УДК 62–50

Коптев А.Н., Шварц Л.С., Дьячков С.А.

ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВИАТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ

Задача описания функционирования авиатранспортной системы в целом на основе заданных алгоритмов поведения её отдельных элементов – аэропортов является центральной задачей создания ХАБов, т. е. структур, интегрирующих отдельные пассажиропотоки.

С общих позиций исследование поведения такой системы может быть сведено к изучению системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right\},$$

если считать, что переменной x_i распоряжается некий (фиктивный) элемент A_i, алгоритмом поведения которого является $\dot{x}_i = f_i(x_1,\dots,x_n)$. Несмотря на определённую простоту примера, когда речь идёт о проблематике коллективного поведения, в известной мере он отражает существо дела и представляет собой вариант постановки задачи в экономике такого поведения.

Пусть система состоит из *n* взаимосвязанных элементов A_i (i = 1, …, *n*). Элемент A_i распоряжается выбором величины $x_i \in [v_i^0, w_i^0]$, состояние системы характеризуется вектором $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_n\}$. Множество допустимых состояний системы

$$< v^0, w^0 >= [v_0^1, w_0^1]\times\dots\times[v_0^n, w_0^n].$$

Для каждого i при любом допустимом $x \in < v^0, w^0 >$ существует единственная точка

$$\tilde{x}_i = f_i(x) \in [v_i^0, w_i^0],$$

которую будем называть положением цели i-го элемента.

Время функционирования системы может быть дискретным (разбито на периоды с номерами k = 0, 1, …) и непрерывным. В том и другом случае гипотеза о поведении элементов состоит в следующем (аксиома индикаторного поведения): каждый элемент A_i с течением времени изменяет значение собственной переменной в направлении к текущему положению цели $\tilde{x}_i$, т. е. движется по направлению к поверхности $x_i = f_i(x)$.

В дискретном случае подобная тактика поведения может быть описана итерационной процедурой

$$\forall_i, k : x_i^{k+1} = x_i^k + \gamma_i^k [f_i(x^k) - x_i^k], \gamma_i^k \in [0, 1], \tag{1}$$

где x_i^k – точка на сегменте $[v_i^0, w_i^0]$, которую элемент A_i выбирает в k-м периоде.

Конкретное значение γ_i^k, определяющее величину шага $\Delta x_i^k = x_i^{k+1} - x_i^k$, может зависеть от времени, текущего состояния и некоторых других факторов α, внешних по отношению к модели. Ограничение $\gamma_i^k \le 1$ означает, что в системе отсутствует «перерегулирование», т. е. каждый A_i делает шаг не больший, чем расстояние по направлению x_i от x^k до поверхности $x_i = f_i(x)$. Для частного случая двухэлементной системы, в которой $f_i(x)$ не зависит явно от x_i, геометрический аналог процедуры (1) изображён на рис. 1.

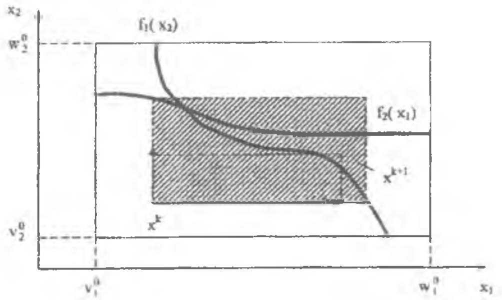

Рис. 1. Геометрический аналог процедуры

В соответствии с (1) в (k + 1)-й момент времени система может попасть в любую точку заштрихованного прямоугольника.

В случае непрерывного времени гипотеза индикаторного поведения приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\forall i, t \ge 0 : \dot{x}_i = \overline{\gamma}_i(t, x, \alpha)[f_i(x) - x_i], \overline{\gamma}_i \ge 0, \tag{2}$$

которая означает, что направление скорости $\dot{x}_i$ совпадает с направлением отрезка $f_i(x) - x_i$, т е. $\text{sign } \dot{x}_i = \text{sign } [f_i(x) - x_i]$.

Каждая конкретная реализация процесса (2) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\forall i, t \ge 0 : \dot{x}_i = \gamma_i(t)[f_i(x) - x_i], \gamma_i \ge 0, \tag{3}$$

т. е. каждой реализации соответствует свой набор функций $\gamma_i(t)$, которые в дальнейшем предполагаются ограниченными.

