

3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.

4. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964

УДК 533.6.011.5, 533.6.011.72

Чернышов М.В.

## АНАЛИЗ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОУГОЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

**Введение.** На сторонах многоугольных профилей, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, возникают так называемые ударно-волновые системы – последовательности скачков уплотнения и волн Прандтля-Майера. Исследования ударно-волновых систем [1-3] показали, что различные параметры газа за ними могут принимать экстремальные значения, и это можно использовать для решения конкретных технических задач. Экстремальными свойствами обладают и системы, углы поворота на элементах (скачках и волнах) которых ограничены, например, особенностями формы обтекаемых тел.

Методы математического программирования, использованные ранее для построения экстремальных систем, применяются в данной работе для анализа аэродинамических коэффициентов простых треугольных и четырехугольных профилей в сверхзвуковом потоке невязкого газа. Получен ряд новых аналитических результатов.

1. Коэффициенты давления на сторонах многоугольных профилей (рис.1,а-в) выражаются через интенсивности (отношения давлений) возникающих скачков и волн.

Действительно, коэффициент давления на  $i$ -ой стороне профиля

$$c_{pi} = \frac{2(p_i - p)}{\rho V^2} = \frac{2p}{\rho V^2} \left( \frac{p_i}{p} - 1 \right) = \frac{2a^2}{\gamma V^2} \left( \prod_k J_k - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M^2} \left( \prod_k J_k - 1 \right). \quad (1)$$

Здесь  $k_i$  - обозначение тех скачков и волн, которые проходит линия тока перед обтеканием  $i$ -ой стороны; величины без индексов относятся к невозмущенному потоку, а вели-

чины с индексами  $i$  - или интенсивности элементов систем, или параметры течения за ними; при расчетах показатель адиабаты:  $\gamma = 1.4$ .

С помощью формулы (1) нетрудно выразить аэродинамические коэффициенты рассматриваемых профилей через интенсивности скачков и волн. Например

$$c_N = -\frac{1}{L} \sum \chi_i c_{pi} l_i \cos \varphi_i, \quad (2)$$

$$c_y = -\frac{1}{L} \sum \chi_i c_{pi} l_i \cos \Psi_i, \quad (3)$$

где  $L$  - длина хорды профиля,  $\varphi_i$  - угол между данной стороной и хордой,  $\Psi_i$  - между стороной и направлением невозмущенного потока,  $\chi_i = \pm 1$  для верхней и нижней частей профиля соответственно. Исключения составляют случаи, когда отраженные волны, образующиеся при взаимодействии элементов систем (например, волна V на рис.1,а) падают на поверхность профиля. Такие случаи в работе не рассматриваются.

Интенсивность  $J_i$  скачка  $i$  связана с углом  $\beta_i$  поворота потока на нем [4]:

$$\operatorname{tg} \beta_i = \chi_i \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)M_k^2 - \varepsilon - J_i}{J_i + \varepsilon} \frac{(1-\varepsilon)(J_i - 1)}{(1+\varepsilon)M_k^2 - (1-\varepsilon)(J_i - 1)}} \quad (4)$$

Число Маха  $M_i$  за скачком находится через число Маха  $M_k$  перед ним:

$$M_i^2 = [(J_i + \varepsilon)M_k^2 - (1-\varepsilon)(J_i^2 - 1)] / [J_i(1 + \varepsilon J_i)]. \quad (5)$$

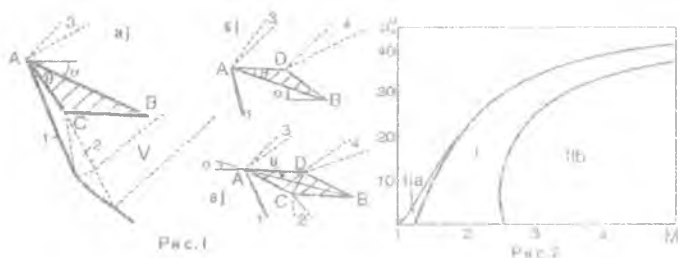
Интенсивность волны разрежения зависит от чисел Маха течения перед и за ней:

$$J_i = \pi(M_i) / \pi(M_k), \quad (6)$$

где  $\pi(M)$  - известная функция давления в изэнтропном течении. Числа Маха связаны между собой и с углом поворота потока в волне:

$$\omega(M_i) = \omega(M_k) - \chi_i \beta_i. \quad (7)$$

При заданной форме обтекаемого профиля соотношения (2-7) достаточны для вычисления аэродинамических коэффициентов, если углы  $\beta_i$  не превосходят предельные для скачков и волн величины, а течение за скачками уплотнения - сверхзвуковое.



