УДК 629.78.001.2

Квашин А.С.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОЕКТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОРМОЗНОГО ИМПУЛЬСА МАЛОГАБАРИТНОЙ СПУСКАЕМОЙ КАПСУЛЫ С УЧЕТОМ ПОПАДАНИЯ В ЗОНУ ПРИЗЕМЛЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ

В практике проектирования космических аппаратов (КА) используются математические модели для проектного определения тормозного импульса малогабаритных спускаемых капсул (МСК), учитывающие значительное число факторов. Однако такие модели сложны, требуют в качестве исходных данных большого количества проектных характеристик и используются, как правило, на этапах разработки технического проекта и эксплуатации космической техники. В настоящей работе предлагаются математические и статистические модели, которые могут быть использованы для определения тормозного импульса МСК на этапах разработки технического предложения и эскизного проектирования, когда многие проектные характеристики МСК еще не определены.

Предлагаемые математические и статистические модели включают следующие частные модели для определения:

дальности приземления МСК;

статистических характеристик дальности приземления МСК,

вероятности приземления МСК в заданную зону;

тормозного импульса, необходимого для приземления капсулы в заданный район.

Рассмотрим эти модели последовательно.

При построении математических и статистических моделей для определения дальности приземления МСК приняты следующие допущения: Земля – идеальный шар; вращение Земли не учитывается; орбита космического аппарата, от которого происходит отделение МСК, - круговая; направление вектора скорости тормозного импульса - касательное к орбите КА; импульс скорости прикладывается к МСК практически мгновенно.

Исходя из данных допущений и используя уравнения движения летательного аппарата по эллиптической орбите, можно прийти к следующей зависимости для определения дальности спуска без учета влияния атмосферы

$$L_C = V_{KPHo} \cdot \frac{1}{(1+\overline{H}_0)} \cdot t_0 + R_3 \cdot \arccos \left[\frac{1-(1+\overline{H}_0)^2 \dfrac{\left(V_1 \sqrt{\dfrac{1}{1+\overline{H}_0}} - \Delta V \right)^2}{V_1^2}}{1 - \dfrac{\left(V_1 \sqrt{\dfrac{1}{1+\overline{H}_0}} - \Delta V \right)^2}{V_1^2} (1+\overline{H}_0)} \right], \qquad (1)$$

где V_{KPHo} - начальная скорость МСК (скорость КА на круговой орбите высотой H_0; R_3 – радиус Земли; t_0 - отклонение времени по выдаче команды на включение тормозного двигателя; ΔV - тормозной импульс скорости; V_1 – первая космическая скорость (равная 7910 м/с); $\overline{H}_0$ - относительная высота орбиты (относительно радиуса Земли).

В первом приближении влияние атмосферы на дальность приземления МСК можно учесть с помощью эмпирического коэффициента.

Во втором приближении для определения дальности приземления МСК с учетом атмосферного участка сначала необходимо оценить дальность полета МСК на внеатмосферном участке спуска, затем оценить дальность полета на атмосферном участке с использованием дифференциальных уравнений движения МСК. Общая дальность приземления МСК будет складываться из дальности полета МСК на внеатмосферном участке спуска L_B и атмосферном – x.

Дальность полета МСК на внеатмосферном участке можно определить аналогично, что и дальность приземления без учета влияния атмосферы (1). Но при этом следует учесть, что, во-первых, капсула долетает до условной границы атмосферы высотой Ha (примерно 100км), и, во-вторых, что дальность по поверхности Земли отличается от дальности (по окружности) на высоте орбиты и на высоте условной границы атмосферы.

Для построения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение МСК в атмосфере, примем следующие допущения [1]: спуск МСК - баллистический, неуправляемый; угол атаки мал; угол тангажа приближенно равен углу наклона траектории; кривизной Земли на участке атмосферного спуска пренебрегаем; ускорение силы земного тяготения на атмосферном участке спуска постоянно и равно ускорению на поверхности Земли. Движение МСК будем рассматривать в декартовой системе координат, начало которой находится на поверхности Земли в точке пересечения радиуса-вектора, соединяющего центр Земли, с центром масс МСК в момент прохождения условной границы атмосферы, ось X направлена по касательной к поверхности Земли в плоскости орбиты, а ось Y - на точку пересечения траектории МСК с условной границей атмосферы. Запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV_x}{dt} = \frac{-X_a \cdot \cos\Theta}{m}; \\ &\frac{dV_y}{dt} = \frac{-X_a \cdot \sin\Theta}{m} - g_0; \\ &\Theta = arctg\left(\frac{V_x}{V_y}\right), \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

где V_x и V_y – проекции скорости капсулы на оси x и y; X_a – аэродинамическая сила сопротивления; m – масса капсулы; g_0 – ускорение силы земного тяготения на поверхности Земли; Θ - угол наклона траектории.

