УДК 656.7.658

Коптев А.Н., Шварц Л.С., Дьячков С.А.

ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АВИАКОМПАНИИ

Рассмотрим транспортную модель авиакомпании.

Пусть имеется m воздушных судов (ВС), осуществляющих авиаперевозки в n пунктов назначения. Объём авиаперевозок i-го ВС в единицу времени равен a_i, $i = 1, \ldots, m$, а объём заказов в j-ом пункте назначения в единицу времени есть b_j, $j = 1, \ldots, n$.

Стоимость c_{ij} перевозки нормативной единицы груза i-м ВС в j-ый пункт назначения считается известной и не зависящей от общего объёма перевозок.

Обычно предполагается, что все заказы на перевозки выполняются полностью и что весь спрос на перевозки удовлетворяется [1]. Если обозначить через u_{ij} количество заказов, которое выполняется в единицу времени i-м ВС в j-й пункт назначения, то рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: найти

$$\begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j c_{ij} u_{ij} \to \min \\ \text{при ограничениях:} \quad \sum\limits_j u_{ij} = a_i, \quad \sum\limits_i u_{ij} = b_j. \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку важные решения принимаются последовательно во времени, то используем понятие периода планирования, т. е. интервала времени, в течение которого должно быть принято определённое решение. При статическом описании допускается, что a_i, b_j, c_{ij} – одни и те же в каждом цикле и что создание запасов заявок на перевозки невозможно. Переформулируем исходную задачу таким образом, чтобы избавиться от указанных ограничений. При новой постановке задачи обнаруживается, что её структура сложнее и больше отвечает требованиям практики по сравнению с прежним описанием. Обозначим через $x_i(t)$ количество заказов на перевозки, которые имеются для i-го ВС в начале некоторого интервала времени $[t, t+1]$, где t и $t+1$ – фиксированные моменты времени. Тогда уровень заказов в момент времени $t+1$ определяется алгебраической суммой поступления и выполнения заказов. Уравнение для этого случая будет иметь следующий вид:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i(t) - \sum_j u_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad t = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Обозначим через $y_i(t)$ заказы, поступившие на j-й пункт:

$$y_j(t+1) = y_j(t) - b_j(t) + \sum_i u_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, N.$$

Величины $x_i(t)$ и $y_j(t)$ есть переменные состояния, характеризующие внутреннюю структуру системы. Поведение данной системы в будущем полностью определяется заданием этих величин и входных переменных u_{ij}. Значения $x_i(t)$ и $y_i(t)$ представляют собой агрегированную информацию о предыдущем поведении системы, достаточно полную для того, чтобы по известным величинам входных переменных точно предсказать следующее состояние системы. Вводя понятие относительных затрат на исполнение заказов на перевозки $\alpha_i(t)$ и $\beta_j(t)$ на задержки единицы перевозимых грузов и пассажиров, получаем, что полная сумма издержек равна

$$I = \sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)y_j(t) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(t)u_{ij} \right). \qquad (3)$$

Требуется выбирать такие значения u_{ij}, чтобы минимизировать целевую функцию I. Принятие решений можно описать как некоторый N-шаговый процесс. Выход системы зависит не только от входа, но и от начального состояния, которое в случаях, когда структура системы не определена, неизвестно. При анализе систем «вход – выход» непосредственно рассматривается не структура системы, а само отношение «вход – выход», т. е. подмножество упорядоченных пар «вход – выход». Если начальное состояние полагается фиксированным, то можно рассматривать некоторое фиксированное подмножество упорядоченных пар отношения «вход – выход», которое определяет функцию. Зная такую функцию, оказывается возможным построить представление системы в пространстве состояний, которые соответствуют множеству входных воздействий, переводящих систему из начального состояния в заданное.

Статические модели экономических систем типа «вход – выход», в том числе и статическая модель Леонтьева, мало применимы к описанию поведения таких экономических систем как авиакомпания, так как значения на её выходе зависят не только от характеристик спроса на услуги, введённых в модель, но и от того, какая программа была заложена в систему к рассматриваемому моменту времени. Для того, чтобы определить, как влияет спрос на выходные величины, необходимо добавить к модели описание промежуточного состояния системы, которое характеризовало бы состояние экономики к этому моменту времени. Промежуточное состояние представляет собой своего рода «память», отражающую предыдущее поведение системы. Модель Леонтьева не имеет «памяти», поскольку в ней выход в любой момент времени определяется только входом в этот же момент. Пользуясь этой моделью, нужно помнить о том, что выходы определяются не только спросом – начальное количество заказов должно быть известным, но и состоянием в данный момент времени. Если предположить, что начальное количество заказов может выражаться любым действительным числом, то множество состояний можно определить как X = R (R – числовая ось) и модель примет вид:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j(t) - b_i(t), \tag{4}$$

где $u_j(t)$ – выпуск продукции j-й отраслью за T-й период. Таким образом, эндогенные переменные с запаздывающим аргументом типа X(t) присутствуют в структуре модели как вспомогательные переменные и в совокупности с экзогенными переменными u и b составляют известные к данному моменту времени переменные системы, по которым можно получить значения текущих эндогенных переменных. Для периода 1 значение x(1) вычисляется по x(0), а также по u(0) и b(0). Определив таким образом x(1), можно найти x(2), если заданы u(1) и b(1). Следовательно, при заданном начальном значении x(0) и заданных значениях u(t) и b(t) можно определить траекторию x(t), последовательно применяя уравнение состояния. Поэтому можно определить объём перевозок j-й авиакомпании за любой период времени, то есть планировать перевозки.

Для того чтобы сделать модель более реалистичной, введём следующие допущения о трудовых и других ресурсах, выступающих в качестве входных величин. Например, вследствие ограниченности ресурсов авиакомпании, она не может удовлетворить любой, наперёд заданный спрос, описываемый матрицей A в модели Леонтьева: $x = Ax + s$, где s – годовой потребительский спрос на услуги авиакомпании, Ax – количество услуг, которое произведено в год. Предполагая, что располагаемые трудовые ресурсы используются полностью, получим

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j, \tag{5}$$

где ℓ_j – расход трудовых ресурсов, $\ell_j > 0$.

К традиционным понятиям входа и выхода добавлено ещё одно – понятие состояния. В изложенных примерах состояние описывалось вектором, компоненты которого – величины заявок. В общем случае уравнение состояния в векторно-матричной форме имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Cf(t), \tag{6}$$

где x – вектор состояния системы, u – управляемый вход и f – влияние среды. Система, в свою очередь, влияет на среду своими выходными переменными. В некоторых случаях сами переменные состояния могут рассматриваться как выходные величины системы. В других случаях невозможно непосредственно наблюдать множество выходных величин y_i ($i = 1, \ldots, p$) или p-мерный вектор y, который определяется уравнением

$$y = Cx + Du. \tag{7}$$

В уравнениях (6) и (7): x – n-мерный вектор-столбец; A – матрица размера n×n; u – r-мерный вектор-столбец; B – матрица размера n×r; C – матрица размера p×n; D – матрица размера p×r.

Элементы матриц A, B, C, D постоянны для стационарных систем.

Вектор состояния сформирован из множества величин, которых достаточно для того, чтобы полностью описать движение системы в пространстве состояний. По заданным вектору состояния в некоторый момент времени, закону движения и последовательности входных воздействий можно вычислить состояние в любой другой момент времени. Вектор состояния не является единственным. Любой другой вектор $x'(t)$, связанный с *x(t)* невырожденным преобразованием $x'(t) = M(t)x(t)$, удовлетворяет приведённому выше требованию.