УДК 539.43

**Карманов В.П.**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ АВИАЦИОННОЙ И КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Проектирование сложных конструкций авиационной и космической техники, работающих при быстроизменяющихся внешних силовых и температурных нагрузках, связано с проведением всестороннего анализа динамической прочности, жесткости, частот и форм собственных колебаний, виброускорений и других динамических характеристик конструкций.

Одним из наиболее эффективных методов анализа напряженно-деформированного состояния и динамических характеристик конструкций является метод конечных элементов (МКЭ). Этому методу и его реализации для различных задач посвящено большое число публикаций, разработано много прикладных универсальных программ, однако использование классической схемы МКЭ для решения динамических задач большой размерности требует таких ресурсов ЭВМ, что практическое применение такой схемы становится весьма затруднительным.

Таким образом, возникает необходимость в создании математических и программных средств, предназначенных для достаточно узкого класса задач, использующих известные соотношения и алгоритмы, и, в то же время, обладающих рядом дополнений, способствующих преодолению тех трудностей, с которыми сталкиваются при реализации МКЭ.

Наиболее рациональными представляются следующие подходы. Во-первых, использование специального математического обеспечения, т.е. методов хранения матриц и методов решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений. Во-вторых, использование суперэлементного подхода. Комбинация этих подходов может в значительной степени уменьшить потребность в ресурсах ЭВМ и сократить время решения.

Алгоритм решения с использованием суперэлементной модели заключается в следующем. Расчетная схема конструкции представляется в виде отдельных ее фрагментов (суперэлементов), причем каждый из суперэлементов (СЭ) может быть представлен (при необходимости) также в виде суперэлементов. Такая поэтапная декомпозиция осуществляется до тех пор, пока не получается СЭ, представленный в виде композиции конечных элементов.

Следующий этап заключается в вычислении механических характеристик СЭ. Механические характеристики СЭ низшего уровня определяются соответствующими матрицами и векторами конечных элементов. Для определения механических характеристик СЭ более высокого уровня используются характеристики входящих в него СЭ. Результатом обработки СЭ являются механические характеристики, приведенные ко всем узлам этого СЭ. Для понижения размерности механических характеристик СЭ, механические характеристики входящих в него СЭ более низкого уровня приводятся к граничным узлам. Процесс такого приведения называется исключением внутренних степеней свободы или редуцированием.

Следующим этапом является вычисление приведенных к узлам векторов нагружения, действующего на каждый СЭ. Для СЭ низшего уровня векторы нагружения определяются векторами жесткости соответствующих конечных элементов. Для определения вектора нагружения для СЭ более высокого уровня используются векторы нагружения входящих в него СЭ и уже вычисленные механические характеристики этих СЭ.

Используя механические характеристики и вектор нагружения на главный СЭ (СЭ высшего уровня), можно вычислить вектор перемещений всех его узлов и, следовательно, векторы перемещений граничных узлов всех СЭ, в него входящих. В свою очередь, вектор перемещений внутренних узлов этих СЭ можно вычислить с помощью их механических характеристик, вектора нагружения и вектора перемещений граничных узлов.

Последним этапом является вычисление усилий и напряжений в конечных элементах.

Наиболее ответственным этапом этого алгоритма является редуцирование исходных матриц. Как показали исследования, редуцирование может привести к весьма значительным погрешностям при решении динамических задач. Причем, если с помощью преобразований Гайана [1] исключить все внутренние степени свободы, то эта погрешность может оказаться недопустимо большой. Если же с помощью преобразований исключить только часть внутренних степеней свободы, то погрешность можно уменьшить до допустимого предела. Поэтому возникает необходимость в специальных исследованиях процесса редуцирования. Результатом таких исследований стал метод и алгоритм исключения внутренних степеней свободы, основанный на преобразованиях Гайана и позволяющий контролировать погрешность редуцирования.

Суть алгоритма заключается в преобразованиях по формулам (1), осуществляющих переход от матриц, соответствующих рис. 1, к матрицам по рис. 2. Приняты следующие обозначения: $[C]$, $[D]$, $[M]$ - соответственно матрицы жесткости, демпфирования и масс, $e$ -

индексы неисключенных степеней свободы, $a$ - исключенных, $s$ - исключаемых на рассматриваемом шаге.

