УДК 531.36

Юдинцев В.В., Кимлык А.А.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ МАСС ПРЯМОГО МЕТОДА ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ ТВЁРДЫХ ТЕЛ С НЕЗАМКНУТОЙ СТРУКТУРОЙ

В статье рассматривается применение нового метода отыскания обратной матрицы [1] к решению уравнений движения, получаемых прямым методом [2]. В качестве примера рассмотрена модель многозвенного маятника, находящегося в поле действия силы тяжести.

1. Метод прямого вывода уравнений движения

Метод прямого вывода уравнений движения систем многих тел был предложен Виттенбургом [2]. Удобство метода заключается в том, что для вывода уравнений не требуется выполнение сложных аналитических операций: используются только матричные операции. Предполагается, что соединение тел системы происходит посредством шарниров, под которыми понимается соединение любого рода, допускающее относительные вращательное и/или поступательное движения смежных тел. Для всех тел вводятся вектора, определяющие геометрическое расположение тел относительно друг друга, а также учитываются все силы, действующие на систему. Окончательный вид уравнений движения следующий:

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{B}, \qquad (1)$$

где φ – столбец неизвестных обобщённых координат; $\mathbf{A}$ – симметрическая и положительно определённая матрица коэффициентов, называемая также матрицей масс системы; $\mathbf{B}$ – матрица правых частей системы. Матрица масс $\mathbf{A}$ формируется следующим образом:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{pT})\mathbf{K}(\mathbf{pT})^T, \qquad (2)$$

где $\mathbf{p}$ – матрица, составленная из единичных векторов, сонаправленных с осями вращения шарниров (рис. 1); $\mathbf{T}$ – матрица, описывающая структуру системы и составленная на основе ориентированного графа системы; $\mathbf{K}$ – блочная матрица тензоров инерции. Матрица правых частей $\mathbf{B}$ находится следующим образом:

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{pT})[\mathbf{K}(\mathbf{T}^T\mathbf{f} - \dot{\omega}_0\mathbf{1}_n) + \mathbf{M}' + \mathbf{M}] - \mathbf{pY}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{f}$ – матрица-столбец угловых ускорений, $\dot{\omega}_0$ – угловое ускорение нулевого тела, движение которого задано; $\mathbf{1}_n$ – матрица-столбец из n единичных элементов; $\mathbf{M}'$ – матрица-столбец, учитывающая геометрию системы, а также действующие на неё силы; $\mathbf{M}$ – матрица-столбец главных моментов внешних сил; $\mathbf{Y}$ – матрица-столбец главных моментов внутренних шарнирных сил.

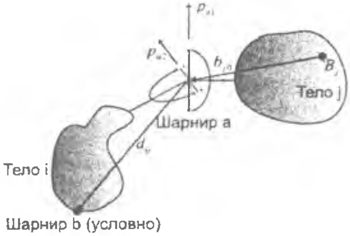

Рис. 1. Универсальный шарнир

Матрица тензоров инерции $\mathbf{K}$ вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(d_{ik}^2 \mathbf{E} - d_{ik} d_{ik} \right), & i = j, \\ M \left(b_{j0} \bullet d_{ij} \mathbf{E} - b_{j0} d_{ij} \right), & i < j, \\ M \left(d_{ji} \bullet b_{i0} \mathbf{E} - d_{ji} b_{i0} \right), & j < i, \\ 0, & \text{в других случаях}, \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $\mathbf{J}_i$ – тензоры инерции каждого из тел; $\mathbf{E}$ – единичный тензор; d_{ij}, b_{i0} – шарнирные векторы, определяющиеся так, как показано на рис. 1 (B – барицентр тела j); $d_{ik} d_{ik}$ – диадное произведение векторов; $d_{ji} \bullet b_{i0}$ – скалярное произведение векторов.

Все элементы уравнений движения (1) вычисляются с использованием только алгебраических матричных операций умножения и сложения, что делает очень удобным автоматическое составление таких уравнений на ЭВМ.

Для интегрирования этих уравнений необходимо на каждом шаге интегрирования обращать матрицу масс $\mathbf{A}$, что представляет собой громоздкую для больших систем задачу: время разрешения уравнений (1) относительно ускорений будет пропорционально третьей степени размерности матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ [3]. Более того, такой метод очень трудно поддаётся «распараллеливанию» [4] и едва ли может использовать достижения современной вычислительной техники. Сложность применения «параллельных» алгоритмов к процедуре обращения обусловлена особыми требованиями к исходной матрице: она должна иметь обращаемую подматрицу, что, вообще говоря, не выполняется для матриц общего вида, или иметь чётную размерность [5], что также не имеет место для произвольной динамической системы.

