УДК 531.38

Доронин А.В., Малыхина О.И.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ СООСНЫХ ТЕЛ

Рассматривается свободное движение системы двух соосных динамически несимм ричных тел относительно центра масс. Описание движения системы проводится на осн формализма Гамильтона. Основной целью исследования является введение переменных д ствие-угол, которые имеют особый смысл в динамике твердого тела.

Введем следующие системы координат (рис.1): $OXYZ$ – кенигова система; Ox_1y_1 $Ox_2y_2z_2$ – системы координат, оси которых связаны с соосными телами 1 и 2, соответствен Начало систем координат находится в центре масс.

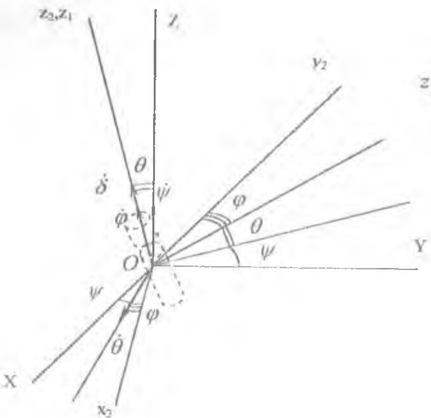

Рис.1. Схема соосных тел и используемые системы координат

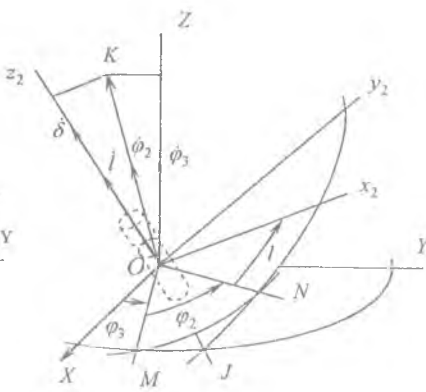

Рис.2. Кинематические параметры Депри

Положение соосных тел относительно системы координат $OXYZ$ определяется углам Эйлера, а положение тела 1 относительно тела 2 характеризуется углом относительного з кручивания δ. Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\left\{A_1(p\cos\delta + q\sin\delta)^2 + B_1(q\cos\delta - p\sin\delta)^2 + C_1(r+\sigma)^2 + A_2p^2 + B_2q^2 + C_2r^2\right\}, \quad (1$$

где p, q, r – проекции угловой скорости тела 2 на связанные с ним оси; σ - угловая скорос относительной закрутки; A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции тела 1.

Для свободной системы соосных тел в канонических переменных Эйлера гамильтониан имеет вид:

$$H = T = T(\varphi, \theta, \delta, p_\varphi, p_\psi, p_\theta, p_\delta), \tag{2}$$

который будет определяется выражением для кинетической энергии (1) и следующими выражениями для угловых скоростей:

$$p = \frac{[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi]\sin\delta\cos\delta(B_1 - A_1)}{(A_1 + B_2)(B_1 + A_2)\sin^2\delta + (A_1 + A_2)(B_1 + B_2)\cos^2\delta} - \\ - \frac{[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi](A_1\sin^2\delta + B_1\cos^2\delta + B_2)}{(A_1 + B_2)(B_1 + A_2)\sin^2\delta + (A_1 + A_2)(B_1 + B_2)\cos^2\delta}, \tag{3}$$

$$q = \frac{[\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi]\sin\delta\cos\delta(B_1 - A_1)}{(A_1 + B_2)(B_1 + A_2)\sin^2\delta + (A_1 + A_2)(B_1 + B_2)\cos^2\delta} + \\ + \frac{[\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi](A_1\cos^2\delta + B_1\sin^2\delta + A_2)}{(A_1 + B_2)(B_1 + A_2)\sin^2\delta + (A_1 + A_2)(B_1 + B_2)\cos^2\delta}, \tag{4}$$

$$r = \frac{p_\varphi - p_\delta}{C_2}, \qquad \sigma = \frac{p_\delta}{C_1} - \frac{p_\varphi - p_\delta}{C_2} = \frac{p_\delta(C_1 + C_2) - p_\varphi C_1}{C_1 \cdot C_2}.$$

С использованием канонических переменных Эйлера для случая динамической симметрии обоих тел введены переменные действие-угол, которые характеризуются тем, что все новые обобщенные импульсы (действия) остаются постоянными, а координаты (углы) изменяются по линейным законам с известными коэффициентами. Функция Гамильтона в этом случае имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A}\left[\frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2\right] + \frac{p_\delta{}^2}{C_1} + \frac{(p_\varphi - p_\delta)^2}{C_2}\right\} = h. \tag{5}$$

Из (5) следует, что угловые переменные φ, ψ, δ - циклические, θ - позиционная координата и поэтому действия I_1, I_3, I_4 для циклических углов равны величинам обобщенных импульсов, а действие для угла θ вычисляется по формуле:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta d\theta = -\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{K_1u^2 + K_2u + K_3}}{1 - u^2}du, \tag{6}$$

где $K_1 = A[\frac{I_4^2}{C_1} + \frac{(I_3 - I_4)^2}{C_2} - 2h] - I_3^2$, $K_2 = 2I_1I_3$, $K_3 = -A[\frac{I_4^2}{C_1} + \frac{(I_3 - I_4)^2}{C_2} - 2h] - I_1^2$.

$$u_1 = \cos\theta_{\min}\ , \quad u_2 = \cos\theta_{\max}\,,$$

а вместо импульса p_θ подставляется его выражение, зависящее только от θ, следующее выражения для гамильтониана системы (5). Уравнения Гамильтона для канонических пе менных действие-угол имеют вид:

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i\,, \qquad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0\,, \qquad (i = 1,\ldots,4)\,.$$

Угловые переменные изменяются по линейному закону: $w_i = \omega_i t + w_{i0}$,

где частоты ω_i определяются их выражениями через известные постоянные парам ры.