Начальное значение скорости V_B движения МСК в атмосфере, которое необходимо для интегрирования приведенной системы уравнений, можно определить по выражению

$$V_B = V_1\sqrt{R_3\left(\frac{2}{r_B} - \frac{1}{a}\right)}, \qquad (3)$$

где r_B – радиус, который равен сумме радиуса Земли и высоты границы условной атмосферы; a – большая полуось эллипса (траектории внеатмосферного движения МСК).

Начальное значения скорости угла Θ_{BX} наклона траектории в точке прохождения МСК границы условной атмосферы, которое также необходимо для интегрирования системы уравнений, можно рассчитать из интеграла площадей, полагая известными параметры движения МСК в начале пассивного участка траектории:

$$\cos\Theta_{вх} = \frac{V_A \cdot (R_3 + H_0)}{V_B.(R_3 + Ha)}, \qquad (4)$$

где V_A – скорость МСК сразу после сообщения ей тормозного импульса.

Решая систему дифференциальных уравнений, можно найти координаты x (дальность) и y (высота) местоположения МСК. Общая дальность приземления МСК находится суммированием дальностей на внеатмосферном и атмосферном участках спуска.

Для оценки статистических характеристик дальности приземления МСК необходимо поставить и решить задачу статистической динамики. Постановка задачи: даны математические ожидания и дисперсии входных величин: m_t, D^2_t - времени t начала выдачи тормозного импульса; m_{Ho}, D^2_{Ho} – начальной высоты орбиты H_0, $m_{\Delta V}$, $D^2_{\Delta V}$ - импульса скорости ΔV; m_{Ha}, D^2_{Ha} – высоты условной границы атмосферы Ha. Необходимо найти математическое ожидание m_{Lc} и дисперсию D^2_{Lc} дальности приземления L_C.

Если зависимость дальности приземления МСК без учета влияния атмосферы получена в виде функции

$$L_C = \varphi(t_0, H_0, \Delta V)\ , \tag{5}$$

то решить задачу статистической динамики можно аналитически, используя, например, метод линеаризации [2]:

$$m_{LB} = \varphi(m_{to}, m_{Ho}, m_{\Delta V})\,; \tag{6}$$

$$D^2_{Lc} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right)^2_{(t_0=m_t)} \cdot D^2_{m_t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial H_0}\right)^2_{(Ho=m_{Ho})} \cdot D^2_{Ho} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Delta V}\right)^2_{(\Delta V=m_{\Delta V})} \cdot D^2_{\Delta V}\,. \tag{7}$$

Если зависимость дальности спуска МСК с учетом влияния атмосферы в аналитическом виде получить не удается, то решение задачи статистической динамики можно получить, например, методом статистических испытаний. Для этого в каждом цикле расчета необходимо организовать реализации входных случайных величин (времени выдачи тормозного импульса, высоты орбиты, величины тормозного импульса по скорости, высоты условной границы атмосферы) и получать реализации начальных условий (скорости МСК на границе условной атмосферы и угла наклона траектории). Решая систему дифференциальных уравнений, можно получать на каждом цикле расчета значение координаты x_c – дальности приземления МСК на атмосферном участке и определять дальность приземления МСК. Проведя серию статистических испытаний, можно по формулам математической статистики оценить значения математического ожидания и дисперсии дальности приземления МСК.

Для определения вероятности приземления МСК в заданную зону, определяемую интервалом ($L - \Delta L \le L_C \le L + \Delta L$), используем нормальный закон распределения:

$$P(L - \Delta L \le L_C \le L + \Delta L) = \frac{1}{D_L\sqrt{2\pi}} \int\limits_{L-\Delta L}^{L+\Delta L} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L-m_L}{D_L}\right)^2} dL =$$
$$= \frac{1}{D_L\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{L+\Delta L} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L-m_L}{D_L}\right)^2} dL - \frac{1}{D_L\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{L-\Delta L} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L-m_L}{D_L}\right)^2} dL \tag{8}$$

Допущение о нормальном законе распределения случайной величины L_C можно обосновать на основе центральной предельной теоремы теории вероятностей с учетом влияния на выходную случайную величину множества независимых входных случайных величин.

