УДК 338(075.8)

Шварц Л.С., Дьячков С.А.

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АВИАПЕРЕВОЗОК

Как показывают проведённые исследования, более высокие темпы авиаперевозок в аэропортах России существенно определяются состоянием их инфраструктуры, которая связана с рынком предоставляемых услуг. Наиболее высокие показатели прироста пассажиропотока имеют аэропорты, осуществляющие реконструкцию и техническую модернизацию своих основных фондов. Однако решение комплексной задачи развития инфраструктуры аэропорта в условиях ограниченных ресурсов требует системного подхода, в рамках которого должна быть прежде всего решена задача выявления и формирования возможных вариантов прогнозируемого события, т.е. для нашего случая – роста пассажиропотока и, как следствие, роста спроса на авиаперевозки.

Таким образом, в рамках системного подхода для проектов развития инфраструктуры аэропортов с целью улучшения экономических показателей их функционирования одной из первых задач является задача прогноза спроса на рынке авиаперевозок. В настоящее время такой прогноз опирается лишь на теоретически наиболее элементарные из разработанных подходов: банки данных, простейший статистический анализ, т.е. на использование в коммерческих целях компьютеризации почти без применения математики.

Разработка содержательных моделей в связи со сложностью их алгоритмизации пока оставалась лишь привилегией «чистой» науки. В связи с тем, что перед отдельными аэропортами возникает трудная задача не только предвидения будущего, но и его формирования с помощью мер, направленных на закрепление определённой структуры рынка авиаперевозок для отдельно взятого аэропорта, проблема разработки содержательных моделей прогнозирования будущего становится актуальной.

Известно, что методы статистического прогноза дают возможность оценить будущие значения процесса по результатам наблюдения прошлых и текущих значений, используя при этом знания его вероятностных характеристик.

Процесс изменения пассажиропотока, зависящий от многих факторов, может быть отнесён к классу случайных процессов, а предсказания значения этого процесса может быть отнесено к классу нормальных и эргодических

Исходя из этих гипотез, рассмотрим задачу прогноза авиаперевозок.

Пусть $X(t)$ – стационарный гауссов случайный процесс, наблюдавшийся некоторое время до момента t_0 (рисунок 1).

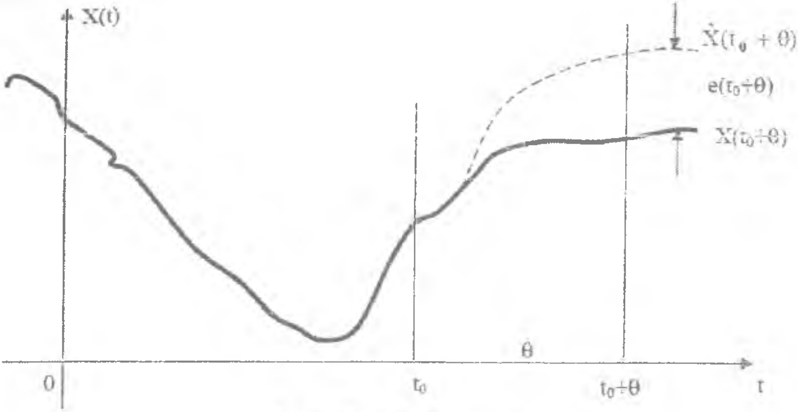


Рис. 1. Случайный процесс

После t_0 сведений о значениях процесса нет. Требуется предсказать пассажиропоток $\hat{X}(t_0+\theta)$ как значение процесса в момент $t_0+\theta$ через время θ, причём желательно сделать это с наименьшими погрешностями. Если, предсказав значение $\hat{X}(t_0+\theta)$, дождаться момента $t_0+\theta$ и произвести наблюдения, его результат $X(t_0+\theta)$ – истинное значение процесса, как правило, не совпадает с предсказанным $\hat{X}(t_0+\theta)$. Их разность

$$e(t_0+\theta) = X(t_0+\theta) - \hat{X}(t_0+\theta) \quad (1)$$

представляет собой ошибку прогноза на время $t_0+\theta$, произведённого в момент t_0.

