УДК 531.38

Алексеев А.В., Дорошин А.В.

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ СООСНЫХ ТЕЛ С МЕДЛЕННО ВРАЩАЮЩИМИСЯ РОТОРАМИ

Исследуется пространственное движение вокруг центра масс системы соосных тел, состоящей из несущего тела и трех динамически симметричных роторов, вращающихся относительно главных осей инерции системы. Соосные системы находят приложение в практических задачах механики космического полета, например, при исследовании движения космических аппаратов (КА) с двойным вращением, спутников-гиростатов, а также КА, содержащих массивные вращающиеся элементы [1].

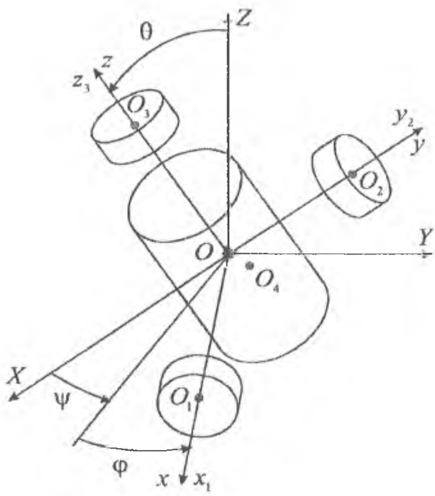

Рис.1. Схема механической системы, используемые системы координат и углы ориентации

Введем следующие системы координат (рис.1): $OXYZ$ – кенигова система координат с началом в центре масс системы – точке O; $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с несущим телом (тело 4); $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$ – системы координат, жестко связанные с роторами (с телами 1, 2, 3, соответственно), вращающиеся относительно системы $OXYZ$. Оси Ox_1, Oy_2, Oz_3 являются осями вращения соответствующих роторов. Оси вращения роторов совпадают с осями системы координат, связанной со статором Ox, Oy, Oz. Положение тела 4 относительно системы $OXYZ$ характеризуется углами Эйлера. Положение роторов относительно статора описывается углами относительного закручивания α, β, γ тел 1, 2, 3.

Уравнения движения свободной системы соосных тел можно получить на основе теоремы об изменении кинетического момента [2], а также с помощью уравнений Лагранжа второго рода, соответствующих углам относительного закручивания:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr + A_1\dot{\sigma}_1 + C_3 q\sigma_3 - B_2 r\sigma_2 = 0, \\ B\dot{q} + (A - C)pr + B_2\dot{\sigma}_2 + A_1 r\sigma_1 - C_3 p\sigma_3 = 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq + C_3\dot{\sigma}_3 + B_2 p\sigma_2 - A_1 q\sigma_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) = M_\alpha, \\ B_2(\dot{q} + \dot{\sigma}_2) = M_\beta, \\ C_3(\dot{r} + \dot{\sigma}_3) = M_\gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, r – проекции вектора угловой скорости несущего тела на оси связанной с ним системы координат; $A = \sum_{i=1}^{4} A_i$, $B = \sum_{i=1}^{4} B_i$, $C = \sum_{i=1}^{4} C_i$ – суммарные моменты инерции; A_i, B_i, C_i $(i = 1,...,4)$ – моменты инерции каждого из тел системы относительно подвижных систем координат; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – относительные угловые скорости вращения роторов; $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma$ – моменты внутреннего взаимодействия между соосными телами, обеспечивающие необходимый закон вращения роторов.

Система динамических уравнений (1) дополняется кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = r - ctg\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi), && \dot{\psi} = \frac{1}{\sin\theta}(p\sin\varphi + q\cos\varphi), \\ &\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, && \dot{\alpha} = \sigma_1,\ \dot{\beta} = \sigma_2,\ \dot{\gamma} = \sigma_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть относительные угловые скорости вращения роторов являются постоянными и малыми по сравнению с угловой скоростью несущего тела, а система является динамически симметричной ($A = B$). Уравнения (1) приводятся к безразмерному виду:

$$\begin{cases} \overline{A}\dot{\overline{p}} + (\overline{C} - \overline{A})\overline{q}\overline{r} = \varepsilon(\overline{B}_2\overline{r}\overline{\sigma}_2 - \overline{C}_3\overline{q}\overline{\sigma}_3), \\ \overline{A}\dot{\overline{q}} + (\overline{A} - \overline{C})\overline{p}\overline{r} = \varepsilon(\overline{C}_3\overline{p}\overline{\sigma}_3 - \overline{A}_1\overline{r}\overline{\sigma}_1), \\ \overline{C}\dot{\overline{r}} = \varepsilon(\overline{A}_1\overline{q}\overline{\sigma}_1 - \overline{B}_2\overline{p}\overline{\sigma}_2), \end{cases} \tag{3}$$

где $\tau = t\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ – безразмерное время, символ «точка» – означает дифференцирование по безразмерному времени τ, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}}$ – малый параметр.