В 1997 г. был предложен метод обращения матрицы масс при помощи собственных чисел и векторов системы [1]. Данный метод нахождения обратной матрицы, в отличие от классического метода, может быть реализован на «параллельном» вычислительном комплексе.

2. Метод параметризации матрицы масс

Любая симметрическая, положительно определённая матрица $\mathbf{A}$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \Lambda \mathbf{C}, \tag{5}$$

где Λ – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ ($\Lambda = diag(\lambda_i)$), а $\mathbf{C}$ – матрица, составленная из собственных векторов c_i:

$$\mathbf{C} = [c_1 \dots c_n]^T. \tag{6}$$

(n – размерность системы). Поскольку матрица $\mathbf{A}$ симметрическая и положительно определённая, то матрица, составленная из её собственных векторов, будет ортогональной:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I} \tag{7}$$

Известно, что ортогональная матрица $\mathbf{C}(t)$ размерности $n \times n$ удовлетворяет тем же самым дифференциальным уравнениям, что и матрица направляющих косинусов:

$$\dot{\mathbf{C}} = -[\Omega]\mathbf{C}, \tag{8}$$

где $[\Omega]$ – кососимметричная матрица, элементы Ω_{ij} которой представляют собой величину вращения двух собственных векторов c_i и c_j в плоскости, образованной этими двумя векторами.

Введём матрицу ξ следующим образом:

$$\xi = \Lambda[\Omega] - [\Omega]\Lambda \tag{9}$$

Тогда компоненты этой матрицы запишутся в виде:

$$\xi_{ij} = \Omega_{ij}\left(\lambda_j - \lambda_i\right). \tag{10}$$

Далее вводится матрица μ:

$$\mu = \mathbf{C}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{C}^T \tag{11}$$

которая также равна [1]:

$$\mu = \xi + \dot{\Lambda} \tag{12}$$

или поэлементно

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \Omega_{ij}\left(\lambda_j - \lambda_i\right), & i \neq j, \\ \dot{\lambda}_i, & i = j. \end{cases} \tag{13}$$

Откуда

$$\Omega_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}, \text{ для } \lambda_i \neq \lambda_j, \tag{14}$$

$$\dot{\lambda}_i = \mu_{ii}. \tag{15}$$

Таким образом, составляя и интегрируя уравнения (8) и (15) в каждый момент времени, можно найти обратную матрицу по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{C}. \tag{16}$$

Будем решать уже не уравнение (1), а уравнение следующего вида:

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = (\mathbf{C}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{C})\mathbf{B} \tag{17}$$

совместно с дифференциальными уравнениями (8) и (15), необходимыми для определения матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{\Lambda}$.

Отметим, что нахождение компонент μ_{ij} может быть осуществлено «параллельно».

3. Компьютерная модель

На основе метода параметризации матрицы масс составлена компьютерная модель многозвенного маятника, находящегося в поле действия силы тяжести (рис. 2).

Рис. 2. Многозвенный маятник

Тела соединены между собой цилиндрическими шарнирами. Вся система крепится к неподвижной точке сферическим шарниром. Уравнения движения такой системы имеют вид (1), а с учётом параметризации – вид (17).

Матрица масс для такой системы будет соответствовать (2), а матрица правых частей с учётом действия только силы тяжести и неподвижности нулевого тела – «земли», будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{pT})[\mathbf{K}(\mathbf{T}^T\mathbf{f}) + \mathbf{M}']. \tag{18}$$

4. Результаты моделирования

Численное интегрирование проведено для трёх методов решения системы уравнений движения (1): решение классическим способом путём прямого обращения матрицы масс, решение с использованием параметризации матрицы масс и решение с использованием параметризации матрицы масс с сопутствующей коррекцией матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{\Lambda}$ методом Якоби [6]. При использовании разложения (16) для обращения матрицы масс $\mathbf{A}$ необходимо учитывать, что вследствие неизбежных ошибок численного интегрирования при определении матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{\Lambda}$, поскольку они могут утратить свои свойства: матрица $\mathbf{C}$ – ортогональна, матрица Λ – диагональна. Это, в свою очередь, скажется на точности матрицы $\mathbf{A}$. На рис. 3 показан график изменения одной из угловых координат для системы, состоящей из пяти звеньев. До 6-ой секунды графики, полученные тремя вышеобозначенными методами, полностью совпадают. После примерно 7,2 секунды метод параметризации даёт неправильный результат, что позволяет утверждать о необходимости использования коррекции ошибок.

