УДК 629.78

Бахметьев В.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ В ВИДЕ ЯВНЫХ ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ (СЛУЧАЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ)

Решение задачи двух тел невозмущенного кеплеровского движения сводится к составлению дифференциального уравнения и нахождению его общего решения в виде явных функций истиной аномалии ϑ от времени t [1].

Особенностью данной статьи является то, что автором выбран другой подход при решении данной задачи. В его основе лежит поиск решения дифференциальных уравнений, связывающих переменные не t и $\vartheta(t)$, а t и $r(t)$, т.е. ищется сразу закон движения $r(t)$.

Следуя изложенному, в качестве дифференциального уравнения будем использовать соотношение для модуля радиальной составляющей вектора скорости параболического движения:

$$\upsilon_r(t) = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2}}, \tag{1}$$

где μ - гравитационный параметр центральной массы;

c - постоянная площадей;

r - модуль радиуса вектора (расстояние от центра тяготения до движущегося тела);

t - время, независимая переменная.

Учитывая, что для параболического движения $c^2 = 2\mu r_\pi$, где r_π - расстояние от центра тяготения до перицентра параболы, после преобразования (1) получим:

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{2\mu r - c^2}} = \frac{rdr}{\sqrt{2\mu(r - r_\pi)}}. \tag{2}$$

Интегрируя левую и правую части полученного уравнения, найдем общий интеграл, разрешенный относительно независимой переменной t:

$$\pm(t - t_0) = \frac{\sqrt{2}(2r_\pi + r)\sqrt{r - r_\pi}}{3\sqrt{\mu}} - \frac{\sqrt{2}(2r_\pi + r_0)\sqrt{r_0 - r_\pi}}{3\sqrt{\mu}}. \tag{3}$$

Знак «+» перед приращением времени $(t - t_0)$ ставится при удалении небесного тела от перицентра параболы, а «-» при приближении к перицентру.

Полученный интеграл обладает рядом важных особенностей:

1. Он позволяет определить время движения космического тела, движущегося по параболической траектории как в частном случае, когда движение начинается в перицентре, так и в общем случае – по дуге параболы, т.е. из произвольной точки $P_1(r_1)$ до другой произвольной точки $P_2(r_2)$.

Для частного случая второй член в правой части интеграла (3) будет равен нулю, т.к. $r_0 = r_\pi$, $t_0 = \tau$.

Следовательно:

$$(t-\tau) = \frac{\sqrt{2}(2r_\pi + r)\sqrt{r - r_\pi}}{3\sqrt{\mu}}.$$

Полученный частный интеграл, вытекающий из общего (3), и есть уравнение Баркера. Время движения по дуге параболы из некоторой точки $P_1(r_1)$ до другой точки $P_2(r_2)$ определяется, как известно, по формуле Эйлера [2]:

$$(t_2 - t_1) = \frac{1}{6\sqrt{\mu}}\left[(r_1 + r_2 + S)^{\frac{3}{2}} \pm (r_1 + r_2 + S)^{\frac{3}{2}}\right]. \qquad (4)$$

Вычисления по этой формуле гораздо сложнее, чем при помощи интеграла (3), так как при этом требуется определить дополнительные величины кроме r_1 и r_2, а именно значения истинной аномалии в конечной и начальной точках хорды ϑ_2 и ϑ_1, хорды S, тогда как вычисление времени по формуле (3) сводится только к определению r_1, r_2, $r_\pi = p/2$ - элемента орбиты (p – параметр орбиты) и их подстановки в (3).

Кроме того, при близких положениях «формула Эйлера оказывается неудобной из-за необходимости вычислять разность двух близких величин» [2, стр. 72], поэтому формула Эйлера представлена при помощи разложения в ряд. Это еще более сложный путь.

При помощи интеграла (3) определять время движения одинаково как для любых близких величин r_1 и r_2, так и для любых дальних.

2.Другой важной особенностью интеграла (3) является то, что он носит обобщенный характер.

Не следует путать слова «обобщенный» и «общий». Под словом «обобщённый» понимается то, что соотношение (3) устанавливает зависимость t и r(t) не только для параболических траекторий лежащих на плоскости, но и для вырожденных прямолинейных параболических орбит. Разница в зависимости определяется величиной параметра с.

Для параболических траекторий постоянная площади $c=(2\mu r_\pi)^{1/2}$, откуда $r_\pi = c^2/2\mu$. С другой стороны для вырожденного параболического движения c=0, т.е. $r_\pi = 0$.

