

МЕТОДИКА БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕЖПЛАНЕТНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ МАНЕВРОВ

Одним из возможных путей снижения затрат на доставку космического аппарата (КА) к планете назначения является использование электрореактивной двигательной установки (ЭРДУ), работающей на принципе ускорения рабочего тела (РТ) в электростатических или электромагнитных полях. Высокая скорость истечения реактивной струи обеспечивает значительно меньший расход РТ по сравнению с двигателями на химическом топливе. Таким образом, можно доставить к планете назначения больше полезной нагрузки. Однако, из-за малого значения тяги таких двигателей продолжительность перелётов существенно увеличивается.

Другим способом снижения затрат на осуществление межпланетных миссий является использование гравитационного поля массивных тел Солнечной системы. Баллистические схемы перелёта с использованием нескольких гравитационных манёвров позволяют существенно сократить время на осуществление миссии и/или расход рабочего тела.

Объединение двух обозначенных способов позволяет существенно повысить эффективность космических миссий за счёт увеличения массы полезного груза при приемлемой продолжительности перелёта.

1. Постановка задачи проектно-баллистической оптимизации

Рассматриваются перелёты с двумя различными критериями оптимальности: $T \rightarrow \min$ или $M_{PT} \rightarrow \min$.

Оптимизация по первому критерию ориентирована на поиск траектории перелёта, позволяющей при минимальном времени осуществления миссии доставить к заданной планете КА при фиксированной массе на начальной орбите. Оптимизация по второму критерию позволяет найти оптимальную траекторию при тех же исходных данных, но с минимальным расходом РТ. Для повышения эффективности миссии производится последовательная оптимизация по данным двум критериям. Найденные оптимальные параметры миссии с минимальным временем перелёта становятся исходными данными для оптимизации по расходу РТ. В результате получаем параметры миссии, для которой время перелёта несколько больше минимального, но при этом расход РТ существенно меньше, что позволяет доставить к цели большую массу полезного груза.

Математическая модель миссии включает в себя уравнения, описывающие управляемое движение КА, массивных тел Солнечной системы и проектный облик аппарата.

Проектный облик КА в первом приближении может быть описан уравнением баланса масс на начальной орбите [1]:

$$M_0 = M_{пл} + M_{э} + M_{д} + M_{РТ} + M_{СПХ} + M_{кон}, \quad (1)$$

где M_0 – стартовая масса КА; $M_{пл}$ – масса полезного груза; $M_{э}$ – масса энергетической установки; $M_{д}$ – масса двигательной установки, включая маршевые и управляющие двигатели вместе с исполнительными органами; $M_{РТ}$ – масса рабочего тела; $M_{СПХ}$ – масса системы подачи и хранения рабочего тела (баки, трубопроводы и пр.); $M_{кон}$ – масса конструкции.

Для КА с солнечной энергоустановкой мощность реактивной струи, тяга двигателей и расход РТ зависят от текущего гелиоцентрического расстояния, т. е. от выбранной траектории движения, что существенно усложняет задачу оптимизации. В общем случае можно говорить о том, что секундный расход рабочего тела является функцией фазовых координат системы $\beta(\bar{x})$. В этом случае выражение для массы израсходованного РТ имеет вид:

$$M_{РТ}(T) = \int_{t_0}^T \beta(\bar{x}) \delta dt = \beta_0 \int_{t_0}^T \frac{\beta(\bar{x})}{\beta_0} \delta dt = \frac{P_0}{c_0} \int_{t_0}^T \chi(\bar{x}) \delta dt, \quad (2)$$

где $\beta_0 = \frac{P_0}{c_0}$ – номинальный секундный расход РТ, P_0 – номинальная тяга двигателей,

c_0 – номинальная скорость истечения РТ, δ – функция включения-выключения двигателей, $\beta(\bar{x})$ – секундный расход РТ при текущем векторе фазовых координат \bar{x} ,

$\chi(\bar{x}) = \frac{\beta(\bar{x})}{\beta_0}$ – функция, определяющая зависимость расхода РТ от фазовых координат

КА. Вид и параметры этой функции различаются для различных типов преобразователей энергии и используемой математической модели солнечного излучения. Для КА с солнечной энергоустановкой наиболее часто используется зависимость $\chi(\bar{x}) = \frac{1}{r^k}$, описывающая тот факт, что при удалении от Солнца мощность излучения падает. Показатель степени k может принимать значения 1.7 - 2, так как при удалении от Солнца, с одной стороны, снижается интенсивность излучения, а, с другой стороны, снижается

температура панелей солнечных батарей, что приводит к повышению эффективности их работы.