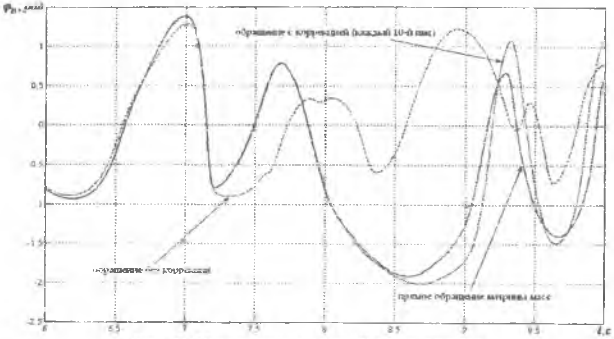

Рис. 3. Изменение угловой координаты

Сравним производительность трёх методов. На рис. 4 представлена зависимость машинного времени t, необходимого для численного интегрирования уравнений движения физического маятника, от количества тел n, составляющих маятник (рис. 2).

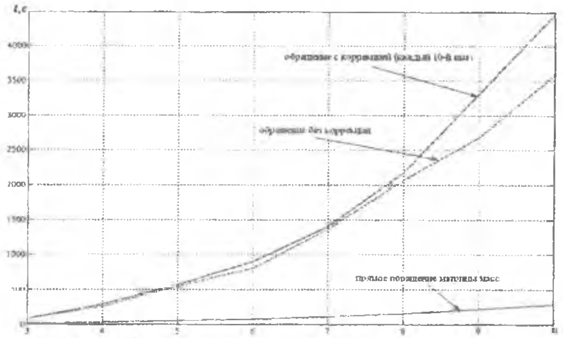

Рис. 4. К сравнению производительности методов

Из рис. 4 видно, что классический метод решения работает гораздо быстрее вследствие того, что при решении с параметризацией дополнительное время тратится на формирование и интегрирование дополнительных дифференциальных уравнений. Для систем небольшого порядка численные методы обращения матриц хорошо разработаны, и поэтому метод параметризации едва ли сможет соперничать с ними. Однако с возрастанием размерности системы, а, следовательно, и матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$, обращение становится сложнее с вычислительной точки зрения, следствием чего является увеличение накапливаемых ошибок. Сложность же решения дифференциальных уравнений не возрастает. Поэтому для «больших» систем метод параметризации оказывается предпочтительнее.

Критерием проверки правильности составления компьютерной модели может служить факт консервативности системы, следствием чего должно являться сохранение полной энергии системы. Проверим это на системе из пяти тел (рис. 5). Из графика видно, что энергия сохраняется, а выполнение коррекции после каждого шага интегрирования минимизирует ошибку, определяющуюся отклонением полной энергии от начального положения.

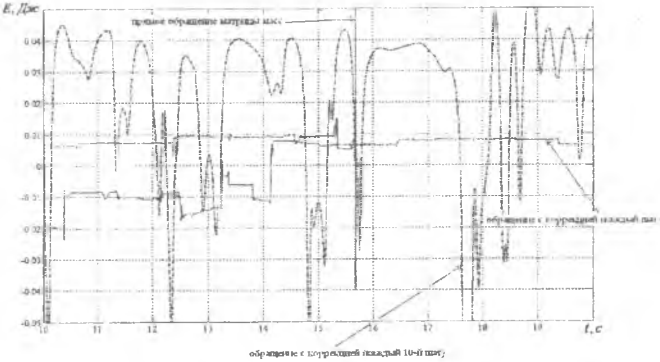

Рис. 5. Полная энергия системы

Библиографический список

1. Junkins, J.L. Orthogonal square root eigenfactor parameterization of mass matrices / J.L. Junkins, H. Schaub // Journal of Guidance, Control and Dynamics. - 1997. - Nov.-Dec. - Vol. 20, no. 6. - pp. 1118-1124.
2. Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
4. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
5. Зуев, М.С. Блочные символьные матричные алгоритмы: дисс. канд. физ-мат наук: защищена 18.06.2008 / Зуев Михаил Сергеевич. – М., 2008, 114 с.
6. Bathe, K. J. Finite Element Procedures. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.