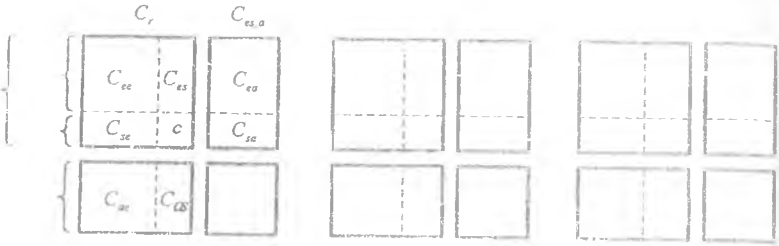


Рис. 1

$$
\begin{aligned}
&c' = 1/c, \quad d' = -d/c^2, \quad m' = d^2/c^3 - m/c^2,\\
&[C'_{sa}] = c'[C_{sa}], \quad [D'_{sa}] = c'[D_{sa}] + d'[C_{sa}],\\
&[M'_{sa}] = c'[M_{sa}] + d'[D_{sa}] + m'[C_{sa}],\\
&[C'_{se}] = -c'[C_{se}], \quad [D'_{se}] = -c'[D_{se}] - d'[C_{se}],\\
&[M'_{se}] = -c'[M_{se}] - d'[D_{se}] - m'[C_{se}],\\
&[C'_r] = [C_{ee}] + [C_{es}][C'_{se}],\\
&[D'_r] = [D_{ee}] + [C_{es}][D'_{se}] + [D_{es}][C'_{se}],\\
&[M'_r] = [M_{ee}] + [C_{es}][M'_{se}] + [D_{es}][D'_{se}] + [M_{es}][C'_{se}],\\
&[C'_{ae}] = [C_{ae}] + [C_{as}][C'_{se}],\\
&[D'_{ae}] = [D_{ae}] + [C_{as}][D'_{se}] + [D_{as}][C'_{se}],\\
&[M'_{ae}] = [M_{ae}] + [C_{as}][M'_{se}] + [D_{as}][D'_{se}] + [M_{as}][C'_{se}],\\
&[C'_{aa}] = [C_{aa}] + [C_{as}][C'_{sa}],\\
&[D'_{aa}] = [D_{aa}] + [C_{as}][D'_{sa}] + [D_{as}][C'_{sa}],\\
&[M'_{aa}] = [M_{aa}] + [C_{as}][M'_{sa}] + [D_{as}][D'_{sa}] + [M_{as}][C'_{sa}]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

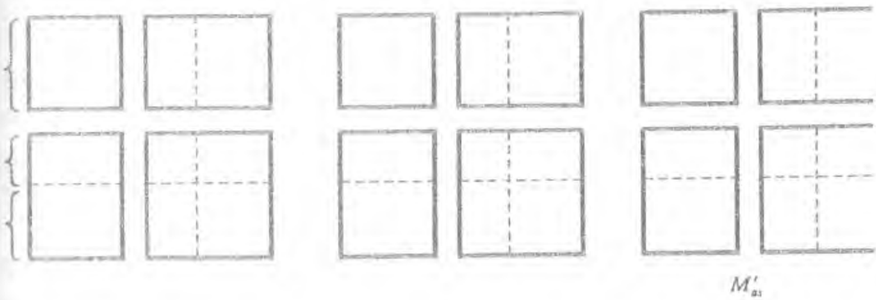


Рис. 2

Таким образом, преобразование матриц по формулам (1) редуцирует s-ю степень свободы. Относительная погрешность уравнений при редуцировании возрастает на величину $\sim(1+r+r^2)\mu^3$. Здесь принято: $\mu=\max(\mu_d,\mu_m)$, где $\mu_d=\omega d/c$, $\mu_m=\omega\sqrt{m/c}$; $r=\max(r_d,r_m)$, где $r_d=\dfrac{c}{d}\max\limits_i\left|\dfrac{d_{si}}{c_{si}}\right|$, $r_m=\dfrac{c}{m}\max\limits_i\left|\dfrac{m_{si}}{c_{si}}\right|$; $\omega$ - верхняя граница исследуемого диапазона частот; $\mu_0$ - допустимая погрешность редуцирования.

На основе приведенных формул редуцирования и контроля погрешности, вносимой редуцированием, разработан алгоритм пошагового редуцирования внутренних степеней свободы, который заключается в следующем:

- задаются величины $\omega$ и $\mu_0$,

- из общего числа неисключенных внутренних степеней свободы выбирается та, для которой $\mu$ минимально;

- вычисляется $r$ и, если выполняется

$$(1+r+r^2)\mu^3\le\mu_0, \tag{2}$$

то данная степень свободы редуцируется, т.е. осуществляются матричные преобразования по формулам (1), а затем снова выполняется предыдущий пункт. Если же соотношение (2) не выполняется, то исключение внутренних степеней свободы прекращается.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Jornal. - 1965. - Vol. 3, No2. - P. 380 - 391.

УДК 539.43

**Карманов В.П.**

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ СХОДИМОСТИ И ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИЙ АВИАЦИОННОЙ И КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ

Одним из условий, стоящих перед разработчиком программных средств, является условие достоверности результатов, получаемых с помощью этих программ. Для этого необходимо исследовать и обосновать достоверность и точность получаемых с помощью этих программ результатов, разработать рекомендации по выбору методических параметров расчета и тем самым создать условия для их широкого внедрения в практику инженерных расчетов.

В большинстве случаев сходимость и точность алгоритмов и программ проверяют путем решения тестовых задач со сравнением получаемых результатов с известными аналитическими решениями, с численными и экспериментальными исследованиями других авторов. Так при тестировании программ, реализующих конечно-элементные и суперэлементные методы расчета динамических характеристик конструкций, исследуют точность матриц жесткости и масс используемых конечных элементов путем решения задач свободных и вынужденных колебаний стержневых, пластинчатых и других систем [1,2]. Одновременно оценивается влияние дискретизации на точность получаемого результата.

Сравнительно реже рассматриваются задачи оценки влияния демпфирования на динамические характеристики конструкций. Количественные оценки коэффициентов, характеризующих демпфирование, затруднены. однако демпфирование можно оценить по характеру динамических перемещений в специально подобранных колеблющихся системах. Динамические перемещения системы с одной степенью свободы, колебания которой возбуждаются