

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОРБИТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ ПОД ЮЖНЫМ ПОЛЮСОМ ЛУНЫ

Введение. В недалёком будущем освоение и использование Луны будет главной задачей космических исследований, в том числе, исследования обратной стороны и полярных областей Луны. Благодаря затенению Луны обратная сторона может обеспечить среду без электромагнитных помех от Земли для исследования дальнего космоса [0]. Из-за концентрированного распределения воды в лунных грунтах и во льдах полярные области могут быть использованы для создания постоянных баз [0]. Орбиты около точки L2 в системе Земля-Луна (ЗЛЛ2) вполне могут обеспечить необходимые услуги связи для этих областей. Спутник-ретранслятор «Цюэцяо», запущенный китайским национальным космическим управлением в 2018 г., является первым КА, успешно осуществившим длительную работу вблизи ЗЛЛ2 [0]. Он осуществлял связь с посадочным модулем «Чаньэ-4» на обратной стороне Луны. В будущем вблизи ЗЛЛ2 запланированы миссии по созданию орбитального склада топлива, электромагнитного эксперимента на поверхности Луны (LuSEE-Night) и др. [4, 5].

В данной работе исследуются цилиндрические орбиты с использованием только солнечного паруса. В исследовании было установлено, что скорость изменения углов наклона в процессе поддержания и коррекции орбиты очень медленна. Поэтому установили устройства управления отражательной способностью, расположенных симметрично на части поверхности паруса, для реализа-

ции управления давлением солнечного света и также углами наклона солнечного паруса.

Линеаризация уравнений движения. Для описания движения небесных тел и КА используются три системы координат (рис. 1). Первая – инерциальная геоцентрическая система координат $OXYZ$. Вторая – вращающаяся система координат $oxuz$: начало координат o находится в центре масс системы Земля-Луна; ось oz перпендикулярна плоскости орбиты Луны и совпадает с направлением угловой скорости орбиты Луны; ось ox направлена на центр масс Луны; оси ox , ou и oz образуют правую систему координат. Направление нормали солнечного паруса определяется относительно направления солнечного света, с которым связана третья система координат $o_c x_c y_c z_c$, у которой ось $o_c x_c$, совпадает с гелиоцентрическим радиус-вектором КА \mathbf{r}_c и $o_c z_c$, с осью OZ .

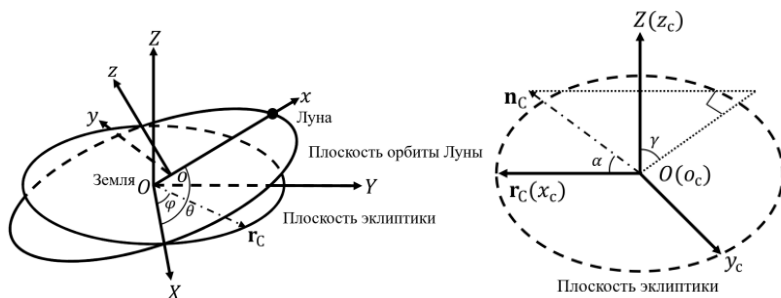


Рис. 2. Используемые системы координат

Предположим, что Луна вращается вокруг Земли равномерно по круговой орбите, тогда движение КА в системе координат $oxuz$ может быть описано с помощью модели круговой ограниченной задачи трёх тел

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega}_L \times \dot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

$$U(\mathbf{r}) = -\left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}|^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right), \quad (1)$$

где \mathbf{r} – вектор положения КА; $\boldsymbol{\omega}_L$ – угловая скорость Луны вокруг Земли; \mathbf{a} – ускорение тяги; $U(\mathbf{r})$ – псевдо-потенциальная функция; $\mu = m_L/(m_L + m_3)$, m_L – масса Луны, m_3 – масса Земли; r_1 , r_2 – расстояния КА от Земли и Луны. Все величины в уравнении

$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}|^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \mu/r_2$, (1) представлены в безразмерной форме.

