

ХАОТИЧЕСКИЕ ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СПУТНИКА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

В настоящее время широко изучаются возможности применения тросовых систем для многих операций в космосе, в том числе для доставки с орбиты полезных грузов на Землю и для мониторинга Земли с помощью опущенного на вертикальном тросе средства наблюдения. Космическая тросовая система (КТС) — это комплекс искусственных космических объектов (спутников, кораблей, грузов), соединённых длинными тонкими гибкими элементами (тросами, кабелями, плангами), совершающий орбитальный полёт. В наиболее простом виде — это связка двух космических аппаратов, соединённых тросом длиной в десятки или даже сотни километров. КТС отличаются от космических аппаратов традиционного типа тремя основными особенностями 1. Большая протяжённость, обеспечивающая устойчивое вертикальное положение системы на орбите, причём на концах системы создаётся малая искусственная тяжесть. 2. Гибко изменяемая конфигурация, возможность изменения длины тросов путём их выпуска и втягивания. 3. Активное взаимодействие электропроводного троса с внешней средой. В этих задачах весьма важными являются вопросы, связанные с поведением спутника относительно собственного центра масс. В зависимости от отношения моментов инерции тела, параметров троса и массы концевого груза могут наблюдаться неустойчивые положения равновесия, а в силу действия периодических возмущений, связанных с малой эксцентricностью орбиты, и возникать хаотические явления, приводящие к значительным эволюциям углового положения спутника.

Целью настоящей работы является изучение вращательного движения КТС вокруг центра масс и влияния возмущений на угловое поведение спутника методами хаотической динамики. Рассматривается движение вокруг центра масс спутника с тросом, развёрнутым по местной вертикали, под действием гравитационного момента. Гравитационное поле Земли в первом приближении можно аппроксимировать центральным ньютоновым полем, когда сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра планеты. На развёлую гантель, которую представляет собой КТС, действует гравитационный момент [1], стремящийся установить гантель вдоль местной вертикали. Кроме гравитационного момента, на гантель действует момент сил инерции в неинерциальной орбитальной системе координат. В совокупности эти два момента обеспечивают устойчивость положений равновесия, когда ось гантели совпадает с

местной вертикалью. У гантели существуют два устойчивых вертикальных положения равновесия, а также два неустойчивых горизонтальных положения равновесия вдоль касательной к орбите. Возможно возникновение малых возмущений при движении по эллиптической орбите в результате отклонения оси КТС от местной вертикали.

Уравнения, описывающие вращение КТС (состоящую из двух масс концевых точек m_1 и m_2 , связанных прямой, твёрдой связью длины l и массы m_t) в плоскости орбиты (плоскость $y-z$) и по углу крена γ в перпендикулярной плоскости (рис.1), имеют вид [2]:

$$\cos^2 \gamma [(\ddot{\alpha} + \dot{\theta}) + \{2r(\dot{l}/l) - 2\gamma \tan \gamma\}(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + 3(\mu/R_c^3) \sin \alpha \cos \alpha] = Q_\alpha/m_e l^2, \quad (1)$$

$$\ddot{\gamma} + 2r(\dot{l}/l)\dot{\gamma} + [(\ddot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + 3(\mu/R_c^3)\cos^2 \alpha] \sin \gamma \cos \gamma = Q_\gamma/m_e l^2, \quad (2)$$

где Q_α и Q_γ – обобщённые силы, соответствующие углам α и γ ; R_c и θ – радиус-вектор центра масс и угол истинной аномалии, m_e и r – соответственно эквивалентная масса системы и массовое отношение, определяемые выражениями:

$$m_e = [m_1 m_2 + (1/3)m_t(m_1 + m_2) + (1/12)m_t^2]/(m_1 + m_2 + m_t), \quad (3)$$

$$r = [m_1(m_2 + (1/2)m_t)]/[m_1 m_2 + (1/3)m_t(m_1 + m_2) + (1/12)m_t^2]. \quad (4)$$

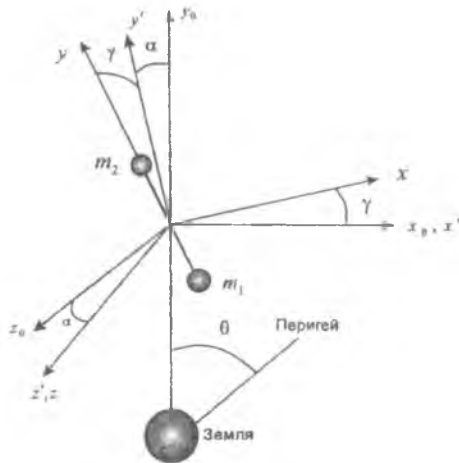


Рис 1.

