

УДК 533.6.3

Галкина А.С., Фролов В.А.

ПОДЪЕМНАЯ СИЛА ДВУМЕРНОГО КОНТУРА ВБЛИЗИ ЭКРАНА

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости около двумерного контура вблизи экрана в присутствии двух вихрей интенсивностью Γ_v , расположенных симметрично относительно оси OY . Двумерный контур образован пересечением эллипса и двух симметричных окружностей с центрами, расположенными в точке пересечения оси OX и эллипса (рис. 1). Для вычисления подъемной силы в данной работе используется численно-аналитический метод (ЧАМ) [1], суть которого состоит в совместном применении конформного отображения теории функции комплексного переменного [2] и метода дискретных вихрей (МДВ) [3].

Численно-аналитический метод. Отобразим двумерный контур и два симметричных вихря зеркально относительно плоскости экрана.

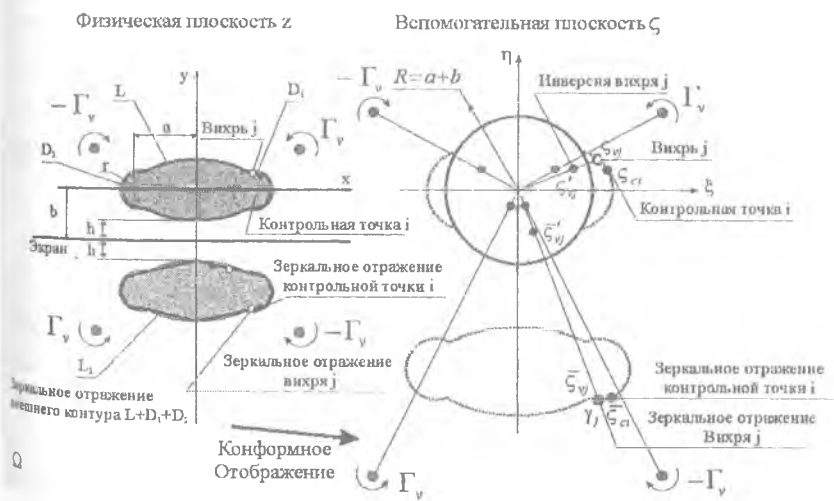


Рис. 1 Физическая и вспомогательная плоскости комплексного переменного

В этом случае физическая область течения Ω ограничена двумя эллиптическими дугами L с концами в точках пересечения эллипса с двумя симметричными одинаковыми дугами окружностей $D_1, D_2, (D_1 = D_2)$ и кривой $L_1 = L + D + D_1$, расположенной симметрично относительно плоскости экрана (рис. 1).

Как известно, потенциальное течение описывается уравнением Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0,$$

где φ – потенциал скорости.

На границе контура выполняется условия непротекания:

$$V_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

где n – внешняя нормаль к образующей контура; V_n – нормальная составляющая скорости на границе тела.

Непротекание на эллиптическом контуре обеспечивается аналитически применением инверсии вихрей относительно окружности во вспомогательной плоскости ζ комплексного переменного. Непротекание на контурах L_1, D_1, D_2 выполняется численно удовлетворением равенства нулю нормальной компоненты скорости в контрольных точках этих контуров. Границы D_1, D_2 и L_1 двумерного контура разбиваются на N элементов (рис. 1). На каждом элементе размещаются точечный дискретный вихрь и контрольная точка. Координаты этих точек $(x_{vj}, y_{vj}; x_{ci}, y_{ci})$ располагаются на расстоянии 0,25 и 0,75 длины элемента, соответственно. Комплексные координаты расположения вихрей и контрольных точек в физической плоскости равны

$$z_{vj} = x_{vj} + iy_{vj}, \quad z_{ci} = x_{ci} + iy_{ci},$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Конформное преобразование внешности эллипса в физической плоскости на внешность окружности во вспомогательной плоскости выполняется при помощи функции преобразования П. Е. Жуковского [4]:

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - c^2},$$

где $c^2 = a^2 - b^2$ – квадрат межфокусного расстояния эллипса; a, b – большая и малая полуоси эллипса. Радиус окружности во вспомогательной плоскости равен $R = a + b$ [4].

