

УДК 531.36, 629.7

Алексеев А.В., Ахмадуллин И.И.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЯХ**

В работе осуществляется математическое моделирование движения относительно неподвижной точки тяжёлого твердого тела (ТТ) со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Наиболее интересными случаями движения тяжёлого ТТ относительно неподвижной точки являются интегрируемые случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Ставится задача сравнения математических моделей движения ТТ с жидкостью и без жидкости при условиях интегрируемых случаев.

Математическую модель движения произвольного ТТ с вязкой жидкостью составим на основании метода, изложенного Черноушко Ф.Л. в работе [1]. Динамические уравнения движения примут вид:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_x + m_x; B\dot{q} + (A - C)pr = M_y + m_y; C\dot{r} + (B - A)pq = M_z + m_z, \quad (1)$$

где A, B, C – моменты инерции тела относительно осей связанной системы координат (ССК), совпадающих с главными осями инерции, начало системы координат совпадает с неподвижной точкой; p, q, r – проекции вектора угловой скорости на оси ССК;

$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ – момент внешних сил относительно неподвижной точки;

$\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$ – момент, характеризующий влияние вязкой жидкости на движение ТТ.

Согласно [1] проекции на оси ССК момента, возникающего из-за влияния жидкости, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{\rho}{\nu} D \left(\frac{1}{A} [\dot{M}_x + (B - C)(\dot{q}r + q\dot{r})] + q \frac{1}{C} [M_z + (A - B)pq] - r \frac{1}{B} [M_y + (C - A)pr] \right); \\ m_y &= -\frac{\rho}{\nu} D \left(\frac{1}{B} [\dot{M}_y + (C - A)(\dot{p}r + p\dot{r})] + r \frac{1}{A} [M_x + (B - C)qr] - p \frac{1}{C} [M_z + (A - B)pq] \right); \\ m_z &= -\frac{\rho}{\nu} D \left(\frac{1}{C} [\dot{M}_z + (A - B)(\dot{p}q + p\dot{q})] + p \frac{1}{B} [M_y + (C - A)pr] - q \frac{1}{A} [M_x + (B - C)qr] \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости; ν – вязкость жидкости; D – параметр, характеризующий форму полости.

При исследовании движения тяжёлого ТТ относительно неподвижной точки традиционно используются уравнения Пуассона [2]:

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3; \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1; \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad (3)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – компоненты единичного вектора вертикали. На тело действует только момент силы тяжести. Если координаты центра масс ТТ в ССК a, b, c , а сила тяжести тела P , то компоненты момента имеют следующий вид:

$$M_x = P(\gamma_2 c - \gamma_3 b), \quad M_y = P(\gamma_3 a - \gamma_1 c), \quad M_z = P(\gamma_1 b - \gamma_2 a). \quad (4)$$

В случае Эйлера центр масс ТТ совпадает с началом отсчета ССК ($a = b = c = 0$).

Тогда динамические уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= -\frac{\rho}{v} D \left(\frac{1}{A} [(B - C) \left(\frac{1}{B} [(C - A) pr] r + q \frac{1}{C} [(A - B) pq] \right)] \right) + \\ &+ q \frac{1}{C} [(A - B) pq] - r \frac{1}{B} [(C - A) pr], \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= -\frac{\rho}{v} D \left(\frac{1}{B} [(C - A) \left(\frac{1}{A} [(B - C) qr] r + p \frac{1}{C} [(A - B) pq] \right)] \right) + \\ &+ r \frac{1}{A} [(B - C) qr] - p \frac{1}{C} [(A - B) pq], \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= -\frac{\rho}{v} D \left(\frac{1}{C} [(A - B) \left(\frac{1}{A} [(B - C) qr] q + p \frac{1}{B} [(C - A) pr] \right)] \right) + \\ &+ p \frac{1}{B} [(C - A) pr] - q \frac{1}{A} [(B - C) qr]. \end{aligned} \quad (5)$$

На рисунке 1 представлены зависимости параметров движения от времени, полученные для ТТ с жидкостью и без нее для случая Эйлера.

Рисунок 1 – Зависимости проекций угловой скорости и единичного вектора вертикали на ось x ССК от времени для случая Эйлера (1 – без жидкости, 2 – с жидкостью)

В случае Лагранжа ТТ является динамически симметричным ($A = B \neq C$), а центр масс лежит на оси симметрии ($a = b = 0$). В этом случае уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}
& A\dot{p} + (C - A)qr = \\
& = Pc\dot{\gamma}_2 - \frac{\rho D}{\nu A} \left(\left[Pc\dot{\gamma}_2 + (A - C) \left(\frac{1}{A} [-Pc\dot{\gamma}_1 + (C - A)pr] r \right) \right] - r [-Pc\dot{\gamma}_1 + (C - A)pr] \right), \\
& \quad A\dot{q} + (A - C)pr = \tag{6} \\
& = -Pc\dot{\gamma}_1 - \frac{\rho D}{\nu A} \left(\left[-Pc\dot{\gamma}_1 + (C - A) \left(\frac{1}{A} [Pc\dot{\gamma}_2 + (A - C)qr] r \right) \right] + r [Pc\dot{\gamma}_2 + (A - C)qr] \right), \\
& \quad C\dot{r} = -\frac{\rho D}{\nu A} (p [-Pc\dot{\gamma}_1 + (C - A)pr] - q [Pc\dot{\gamma}_2 + (A - C)qr]).
\end{aligned}$$

На рисунке 2 представлены зависимости параметров движения от времени, полученные для ТГ с жидкостью и без нее для случая Лагранжа.