Точки либрации L1~L5 представляют собой группу точек равновесия в круговой ограниченной задаче трёх тел, координаты которых могут быть получены путём решения $\nabla U(\mathbf{r}) = 0$. Координата точки L2 имеет вид $\mathbf{r}_{L2} = [x_{L2} \ 0 \ 0]^T$. Запишем малое смещение относительно точки L2 как $\delta\mathbf{r} = [\xi \ \eta \ \zeta]^T$. Разложив гравитационный псевдо-потенциал $U(\mathbf{r})$ в ряды Лежандра до 2-го порядка, получим

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + (1-\mu) \left[\frac{2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}{2(x_{L2} + \mu)^3} - \frac{\xi}{(x_{L2} + \mu)^2} + \frac{1}{x_{L2} + \mu} \right] + \\ + \mu \left[\frac{2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}{2(x_{L2} - 1 + \mu)^3} - \frac{\xi}{(x_{L2} - 1 + \mu)^2} + \frac{1}{x_{L2} - 1 + \mu} \right].$$

Поэтому линеаризованное уравнение движения выглядит как

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + U_{xx}\xi = a_x, \\ \dot{\eta} + 2\dot{\xi} + U_{yy}\eta = a_y, \\ \ddot{\zeta} + U_{zz}\zeta = a_z, \end{cases} \begin{cases} U_{xx} = -2 \left[\frac{1-\mu}{(x_{L2}+\mu)^3} + \frac{\mu}{(x_{L2}+\mu-1)^3} \right] - 1, \\ U_{yy} = \frac{1-\mu}{(x_{L2}+\mu)^3} + \frac{\mu}{(x_{L2}+\mu-1)^3} - 1, \\ U_{zz} = \frac{1-\mu}{(x_{L2}+\mu)^3} + \frac{\mu}{(x_{L2}+\mu-1)^3}. \end{cases} \quad (2)$$

Аналитическое определение цилиндрической орбиты.

Управление движением будет осуществляться с помощью устройств управления отражательной способностью. Для упрощения задачи предположим, что такое устройство может только переключаться между двумя состояниями: полное поглощение, и

полное отражение солнечных фотонов, как обычные плёнки паруса. В зависимости от требований к поддержанию и коррекции орбиты, могут устанавливаться различные пропорции площади таких устройств. В нашем исследовании это отношение составило 50%. Обозначив текущее отношение площади паруса, находящегося в первом состоянии к общей площади u , ускорение от давления солнечного света \mathbf{a}_C определяется

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= u \cdot \frac{\kappa}{2} (\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}_C, \\ \mathbf{a}_2 &= (1 - u) \cdot \kappa (\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n})^2 \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \frac{\kappa}{2} \cdot [u(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{r}_C + 2(1 - u)(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n})^2 \cdot \mathbf{n}], \end{aligned} \quad (3)$$

где κ – характерное ускорение солнечного паруса; \mathbf{r}_C – вектор направления солнечного света; \mathbf{n} – вектор направления нормали солнечного паруса.

Если считать, что Земля движется по круговой орбите, вектор направления солнечного излучения \mathbf{r}_C поворачивается равномерно относительно Земли с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_3$. Следовательно, в инерциальной системе $OXYZ$ \mathbf{r}_C можно выразить как $\mathbf{r}_{CI} = [\cos \varphi \quad \sin \varphi \quad 0]^T$, где $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_3 t$ – угол направления солнечного излучения.

Взаимное положение инерциальной системы координат $OXYZ$ и вращающейся системы координат $oxuz$ определяется тремя величинами: наклоном i между плоскостью эклиптики и плоскостью орбиты Луны, углом θ между Луной и восходящим узлом, и смещением центра масс системы Земля-Луна относительно центра масс Земли. Следовательно, вектор направления солнечного света во вращающейся системе координат равен

$$\mathbf{r}_{CB} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_{CI} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \cos i \sin \varphi \\ -\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \cos i \sin \varphi \\ -\sin i \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Угол между плоскостью эклиптики и плоскостью орбиты Луны $i \approx 5,145^\circ$, $\cos 5,145^\circ \approx 0,99597$. Если заменить $\cos 5,145^\circ$ единицей, относительная погрешность составит около 4‰, тогда