Комплексный потенциал течения во вспомогательной плоскости может быть представлен в виде суммы трех составляющих:

$$w = w_1 + w_2 + w_3,$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \left(\bar{V}_\infty \zeta + \frac{V_\infty R^2}{\zeta} \right); \quad w_2 = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{j=1}^N \gamma_j \ln \frac{(\zeta - \zeta_j)}{\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_j} \right)} \right], \quad w_3 = \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \sum_{j=1}^4 \ln \frac{(\zeta - \zeta_{vj})}{\left(\zeta - \frac{R^2}{\bar{\zeta}_{vj}} \right)},$$

где w_1 — комплексный потенциал обтекания цилиндра; w_2 — комплексный потенциал от суммы точечных вихрей, расположенных на контурах D_1 , D_2 , и их инверсий; w_3 — комплексный потенциал от симметричных внешних точечных вихрей с заданной величиной циркуляции Γ_v ; ζ_{vj} , $\bar{\zeta}_{vj}$; ζ_j , $\bar{\zeta}_j$ — комплексные и сопряженные координаты во вспомогательной плоскости j -го дискретного вихря с заданной интенсивностью Γ_v и j -го точечного вихря неизвестной интенсивности γ_j , соответственно; γ_j — интенсивность j -го точечного вихря; $V_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ — скорость набегающего потока. При записи комплексных потенциалов w_2 и w_3 использована теорема об окружности [5]. Неизвестные интенсивности точечных вихрей γ_j находятся из решения СЛАУ, составленной из условий непротекания в контрольных точках контуров D_1 , D_2 , и L_1 . После нахождения распределения интенсивностей присоединенных точечных вихрей γ_j компоненты скорости в любой точке области Ω и на ее границах L , L_1 , D_1 и D_2 определяются по формулам:

$$u = \operatorname{Re}(\bar{V}), \quad v = -\operatorname{Im}(\bar{V}), \quad \bar{V} = u - iv = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz},$$

где u , v — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости обтекания двумерного контура.

Подъемная сила двумерного контура. Воспользуемся формулой Жуковского для вычисления подъемной силы двумерного контура [4]:

$$Y_a = -\rho \cdot |V_\infty| \cdot \Gamma,$$

где ρ — плотность среды; V_∞ — скорость потока на бесконечности; Γ — циркуляция скорости замкнутому контуру. В расчетах принимается $|V_\infty| = 1$.

Коэффициент подъемной силы равен

$$C_{yw} = \frac{\Gamma}{V_{\infty} \cdot (a+r)},$$

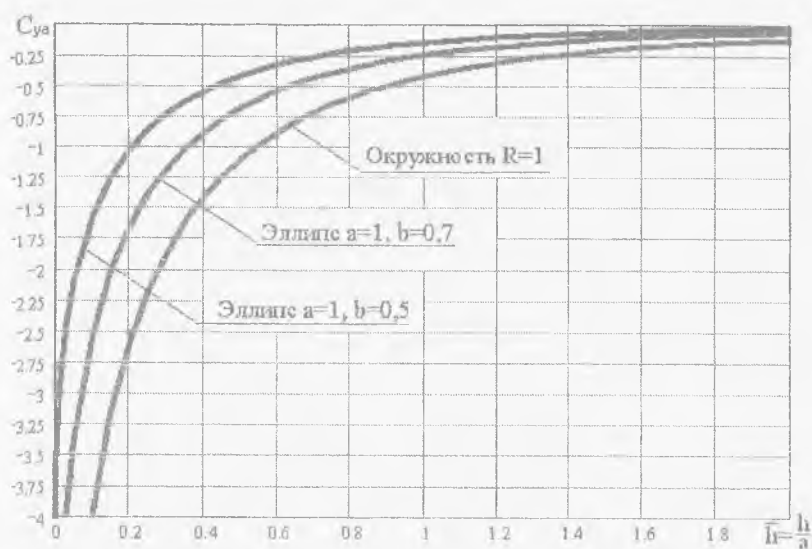
где циркуляция скорости вычисляется по формуле [4]:

$$\Gamma = \oint_{L+D+D_1} udx + vdy$$

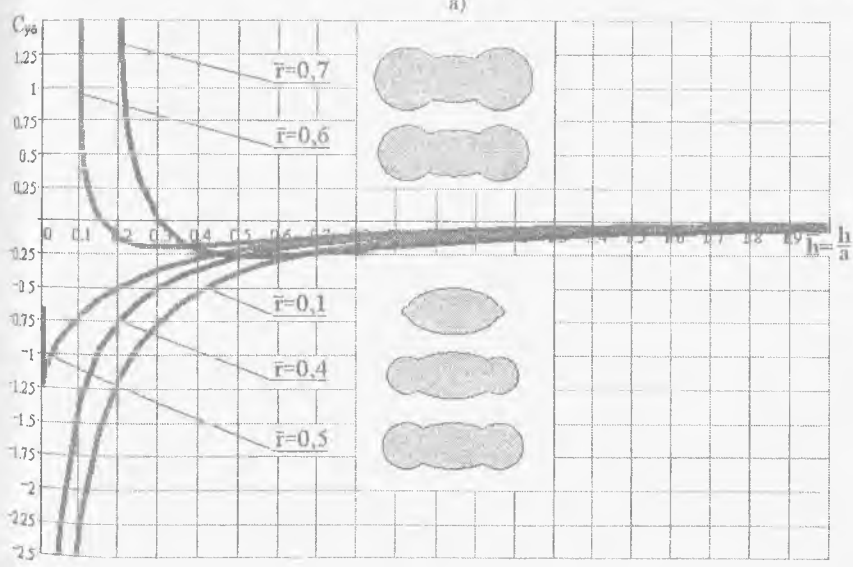
Подъемная сила вычисляется для двух случаев: обтекание тела однородным потоком со скоростью $V_{\infty} = (u_{\infty}, 0)$ при отсутствии внешних вихрей $\Gamma_v = 0$; обтекание тела потоком от двух симметричных внешних вихрей интенсивностью Γ_v при отсутствии однородного потока $V_{\infty} = 0$. Результаты вычислений представлены в таблице 1 и на рисунках 2-4. В таблице 1 приведены значения подъемной силы, полученные по ЧАМ и точному методу инверсий [6] для различных расстояний цилиндра от плоского экрана. Эти же расчетные данные показаны на рисунке 2а (кривая окружность $R=1$). На рисунке 2б построены кривые подъемной силы для течения с параметрами $u_{\infty} = 1, \Gamma_v = 0$ около двумерного контура, образованного эллипсом ($a=1, b=0,5$) и двумя окружностями различных диаметров. На рисунках 3 и 4 представлены результаты для такого же тела, но в потоке, образованного внешними вихрями с координатами $x_v = 2a, y_v = 0,5a$ при отсутствии однородного потока ($u_{\infty} = 0, v_{\infty} = 0$). На рисунках приняты обозначения: $\bar{r} = \frac{r}{a}, \bar{h} = \frac{h}{a}$.

Таблица 1 – Сравнение расчетных значений подъемной силы

\bar{h}	Метод инверсий	ЧАМ	Относительная погрешность, %
0,1	-2,06328	-2,00321	0,0035
0,2	-1,30303	-1,30302	0,0002
0,3	-0,93493	-0,93491	0,0021
0,4	-0,70626	-0,70625	0,0010
0,5	-0,55175	-0,55174	0,0018
0,6	-0,44169	-0,44168	0,0020
0,7	-0,36029	-0,36031	0,0056
0,8	-0,29846	-0,29847	0,0017
0,9	-0,25041	-0,25041	0,0004
1	-0,21239	-0,21239	0,0010
1,2	-0,15700	-0,15699	0,0064
1,4	-0,11954	-0,11954	0,0033
1,6	$-9,323 \cdot 10^{-2}$	$-9,322 \cdot 10^{-2}$	0,0021
1,8	$-7,416 \cdot 10^{-2}$	$-7,416 \cdot 10^{-2}$	0,0027
2	$-5,999 \cdot 10^{-2}$	$-5,999 \cdot 10^{-2}$	0,0017
3	$-2,495 \cdot 10^{-2}$	$-2,495 \cdot 10^{-2}$	0,0040
4	$-1,270 \cdot 10^{-2}$	$-1,270 \cdot 10^{-2}$	0,0079
5	$-7,324 \cdot 10^{-3}$	$-7,323 \cdot 10^{-3}$	0,0014



а)



б)