С учётом обозначения $T_{\mu}^*(T) = \int_{t_0}^T \chi(\bar{x}) \delta t = \int_{t_0}^T \frac{\delta}{r^*} dt$ – приведённое время работы

двигателей, масса потребного РТ вычисляется по формуле

$$M_{PT}(T) = \frac{P_0}{c_0} \cdot T_{\mu}^*(T). \quad (3)$$

Приведённое моторное время зависит от траектории движения КА, а следовательно, и от его проектных параметров. Поэтому разделение задачи на проектную и баллистическую части носит условный характер и требует итерационного процесса проектно-баллистической оптимизации для уточнения динамических характеристик миссии и проектных параметров КА. С учётом (3) уравнение баланса масс КА (1) принимает вид

$$M_0 = M_{IT} + M_{\Sigma} + M_{\Delta} + \frac{P_0}{c_0} \cdot T_{\mu}^*(T)(1 + k_{СПХ}) + M_{КОН}. \quad (4)$$

Согласно (4), минимум стартовой массы соответствует минимуму приведённого моторного времени $T_{\mu}^*(T)$. Поэтому баллистическая часть задачи оптимизации сводится к определению оптимальных законов управления $\bar{u}_{opt}(t)$ и соответствующих им траекторий движения $\bar{x}_{opt}(t)$ при фиксированных проектных параметрах $\bar{p} = (P_0, c_0)^T$:

$$T_{\mu_{opt}}^*(T, \bar{p}) = \min_{u(t) \in U} T_{\mu}^*(T = \text{fixe}, \bar{x}(t, \bar{u}) \in X, \bar{p}(t), \bar{p}), \quad (5)$$

$$\bar{u}_{opt}(t, \bar{p}) = \arg \min_{u(t) \in U} T_{\mu}^*(T = \text{fixe}, \bar{x}(t, \bar{u}) \in X, \bar{u}(t), \bar{p}).$$

После определения зависимости $T_{\mu_{opt}}^*(T, \bar{p})$ становится возможным определить оптимальный вектор проектных параметров \bar{p}_{opt} , обеспечивающий минимум стартовой массы КА, при заданной длительности миссии T :

$$\bar{p}_{opt}(T) = \arg \min_{\bar{p} \in P} M_0(M_{IT}, T_{\mu_{opt}}^*(T, \bar{p}), \bar{x}(t, \bar{u}_{opt}) \in X, \bar{u}_{opt}(t), \bar{p}). \quad (6)$$

2. Оптимизация участков гелиоцентрического движения КА

Для расчёта межпланетного перелёта с гравитационными манёврами используется методика разбиения траектории на гелиоцентрические и планетоцентрические участки. Первые соответствуют траектории движения КА под действием только притяжения Солнца. Вторые соответствуют траектории движения в сфере действия

планеты.

Оптимизация гелиоцентрических участков перелёта проводилась в соответствии с формализмом принципа максимума Понтрягина. Межпланетные перелёты КА обычно проходят вблизи плоскости эклиптики и поэтому могут описываться в плоской полярной системе координат дифференциальными уравнениями [1]:

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_\varphi}{r}, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{a_0 \delta}{c_0} \chi(r), \quad (7)$$

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \cos \lambda \cdot a, \quad \frac{dV_\varphi}{dt} = -\frac{V_r V_\varphi}{r} + \sin \lambda \cdot a, \quad a = \frac{a_0 \delta}{(1-m)} \chi(r),$$

где r , φ – полярные координаты КА, V_r , V_φ – проекции скорости КА в полярной системе координат, λ – угол, определяющий направление ускорения, a_0 – номинальное

ускорение от тяги двигателей, $m = \frac{M_{\text{PT}}}{M_0}$ – относительный текущий расход РТ.