Сделаем замену независимой переменной, введя угол истинной аномалии θ вместо времени t . Присоединим к уравнениям (1) и (2) уравнения движения центра масс КТС:

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2,$$

где p – параметр орбиты, e – эксцентриситет. Подставляя эти выражения в (1) и (2), получим

$$\cos^2 \gamma [\alpha'' + \{2r(\dot{l}/l) - 2\gamma' \tan \gamma - F\}(\alpha' + 1) + 3F \sin \alpha \cos \alpha] = \bar{Q}_\alpha, \quad (5)$$

$$\gamma'' + \{2r(\dot{l}/l) - F\}\gamma' + \{(\alpha' + 1)^2 + 3G \cos^2 \alpha\} \sin \gamma \cos \gamma = \bar{Q}_\gamma, \quad (6)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по углу истинной аномалии θ . Функции F и G определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F &= 2e \sin \theta / (1 + e \cos \theta), \\ G &= 1 / (1 + e \cos \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Если не учитывать действие электромагнитных сил и сил аэродинамического сопротивления, то Q_α и Q_γ равны нулю. В случае плоского движения и постоянной длины КТС уравнение (5) примет вид.

$$\alpha'' - F(\alpha' + 1) + 3G \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (8)$$

Подставив в уравнение (8) выражения (7), получим

$$\alpha'' - \frac{2e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} (\alpha' + 1) + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + e \cos \theta} = 0. \quad (9)$$

Разложим в ряд выражение в знаменателе

$$\frac{1}{1 + e \cos \theta} = 1 - e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta \dots \quad (10)$$

Для малых значений эксцентриситета e можно считать

$$\frac{1}{1 + e \cos \theta} \approx 1 - e \cos \theta. \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в уравнение (9), получим уравнение возмущенного движения вокруг центра масс КТС в плоскости орбиты:

$$\alpha'' + 3 \sin \alpha \cos \alpha = 2e \sin \theta (1 + \alpha') + 3e \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta, \quad (12)$$

что совпадает с результатами, приведенными в [1].

Согласно методу Мельникова [3], для получения условий возникновения хаотического движения необходимо аналитическое решение невозмущенного движения на сепаратрисе. Уравнение (12) для $e = 0$ принимает вид

$$\alpha'' + 3 \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (13)$$

Можно записать интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \alpha'^2 - \frac{3}{2} \cos^2 \alpha = E, \quad (14)$$

где E – полная энергия. Тогда получим

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \pm \sqrt{2E + 3 \cos^2 \alpha}. \quad (15)$$

На рис. 2 представлен фазовый портрет уравнения (15). Воспользуемся интегралом

энергии (15) и значением полной энергии в седловой точке ($E=0$), принадлежащей сепаратрисе. Уравнение сепаратрисы имеет вид

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \pm\sqrt{3} \cos \alpha. \quad (16)$$

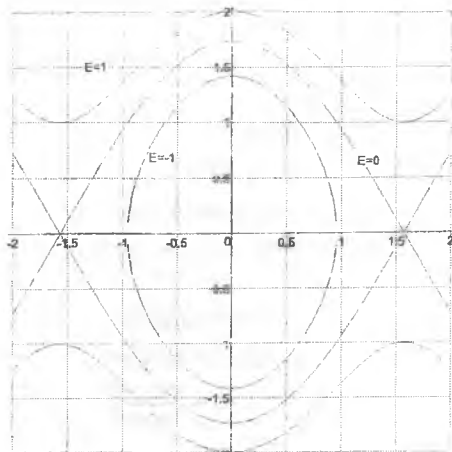


Рис 2. Фазовый портрет уравнения (15).

