

Кудюров Л.В., Ильин А.В.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается относительное движение материальной точки в центральных гравитационных полях различной мощности.

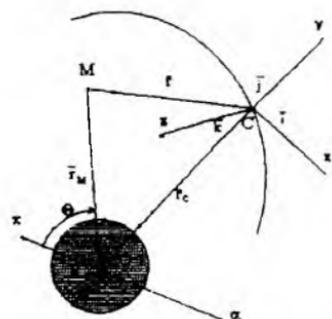


Рис. 1. Система координат

На рис. 1 изображена материальная точка М, которая движется в орбитальной системе координат $x'Sy'$, связанной с другой точкой С, движущейся по эллиптической орбите в поле притягивающего центра О. Ось Sy' направлена вдоль радиус-вектора r_c от центра, ось Sx' — перпендикулярно Sy' в сторону движения, ось Sz' дополняет систему до правой.

Как известно, относительное движение в центральном силовом поле описывается векторным дифференциальным уравнением.

$$m\ddot{\mathbf{a}}_r = \vec{F} - m\ddot{\mathbf{a}}_c - m\ddot{\mathbf{a}}_k, \quad (1)$$

где $m\ddot{\mathbf{a}}_c$, $m\ddot{\mathbf{a}}_k$ — переносная и кориолиса силы инерции, соответственно.

После несложных алгебраических преобразований уравнение (1) в проекциях на оси подвижной системы координат сводится к трем дифференциальным уравнениям относительного движения [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{[x^2 + (r_c + y)^2 + z^2]^2} + \dot{\Theta}^2 x - \ddot{\Theta} y - 2\dot{\Theta}\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu(y + r_c)}{[x^2 + (r_c + y)^2 + z^2]^2} + \dot{\Theta}^2 y + \ddot{\Theta} x + \frac{\mu}{r_c}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{[x^2 + (r_c + y)^2 + z^2]^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ – гравитационный параметр притягивающего центра.

Если ввести безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{a}, Z = \frac{z}{a}, R_c = \frac{r_c}{a}; \\ \tau &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t, \tau_p = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t_p, \Theta = \tau - \tau_p, \end{aligned} \quad (3)$$

где a – большая полуось орбиты цели,

$$a = \frac{r_a + r_p}{2},$$

то уравнения (2) можно записать в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -Y\ddot{\Theta} - 2\dot{Y}\dot{\Theta} + \dot{\Theta}^2 X - \frac{X}{R_1^3}, \\ \ddot{Y} &= X\ddot{\Theta} + 2\dot{X}\dot{\Theta} + \dot{\Theta}^2 Y + \frac{1}{R_c^2} - \frac{Y + R_c}{R_1^3}, \\ \ddot{Z} &= -\frac{Z}{R_1^3}, \end{aligned} \quad (4)$$

Если относительные расстояния x, y, z малы по сравнению с большой полуосью орбиты цели, то есть

$$X \ll 1, Y \ll 1, Z \ll 1,$$

и орбита цели мало отличается от круговой, то есть эксцентриситет мал ($e \ll 1$), то получим систему линеаризованных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 &= -2\dot{Y}_1, \\ \ddot{Y}_1 &= 2\dot{X}_1 + 3Y_1, \\ \ddot{Z}_1 &= -Z_1, \end{aligned} \quad (5)$$

которая имеет аналитическое решение.

Вопрос о степени применимости уравнений (5) рассматривался и раньше, но исследования ограничивались рамками одного притягивающего центра, в частности, Земли. Однако

дальнейшее развитие теории и практики космических полетов, особенно в пределах Солнечной системы, приведет к необходимости использования энергосберегающих траекторий относительного движения и более совершенных систем управления. Такие траектории могут быть получены, если для управления движением используются методы, основанные на законах орбитального движения (методы свободных траекторий) и, в частности, метод координатно-скоростной коррекции [2]. При этом стремление к увеличению полезного груза на борту космического аппарата повышает требования к простоте и компактности алгоритмов автономного управления. Поэтому задача оценки области применения линеаризованной теории в гравитационных полях планет Солнечной системы является актуальной.