Оптимальное направление вектора ускорения $\lambda_{opt}(t)$ и функция включения-выключения двигательной установки δ_{opt} определялись из максимума Гамильтониана:

$$\sin \lambda_{opt} = \frac{P_\varphi}{\sqrt{P_r^2 + P_\varphi^2}}, \quad \cos \lambda_{opt} = \frac{P_r}{\sqrt{P_r^2 + P_\varphi^2}}, \quad (8)$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta > 0 \end{cases}, \quad \Delta = \frac{P_\varphi}{c} + \frac{\sqrt{P_r^2 + P_\varphi^2}}{i-m}, \quad (9)$$

где P_r , P_φ , P_{V_r} , P_{V_φ} , P_m – сопряжённые переменные.

Требуется найти такие начальные значения сопряжённых переменных $P_r(t_0)$, $P_\varphi(t_0)$, $P_{V_r}(t_0)$, $P_{V_\varphi}(t_0)$, $P_m(t_0)$, чтобы выполнялись граничные условия, которые формируются при следующих допущениях: орбиты планет компланарные и круговые; выравнивание скоростей КА и планеты назначения не требуется; угловая дальность перелётов не фиксирована. Последнее допущение сделано в силу того, что не рассматриваются миссии с возвратом к планете старта или промежуточным планетам с целью осуществления гравитационного манёвра.

3. Методика расчёта гравитационных манёвров

Для расчёта гравитационных манёвров на границе сфер действия определяется условная точка стыковки участков гелиоцентрического и планетоцентрического движения и осуществляется стыковка граничных условий по фазовым координатам.

Угол поворота планетоцентрической скорости КА ϕ и приращение скорости ΔV при гравитационном манёвре зависит от скорости входа в сферу действия планеты $V_{вх}$, гравитационного параметра планеты $\mu_{пл}$ и расстояния от центра планеты до перицентра планетоцентрической пролётной траектории r_{π} [2]:

$$\phi = 2 \cdot \arcsin \left(1 + \frac{r_{\pi} V_{вх}^2}{\mu_{пл}} \right)^{-1}, \quad \Delta V = 2V_{вх} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right). \quad (10)$$

Схемы пересчёта фазовых координат КА из гелиоцентрической системы координат (скорости сближения $V_{сбл}$ и удаления $V_{удал}$) в планетоцентрическую (скорости входа $V_{вх}$ и выхода $V_{вых}$ из сферы действия) показаны на рисунке 1.

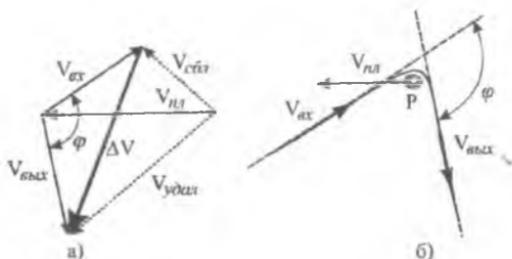


Рис. 1. К определению приращения скорости при гравитационном манёвре:

а – треугольники скоростей; б – схема движения аппарата в сфере действия планеты

Фазовые координаты КА в момент входа в сферу действия промежуточной планеты и расстояние до перицентра траектории выбираются из условия минимума общего критерия оптимизации миссии. Граничные условия в точках стыковки гелиоцентрических и планетоцентрических участков траектории, определяются датами пролёта промежуточной планеты.

4. Методика выбора дат старта

Дата старта определяется, исходя из требуемого для данной баллистической схемы расположения планет в соответствии со следующей методикой (орбиты планет считаются круговыми и компланарными).