Процедуры (1) и (3) будем записывать далее также в векторном виде

$$\forall k: x^{k+1} = x^k + \Gamma_k[F(x^k) - x^k], \tag{4}$$

$$\forall t: \dot{x} = \Gamma(t)[F(x) - x], \tag{5}$$

где $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, $\Gamma_k = diag\{\gamma_1^k, \ldots, \gamma_m^k\}$, $\Gamma(t) = diag\{\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\}$.

Практически важным является вопрос о существовании у системы положения равновесия. Как следует из описания динамики, положение равновесия системы – это неподвижная точка оператора межэлементных связей F(x), т. е. точка x^*, удовлетворяющего уравнению:

$$x = F(x). \tag{6}$$

Второй вопрос – единственность решения (6), т. е. единственность положения равновесия.

Отметим, что указанные задачи статики могут ставиться в несколько иной форме. Дело в том, что исходное описание системы нередко бывает заданным не в виде оператора межэлементных связей F(x), а в виде оператора $G(x) = \{g_1(x), \ldots, g_n(x)\}$, который связан с F(x) соотношениями

$$\forall_i: \quad \mathrm{sign}\, g_i(x) = \mathrm{sign}(f_i(x) - x_i));$$

$$\forall_i: \quad g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0,$$

и каждая функция $g_i(x)$ убывает по x_i. Такие функции $g_i(x)$ называются функциями-индикаторами. Динамику системы в этом случае удобнее изучать непосредственно в форме

$$\forall t: \dot{x} = \gamma_i(t) g_i(x), \gamma_i \geq 0$$

что эквивалентно предыдущему. При этом задачи статики более естественно относить к вопросу о существовании и единственности решения уравнения

$$G(x) = 0. \tag{7}$$

Следующие вопросы относятся к динамике системы: устойчиво ли равновесие, сходятся ли к нему все траектории из любого начального положения, обладает ли система свойством асимптотической устойчивости и т.п. Процедуры типа (4), (5), по существу, описывают не одну динамическую систему, а целый ансамбль динамических систем, и каждой системе ансамбля соответствует своя траектория (реализация). Поэтому различные свойства устойчивости должны быть определены.

Остановимся на вопросе о сходимости траекторий к положению равновесия. В рамках указанных ограничений $\gamma_i^k \in [0, 1]$, $\gamma_i(t) \geq 0$ элементы могут просто «стоять на месте» ($\gamma_i^k \equiv 0$, $\gamma_i(t) \equiv 0$) или «сходиться» к положению, отличному от равновесного, если γ_i^k ($\gamma_i(t)$) с ростом времени слишком быстро стремятся к нулю. Чтобы исключить эти патологические и малоинтересные в содержательном отношении случаи, оказывается достаточным, соответственно в дискретном и непрерывном вариантах, наложить дополнительные ограничения:

$$\forall i: \sum_k^{\infty} \gamma_i^k = \infty, \quad \int_0^{\infty} \gamma_i(t)dt = \infty. \tag{8}$$

Траектории, удовлетворяющие этим условиям, называются невырожденными. Содержательный смысл невырожденности траектории заключается в том, что в системе не существует слишком «ленивых» элементов, которые бы «успокаивались», не достигнув цели.

В качестве примера рассмотрим случай, когда аэропорты интерпретируются игроками в авиатранспортной системе.

Пусть элементы A_i являются игроками, причем x_i – стратегия A_i, а $D_i(x)$ – функция выигрыша A_i. Положение цели i-го элемента естественно определить как положение условного максимума его функции выигрыша (по собственной переменной при фиксированных стратегиях остальных игроков):

$$\forall_i: D_i(x_1,\ldots,x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1},\ldots, x_n) = \max_{x_i} D_i(x).$$

Неподвижная точка оператора F(x) будет здесь точкой Нэша [1]. Если суммарный выигрыш каждого элемента складывается из его выигрышей в последовательности партий, то представляется естественным считать, что тактика игроков имеет вид (1). Тот факт, что игроки в действительности используют весьма различные соображения для выбора шага Δx_i^k и это приводит к последовательностям $\{\gamma_i^k\}$ весьма неопределённого вида, может объясняться двумя обстоятельствами. Во-первых, полный шаг ($\gamma_i^k = 1$), который по первому впечатлению представляется наиболее выгодным, в результате совместных действий остальных элементов может приводить к уменьшению ожидаемого выигрыша A_i, что заставляет элементы действовать более осторожно. Во-вторых, определение истинного положения цели бывает затруднено. При этом элемент определяет лишь направление роста своего выигрыша и делает шаг в этом направлении.

Библиографический список

1. Оуэн, Г. Теория игр [Текст]/ Г. Оуэн. – М.: Мир, 1971. – 545 с.