Очевидно, располагая прошлыми и текущими значениями процесса , необходимо иметь характеристику процесса, показывающую статистическую связь между его значениями, разделенными временным промежутком θ. Такой характеристикой является корреляционная функция.

Чтобы вычислить предсказанное значение, необходимо выбрать правило вычисления $\hat{X}(t_0+\theta)$ – алгоритм прогноза.

Для оценки качества прогнозирования нужно условиться о каком-то критерии, так или иначе связанном с ошибкой прогноза. Наиболее распространённым критерием является средний квадрат ошибки:

$$\bar{e}^2(t_0+\theta) = M\{[X(t_0+\theta) - \hat{X}(t_0+\theta)]^2\}. \quad (2)$$

При этом алгоритм прогноза должен минимизировать эту ошибку: $e^2 \to \min$.

Прогнозирование значений, которые случайный процесс примет в будущем, возможно на основании анализа связи между теми значениями, которые он принимал в прошлом и принимает в настоящем. Для количественной характеристики этой связи используем свойства системы случайных величин [1, 2].

Стационарный случайный процесс, описывающий пассажиропоток X(t), обладает вероятностными характеристиками, не зависящими от текущей переменной (времени): математическим ожиданием $m_x(t) = m_x = const$ и дисперсией $D_x(t) = D_x = const$. Его корреляционная функция $K_x(t, t')$, равная по определению корреляционному моменту между сечениями процесса X(t) и X(t'), не зависит от расположения сечений t и t', а лишь от расстояния между ними $\tau = t' - t$.

Корреляционная функция $R_x(\tau)$ стационарного процесса X(t) есть функция одного аргумента. Она четна: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ и равна дисперсии в нуле $R_x(\tau) = D_x$. На практике часто пользуются нормированной корреляционной функцией

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x} \qquad (3)$$

Функция $\rho_x(\tau)$, таким образом, равна коэффициенту корреляции между сечениями процесса X(t) и X(t + τ). Очевидно, что $\rho_x(0) = 1$.

Если стационарный процесс эргодичен, т.е. если вероятностные характеристики его, вычисленные то ли путём усреднения множества реализаций ансамбля или путем усреднения по времени одной из достаточно длинных реализаций, оказываются одинаковыми, то корреляционная функция вычисляется как

$$R(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \overset{o}{X}(t) \overset{o}{X}(t+\tau) dt. \qquad (4)$$

Здесь $\overset{o}{X}(t)$ – центрированный процесс X(t); T – длина реализации.

Одним из важных для практических расчётов параметров случайных процессов является «интервал корреляции» – время τ_0, в течение которого между сечениями процесса сохраняется статистическая связь и корреляционный момент между ними остаётся больше некоторого заданного уровня, например $|R(\tau)| > 0{,}05$.

Иногда время корреляции τ_0 определяют, как половину ширины основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой модуля корреляционной функции:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\bar{R}(\tau)\right| dt. \tag{5}$$

Процесс, интервал корреляции которого был бы равен нулю, являлся бы «абсолютно случайным» – связей между его сечениями не было бы вовсе. Такой процесс, не осуществляемый физически, является, однако, очень удобной моделью и носит название «белый шум».

Остановимся более подробно на реализующих такой подход алгоритмах прогноза.

Рассмотрим алгоритмы прогноза, линейные относительно значений предыстории. Как будет показано, для гауссовых процессов, этот класс алгоритмов оказывается наилучшим.

Рассмотрим возможные простейшие линейные алгоритмы для предсказания пассажиропотока на различных этапах разработки проекта развития организационно-экономической системы (ОЭС).