1. Исходные данные: порядок посещения планет и характеристики оптимальных траекторий. За нулевое положение принимается угловое положение планеты старта (Земли). Например, схема перелёта включает два гравитационных манёвра. Тогда известно: $\phi_0^{Зем}$ – угловое положение Земли в начальный момент времени; $\phi_{i-1}^{КА}$, $\phi_{i-2}^{КА}$ – соответственно угловые расстояния, пройденные КА за время перелёта к первой и второй

промежуточным планетам; $\phi_{1,3}^{KA}$ – угловое расстояние, пройденное КА за время перелёта к планете назначения; $T_{0,1}^{KA}$, $T_{1,2}^{KA}$, $T_{2,3}^{KA}$ – время, затраченное на прохождение каждого из трёх гелиоцентрических участков.

Время проведения гравитационных манёвров мало по сравнению со временем гелиоцентрических перелётов. Поэтому в каждый из моментов времени 0, 1, 2, 3 будем считать, что угловые дальности КА и соответствующей планеты одинаковы.

2. Вычисляем угловые дальности каждой планеты относительно Земли в момент времени 0, учитывая, что по круговым орбитам планеты движутся с постоянной скоростью:

$$\phi^{1a1} = \phi_0^{1a1} - \phi_0^{3a1} = \left[(\phi_{0-1}^{KA} + \phi_0^{3a1}) - (T_{0-1}^{KA} \cdot \omega^{1a1}) \right] - \phi_0^{3a1} = \phi_{0-1}^{KA} - T_{0-1}^{KA} \cdot \omega^{1a1}, \quad (11)$$

где ϕ^{1a1} – угловое положение первой планеты относительно Земли в начальный момент времени; ϕ_0^{1a1} – собственное угловое положение первой планеты в начальный момент времени; ω^{1a1} – угловая скорость первой планеты.

Аналогично для второй и финальной планет, но с учётом пройденных угловых расстояний на соответствующих гелиоцентрических участках запишем:

$$\begin{aligned} \phi^{1a2} &= (\phi_{0-1}^{KA} + \phi_{1-2}^{KA}) - (T_{0-1}^{KA} + T_{1-2}^{KA}) \cdot \omega^{1a2}; \\ \phi^{1a3} &= (\phi_{0-1}^{KA} + \phi_{1-2}^{KA} + \phi_{2-3}^{KA}) - (T_{0-1}^{KA} + T_{1-2}^{KA} + T_{2-3}^{KA}) \cdot \omega^{1a3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Получим набор угловых положений планет (ϕ^{1a1} , ϕ^{1a2} , ϕ^{1a3}).

3. Прогнозируем движение планет на ближайшее будущее:

$$\phi^{1a} = \phi_0^{J2000} + \omega_{1a} \cdot T_{Jut}, \quad (13)$$

где ϕ_0^{J2000} – угловое положение планеты на начало эпохи J2000; T_{Jut} – количество юлианских дней, прошедших от начала эпохи J2000.

Положение планет, участвующих в баллистической схеме перелёта, вычисляется последовательно на каждую дату из заданного промежутка. Чтобы ускорить поиск, сначала отбираем все даты, на которые совпадет взаимное расположение Земли и самой удалённой от Солнца планеты, участвующей в схеме перелёта (Юпитер в рассматриваемых схемах). Это связано с увеличением периода обращения планет, находящихся дальше от Солнца по сравнению с периодами обращения более близких к Солнцу планет. В свою очередь, это означает, что для более дальних планет необходимая разность угловых положений будет встречаться реже, чем для ближних. Далее, из уже отобранного массива дат выбираем те, на которые совпадают взаимные расположения

Земли и первой промежуточной планеты.

Используя такой алгоритм отбора дат, можно найти подходящее начальное положение для миссии, включающей и более трёх планет. Однако очевидно, что чем больше планет, тем реже будут встречаться оптимальные даты старта. Для увеличения шансов на нахождение оптимальной даты старта можно принять допущение о небольшом заданном отклонении угловых положений планет от оптимальных.

5. Результаты баллистической оптимизации миссии Земля-Юпитер

Баллистическая оптимизация миссии Земля-Юпитер проводилась для КА с массой на границе сферы действия Земли 2800 кг и двигательной установкой, обеспечивающей ускорение $0,5 \text{ м/с}^2$ и скорость истечения рабочего тела 26 км/с.

