УДК 62.505

Гусаров Г.В., Коптев А.А., Стройкин Д.Н.

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

Основной задачей, решаемой в статье, является задача разработки общих подходов к моделированию состояния производственных процессов как системы.

С общих позиций состояние системы определяется как минимальное количество информации, требующееся для описания поведения системы в любой данный момент времени. Если, начиная с этого момента, известны величины входных воздействий, а также известны законы функционирования системы, то можно полностью описать её поведение в любой будущий момент времени.

Рассмотрим общую традиционную постановку задачи мелкосерийного производства агрегатов, узлов и деталей систем.

Пусть имеется *m*-участков, выпускающих некоторую продукцию, которая поставляется на *n* участков сборки или обслуживания и ремонта агрегатов и узлов систем. Объём производства i-го участка в единицу времени равен a_i , i=1,..., m, а объём потребления j-го, например участка, в целом в единицу времени есть b_j , j=1,..., n. Стоимость C_{ij} перевозки единицы продукции с i-го участка на j-ю сборочную линию считается известной и не зависящей от общего объёма перевозок. При этом предполагается, что вся продукция перевозится полностью и что весь спрос удовлетворяется. Если обозначить через U_{ij} количество продукции, которое перевозится в единицу времени с i-го участка на j-ую линию, то рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: найти $\min\sum_i\sum_j C_{ij}U_{ij}$ при ограничениях $\sum_j U_{ij}=a_i, \sum_i U_{ij}=b_j$. Но сколько-нибудь важные решения принимаются последовательно во времени. Поэтому воспользуемся понятием периода планирования, т.е. интервала времени, в течение которого необходимо принять определённые решения. При статическом описании допускаем, что a_i, b_j, C_{ij} – одни и те же в каждом цикле и создание запасов невозможно. Переформулируем исходную задачу таким образом, чтобы избавиться от указанных ограничений. При новой постановке задачи обнаруживается, что её структура сложнее и больше отвечает требованиям практики по сравнению с прежним описанием. Обозначим через x_i (t) количество запасов продукции, которое имеется на i-м участке в начале некоторого интервала времени [t, t+1], где t и t+1 – два фиксированных момента времени. Тогда уровень запасов в момент времени t+1 определяется алгебраической суммой пополнения и истощения запасов, т.е. производства продукции и её перевозок:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i(t) - \sum\nolimits_j U_{ij},\ i = 1,\dots,m;\ t = 1,\dots,N. \qquad (1)$$

Обозначим через y_i (t) запасы, хранящиеся в j-м узле:

$$y_j(t+1) = y_j(t) - b_j(t) + \sum\nolimits_i U_{ij},\ j = 1,\dots,n;\ t = 1,\dots,N. \qquad (2)$$

Величины x_i (t) и y_j (t) суть переменные состояния, характеризующие внутреннюю структуру системы. Поведение данной системы в будущем полностью определяется заданием этих величин и входных переменных U_{ij}. Значения x_i (t) и y_j (t) представляют собой агрегированную информацию о предыдущем поведении системы достаточно полную для того, чтобы по известным величинам входных переменных точно предсказать следующее состояние системы. Вводя понятие относительных затрат $\alpha_i(t)$ и $\beta_j(t)$ на хранение единицы продукции, получаем, что полная сумма издержек равна

$$I = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \beta(t)y_j(t) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)u_{ij} \right). \qquad (3)$$

Требуется выбирать такие значения u_{ij}, чтобы минимизировать целевую функцию I. Налицо ситуация принятия решений, которую можно описать как некоторый N-шаговый процесс. Выход системы зависит не только от входа, но и от начального состояния, которое в случаях, когда структура системы не определена, неизвестно. При анализе систем «вход-выход» непосредственно рассматривается не структура системы, а само отношение «вход-выход», т. е. подмножество упорядоченных пар «вход-выход». Вообще говоря, это отношение не является функцией. Если же начальное состояние полагается фиксированным, то можно рассматривать некоторое фиксированное подмножество упорядоченных пар отношения «вход-выход», которое определяет функцию. В этом случае, зная такую функцию, оказывается возможным построить представление системы в пространстве состояний, причём состояния соответствуют множеству входных воздействий, которые переводят систему из начального в некоторое заданное состояние. Для того чтобы взаимодействовать с системой производства, может оказаться необходимым иметь информацию, относящуюся скорее к её внутренней структуре, чем к выходу. Эта информация в любой данный момент времени и является тем, что решено называть состоянием системы.

Если предположить, что начальное количество запасов может выражаться любым действительным числом, то множество состояний можно определить как $X=R$, где R – числовая ось, и модель примет вид

$$x_j\left(t+1\right)=x_i\left(t\right)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{ij}\left(t\right)-b_i\left(t\right). \tag{4}$$

где $u_j\left(t\right)$ – выпуск продукции j-м участком за k-й период. Таким образом, эндогенные переменные с запаздывающим аргументом типа X(t) присутствуют в структуре модели как вспомогательные переменные и в совокупности с экзогенными переменными u и b составляют известные к данному моменту времени переменные системы, по которым можно получить значения текущих эндогенных переменных. Для периода 1 значения x(1) вычисляется по x(0), а также по u(0) и b(0). Определив таким образом x(1), можно найти x(2), если конечно, заданы u(1) и b(1). Следовательно, при заданном начальном значении x(0) и заданных значениях u(t) и b(t) можно определить траекторию x(t), последовательно применяя уравнение состояния. Теперь, когда понимаем, что такое движение в пространстве состояний, можем определить объём производства j-й сборочной линии за любой период времени.