$$\mathbf{r}_{CB} \approx \begin{bmatrix} \cos(\theta - \varphi) \\ -\sin(\theta - \varphi) \\ -\sin i \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ -\sin \lambda \\ -\sin i \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\lambda(t) = \lambda_0 + \omega_C t$, ω_C – угловая скорость вращения Солнца вокруг системы Земля-Луна. Вектор направления нормали солнечного паруса задаётся двумя углами $\mathbf{n}_C = [\cos \alpha \quad \sin \alpha \sin \gamma \quad \sin \alpha \cos \gamma]^T$, где α – угол между направлением нормали паруса \mathbf{n} и \mathbf{r}_C , γ – угол поворота \mathbf{n} по часовой стрелке от плоскости $x_C o_C z_C$. Во вращающейся системе координат, получим

$$\mathbf{n}_B \approx \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \sin \gamma + \sin \theta \sin i \sin \alpha \cos \gamma, \\ -\cos \alpha \sin \lambda + \sin \alpha \cos \lambda \sin \gamma + \cos \theta \sin i \sin \alpha \cos \gamma, \\ -\sin i (\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \sin \gamma) + \sin \alpha \cos \gamma. \end{bmatrix} \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в формулу (3), проекции ускорения от светового давления на оси вращающейся системе координат получим

$$\begin{cases} a_x = \frac{\kappa}{2} u \cos \alpha \cos \lambda + \kappa(1 - u) \cos^2 \alpha \dots \\ (\cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \lambda \sin \gamma + \sin \theta \sin i \sin \alpha \cos \gamma), \\ a_y = -\frac{\kappa}{2} u \cos \alpha \sin \lambda + \kappa(1 - u) \cos^2 \alpha \dots \\ (-\cos \alpha \sin \lambda + \sin \alpha \cos \lambda \sin \gamma + \cos \theta \sin i \sin \alpha \cos \gamma), \\ a_z = -\frac{\kappa}{2} u \cos \alpha \sin i \sin \varphi + \kappa(1 - u) \cos^2 \alpha \dots \\ [-\sin i (\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \sin \gamma) + \sin \alpha \cos \gamma]. \end{cases} \quad (8)$$

Если углы α и γ остаются постоянными в процессе генерации цилиндрической орбиты, то возможно получение частного решения

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cos \lambda + \xi_1 \sin \lambda + \xi_2 \sin \theta, \\ \eta(t) = \eta_0 \sin \lambda + \eta_1 \cos \lambda + \eta_2 \cos \theta, \\ \zeta(t) = \zeta_0 + \zeta_1 \sin \varphi + \zeta_2 \cos \varphi. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в уравнение движения (2), для коэффициентов в (9) можно получить следующие соотношения

$$\begin{cases} -\xi_0 \omega_C^2 - 2\eta_0 \omega_C + U_{xx} \xi_0 = \frac{\kappa}{2} u \cos \alpha + \kappa(1-u) \cos^3 \alpha, \\ -\xi_1 \omega_C^2 + 2\eta_1 \omega_C + U_{xx} \xi_1 = \kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma, \\ -\xi_2 \omega_L^2 + 2\eta_2 \omega_L + U_{xx} \xi_2 = \kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma \sin i; \\ \\ -\eta_0 \omega_C^2 - 2\xi_0 \omega_C + U_{yy} \eta_0 = -\frac{\kappa}{2} u \cos \alpha - \kappa(1-u) \cos^3 \alpha, \\ -\eta_1 \omega_C^2 + 2\xi_1 \omega_C + U_{yy} \eta_1 = \kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma, \\ -\eta_2 \omega_L^2 + 2\xi_2 \omega_L + U_{yy} \eta_2 = \kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma \sin i; \\ \\ \begin{cases} U_{zz} \zeta_0 = \kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \cos \gamma, \\ -\zeta_1 \omega_3^2 + U_{zz} \zeta_1 = -\left[\frac{\kappa}{2} u \cos \alpha + \kappa(1-u) \cos^3 \alpha \right] \sin i, \\ -\zeta_2 \omega_3^2 + U_{zz} \zeta_2 = -\kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \gamma \sin i. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения (4) допускают аналитическое решение. Поскольку ζ_1 и ζ_2 пропорциональны $\sin i$, они намного меньше, чем ζ_0 . То есть высота подъёма орбиты в основном определяется ζ_0 . Для цилиндрической орбиты под южным полюсом Луны, максимальная высота соответствует $\gamma_0 = 180^\circ, \alpha_0 = \arcsin 1/\sqrt{3}$. Подставляя $\gamma_0 = 180^\circ$ в (4), получим