Для решения этой задачи была разработана программа численного решения уравнений (4) и (5) для разных начальных условий. Интегрирование дифференциальных уравнений движения осуществлялось методом Рунге-Кутты. Были проведены численные исследования неуправляемого и управляемого относительных движений, начальные условия и результаты расчетов для которых сведены в табл. 1 и табл. 2, соответственно. Необходимо отметить, что исходные данные для неуправляемого движения в поле любого притягивающего центра выбирались таким образом, что отношение относительной дальности к большой полуоси опорной орбиты не превышало 0.01. Начальная относительная скорость при расчетах принималась равной нулю. В таблицах 1 и 2:

X_0, Y_0, Z_0 – начальные относительные расстояния по осям S_x, S_y и S_z соответственно, км;

R – расстояние, на котором приближенная и точная траектории близки, км;

t_1 – время, в течение которого траектории сохраняют "близость", с;

ΔV – модуль разности скоростей в конце участка "близости" траекторий, м/с;

ΔR – модуль разности расстояний в конце участка "близости" траекторий, км.

Таблица 1. Результаты расчетов для неуправляемого движения

Планета	μ , $\text{км}^3/\text{с}^3$	X_0 , км	Y_0 , км	Z_0 , км	R , км	t_1 , с	ΔR , км	ΔV , м/с
Меркурий	$2,16 \cdot 10^4$	24	8	5	100	2400	5	3
Венера	$6,2 \cdot 10^5$	60	16	12	150	1550	7	5
Земля	$3,98 \cdot 10^5$	62	17	13	210	2300	10	7
Марс	$4,2 \cdot 10^4$	32	10	7	120	2600	8	6
Юпитер	$1,26 \cdot 10^8$	709	120	22	760	3800	17	23
Сатурн	$3,78 \cdot 10^7$	583	96	16	630	5200	15	20
Уран	$5,8 \cdot 10^8$	258	50	7	350	4000	14	25
Нептун	$6,86 \cdot 10^6$	253	40	6	250	3500	10	15
Луна	$4,89 \cdot 10^3$	17,5	3	1	21	2500	2	1

В качестве примера, для Земли фазовая траектория неуправляемого движения представлена на рис. 2.

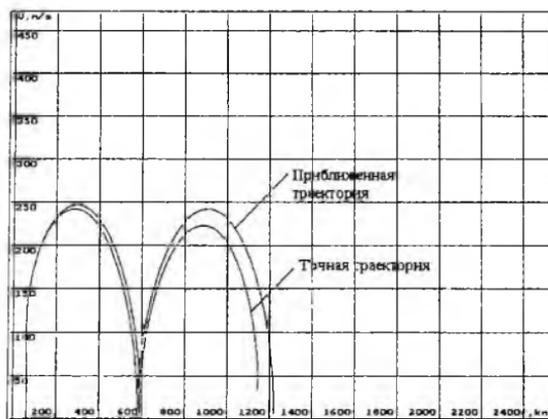


Рис. 2. Фазовая траектория неуправляемого движения

Отметим следующее. Предварительные расчеты показали, что точность линеаризованной траектории сильно зависит от времени. С увеличением продолжительности движения отклонение приближенной траектории (по относительным дальности и скорости) от точной

перестает соответствовать необходимым условиям точности расчета (превышает 1%). В таблице 1 это время обозначено символом t_1 . В приведенном примере (рис.2) точная траектория "опережает" приближенную как по относительной скорости, так и по относительному расстоянию. Как показали численные исследования, линеаризованные уравнения описывают относительное движение с достаточной степенью точности на более продолжительном участке траектории в гравитационных полях большей мощности.

В качестве примера управляемого движения рассмотрен маневр попадания в зону 300 м от "цели" по координатной схеме [3].

Таблица 2. Результаты расчетов для управляемого движения

Планета	X_0 , км	Y_0 , км	ΔV , м/с		t_k , с		R_k , км		V_k , м/с	
			К	С	К	С	К	С	К	С
Меркурий	6,6	1,5	3,11	3,02	3350,6	3291,8	0,294	0,424	0,41	0,14
Венера	9,5	2,5	5,02	4,90	3295,1	3208,0	0,291	0,532	0,66	0,15
Земля	9,5	2,5	5,20	5,08	3177,9	3093,9	0,293	0,533	0,69	0,16
Марс	8,2	2,5	5,2	4,27	3590,9	3458,8	0,296	0,535	0,51	0,16
Юпитер	16,8	6	5,93	5,81	5966,9	5670,1	0,291	0,994	0,77	0,10
Сатурн	16,8	6	4,17	4,09	8481,8	8059,9	0,290	0,992	0,54	0,07
Уран	14	5	5,14	5,03	5737,7	5452,3	0,290	0,857	0,65	0,11
Нептун	15	5	5,16	5,05	5873,7	5616,4	0,292	0,857	0,67	0,10
Луна	5,5	1	1,63	1,58	4551,2	4524,4	0,290	0,374	0,25	0,08