Гораздо более эффективным способом решения задачи оказывается введение кано ческих переменных Депри [1]. В этих переменных положение основного соосного тела оп деляется тремя углами φ_3, φ_2 и l, характеризующими повороты относительно оси OZ, правления кинетического момента системы и оси Oz, соответственно (рис. 2). Выраже для обобщенных импульсов Депри согласно определению запишутся следующим образом:

$$L = \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = \vec{K}\cdot\vec{k}, \quad I_2 = \partial T/\partial\dot{\varphi}_2 = \vec{K}\cdot\vec{s} = K\,, \quad I_3 = \partial T/\partial\dot{\varphi}_3 = \vec{K}\cdot\vec{k}'\,, \quad \Delta = \partial T/\partial\dot{\delta} = C_1(r+\sigma)\,.$$

Выражения проекций угловых скоростей через канонические переменные Депри запишутс виде:

$$p = \frac{(A_1\sin^2\delta + B_1\cos^2\delta + B_2)\sin l - (A_1 - B_1)\sin\delta\cos\delta\cos l}{(A_1\sin^2\delta + B_1\cos^2\delta + B_2)(A_1\cos^2\delta + B_1\sin^2\delta + A_2) - (A_1 - B_1)^2\sin^2\delta\cos^2\delta},$$

$$q = \frac{(A_1\cos^2\delta + B_1\sin^2\delta + A_2)\cos l - (A_1 - B_1)\sin\delta\cos\delta\sin l}{(A_1\sin^2\delta + B_1\cos^2\delta + B_2)(A_1\cos^2\delta + B_1\sin^2\delta + A_2) - (A_1 - B_1)^2\sin^2\delta\cos^2\delta},$$

$$r = \frac{L-\Delta}{C_2}, \quad \sigma = \frac{\Delta}{C_1} - \frac{L-\Delta}{C_2}. \qquad ($$

Можно показать, что гамильтониан системы в переменных Депри имеет вид:

$$H = T = T(l,\delta,L,I_2,\Delta)\,. \qquad (1$$

Из выражения (11) можно заключить, что импульсы I_2 и I_3 - постоянные, переменные φ_2 - циклические, φ_3 имеет постоянное значение. Таким образом, задача сведена к задач движении системы с двумя степенями свободы. В случае динамической симметрии перв тела угол δ - циклический.

Для переменной l численно построен фазовый портрет для случая динамической симметрии одного из тел (рис. 3).

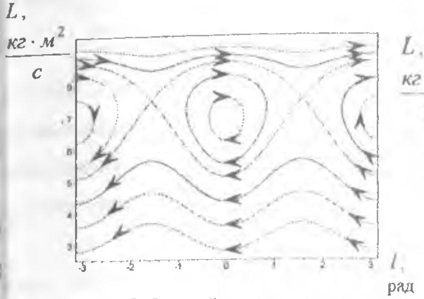

Рис. 3. Фазовый портрет системы с динамически несимметричным несущим телом ($A_1 = B_1, A_2 \neq B_2$)

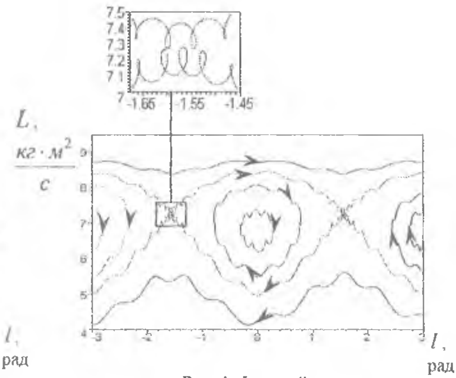

Рис. 4. Фазовый портрет несимметричной системы

Возможность введения переменных действие-угол следует из вида фазового портрета, который показывает 2π-периодический характер изменения функции $L(l)$, замкнутость фазовых траекторий и, следовательно, существование интегралов действия. Выражения для переменных действие-угол в параметрах Депри в настоящей работе не приводятся. Качественный анализ движения соосных тел в переменных Депри, а также возможный вид фазового портрета (рис.3) приведены в работе [2].

В случае динамической несимметрии обоих соосных тел координата δ становится позиционной, а фазовое пространство системы – четырехмерным (l, L, δ, Δ). В этом случае сечение фазового пространства плоскостью (l, L) порождает портрет, представленный на рис.4. Отметим, что фазовые траектории являются 2π-периодичными по переменной l замкнутыми кривыми, не имеющими самопересечений в полном фазовом пространстве системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела, М.: Наука, 1977.
2. Ивнин Е.А. Разделение переменных в задаче о движении гиростата // Вестник МГУ, серия 1. – Математика. Механика. 1985, №3.