Оперативное прогнозирование, связанное с последним отсчётом значения, называется «ступенчатой экстраполяцией» или «экстраполяцией нулевого порядка» и заключается в том, что в качестве предсказанного значения $\hat{X}(t_0+\theta)$ принимается значение $X(t_0)$:

$$\hat{X}(t_0+\theta) = X(t_0). \tag{6}$$

Предсказанное значение здесь не зависит от времени прогноза θ, предыстория представлена лишь одной точкой – последним значением $X(t_0)$, вероятностные характеристики при этом не учитываются.

Алгоритм прогноза, как видно из (6), заключается в умножении значения $X(t_0)$ – последнего отсчёта на единицу, т.е. не требует выполнения вычислительных операций.

Прогноз, таким образом, можно выполнять, ничего не зная о процессе, кроме последнего значения, и не производя никаких вычислений, что используется при оперативном управлении организацией авиаперевозок.

Ошибка этого прогноза, определяемая из соотношения

$$e\,(t_0+\theta) = X(t_0+\theta) - \hat{X}(t_0+\theta), \tag{7}$$

приобретает вид:

$$e\,(t_0+\theta) = X(t_0+\theta) - X(t_0), \tag{8}$$

а её средний квадрат при $m_x = 0$ равен

$$\bar{e}^2(\theta) = M\{[\overset{\circ}{X}(t+\theta) - \overset{\circ}{X}(t)]^2\} = \sigma_x^2 - 2R_x(\theta) + \sigma_x^2 = 2[\sigma_x^2 - R(\theta)]. \quad (9)$$

Средний квадрат ошибки прогноза растёт от 0 при $\theta = 0$, когда $R(0) = \sigma_x^2$, до $2\sigma_x^2$ при $\theta = \infty$, когда $R(\infty) = 0$.

Простота этого способа прогноза обеспечила ему наибольшее распространение при оперативном управлении. Данные об управляемом процессе хранятся в базе данных и считываются в момент управляющего воздействия.

В практике наиболее часто используется алгоритм среднесрочного прогнозирования пассажиропотока.

В качестве теоретической основы этого алгоритма в работе используется математическое ожидание случайной величины x, связанное с пассажиропотоком, которое определяется суммой произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений, т.е.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \quad (10)$$

где $\dot{x}$ – предсказанное значение пассажиропотока; x_i – принимаемое значение; p_i – вероятность случайной величины значения этого потока.

Прогнозирование по математическому ожиданию заключается в том, что в качестве предсказанного значения $\dot{X}(t_0 + \theta)$ принимается математическое ожидание процесса m_x:

$$\dot{X}(t_0 + \theta) = m_x. \quad (11)$$

Как и в предыдущем алгоритме, предсказанное значение не зависит от времени прогноза θ. Однако различие заключается в том, что хотя информации о предыстории не требуется, нужны некоторые сведения о свойствах процесса – о его математическом ожидании. Алгоритм прогноза не требует выполнения никаких вычислительных операций.

Ошибка прогноза имеет вид:

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - m_x \quad (12)$$

и представляет собой отклонение процесса от среднего в момент $t_0 + \theta$.

Средний квадрат ошибки не зависит от времени прогноза и равен дисперсии процесса:

$$\bar{e}^2 = M\{[X(t+\theta) - m_x]^2\} = \sigma_x^2 \quad (13)$$

На рисунке 2 совмещены зависимости $\bar{e}^2(\theta)$ прогноза по последнему значению и прогноза по математическому ожиданию.

При малых временах прогноза θ первый способ явно предпочтительней, однако после θ^*, когда $\bar{e}^2(\theta^*) = \sigma_x^2$, второй способ даёт большую точность. Наконец, при $\theta \to \infty$ квадрат ошибки прогноза по среднему вдвое меньше, чем по последнему отсчёту.

Эти соотношения полностью соответствуют интуитивным представлениям о прогнозе.

