УДК 629.7

Любимов В.В.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА МИКРОГИРОСКОПА RR-ТИПА

Введение. В современной науке и технике широко используются микро электромеханические чувствительные элементы и устройства, основанные на различных физических принципах [1]. Одним из главных достоинств указанных устройств являются их малые масса и габариты, а также относительно небольшая стоимость. Применение указанных устройств позволяет создавать современные недорогие инерционные навигационные системы.

К числу микрогироскопов, относятся микромеханические гироскопы rr-типа. Микромеханические гироскопы совершают первичные вынужденные колебания под действием момента привода. В случае появления у ротора переносной угловой скорости в микрогироскопе наводятся вторичные колебания, содержащие данные о величине измеряемой микрогироскопом переносной угловой скорости. Первичные колебания называют режимом движения, а вторичные колебания – режимом чувствительности. Микрогироскоп rr-типа показан на рисунке 1.

В режиме движения микрогироскоп совершает вращение относительно оси *z*, входящей в состав связанной системы координат *xyz*, по заданному закону движения.

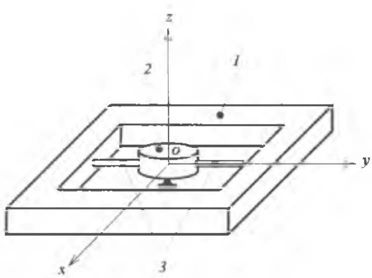

Рисунок 1 – Однокомпонентный микромеханический гироскоп rr-типа

При появлении переносной искомой угловой скорости $\omega_x(t)$ микрогироскопа возникает гироскопический момент, приводящий к угловому движению ротора относительно оси *y*, которое носит название режима чувствительности. Ротор микрогироскопа 1 установлен на основании 2 посредством упругих стержней 3. Малые жёсткости упругих стержней 3 предоставляют им возможность совершать изгиб в плоскости, перпендикулярной оси *z*, и осуществлять кручение вокруг оси *y*. Однако жёсткость упругих стержней при изгибе в плоскости перпендикулярной оси x не является малой. С учётом конструктивных особенностей однокомпонентного микрогироскопа rr-типа уравнения вращательного движения ротора представляют собой систему из двух линейных дифференциальных уравнений, описывающих угловое движение относительно осей y и z. В общем случае уравнения данной системы могут содержать переменные коэффициенты.

Постановка задачи. Известно [1], что в процессе функционирования микрогироскопа внешний момент, обеспечивающий режим движения относительно оси z, а также гироскопический момент относительно оси y преодолевают моменты демпфирования и моменты от сил упругости относительно осей z и y, соответственно.

Предположим, что величины внешнего и гироскопического моментов существенно превышает величины моментов, характеризующих собственные моменты системы. Произведём соответствующее масштабирование механических моментов в системе уравнений вращательного движения ротора. В результате масштабирования с использованием большого параметра λ уравнения движения ротора принимают вид:

$$\ddot{\gamma} + 2\lambda a\dot{\gamma} + \lambda^2\omega_\gamma^2\gamma = \lambda^4 m_\gamma(t)/J_\gamma, \tag{1}$$

$$\ddot{\alpha} + 2\lambda b\dot{\alpha} + \lambda^2\omega_\alpha^2(t)\alpha = \lambda^4 J_\gamma\dot{\gamma}(t)\omega_x(t)/J_\alpha. \tag{2}$$

Здесь γ – угол поворота ротора в режиме движения; J_γ и J_α – моменты инерции ротора относительно осей z и y, соответственно, $a = \dfrac{b_\gamma}{2J_\gamma}$, $b = \dfrac{b_\alpha}{2J_\alpha}$, b_γ и b_α – коэффициенты демпфирования при повороте ротора относительно осей z и y; $\omega_\gamma^2 = G_\gamma / J_\gamma$, $\omega_\alpha^2(t) = G_\alpha(t)/J_\alpha$; G_γ – постоянная жёсткость упругих стержней при повороте ротора относительно оси z; $G_\alpha(t)$ – переменная жёсткость упругих стержней при повороте ротора относительно оси y; $m_\gamma(t)$ – момент от привода, передаваемый на ротор, который определяет режим движения; $\omega_x(t)$ – переносная угловая скорость, измеряемая микрогироскопом. Уравнения (1)-(2) позволяют найти асимптотическое решение $\tilde{\alpha}(t)$, близкое к установившемуся режиму чувствительности.

Асимптотическое исследование вторичных колебаний микрогироскопа. При установившемся режиме чувствительности, согласно уравнению (2), получаем:

$$\alpha = \frac{J_\gamma \dot{\gamma}(t)\omega_x(t)}{J_\alpha \omega_\alpha^2(t)}. \qquad (3)$$

Из соотношения (3) следует, что микрогироскоп rr-типа можно использовать для измерения угловой скорости $\omega_x(t)$, которая может быть найдена посредством измерения угла поворота α. Из соотношения (3) также следует, что для определения угловой скорости требуется найти решение уравнения (1). Действительно, для определения решения уравнения (2) требуется найти асимптотическое решение уравнения (1).