Рассмотрим основные понятия теории планирования. К традиционным понятиям входа и выхода добавим ещё одно – понятие состояния. В изложенном примере состояние описывалось вектором, компоненты которого – величины запасов. В общем случае уравнение состояния в векторно-матричной форме имеет вид

$$x\left(t+1\right)=Ax\left(t\right)+Bu\left(t\right)+Cf\left(t\right), \tag{5}$$

где x – вектор состояния системы, u – управляемый вход и f – влияние среды потребления. Система в свою очередь влияет на среду своими выходными переменными. В некоторых случаях сами переменные состояния могут рассматриваться как выходные величины системы.

Для решения задач планирования этот подход к моделированию производственных процессов является основным. В случае принятия управляющих воздействий лицо, принимающее решение (ЛПР), наблюдает, как правило, не переменные состояния, а вместо этого наблюдает множество выходных величин y_i (i =1, …, p) как n-мерный вектор y, который определяется уравнением

$$Y=C_x+D_u. \tag{6}$$

В уравнениях (5) и (6): x – n-мерный вектор–столбец; A – матрица размера $n \cdot n$; u – r-мерный вектор–столбец; B – матрица размера $n \cdot r$; C – матрица размера $p \times n$; D – матрица размера $p \times r$.

Вектор состояния сформирован из множества величин, которых достаточно для того, чтобы полностью описать движение системы в пространстве состояний. По заданным вектору состояния в некоторый момент времени, закону движения и последовательности входных воздействий можно вычислить состояния. Любой другой вектор x'(t), связанный с невырожденным преобразованием x'(t)=M(t)x(t), удовлетворяет приведённому выше требованию.

Этот подход оказывается ближе к реальным запросам практики управления предприятиями, нежели любая разновидность метода преобразования производственной функции.

Введём дополнительно ряд понятий для определения мелкосерийного производства. Как правило, производственная система поддержки эксплуатации является детерминированной, т.е. зная её состояние в некоторый момент времени t_0 и значения входных сигналов в интервале времени $[t_0, t_s]$, можно точно определить её состояние в момент времени t_s. Поскольку это новое состояние $x(t_s)$ определяется величинами t_0, $x(t_0)$ и входной функцией на интервале $[t_0, t_s]$, его можно представить в виде

$$x(t_s)\,g\left(t_s, t_0, x(t_0), u\right). \tag{7}$$

Функция g называется переходной функцией системой. Для того чтобы показать, что значения первых двух аргументов этой функции принадлежат некоторому множеству T, значения третьего аргумента – множеству X и значения четвёртого аргумента – множеству допустимых входных воздействий U, воспользуемся обозначениями теории множеств:

$$g: T \times T \times X \times U \to X. \tag{8}$$

Данная функция характеризуется двумя множествами – областью определения и областью значений функций, а также правилом, согласно которому каждому элементу области определения становится в соответствие элемент, называемый значением функции, из области значений функции. Через $T \times X$ обозначаем множество $\{(t, x) | \ x \in X, \ \}$, называемое декартовым произведением множеств T и X, т.е. множество всех упорядоченных пар (t, x), в которых первый элемент $t \in T$, а второй элемент $x \in X$.

Как правило, мелкосерийное производство (с общих позиций система) является дискретно по времени, если T=Z, где Z – множество всех целых чисел; система является непрерывной по времени, если T=R, где R – множество всех действительных чисел. Функция g должна удовлетворять некоторым условиям. В соответствии с принципом согласованности, состояние, которое достигается в момент времени t_{s2} из начального состояния, соответствующего моменту времени t_0, через промежуточное состояние t_{s1} – то же самое, что и состояние, достигаемое непосредственно из начального:

$$g\left(t_{s2}, t_{s1}, g\left(t_{s1}, t_0, x_0, u\right), u\right) = g\left(t_{s2}, t_0, x_0, u\right). \quad (9)$$

Согласно принципу причинности, состояние в момент времени целиком и полностью определяется состоянием в момент времени t_0 и входным сигналом u:

$$g\left(t_s, t_0, x_0, u\right) = g\left(t_s, t_0, x_0, u'\right), \textit{если } u = u'. \quad (10)$$

В то время, как в непрерывной системе два любых различных момента времени разделены бесконечным множеством других моментов времени, в дискретной системе можно говорить о последовательных моментах времени. Если в момент времени k система находится в состоянии x(k) и входной сигнал равен u(t), то в момент времени t+1 система окажется в состоянии g(t+1, t, x(t), u). Это выражение может зависеть только от значения u в момент времени k. Значение u в момент времени t+1 получается одновременно с переходом системы в состояние x(t+1) и может влиять не на это, а лишь на последующие состояния. Поэтому вместо g(t+1, t, x(t), u) можно записать более простое выражение d(x(t), u(t)), в котором явно отражается тот факт, что переход из состояния x(k) в момент времени k в состояние x(t+1) в момент времени t+1 зависит только от значения входного сигнала в момент времени t. Другими словами, вместо описания динамики системы сложной функцией $g: T \times T \times X \times U \to X$, определённой для произвольных пар моментов времени и произвольных допустимых входных воздействий, воспользуемся функцией более простого вида:

$$d: X \times U \to X: (x, u) \to d(x, u); x \in X, u \in U. \quad (11)$$

Функция d определяет переход в следующее состояние, т.е. описывает динамику системы в окрестности момента времени t.