$$\begin{aligned} \xi_1 = \eta_1 = \zeta_2 = 0, \\ \xi_0 = \frac{(\omega_C^2 + 2\omega_C - U_{yy}) \left[\frac{\kappa}{2} u \cos \alpha + \kappa(1-u) \cos^3 \alpha \right]}{-U_{xx} U_{yy} + (U_{xx} + U_{yy} + 4)\omega_C^2 - \omega_C^4}, \\ \eta_0 = \frac{(-\omega_C^2 - 2\omega_C + U_{xx}) \left[\frac{\kappa}{2} u \cos \alpha + \kappa(1-u) \cos^3 \alpha \right]}{-U_{xx} U_{yy} + (U_{xx} + U_{yy} + 4)\omega_C^2 - \omega_C^4}, \\ \xi_2 = -\frac{(\omega_L^2 + 2\omega_L - U_{yy}) [\kappa(1-u) \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin i]}{-U_{xx} U_{yy} + (U_{xx} + U_{yy} + 4)\omega_L^2 - \omega_L^4}, \end{aligned}$$

$$\eta_2 = -\frac{(\omega_L^2 + 2\omega_L - U_{xx})[\kappa(1-u)\cos^2\alpha\sin\alpha\sin i]}{-U_{xx}U_{yy} + (U_{xx} + U_{yy} + 4)\omega_L^2 - \omega_L^4},$$

$$\zeta_0 = -\frac{\kappa(1-u)\cos^2\alpha\sin\alpha}{U_{zz}},$$

$$\zeta_1 = \frac{[\kappa u + 2\kappa(1-u)\cos^2\alpha]\cos\alpha\sin i}{2(\omega_3^2 - U_{zz})}.$$

Аналитическое решение для цилиндрической квазипериодической орбиты с солнечным парусом вблизи ЗЛЛ2 имеет вид

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cos \lambda + \xi_2 \sin \theta, \\ \eta(t) = \eta_0 \sin \lambda + \eta_2 \cos \theta, \\ \zeta(t) = \zeta_0 + \zeta_1 \sin \varphi. \end{cases}$$

Поскольку $\sin i \ll 1$, $\xi_0 \gg \xi_2$, $\eta_0 \gg \eta_2$, $\zeta_0 \gg \zeta_1$ движение на таких орбитах представляет собой комбинацию основного периодического колебания и малого периодического колебания. Такие орбиты называются квазипериодическими. Наиболее интересными являются орбиты, высота подъёма которых больше радиуса Луны $R_L = 1737,1$ км. КА, работающий на такой орбите, никогда не будет затенён Луной на линии КА-Земля. Согласно нашему исследованию, значение u , составляющее от 0,15 до 0,25, достаточно для реализации поддержания орбиты. Принимая среднее значение $u = 0,2$, можно получить, что условием того, что высота орбиты над плоскостью движения Луны больше радиуса Луны является $\frac{S}{m} > 14,15$. Учитывая, что солнечный парус Sunjammer, разработанный в США, достиг отношения $\frac{S}{m} > 45$, а уже выведенные в космос КА, такие как LightSail-2, достигли отношения $\frac{S}{m} > 6$ [6], можем полагать, что цилиндрическая орбита под южным полюсом Луны уже технически осуществима. Для

моделирования движения в этой работе использовались данные, приведённые в табл.1.

Таблица 2. Параметры орбит и КА

	α	γ	$S/m, \text{м}^2/\text{кг}$	u
квазипериодическая орбита	α_0	γ_0	18	0,15
периодическая орбита	α_0	γ_0	18	0,25

Так как уравнения квазипериодической и периодической орбит выводятся на основе линеаризации уравнения движения, с учётом приближенных соотношений (7) и малого наклонения Лунной орбиты i , имеется погрешность в определении ускорения, потребного для движения по такой орбите, и ускорением от светового давления, получаемого солнечным парусом при условии фиксации величин u , α и γ . Ускорение, потребное для поддержания орбиты, равно $\mathbf{a}_п = \ddot{\mathbf{r}}_0 + 2\boldsymbol{\omega}_л \times \dot{\mathbf{r}}_0 + \nabla U(\mathbf{r}_0)$, где \mathbf{r}_0 – вектор перемещения на квазипериодической орбите.

