УДК 512.516.5

Лежнёв М.В.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ТОКА ТОЧЕЧНОГО ВИХРЯ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРИСОЕДИНЁННОГО ВИХРЯ

Рассматривается задача обтекания несжимаемой жидкостью присоединённого вихря Жуковского потенциальным потоком всюду в области течения кроме, может быть, некоторого набора изолированных точек, в которых расположены точечные вихри заданной интенсивности. Предлагается представление функции тока такого течения и алгоритм численного решения задачи.

1. Пусть ограниченная область Q с достаточно гладкой границей S, $S \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, обтекается потенциальным потоком несжимаемой жидкости, т. е. в неограниченной области $Q^+ = R^2 \setminus \overline{Q}$ требуется построить векторное поле скоростей $\overline{w}(x) = \{\, u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее условиям $div\,\overline{w}(x) = 0$, $rot\,\overline{w}(x) = 0$ при $x \in Q^+$. Для такого векторного поля существует функция тока $\psi(x)$: $\overline{w}(x) = \left\{\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}\psi$. Пусть также задана скорость на бесконечности $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$ и граница S является линией тока.

По предположению Жуковского [1], обтекаемую область можно заменить присоединённым вихрем, который порождает данное обтекающее течение, т. е. внешнее течение и присоединённый вихрь непрерывно продолжают друг друга через гладкие части границы.

Функция тока такого течения может быть представлена в виде [2]

$$\psi(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \iint\limits_Q g(y) E(x-y) dy, \tag{1}$$

где $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа. Это представление существует и единственно, если плотность $g(y)$ присоединённых вихрей в Q является гармонической функцией, и потенциал Робена для Q с границей S не равен нулю.

2. Потенциалом Робена $R(x)$ называется потенциал простого слоя

$$R(x) = \int\limits_S \varphi^*(y) E(x-y)\, ds_y$$

такой, что $R(x) = const$ при $x \in Q$ (и, следовательно, при $x \in S$). Функция $\varphi^*(x)$ – решение задачи Робена для S – является собственной функцией оператора, сопряжённого интегральному оператору потенциала двойного слоя [3], [4]. Потенциал Робена является функцией тока чисто циркуляционного обтекания профиля S [5].

Рассмотрим систему функций

$$\mu_n(x) = \iint\limits_Q \gamma_n(y) E(x-y) dy,$$

где $\gamma_n(y) = \ln|z^n - y|$, $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность базисных точек, удовлетворяющих условию единственности гармонических в Q^+ функций [2].

Справедливо утверждение [6]: система функций $\mu_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) полна и линейно независима в $L_2(S)$, если потенциал Робена для области Q не равен нулю. Если потенциал Робена для Q равен нулю, то функции $\mu_n(x)$ принадлежат подпространству $L_2^{\varphi}(S)$ и образуют в $L_2^{\varphi}(S)$ полную систему. $L_2^{\varphi}(S)$ – подпространство, ортогональное $\varphi^*(x)$, $L_2(S) = L_2^{\varphi}(S) \oplus \varphi^*$.

Таким образом, имеем аппроксимацию $\psi^N(x) \approx \psi(x)$, где

$$\psi^N(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \sum_{n=1}^{N} c_n \mu_n(x).$$

3. Условие непротекания может быть переписано в виде $\psi(x) = B = const$ при $x \in S$. Вариационная задача $\|\psi^N(x) - B\|^2_{L_2(S)} \to \min\limits_{c_n}$ для нахождения коэффициентов c_n разложения $g(y) \approx \sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_n(y)$ ($y \in Q$) приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): $Ac = d$ с матрицей Грама $A(N \times N)$ с элементами $a_{pn} = \int\limits_S \mu_p(x) \mu_n(x) ds$ и правой частью с элементами вида $d_p = \int\limits_S (B - (u_0 x_2 - v_0 x_1)) \mu_p(x) ds$, $p = 1, 2, \ldots, N$. Функция $g(y)$ может быть как угодно точно приближена суммами вида $\sum_{n=1}^{N} c_n \gamma_n(y)$.

4. На рисунках 1, 2 приведены картины линий тока для обтекания вихря Жуковского в полукруге набегающим потоком с углом атаки в 45° при значении постоянной функции тока $B = 1$. При этом на рис. 1 значение множителя γ при потенциале Робена $R(x)$ равно 0, а на рис. 2 – γ = 0.5. Изменение множителя γ обеспечивает обтекание профиля S с различной циркуляцией.