Наиболее сложным является алгоритм долгосрочного прогноза. Алгоритм долгосрочного прогноза, как правило, требует учёта как значений предыстории процесса, так и его вероятностных характеристик. Такой учёт, как показывает проведённый ниже анализ ошибки, делает его точнее, чем оба описанных выше.

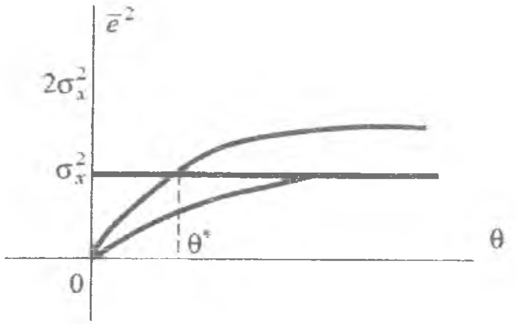


Рис. 2. Зависимости $\bar{e}^2(\theta)$ прогноза по последнему значению и математическому ожиданию

Эргодичный процесс может быть исчерпывающе описан как ансамблем реализаций, так и одной реализацией неограниченной длительности.

Сечения ансамбля представляют собой случайные величины, функция распределения которых отождествляется с одномерной функцией распределения процесса.

Обозначим случайную величину $X(t_0)$ – сечение процесса в момент t_0 через X, а сечение $X(t_0 + \theta)$ – через Y и будем рассматривать систему (XY) двух случайных величин – последнего значения предыстории и предсказанного значения. Прогнозирующий алгоритм сформирован так, что в качестве предсказанного значения $\hat{X}(t_0 + \theta)$ назначается условное математическое ожидание величины Y при условии, что $X = X(t_0)$:

$$\hat{X}(t_0+\theta) = m_{y/x}. \qquad (14)$$

Ошибка прогноза

$$e\hat{X}(t_0+\theta) = X(t_0+\theta) - \hat{X}(t_0+\theta) = Y - m_{y/x} \qquad (15)$$

представляет собой отклонение случайной величины Y от своего условного математического ожидания, а средний квадрат ошибки $\bar{e}^2(\theta) = M[(Y - m_{y/x})^2]$ равен условной дисперсии $\sigma^2_{y/x}$.

Установим, что

$$\hat{X}(t_0+\theta) = m_{x/y} = m_y + r_{x/y}\frac{\delta_y}{\delta_x}(X - m_x), \qquad (16)$$

где $m_{x/y}$ – условное математическое ожидание,
и

$$\bar{e}^2(\theta) = \sigma^2_{y/x} = \sigma^2_y(1 - r^2). \qquad (17)$$

Поскольку процесс X(t) стационарен, то математические ожидания и дисперсии сечений одинаковы:

$$\sigma_y = \sigma_x = \sigma;\quad m_y = m_x = m. \qquad (18)$$

Коэффициент корреляции $r_{x\,y}$ равен значению нормированной корреляционной функции в θ:

$$r_{xy} = \rho(\theta) \qquad (19)$$

Теперь алгоритм прогноза принимает вид:

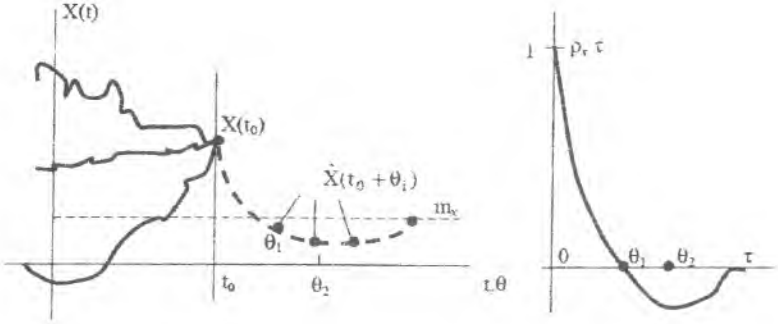
$$\hat{X}(t_0+\theta) = m + \rho(\theta)\,[X(t_0) - m)], \qquad (20)$$

а средний квадрат ошибки оказывается зависящим от θ:

$$\bar{e}^2(\theta) = \sigma^2\,[\,1 - \rho^2(\theta)]. \qquad (21)$$

Алгоритм предполагает знание отклонения процесса от среднего в момент t_0, т.е. одной точки предыстории, значения нормированной корреляционной функции $\rho(\theta)$ и математического ожидания.

