Удк 532.5.031

Никонов В.В.

О ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. О физическом смысле потенциальных течений

Согласно [1] течения, вектор скорости которых может быть представлен как градиент потенциала φ, т.е.

$$\bar{u} = \bar{\nabla}\varphi\,, \tag{1}$$

и этот потенциал удовлетворяет уравнению лапласа:

$$\Delta\varphi = 0\,, \tag{2}$$

называют потенциальными и также относят к течениям невязкой несжимаемой жидкости Рассмотрим такие течения подробнее. Действительно уравнение (2) получается при подстановке (1) в уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0\,. \tag{3}$$

Таким образом, данное поле скорости будет удовлетворять закону сохранения массы.

С другой стороны, известно [1], что движение невязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla})\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p\,, \tag{4}$$

которые получаются из уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \bar{\nabla})\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p + \nu\Delta\bar{u} \tag{5}$$

при стремлении коэффициента безразмерной кинематической вязкости к нулю ($\nu \to 0$ или $Re = 1/\nu \to \infty$), и уравнением неразрывности (3).

При подстановке вектора скорости (1) в уравнения Эйлера (4) видно, что они тождественно не удовлетворяются в общем случае. В [1] дается пояснение, что если взять градиент от (2), то, меняя местами операции дифференцирования, получим

$$\bar{\nabla}(\Delta\varphi) = \Delta(\bar{\nabla}\varphi) = \Delta\bar{u} = 0\,. \tag{6}$$

Таким образом, «…для потенциальных течений член в уравнении Навье-Стокса (5), зависящий от вязкости, тождественно исчезает» [1]. Однако при этом получается, что вместо уравний Эйлера (4) решаем уравнение Лапласа для скорости (6). Попытаемся показать, в каком случае уравнение Навье-Стокса (5) может быть заменено уравнением Лапласа (6).

Переписав уравнение (5) в виде

$$\Delta\bar{u} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\bar{u} + \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}p\right) \tag{7}$$

и устремляя безразмерную кинематическую вязкость к бесконечности ($\nu \to \infty$, $Re \to 0$), легко видеть, что получаем переход к уравнению (6). Следовательно, потенциальная теория (1)-(2) описывает движение несжимаемой бесконечно-вязкой жидкости ($Re \to 0$).

Данное утверждение хорошо подтверждается экспериментальными данными. В частности, при обтекании кругового цилиндра при очень малых числах Рейнольдса линии тока потенциального течения и их экспериментальная визуализация практически совпадают. В то же время с ростом числа Рейнольдса возникают отрывные явления, которые сложно воспроизводятся в теории потенциальных течений. Формулы для распределения скорости между коаксиально вращающимися цилиндрами [1] были получены, как теперь становится ясно, для случая бесконечно-вязкой жидкости. Действительно, если бы жидкость была невязкой, то касательная скорость от стенки вращающегося цилиндра не передавалась бы покоящейся жидкости. Известно [2], что потенциальная теория завышает эффект Магнуса при обтекании набегающим потоком вращающегося цилиндра. Теперь понятно, почему с увеличением числа Рейнольдса данный эффект гораздо меньше предсказываемого потенциальной теорией. Проведенный анализ позволяет объяснить также проблему, возникающую в вихревых методах при определении давления из интеграла коши-лагранжа или уравнений Эйлера. Известно, что в случае измельчения сетки решение для давления начинает плохо сходиться с экспериментом [3]. Это происходит потому, что в общем случае полученное потенциальное поле не удовлетворяет уравнениям Эйлера для невязкой жидкости, и подстановка в последнее полученного потенциального поля скорости приводит к тому, что давление начинает играть роль невязки решения.

2. Математическая аналогия предельного перехода к большим числам рейнольдса на примере уравнения колебаний материальной точки

Рассмотрим колебания материальной тоски под действием сил упругости и вязкости такое движение определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \nu_1\frac{dx}{dt} + cx = 0, \tag{8}$$

где m – масса колеблющейся точки, ν_1 – коэффициент силы вязкости, c – коэффициент силы упругости.