Решение уравнения (1) представим в виде ряда [2]:

$$\bar{\gamma} = \lambda^2 u_0 + \lambda u_1 + u_2 + \cdots . \qquad (4)$$

Дважды дифференцируем выражение (4). В результате получаем:

$$\dot{\bar{\gamma}} = \lambda^2 \dot{u}_0 + \lambda \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \cdots , \qquad (5)$$

$$\ddot{\bar{\gamma}} = \lambda^2 \ddot{u}_0 + \lambda \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \cdots . \qquad (6)$$

Выполняя подстановку выражений (4)-(6) в уравнение (1) и приравнивания коэффициенты при равных степенях параметра λ, находим составляющие асимптотического решения (4): $u_0 = m_\gamma(t) / J_\gamma \omega_\gamma^2$, $u_1 = -2a\dot{u}_0 / \omega_\gamma^2$,

$$u_2 = -(2a\dot{u}_1 + \ddot{u}_0) / \omega_\gamma^2, \ \dots . \qquad (7)$$

Будем учитывать первые два приближения: u_0 и u_1. Рассмотрим частный случай. Пусть момент от привода ротора $m_\gamma(t) = m_0 \sin(pt)$, где m_0 и p – амплитуда и частота момента привода (постоянные величины). В данном частном случае первые два приближения в решении (4) принимают вид:

$$u_0 = m_0 \sin(pt) / G_\gamma, \ u_1 = -2b_\gamma p m_0 \cos(pt) / G_\gamma^2 . \qquad (8)$$

Дифференцируя решение (4) с учётом выражений (8), получаем функцию $\dot{\bar{\gamma}}(t)$, которая входит в правую часть уравнения (2).

Асимптотическое решение $\bar{\alpha}$ уравнения (2) определяется аналогичным образом. При этом решение $\bar{\alpha}$ записывается в виде ряда:

$$\bar{\alpha} = \lambda^2 v_0 + \lambda v_1 + v_2 + \cdots . \qquad (9)$$

Дифференцируем дважды выражение (9). Далее учитываем полученные выражения $\bar{\alpha}, \dot{\bar{\alpha}}, \ddot{\bar{\alpha}}$ в уравнении (2) и приравниваем коэффициенты при равных степенях λ. В результате находим составляющие асимптотического решения $v_0, v_1, v_2, \dots$.

Из соотношения (3) следует, что точность измерения микрогироскопом угловой скорости $\omega_x(t)$ непосредственно зависит от стабильности величины $\dfrac{J_\gamma \dot{\bar{\gamma}}(t)}{J_\alpha \omega_\alpha^2(t)}$. По этой причине рассмотрим подробнее вынужденные колебания ротора гироскопа в случае $\dfrac{J_\gamma \dot{\bar{\gamma}}}{J_\alpha \omega_\alpha^2} = C$, где C – постоянная предсказуемая величина. В данном случае первые два приближения v_0, v_1 равны:

$$v_0 = C\omega_x(t),\, v_1 = -2CbJ_\alpha \dot{\omega}_x(t) / G_\alpha(t)\,. \tag{10}$$

Следовательно, при учёте только первого приближения v_0 решение уравнения (2) приводит к результату, полностью совпадающему с решением, описывающем установившейся режим чувствительности микрогироскопа [1]. При этом измеряемая микрогироском в установившемся режиме чувствительности угловая скорость рассчитывается следующим образом:

$$\omega_x(t) = \frac{\alpha}{C}\,. \tag{11}$$

При учёте первых двух приближений v_0, v_1 величина угла α определяется следующим образом:

$$\alpha = C\omega_x(t) - 2CbJ_\alpha \dot{\omega}_x(t) / G_\alpha(t)\,. \tag{12}$$

Пусть величина параметра $C = \dfrac{J_\gamma \dot{\bar{\gamma}}(t)}{J_\alpha \omega_\alpha^2(t)}$ являться постоянной. На практике постоянство парамстра C достигается посредством изменения частоты $\omega_\alpha(t)$. При постоянном C уравнение (12) может описывать вторичные колебания по углу α, близкие к режиму чувствительности. Такие колебания показаны на рисунке 2 тонкой линией.

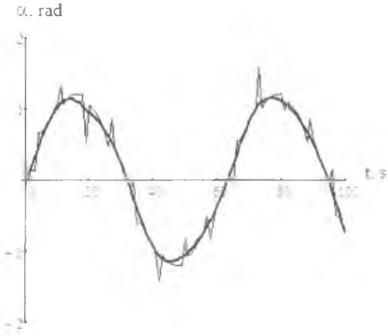

Рисунок 2 – Вторичные колебания по углу α

Жирной линией на рисунке 2 изображены колебания, полученные после сглаживания близких к режиму чувствительности колебаний. При построении рисунка 2 предполагалось, что параметры микрогироскопа соответствуют описанным в работе [1], а угловая скорость изменяется согласно выражению: $\omega_v(t) = a \sin kt$ (rad/s).

Выводы. Из рисунка 2 видно, что близкие к режиму чувствительности колебания по углу *α(t)* в рассматриваемом случае представляют собой совокупность высокочастотных колебаний с меньшей в среднем переменой амплитудой и более медленных колебательных движений с большей постоянной амплитудой. Описанный подход позволяет оценить изменение величины угла α при вращении ротора однокомпонентного микрогироскопа rr-типа, совершающего вынужденные колебания, близкие к режиму чувствительности.

Библиографический список

1. Распопов В.Я. Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400с.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М: Наука, 1986. 380с.