Проведя замену переменных с помощью нормированной случайной величины, а также учитывая симметричность плотности нормированного нормального закона распределения, можно прийти к следующей зависимости:

$$P(L - \Delta L \le L_C \le L + \Delta L) = 2\Phi\left(\frac{\Delta L}{D_{Lc}}\right) - 1 , \qquad (9)$$

где $\Phi(\cdot)$ – условное обозначение функции нормального распределения нормированной случайной величины, D_L – среднеквадратическое отклонение дальности приземления.

Для определения тормозного импульса, необходимого для приземления капсулы в заданный район, сформулируем постановку задачи в следующем виде. Дана вероятность P_{CK} приземления МСК в зону на поверхности Земли, ограниченную интервалом $(L - \Delta L \le L_C \le L + \Delta L)$. Известны также: математические ожидания и дисперсии: m_t и D^2_t - времени t начала выдачи тормозного импульса; m_{Ho} и D^2_{Ho} - высоты орбиты H_0; m_{Ha}, D^2_{Ha} – высоты условной границы атмосферы Ha. Необходимо найти математическое ожидание $m_{\Delta V}$ и дисперсию $D^2_{\Delta V}$ импульса скорости ΔV.

Эту задачу можно решить следующим образом.

1. Определяется математическое ожидание m_{Lc} и дисперсия D^2_{Lc} дальности приземления L_c. Для этого за математическое ожидание дальности приземления m_{Lc} принимается номинальное значение этой дальности, то есть $m_{Lc} = L_c$. По таблице нормального закона распределения определяется квантиль $u_{\frac{1+P_{CK}}{2}}$ (исходя из формулы (9)), где P_{CK} - вероятность попадания МСК в заданный интервал. Далее ищется среднеквадратическое отклонение D_{Lc} из решения уравнения $\frac{\Delta L}{D_{Lc}} = u_{\frac{1+P_{CK}}{2}}$.

2. Формулируется задача статистической динамики в следующей (обратной) постановке. Даны математическое ожидание m_{Lc} и дисперсия D^2_{Lc} выходной случайной величины - дальности приземления МСК. Найти математическое ожидание $m_{\Delta V}$ и дисперсию $D^2_{\Delta V}$ входной случайной величины - импульса скорости ΔV. При этом характеристики других входных величин (m_t, D^2_t, m_{Ho} , D^2_{Ho}, m_{Ha}, D^2_{Ha}) считаются известными (заданными).

3. Решается данная задача методом последовательных приближений на основе многократного решения прямой задачи статистической динамики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Проектирование и испытания баллистических ракет. / Под ред. В.И. Варфоломеева и М.И. Копытова. М. Воениздат, 1970.

2. В.В. Болотин. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1981.

УДК [623.746-519]:629.7.01:629.7.058.52

Кулик А.С., Нарожный В.В., Комков А.В.

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАЛОГАБАРИТНЫХ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Использование в военной и гражданской областях беспилотной авиации доказало ее высокую эффективность Анализ развития современной беспилотной авиации в странах Западной Европы, Азии и США показывает, что в мире появилась тенденция к ссозданию микроминиатюрных беспилотных летательных аппаратов (МБЛА). Например, программой развития беспилотной авиации в США на последующие 15 лет [1] предусмотрена разработка и введение в эксплуатацию МБЛА, имеющих следующие технические характеристики (требования DARPA -- Управления перспективных исследований МО США): длина 5—20 см, взлетная масса 10 — 100 г, масса полезной нагрузки 1 — 18 г, время полета 20 — 60 мин, крейсерская скорость 30-65 км/ч, дальность полета 1-10 км. Предполагается, что МБЛА будут решать различные задачи, в том числе и гражданского характера (разведка местности, контроль загрязненности окружающей среды, ретрансляции сигналов радиосвязи и т.д.).

На данный момент исследовательские центры различных стран ведут разработку МБЛА. Фирмой “Sanders” (подразделение фирмы “Lockheed”) разработан автономный МБЛА с размахом крыльев 15 см и весом 85 г. Радиус действия - 5 км. Стоимость за систему $3-5 тыс. Фирмой “AeroVironment” разработан полуавтономный МБЛА с следующими характеристиками: размах крыла – 15 см; вес – 42 г; дальность действия – 3 км и скорость – 50-60 км/ч. Принцип управления – операторный. Стоимость контракта $10 млн. Фирмой “General Elec-