Уравнение (8) соответствует уравнениям Навье-Стокса для вязкой сжимаемой жидкости, так как в нем также присутствуют силы инерции, вязкости и упругости.

Л. Прандтлем [1] предлагалось исследовать предельный переход к уравнению с бесконечно-малыми вязкостными силами путем уменьшения массы ($m \to 0$). В результате было получено уравнение:

$$\nu_1 \frac{dx}{dt} + cx = 0\,, \tag{9}$$

которое имеет следующее решение:

$$x = A_1 \exp(-\frac{ct}{\nu_1})\,, \tag{10}$$

где a_1 – константа, определяемая из граничных условий. Далее в [1] отмечалось, что уравнение (9) соответствует уравнениям Эйлера для невязкой несжимаемой жидкости.

Такой подход представляется некорректным. Действительно, из уравнения (9) видно, что пренебрегаем силами инерции, а силы вязкости остаются. В действительности уравнение (9), полученное прандтлем, будет соответствовать следующему:

$$\mu\Delta\bar{u} - \bar{\nabla}p = 0\,,$$

которое получается из уравнений навье-стокса при стремлении плотности сплошной среды к нулю ($\rho \to 0$). Здесь μ – динамическая вязкость ($\nu=\mu/\rho$).

Выполним переход к бесконечно-малым силам вязкости, устремив $\nu_1 \to 0$, и в результате из (8) получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0\,. \tag{11}$$

Уравнение (11) описывает колебания математического маятника и имеет следующее известное решение:

$$x = A_1 \exp\left(i\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) = A_1(\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + i\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)). \tag{12}$$

В полученном уравнении (11), как и в уравнениях Эйлера (4), содержатся только силы инерции и упругости, что позволяет говорить об их соответствии друг другу.

Возвращаясь к решениям (10) и (12) обыкновенных дифференциальных уравнений (9) и (11), соответственно, следует отметить, что они имеют разный характер. Так как коэффициенты c, ν_1 и m являются действительными положительными числами, то решение (10) носит апериодический характер и асимптотически стремится к нулю, а решение (11) описывает незатухающий колебательный процесс.

Полученные результаты позволяют, в частности, объяснить, почему при решении уравнений Эйлера с помощью конечно-разностных схем, имеющих малую численную вязкость, возникают сильные колебания, которые часто приводят к расхождению решения. Очевидно, что при введении в уравнение (11) внешних возмущений его решение будет также расходиться из-за отсутствия демпфирующих сил. Это обусловлено во многом самой постановкой задачи (уравнениями Эйлера), а не устойчивостью численной схемы. Для подавления колебаний в численных методах решения уравнений Эйлера обычно вводят искусственную вязкость или используют конечно-разностные схемы с большой численной вязкостью.

Полученные результаты позволяют выдвинуть гипотезу, что причиной перехода потока в турбулентную форму при увеличении числа Рейнольдса являются силы упругости, обусловленные сжимаемостью среды, а не силы вязкости. При этом уменьшающиеся силы вязкости уже не могут демпфировать колебания, возникающие в потоке вследствие сил упругости. Кроме того, рост числа Рейнольдса в задачах аэродинамики обычно связан с увеличением скорости потока, что приводит к росту числа Маха, т.е. к увеличению сжимаемости среды. По этой причине возникает предположение, что прямое численное моделирование турбулентных течений следует проводить в рамках сжимаемой вязкой жидкости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя /Пер. с нем. Вольперта Г.А., под. Ред. Лойцянского Л.Г. – М.: Наука, 1974.
2. Белоцерковский С.С., Котовский В.В., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988.
3. Никонов В.В., Шахов В.Г. Исследование моделирования двумерного вихревого нестационарного течения в многосвязной области //ИВУЗ «Авиационная техника». – Казань, 2002. – №1. – с. 24-26.