокумова О.Л., Салмин В.В. Оптимизация замкнутых межпланетных полетов Земля-Март-Земля с малой тягой //Космические исследования - 1995. Т.33, №2, С. 218.
2. Жданов А.И., Шевченко О.И. Взвешенный метод полных наименьших квадратов и его применение // Обзор. прикл. и промышл. матем. – Москва. – 2001. – Т.8, №1, С. 169-170.