Рис. 2. Зависимость коэффициента подъемной силы контура от расстояния до экрана

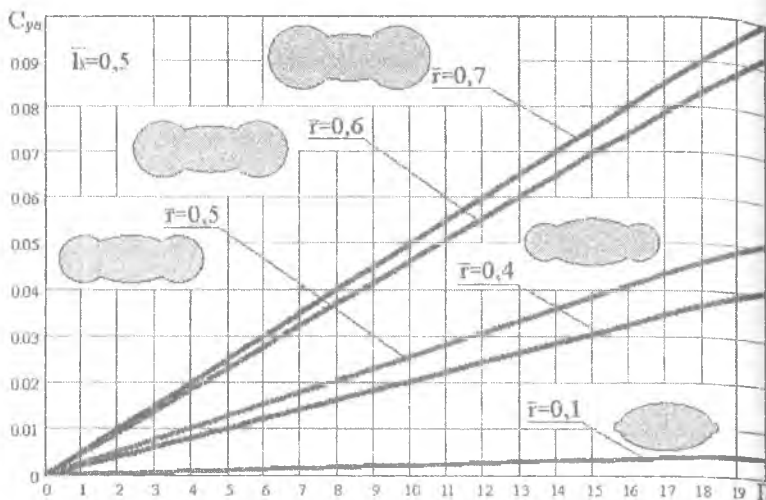


Рис. 3. Зависимость коэффициента подъемной силы двумерного контура от интенсивности внешних вихрей

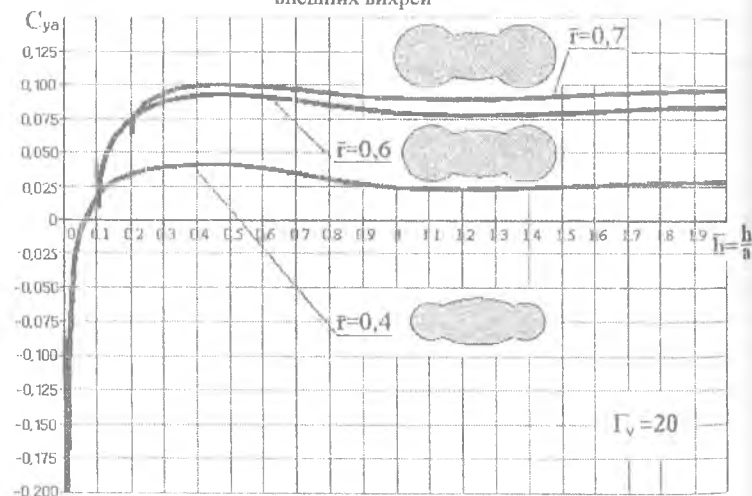


Рис. 4. Зависимость коэффициента подъемной силы двумерного контура от расстояния до экрана

Выводы. Показано, что подъемная сила в случае обтекания эллиптического тела вблизи экрана имеет отрицательное значение, т.е. направлена к экрану и уменьшается по абсолютной величине при увеличении расстояния до экрана. При обтекании двумерного контура

на знак подъемной силы влияет величина радиуса окружности: если радиус больше малой полуоси эллипса, то на небольшом расстоянии от экрана подъемная сила имеет положительное значение. В случае течения только от внешних вихрей подъемная сила увеличивается пропорционально росту циркуляции внешних вихрей и увеличивается с возрастанием величины относительного радиуса окружности. При малых расстояниях до экрана подъемная сила двумерного контура с малыми радиусами окружностей становится отрицательной. Сравнение результатов, полученных по ЧАМ и методу инверсий, показало, что они совпадают до четвертого значащего знака. Хорошее согласование результатов по двум различным методам говорит о достоверности полученных расчетных данных.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фролов В.А. Численно-аналитический метод решения задач потенциального течения около группы двумерных тел //Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2004. – № 1(5). – С. 52-60.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980.
3. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел /Под ред. С.М. Белоцерковского. – М.: Наука, 1988.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978.
5. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964.
6. Фролов В.А. Модель потенциального обтекания комбинации двух круговых контуров в присутствии пары дискретных стационарных вихрей //Ракетно-космическая техника. Научно-технический сборник. – Самара: Волжское конструкторское бюро РКК «Энергия», Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – Серия XII, вып. 1. – С. 194-201.