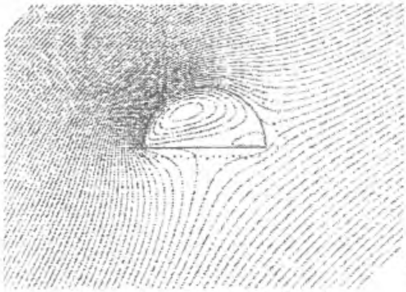

Рис. 1. $\alpha = 45°$, $\gamma = 0{,}0$ ($B = 1$)

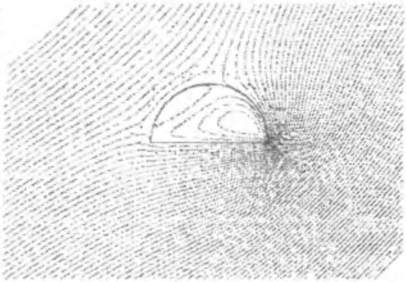

Рис. 2. $\alpha = 45°$, $\gamma = 0{,}5$ ($B = 1$)

5. Для моделирования обтекания присоединённого вихря с точечными вихрями заданной интенсивности в области течения в представление функции тока (1) нужно добавить для K точечных вихрей в точках $r_k \in Q^+$ с заданными циркуляциями Γ_k слагаемые вида $\frac{-\Gamma_k}{2\pi}\ln|r_k - x|$ ($k = 1,\ldots,K$) [1].

Таким образом, общее представление функции тока с K точечными вихрями в области течения имеет вид

$$\psi(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \sum_{k=1}^{K} \omega_k \ln|r_k - x| + \iint_Q g(y)E(x-y)dy + \gamma R(x). \quad (2)$$

Решение соответствующей вариационной задачи добавляет к правой части приведённой выше СЛАУ слагаемые вида $\int_S \ln|r_k - x|\,\mu_p(x)\,ds$, $p = 1,\ldots,N$, с некоторыми заданными множителями $\frac{\Gamma_k}{2\pi}$ для каждого точечного вихря в точке $r_k \in Q^+$ с циркуляцией Γ_k.

6. Заметим, что к представлениям (1), (2), не меняя картин течений в Q^-, можно добавить внутренние вихри с условием прилипания на границе.

Любая функция $\omega(x) \in L_2(Q)$ единственным образом представляется в виде $\omega = g + h$, где $g(x)$ – гармоническая в Q, $g \perp h$, $h(x)$ принадлежит подпространству Новикова $N(Q)$. Функция $h(x) \in N(Q)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие [7]:

$$\iint_Q h(y)E(x-y)dy = 0, \quad x \in R^2 \setminus \overline{Q}.$$

Справедливо следующее утверждение [8]: функция $\psi_0(x)$ является функцией тока в ограниченной области Q течения несжимаемой жидкости с условием прилипания на границе тогда и только тогда, когда

$$\psi_0(x)=\iint_Q h(y)E(x-y)dy\,,\quad x\in Q\,,$$

где $h(y)\in N(Q)$ и потенциал Робена не равен нулю, $R(x)\neq 0$.

Для построения $h(y)$ достаточно взять лапласиан от функции, равной нулю на границе $S=\partial Q$ вместе со своей нормальной производной.

Некоторые картины линий тока внутреннего вихря с условием прилипания на границе для круга приведены в [8].

Работа выполнена в рамках проекта № 2.1.1 / 3828 Минобразования и науки РФ, 2009-2010.

Библиографический список

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст]/ Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. –736 с.
2. Лежнёв, В.Г. Задачи плоской гидродинамики [Текст]/ В.Г. Лежнёв, Е.А. Данилов. – Краснодар: КубГУ, 2000. – 92 с.
3. Математическая энциклопедия [Текст]/ Гл. ред. И.М. Виноградов. – Т. 4. – М.: «Советская энциклопедия», 1984. – 1216 с.
4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Текст]/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. –528 с.
5. Лежнёв, В.Г. Функция тока задачи плоского обтекания, потенциал Робена и внешняя задача Дирихле [Текст]/ В.Г. Лежнёв. – ДАН, 2004. – Т. 394, № 5. – С. 615-617.
6. Лежнев, М.В. Математические модели и алгоритмы плоскопараллельного обтекания профиля. Автореферат на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону, 2006. – 18 с.
7. Новиков, П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала [Текст]/ ДАН СССР, 1938. – Том XVIII, №3. – С. 165-168.
8. Лежнёв, М.В. Внутренние вихри с условием прилипания на границе [Текст]/ М.В. Лежнёв. // Труды II Всероссийской научной конференции молодых учёных и студентов «Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах». – Краснодар: Изд-во «Просвещение-Юг», 2005. – Т. 2. – С. 114-115.