На рисунке 3,*а* изображена предыстория процесса X(t), а на рисунке 3,*б* – его нормированная корреляционная функция $\rho(\theta)$. Прогноз производится на время $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i \ldots$.



а) предыстория процесса X(t); б) нормированная корреляционная функция $\rho(\theta)$

Рис. 3. Процесс *X(t)*

Точки, соединённые пунктиром на рисунке 3,*а* представляют собой предсказанные значения $\hat{X}(t_0+\theta_1), \hat{X}(t_0+\theta_2)$... – произведения отклонения $X(t_0) - m_x$ на $\rho(\theta_1)$, $\rho(\theta_2)$… .

Нетрудно заметить, что при малых θ, когда $\rho(\theta) \approx 1$, предсказанные значения мало отличаются от последнего отсчёта: $\hat{X}(t_0+\theta) \approx X(t_0)$, т.е. алгоритм работает также, как и при прогнозе нулевого порядка.

С ростом θ $\rho(\theta)$ по абсолютной величине убывает, предсказанные значения всё меньше отличаются от математического ожидания процесса m_x, а при $\theta \to \infty$, когда $\rho(\infty) = 0$, $\hat{X}(t_0+\infty) = m_x$, т.е. алгоритм осуществляет прогноз по математическому ожиданию.

Фактически корреляционная функция приходит к нулю в конечное время – в течение интервала корреляции τ_0, о котором было сказано выше.

Если процесс X(t) – белый шум и его корреляционная функция равна нулю всюду, кроме $\tau = 0$, то алгоритм для любого значения θ предскажет $\hat{X}(t_0+\theta) = m_x$.

Проследим за изменением $\bar{e}^2(\theta)$. При $\theta = 0$, когда $\rho(0) = 1$, $e^2(0) = 0$, а при $(\theta) = \infty$, $\bar{e}^2(\infty) = \sigma_x^2$. Кривая $e^2(\theta)$ начинается, как аналогичная кривая для прогноза нулевого порядка, и приходит к значению, присущему прогнозу по математическому ожиданию. При этом при любых θ статистический прогноз оказывается лучше обоих предыдущих, так как его $\bar{e}^2(\theta)$ меньше. Это не случайно, поскольку можно показать, что этот прогноз лучше любого другого способа прогнозирования.

Действительно, зависимость предсказанного значения $\hat{X}(t_0+\theta)$ как условного математического ожидания от последнего отсчёта $X(t_0)$, представляет собой уравнение регрессии. Выше было показано, что уравнение регрессии является функцией наилучшего среднего квадратичного приближения. Следовательно, сечение пучка реализаций, проходящих при t_0 через точку $X(t_0)$ (см. рисунок 3, *а*), будет иметь средний квадрат отклонения относительно точки, предсказанной по (16), меньший, чем относительно любой другой, выбранный по иному, чем (16) правилу. Прогноз (16) является для гауссовых процессов наилучшим.

Привлечение для прогнозирования всё более полной информации о процессе позволяет уменьшить ошибку предсказания. По сравнению с простым переносом и прогнозом по математическому ожиданию статистический прогноз более эффективен именно потому, что использует значение математического ожидания корреляционной функции и одной точки предыстории. Использование двух или более точек предыстории позволит ещё больше повысить эффективность прогноза.

Библиографический список

1. Мет Ж. Статистические решения и предвидения на предприятиях – М., 1963.
2. Тейл Г. Прикладное экономическое прогнозирование. – М., 1970.