Разделяя переменные, получим

$$\frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \pm\sqrt{3} d\theta.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right| = \pm\sqrt{3} \theta. \quad (17)$$

Отсюда можно найти зависимость $\alpha(\theta)$

$$\alpha(\theta) = \arcsin \left(\frac{e^{\pm 2\sqrt{3}\theta} - 1}{e^{\pm 2\sqrt{3}\theta} + 1} \right). \quad (18)$$

Окончательно, решение уравнения, описывающее невозмущённое движение по сепаратрисе в области точек неустойчивого равновесия $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, запишем в удобном для использования метода Мельникова виде

$$\alpha_{\pm}(\theta) = \arcsin(\tanh(\pm 2\sqrt{3}\theta)), \quad (19)$$

$$\sigma_{\pm}(\theta) = \pm \frac{2\sqrt{3}\theta \pm \sqrt{3}\theta}{e^{\pm 2\sqrt{3}\theta} + 1}. \quad (20)$$

Это решение является частным случаем более общего решения, полученного в [4].

Рассмотрим возмущённую систему (12). Заменяем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (12) двумя уравнениями первого порядка

$$\alpha' = \sigma = f_1 + g_1, \quad (21)$$

$$\sigma' = 2e \sin \theta (1 + \alpha') + 3e \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta - 3 \sin \alpha \cos \alpha = f_2 + g_2,$$

где $f_1 = \sigma$, $g_1 = 0$, $f_2 = -3 \sin \alpha \cos \alpha$, $g_2 = 2e \sin \theta (1 + \alpha') + 3e \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta$.

Функция Мельникова для возмущённой системы (21) примет вид [4]

$$M^\pm(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_2 g_2 - f_2 g_1) d\theta. \quad (22)$$

Исследуем поведение возмущённой системы (12) вблизи сепаратрис путём численного интегрирования методом Рунге-Кутты. Согласно формуле (15), угол α в седловой точке на границе между областями равен $\pm \frac{\pi}{2}$.

При моделировании движения была использована весьма простая модель, учитывающая только возмущения от малой эксцентricности орбиты. На рисунке 3 (а-е) представлены результаты моделирования, показывающие увеличение хаоса с ростом эксцентриситета.

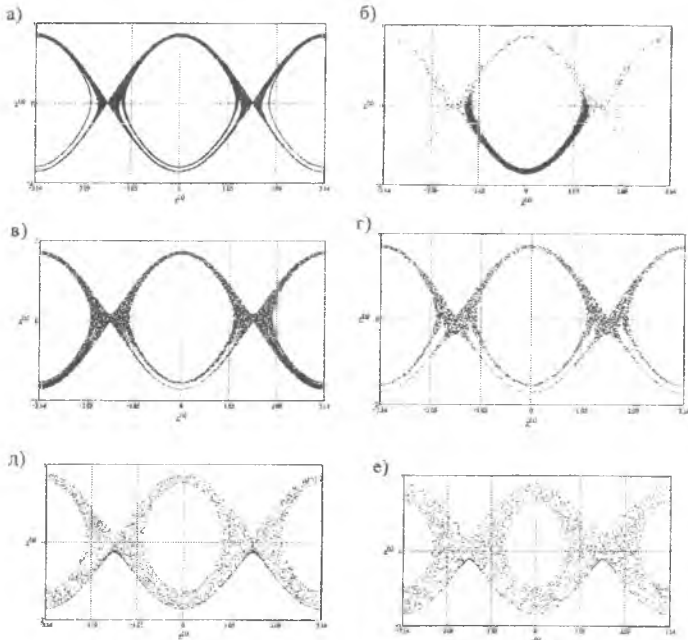


Рис 3. Движение в окрестности сепаратрисы

При нулевом эксцентриситете движение является невозмущённым. С увеличением эксцентриситета при попадании КТС в область сепаратрисы движение становится хаотическим с возникновением новых зон устойчивых колебаний (рис. 3б). Возможны

многократные переходы от колебательного режима движения к вращательному. Ширина области хаотических переходов от колебаний к вращению увеличивается с ростом эксцентриситета.

Таким образом, установлено, что хаотические вращения КТС могут возникать в окрестности невозмущённой сепаратрисы при самых малых значениях эксцентриситета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00384а).

Библиографический список

1. Белецкий, В.В., Левин, Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990.
2. A.K. Misra, M.S. Nixon, V.J. Modi, Nonlinear dynamics of twobody tethered satellite systems: constant length case, *Journal of Astronautical Sciences* 49 (2001) 219–236.
3. Мельников, В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях. Труды Московского математического общества. 12, 1963, 1–56.
4. Vladimir S. Aslanov Chaotic Behavior of the Biharmonic Dynamics System. Research Article/ *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*/ doi:10.1155/2009/319179- Volume 2009 (2009), Article ID 319179, 18 pages.