УДК 512.516.5

Лежнев В.Г.

ОДНА ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ [1]

Пусть Q_0 – ограниченная односвязная область в R^3 с кусочно гладкой границей S, Q_1 – некоторая ее окрестность, $Q = Q_1 \setminus \overline{Q_0}$. Рассматривается задача обтекания тела Q_0, и пусть поле скоростей $\overline{w}(x)$ обтекающей жидкости удовлетворяет в области течения $Q^+ = R^3 \setminus Q_0$ условиям:

1) $\operatorname{rot} \overline{w}(x) = 0,\ x \in Q^+$; 2) $\operatorname{div} \overline{w}(x) = 0,\ x \in Q^+ \setminus Q$, т.е. течение соленоидально вне приграничной области Q; 3) $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0, w_0\}$; 4) на поверхности S выполняется условие непротекания, т.е. $\overline{w}(x) \perp \overline{n}(x)$, где $\overline{n}(x)$ – нормаль к S в точке x.

Из условия 1) следует существование потенциальной функции $\varphi(x)$, $\nabla\varphi(x) = \overline{w}(x)$, $\Delta\varphi(x) = \operatorname{div} \overline{w}(x)$. Для ее определения рассмотрим представление

$$\varphi(x) = (\overline{w}(\infty), x) + \int_Q g(y)\, |x-y|^{-1}\, dy, \qquad x \in Q^+ \tag{1}$$

с неизвестной плотностью g(y), $\Delta\varphi(x) = g(y)$ в Q, в $Q^+ \setminus Q$ течение соленоидально.

Представление (1) удовлетворяет условиям 1), 2), 3), функция g(x) трактуется как плотность источников в погранслое Q.

Покажем, что условие 4) также выполняется при соответствующем выборе функции g(x) и укажем алгоритм приближенного решения.

Обозначим через G(Q) подпространство гармонических функций в $L_2(Q)$. Пусть x^m (m = 1, 2, ...) - последовательность точек в $Q^+ \setminus Q$, отделенная от ∂Q и удовлетворяющая условию единственности гармонических функций. Справедлива следующая лемма [1].

Лемма 1. Система функций

$$\gamma_m(x) = \left|x^m - x\right|^{-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

линейно независима и полна в подпространстве G(Q).

Рассмотрим подпространство $L_2^C(S)$ в $L_2(S)$, ортогональное единице.

[1] **Работа выполнена при поддержке гранта Т02-14.1-2492 Минобразования.**

Лемма 2 Система функций

$$\mu_m(x) = \int\limits_Q \gamma_m(y) \left|x^m - y\right|^{-1} dy, \quad x \in S$$

линейно независима и полна в подпространстве $L_2^C(S)$.

Доказательство опирается на свойства функций $\beta_m^+(x)$ [1].

Обратимся к (1). Продифференцируем это равенство по $\bar{n}(x)$, перейдем на границу S, получим

$$0 = \frac{\partial}{\partial n(x)}(\bar{w}(\infty), x) + \int\limits_Q g(y) \frac{\partial}{\partial n(x)}\left|x-y\right|^{-1} dy, \quad x \in S. \qquad (2)$$

Первое слагаемое в правой части принадлежит $L_2^C(S)$ Интегрируя (2) по S, получим следующее необходимое условие

$$\int\limits_Q g(y)\, dy = 0.$$

Из условия минимизации g(y) по норме в $L_2(Q)$ следует, что g(y) должно принадлежать подпространству G(Q).

Аппроксимацию $g^N(x)$ функции g(x) будем определять в виде

$$g^N(x) = \sum_{m=1}^{N} c_m \mu_m(x), \quad x \in S,$$

и такими суммами можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью любую функцию из $L_2^C(S)$.

Следовательно, функция $g^N(x)$ является приближенным решением уравнения (2), последовательность $g^N(x)$ сходится к некоторой $g^0(x)$, и представление (1), где $g(x) = g^0(x)$, удовлетворяет условию 3)

Коэффициенты $c = (c^1, c^2, \ldots, c^N)$ определяются решением задачи минимизации функционала F(c),

$$F(c) = \left\| \frac{\partial}{\partial n(x)}(\bar{w}(\infty), x) + \sum_{m=1}^{N} c_m \mu_m(x) \right\|^2_{L_2(S)},$$

что приводит к линейной алгебраической задаче с невырожденной матрицей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лежнев В.Г., Данилов Е.А. Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: Изд-во КубГУ, 2000.