Были получены результаты оптимизации для трёх баллистических схем перелётов с гелиоцентрическими участками оптимальными по быстрдействию:

схема 1 – перелёт Земля – Марс – Юпитер;

схема 2 – перелёт Земля – Венера – Юпитер;

схема 3 – перелёт Земля – Венера – Марс – Юпитер

и двух схем с гелиоцентрическими участками, оптимальными по расходу рабочего тела с фиксированной длительностью:

схема 4 – перелёт Земля – Венера – Юпитер;

схема 5 – перелёт Земля – Венера – Марс – Юпитер.

Результаты оптимизации представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты оптимизации различных схем перелёта к Юпитеру

	Схема 1, (Tmin) Земля-Марс- Юпитер		Схема 2, (Tmin) Земля-Венера- Юпитер		Схема 3, (Tmin) Земля-Венера- Марс-Юпитер		Схема 4, Земля-Венера- Юпитер		Схема 5, Земля-Венера- Марс-Юпитер	
	T, сут	m, %	T, сут	m, %	T, сут	m, %	T, сут	m, %	T, сут	m, %
Перелёт к Венере			116	23	116	23	140	11	146	10
Перелёт к Марсу	172	24			91	33			145	17
Перелёт к Юпитеру	803	31	354	38	303	27	565	37	605	26

Анализ полученных результатов позволяет отдать предпочтение схемам 2 и 4 использующих гравитационный манёвр в сфере действия Венеры. Для этих схем подобраны даты старта: схема 2 – 15.02.2012; схема 4 – 8.12.2016. На рисунке 2 показаны соответствующие гелиоцентрические траектории.

При заданных проектных параметрах КА, оптимальные баллистические схемы

миссий к Юпитеру включают пролёты вблизи Венеры, что объясняется увеличением мощности энергодвигательной установки вблизи Солнца. Это значительно сокращает общую продолжительность миссии. Манёвр у Марса, напротив, приводит к ухудшению показателей миссии, что обусловлено его низкой эффективностью при данном векторе скорости входа в сферу действия планеты. Однако вопрос о целесообразности включения Марса в схему перелёта должен рассматриваться с учётом целей миссии.

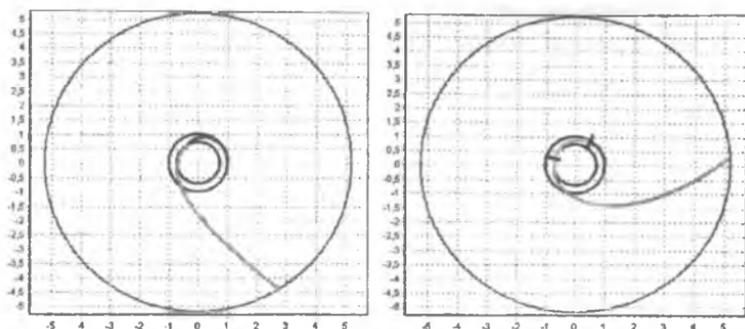


Рис. 2. Траектории перелётов Земля-Юпитер, соответствующие оптимальным баллистическим схемам 2 и 4 (Земля – Венера – Юпитер). а) схема 2; б) схема 4

Следует отметить, что включение в схему межпланетного перелёта гравитационных манёвров действительно позволяет повысить эффективность миссии для КА с ЭРДУ. Появляется возможность существенно сократить время перелёта и уменьшить затраты рабочего тела.

Разработанные методики позволяют на ранних этапах планирования межпланетной миссии разработать оптимальные баллистические схемы и получить её проектно-баллистические параметры. Эти данные могут быть использованы для оценки эффективности планируемой миссии, а так же могут служить первым приближением для более точных расчётов.

Библиографический список

1. Старинова, О.Л. Расчёт межпланетных перелётов космических аппаратов с малой тягой [Текст] / О.Л. Старинова. – Самара: Изд-во Самар. научного центра РАН, 2007. – 196 с.
2. Левантовский, В.И. Механика космического полёта в элементарном изложении [Текст]: 3-е изд., дополненное и переработанное. / В.И. Левантовский. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.