Сухая масса космического аппарата составляет 5000 кг, масса топлива – 3000 кг, массовый расход топлива – 1,5 кг/с, скорость истечения газов – 2500 м/с.

Для получения информации по решению поставленной задачи оказалось весьма эффективным исследование управляемого относительного движения в фазовой плоскости аналогично тому, как это было сделано для неуправляемого движения. В табл. 2 приведены начальные координаты (X_0 , Y_0) и для двух видов маневров ("К" – координатного и "С" – скоростного) величины управляющих импульсов скорости (ΔV), время маневра (t_k), конечная относительная дальность (R_k) и конечная относительная скорость (V_k). С целью использования полученных результатов при отработке функционирования метода координатно-скоростной коррекции в задаче облета Луны с выходом на гелиоцентрическую орбиту были проведены

соответствующие исследования в гравитационном поле естественного спутника Земли. В качестве примера, на рис. 3 приведены результаты расчетов для двух планет – Меркурия и Юпитера.

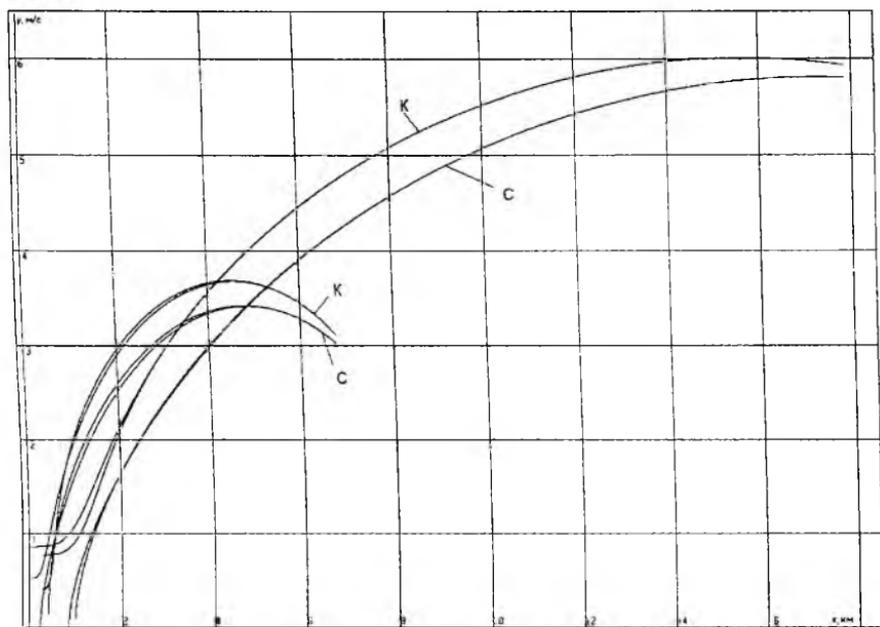


Рис. 3. Фазовые траектории сближения

Из рис.3 следует, что для планет, имеющих большую мощность гравитационного поля (Юпитер) фазовые траектории (точная и линеаризованная) достаточно близки на значительной части траектории и лишь на конечных участках имеют существенную разницу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антони М.Л. Сазакис Ф.Т. Проблемы встречи на близких к круговым орбитах. // Ракетная техника и космонавтика. 1965, Т.3, №9, с. 129-137.
2. Аншаков Г.П., Кудюров Л.В. Об одном методе "мягкой" встречи на орбите. // Космические исследования, 1971, №6, с. 1-12.
3. Кудюров Л.В. Теоретические основы координатно-скоростной коррекции траекторий относительного маневрирования. // Вестник СамГТУ № 10, серия "Технические науки" Самара, 2000, с. 28-39.