Рисунок 2 – Зависимости проекций угловой скорости и единичного вектора вертикали на ось x ССК от времени для случая Лагранжа
(1 – без жидкости, 2 – с жидкостью)

В случае Ковалевской ограничение накладываеся на моменты инерции $A = B = 2C$, а центр масс ТГ лежит в экваториальной плоскости ($c = 0$). Тогда динамические уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned}
2C\dot{p} - Cqr &= -Pb\dot{\gamma}_3 - \frac{\rho D}{\nu C} \left(\frac{1}{2} \left[-Pb\dot{\gamma}_3 + \left(\frac{1}{2} [Pa\dot{\gamma}_3 - Cpr] r + q [P(\gamma_1 b - \gamma_2 a)] \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + q [P(\gamma_1 b - \gamma_2 a)] - r \frac{1}{2} [Pa\dot{\gamma}_3 - Cpr] \right); \\
2C\dot{q} + Cpr &= Pa\dot{\gamma}_3 - \frac{\rho D}{\nu C} \left(\frac{1}{2} \left[Pa\dot{\gamma}_3 - \left(\frac{1}{2} [-Pb\dot{\gamma}_3 + Cqr] r + p [P(\gamma_1 b - \gamma_2 a)] \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + r \frac{1}{2} [-Pb\dot{\gamma}_3 + Cqr] - p [P(\gamma_1 b - \gamma_2 a)] \right); \tag{7} \\
C\dot{r} &= P(\gamma_1 b - \gamma_2 a) - \frac{\rho D}{\nu C} \left([P(\dot{\gamma}_1 b - \dot{\gamma}_2 a)] + p \frac{1}{2} [Pa\dot{\gamma}_3 - Cpr] - q \frac{1}{2} [-Pb\dot{\gamma}_3 + Cqr] \right).
\end{aligned}$$

На рисунке 3 представлена зависимость параметров движения от времени, полученные для ТГ с жидкостью и без нее для случая Ковалевской.

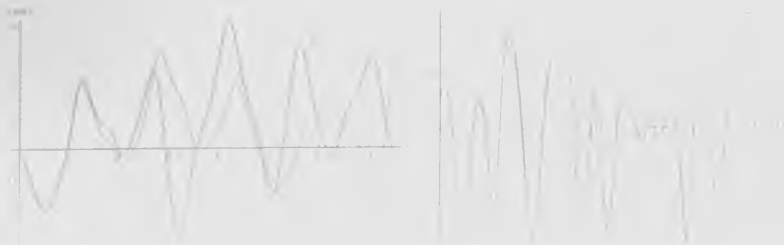


Рисунок 3 – Зависимости проекций угловой скорости и единичного вектора вертикали на ось x ССК от времени для случая Ковалевской (1 – без жидкости, 2 – с жидкостью)

Таким образом, в работе получены математические модели движения твердого тела с жидкостью большой вязкости, заполняющей сферическую полость, при параметрах интегрируемых случаев. Численное интегрирование уравнений движения показало, что движения систем с жидкостью и без неё сходны, а, следовательно, для исследования движения возмущённых систем можно применить асимптотические методы хотя бы на начальном этапе движения.

Для случая движения твердого тела относительно центра масс, совпадающим с началом отсчета ССК и рассматриваемое тело является динамически симметричным, получены аналитические зависимости параметров движения от времени методом Пуанкаре [3]:

$$\begin{aligned}
 p(t) = & C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) + \frac{\varepsilon^2}{k} [C_1 \sin(-kt) - C_2 \cos(-kt)] + \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{k} \left[\left(\frac{M_1 t + H_1}{N} + \frac{2M_1 k}{N^2} + C_2 \right) \cos(kt) - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{M_1 t + H_1}{N} - \frac{2M_1 k}{N^2} + C_1 \right) \sin(kt) + \left(\frac{U_1 t}{2(N-3k^2)} + \frac{2U_1 k}{(N-3k^2)^2} \right) \cos(2kt) - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{U_1 t}{2(N-3k^2)} - \frac{2U_1 k}{(N-3k^2)^2} \right) \sin(2kt) \right], \\
 q(t) = & C_1 \cos(-kt) + C_2 \sin(-kt) + \varepsilon \left[\left(\frac{M_1 t + H_1}{N} + \frac{2M_1 k}{N^2} + C_2 \right) \sin(kt) + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{M_1 t + H_1}{N} - \frac{2M_1 k}{N^2} + C_1 \right) \cos(kt) + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{U_1 t}{N-3k^2} + \frac{4U_1 k}{(N-3k^2)^2} \right) \sin(2kt) + \left(\frac{U_1 t}{N-3k^2} - \frac{4U_1 k}{(N-3k^2)^2} \right) \cos(2kt) \right].
 \end{aligned}$$

$$r(t) = r_0 + \varepsilon \frac{r_0}{A} (A - C) (C_1^+ + C_2^-).$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, M_1, M_2, H_1, H_2, U_1, U_2, U_3, \lambda$ – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров системы и начальных условий.

На рисунке 4 представлены зависимости проекции угловой скорости от времени, полученные численным интегрированием и с помощью аналитического решения.



Рисунок 4 – Зависимость проекции r угловой скорости от времени (1 – аналитическое решение, 2 – численное интегрирование)

Из графика видно, что аналитическое решение довольно хорошо совпадает с численным на начальном интервале времени, что соответствует теории метода Пуанкаре.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ 15-08-05934 А).

Библиографический список

1. Черноусько, Ф.Л. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость [Текст] / Ф.Л. Черноусько. – М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1968. – 286 с.
2. Маркеев, А.П. Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов [Текст] / А.П. Маркеев. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 416 с.
3. Монсеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики [Текст] / Н.Н. Монсеев // М.: Наука. – 1969. – 380 с.