Подставляя в (3) $r_\pi = 0$, получим:

$$\pm(t-t_0)=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}}\left(r^{\frac{3}{2}}-r_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

Это и есть зависимость t(r) для вырожденной параболы.

3.Главной же особенностью выведенного общего интеграла (3) является то, что из него выводится общее решение дифференциального уравнения r(t), являющегося законом движения небесного тала по параболической орбите. Подставим в круглые скобки первого члена правой части равенства (3) выражение $(+r_\pi - r_\pi)$, после чего преобразуем его к виду:

$$\left[(r-r_\pi)+3r_\pi\right]\sqrt{r-r_\pi}=(2r_\pi+r_0)\sqrt{r_0-r_\pi}\pm\frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}(t-t_0) \quad (5)$$

Перемножим члены, стоящие в квадратных скобках на корень, введя одновременно обозначения:

$$\sqrt{r-r_\pi}=y,$$

$$(2r_\pi+r_0)\sqrt{r_0-r_\pi}\pm\frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}(t-t_0)=2q.$$

Получим:

$$(r-r_\pi)\sqrt{r-r_\pi}+3r_\pi\sqrt{r-r_\pi}=y^3+3r_\pi y,$$

или

$$y^3+3r_\pi y-2q=0.$$

Это неполное кубическое уравнение имеющие один вещественный корень.

На основании формул Кардано его решение будет иметь вид:

$$y=\sqrt[3]{q+\sqrt{r_\pi^{\ 3}+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{r_\pi^{\ 3}+q^2}},$$

где

$$q=\pm\frac{1}{2}\left[(2r_\pi+r_0)\sqrt{r_0-r_\pi}\pm\frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}(t-t_0)\right].$$

Если движение начинается из перицентра, то выражение для свободного члена упрощается;

$$q = \pm\frac{3\sqrt{\mu}}{2\sqrt{2}}(t-\tau), \tag{7}$$

где τ - момент вылета из перицентра.

Окончательное общее решение дифференциального уравнения (1) примет вид:

$$r(t) = r_\pi + \left(\sqrt[3]{q+\sqrt{r_\pi^{\ 3}+q^2}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{r_\pi^{\ 3}+q^2}}\right)^2. \tag{8}$$

При подстановке (7) в общее решение (8) получим частное решение – аналог уравнения Баркера.

С другой стороны, если движение вырожденное $(c = 0,\ r_\pi = 0)$, мы получим из общего решения закон движения тела по вырожденной параболе:

$$r = \left[r^{\frac{3}{2}} \pm \frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}}(t-t_0)\right].$$

Найденная зависимость *r(t)* (общее решение (7)) обратна функции *t(r)* (общий интеграл (3)).

Полученное уравнение *r(t)* позволяет нам расширить круг решаемых задач параболического движения. К таковой относится определение дуги параболы движущегося по ней тела в функции расстояния и времени, т.е. S(r) и S(t). В основе нахождения длины дуги лежит простой метод. Запишем два дифференциальных уравнения для параболического движения:

1. Для радиальной составляющей вектора скорости:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2\mu r - c^2}{r^2}}. \tag{9}$$

2. Для модуля общего вектора скорости:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \tag{10}$$

Из равенств (9) и (10) выразим *dt*:

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{2\mu(r-r_\pi)}};$$

$$dt = \frac{\sqrt{r}dS}{\sqrt{2\mu}}.$$

Приравняем правые части дифференциалов, умножив их на $\sqrt{2\mu / r}$, и получим:

$$dS = \frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{r-r_\pi}}.$$

Или в квадратурах:

$$\int dS = S - S_0 = \int \frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{r-r_\pi}}. \qquad (11)$$

Введем новую переменную $u = \sqrt{r}$, тогда:

$$\int dS = 2\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - r_\pi}}.$$

Мы пришли к табличному интегралу (см. [3]):

$$S - S_0 = \sqrt{r}\sqrt{r-r_\pi} + r_\pi \ln\left|\sqrt{r} + \sqrt{r-r_\pi}\right| \Big|_{r(t_0)}^{r(t)}.$$

Это уравнение позволяет определить длину дуги параболы, как в функции расстояния, так и в функции времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. М.: Наука 1975.
2. Балк М.Б. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. М.: Наука 1972.

Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука 1973.