Получим аналитическое решение системы (3) на основе метода Пуанкаре [3] с точностью порядка ε. Решение ищется в следующем виде:

$$\bar{p} = \bar{p}_{II} + \varepsilon \tilde{\bar{p}}, \qquad \bar{q} = \bar{q}_{II} + \varepsilon \tilde{\bar{q}}, \qquad \bar{r} = \bar{r}_{II} + \varepsilon \tilde{\bar{r}}, \tag{4}$$

где решение порождающей системы (системы (3) при $\varepsilon = 0$) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{p}_{II} = \bar{p}_0 \cos a_0 \bar{r}_0 \tau + \bar{q}_0 \sin a_0 \bar{r}_0 \tau, \\ \bar{q}_{II} = -\bar{p}_0 \sin a_0 \bar{r}_0 \tau + \bar{q}_0 \cos a_0 \bar{r}_0 \tau, \qquad a_0 = \dfrac{A - C}{A}. \\ \bar{r}_{II} = \bar{r}_0, \end{cases} \tag{5}$$

Решение для поправок ($\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}}, \tilde{\bar{r}}$), находится из системы (3) после подстановки в нее (4) и (5) и для одной из поправок принимает вид:

$$\tilde{\bar{p}}(\tau) = -\frac{\bar{A}_1 \bar{\sigma}_1}{\bar{B}_2 \bar{\sigma}_2} \frac{a^0}{\lambda} + \left(\frac{a^0}{\lambda} - \frac{a^{22}}{\lambda} \right) \sin \lambda \tau + \left(\frac{A_1 \sigma_1}{B_2 \sigma_2} \frac{a^0}{\lambda} + \frac{a^{21}}{\lambda} \right) \cos \lambda \tau + a^{11} \tau \sin \lambda \tau +$$
$$+ a^{12} \tau \cos \lambda \tau + \frac{a^{22}}{\lambda} \sin 2\lambda \tau - \frac{a^{21}}{\lambda} \cos 2\lambda \tau,$$

где $\lambda = a_0 \bar{r}_0$, а a^{ij}, a^{k} – постоянные, определяющиеся из начальных условий движения.

На основании метода Пуанкаре также решается задача Дарбу, которая заключается в нахождении углов Эйлера по известным зависимостям угловых скоростей. Углы Эйлера будем искать, решая кинематические уравнения Эйлера с точностью порядка ε:

$$\theta = \theta_{II} + \varepsilon \tilde{\theta}, \qquad \varphi = \varphi_{II} + \varepsilon \tilde{\varphi}, \qquad \psi = \psi_{II} + \varepsilon \tilde{\psi}. \tag{6}$$

Пусть направление оси OZ совпадает с неизменным направлением вектора кинетического момента [2]. Тогда, проецируя вектор кинетического момента на оси связанной с несущим телом системы координат, получим три алгебраических уравнения для $\theta_{II}, \varphi_{II}, \psi_{II}$, решения которых имеют вид:

$$\theta_{II} = \theta_0, \qquad \varphi_{II} = \lambda_1 t + \varphi_0, \qquad \psi_{II} = nt + \psi_0, \tag{7}$$

где постоянные $\lambda_1, n, \theta_0, \varphi_0, \psi_0$ определяются из начальных условий.

Поправки $\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ определяются из кинематических уравнений Эйлера (2) после подстановки в них выражений (4) – (7). Решение для угла нутации можно записать следующим образом:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \left\{ \left(\frac{d_2^{00}}{n_1} - \frac{d_1^{01}}{n \sin \theta_0} - \frac{d_1^{11} \lambda_1 - d_2^{12} n_1 \sin^2 \theta_0}{n^2 - \lambda_1^2} \right) \sin nt + \left(\frac{d_1^{00}}{n \sin \theta_0} - \frac{d_2^{01}}{n^2} + \frac{d_2^{11} \lambda_1 + d_1^{12} n_1}{n^2 - \lambda_1^2} \right) \cos nt + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d_1^{01}}{n_1 \sin^2 \theta_0} - \frac{d_2^{00}}{n_1} \right) - \frac{d_2^{01}}{n_1} t + \frac{d_1^{12} \lambda_1 - d_2^{11} n_1 \sin^2 \theta_0}{n^2 - \lambda_1^2} \sin \lambda_1 t + \frac{d_1^{11} \lambda_1 - d_2^{12} n_1 \sin^2 \theta_0}{n^2 - \lambda_1^2} \cos \lambda_1 t \right\}, \tag{8}$$

где величины n_1, d_k^η определяются из начальных условий.

На рис.2 и 3 проведено сравнение результатов, полученных по аналитическим зависимостям для параметров движения, с результатами численного интегрирования.

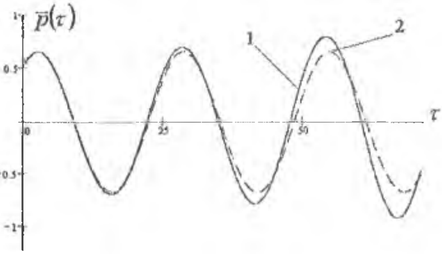

Рис. 2. Зависимость безразмерной угловой скорости $\overline{p}$ от безразмерного времени:
1– аналитическая зависимость, 2 – численное интегрирование

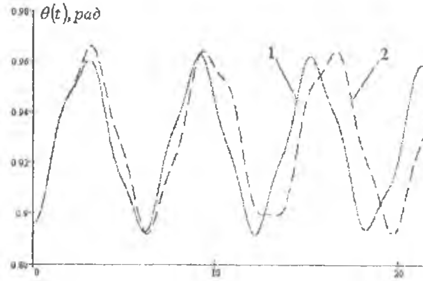

Рис. 3. Зависимость угла нутации от времени:
1 – аналитическая зависимость, 2 – численное тегрирование

Полученные результаты могут быть использованы для анализа пространственного движения КА с массивными вращающимися элементами, а также режимов уравновешенного движения спутников-гиростатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 193-200.

2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972.

3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.