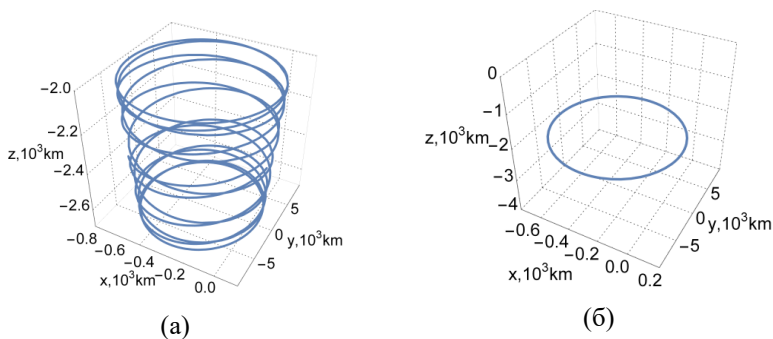


Рис. 3 (а) траектория квазипериодической орбиты;
(б) траектория периодической орбиты

Результаты расчётов показывают, что погрешность в направлении оси ox заведомо больше, чем в направлении осей oy и oz . Поскольку точки либрации являются седловыми точками псевдо-потенциальной функции $U(\mathbf{r})$ в пространстве, смещение ξ_c в направлении

x может быть наложено на опорную орбиту, чтобы скорректировать погрешность ускорения. Тогда $\xi(t) = \xi_c + \xi_0 \cos \lambda + \xi_2 \sin \theta$ или $\xi(t) = \xi_c + \xi_0 \cos \lambda$. На рис.2 показаны траектории квазипериодической орбиты и периодической орбиты. Результаты показывают, что, после добавления смещения ξ_c , относительная погрешность уменьшается на 50%. С точки зрения поддержания такой орбиты, это означает, что требуется меньшее изменение управляющих переменных и меньшее управляющее ускорение. Кроме того, полученные результаты доказывают, что, в отличие от обычных орбит, для поддержания цилиндрических орбит, требуется больший диапазон изменения управляющих величин, даже когда КА не отклоняется от опорной орбиты.

Заключение. В этой статье квазипериодические и периодические цилиндрические орбиты выводятся на основе линеаризованных уравнений движения вблизи ЗЛЛ2. Эти орбиты могут использоваться как орбиты КА-ретранслятора для обеспечения бесперебойной связи в полярных районах Луны или КА наблюдения за полярными областями Луны, плохо видимыми с поверхности Земли.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-29-01092, <https://rscf.ru/project/22-29-01092/>.

Библиографический список

1. Silber, K. Down to earth: the Apollo moon missions that never were [Электронный ресурс]: Scientific American, 2009. 7.
2. Direct evidence of surface exposed water ice in the lunar polar regions / Li, S., Lucey, P.G., Milliken, R.E., Hayne, P.O., Fisher, E., Williams, J.P., Hurley, D.M. and Elphic, R.C. // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2018. – № 115(36). – pp. 8907-8912.
3. Jones, Andrew [Электронный ресурс]: Chang'e-4 relay satellite enters halo orbit around Earth-Moon L2, microsatellite in lunar orbit.

URL: <https://spacenews.com/change-4-relay-satellite-enters-halo-orbit-around-earth-moon-4.12-microsatellite-in-lunar-orbit/> (дата обращения: 22.03.2023).

4. Zegler, F. and Kutter, B. Evolving to a depot-based space transportation architecture // AIAA Space 2010 Conference & Exposition (Anaheim, California, 02.09.2010), 2010, August. (p. 8638).

5. Department of Energy Join Forces on Innovative Lunar Experiment. [Электронный ресурс] // NASA. URL: <https://www.nasa.gov/feature/nasa-department-of-energy-join-forces-on-innovative-lunar-experiment> (дата обращения: 22.03.2023).