2. Рассмотрим простую модельную задачу об обтекании треугольного профиля  $ACB$  с угловой точкой  $C$  снизу от хорды  $AB$  (рис. 1, а). При  $L = |AB|$  из (2-3) следует, что

$$c_N = (J_1 + J_1 J_2 - 2J_3) / \gamma M^2,$$

$$c_y = [J_1 \cos(\theta + \alpha) + J_1 J_2 \cos(\theta - \alpha) - 2J_3 \cos \alpha \cos \theta] / \gamma M^2 \cos \theta,$$

где  $\alpha$  - угол атаки профиля,  $\theta$  - угол при основании, характеризующий его утолщение.

При фиксированных параметрах  $M$  и  $\alpha$  аэродинамические коэффициенты являются функциями единственной независимой переменной  $\theta$ , а также ряда зависимых переменных, связанных с углом  $\theta$  соотношениями на волнах и скачках. Поэтому для исследования поведения  $c_N(\theta)$  и  $c_y(\theta)$  нужно рассмотреть задачу на условный экстремум, которая и была решена методом неопределенных множителей Лагранжа. В результате для коэффициентов  $c_N(\theta)$  и  $c_y(\theta)$  получены уравнения, показывающие, при каких интенсивностях скачков и волн выполняются необходимые условия экстремума. В предельном случае ( $\theta \rightarrow 0$ ) эти уравнения совпадают и имеют аналитическое решение:

$$M^2 = A(B + C) - (1 - \varepsilon) / \varepsilon, \quad (8)$$

$$\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1), \quad A = (1 + \varepsilon J_1) / [\varepsilon(1 + \varepsilon)(J_1(1 - 3\varepsilon) - 4\varepsilon^2)],$$

$$B = J_1(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2, \quad C = 2\varepsilon \sqrt{\varepsilon(1 + \varepsilon J_1)(J_1 + \varepsilon)}.$$

Расчеты показывают, что решение (8) действительно определяет области чисел Маха и углов атаки, внутри которых поведение коэффициентов подъемной и нормальной сил качественно различно. В области I (рис. 2) коэффициенты монотонно растут с увеличением толщины профиля, а в областях IIa и IIb они сначала убывают и имеют точку минимума. Промежуток убывания обычно невелик (так, при  $M = 3$ ,  $\alpha = 15^\circ$  коэффициент  $c_N$  убывает от

$c_N = 0.40531$  при  $\theta = 0$  до  $c_N = 0.40526$  при  $\theta = 0.256^\circ$ ). Однако наличие минимума показывает, что влияние утолщения профиля на его подъемную силу неоднозначно.

Область Па ограничена сверху кривой 1, выше которой течение за скачком 1 уже при  $\theta \rightarrow 0$  (на одиночной пластине) является дозвуковым.

3. Если угловая точка профиля находится сверху от его хорды (рис 1,б), то коэффициенты нормальной и подъемной сил записываются в форме

$$c_N = (2J_1 - J_3 - J_1 J_4) / \gamma M^2,$$

$$c_y = [2J_1 \cos \alpha \cos \theta - J_3 \cos(\theta - \alpha) - J_1 J_4 \cos(\theta + \alpha)] / \gamma M^2 \cos \theta.$$

Решая задачу на экстремум коэффициентов, в общем случае ( $0 < \theta < \alpha$ ), получим следующее условие экстремума  $c_N(\theta)$ :

$$\pi(M_3) \Gamma(M_3) = \pi(M_4) \Gamma(M_4), \quad (9)$$

где  $\Gamma(M) = \gamma M^2 / \sqrt{M^2 - 1}$ . Поскольку функция  $g(M) = \pi(M) \Gamma(M)$  монотонно убывает, то уравнение (9) не имеет решений. Расчеты подтверждают, что при увеличении толщины профиля  $ABD$  его нормальная сила действительно убывает монотонно. Исследование поведения коэффициента  $c_y(\theta)$  показывает, что монотонно убывает при утолщении и подъемная сила профиля.

4. Как видно из результатов пп.2 и 3, поведение  $c_N(\theta)$  и  $c_y(\theta)$  качественно зависит от того, какая сторона профиля утолщается. Поэтому представляет интерес поведение данных коэффициентов при одновременном утолщении обеих сторон профиля. Рассмотрим обтекание ромбического профиля  $ADBC$  (рис.1,в). Решение задачи на экстремум  $c_N(\theta)$  и  $c_y(\theta)$  приводит к достаточно сложным условиям экстремума. При  $\theta \rightarrow 0$  оба эти условия преобразуются к виду (8). Оказывается, что характер поведения аэродинамических коэффициентов ромбического профиля такой же, как и у треугольного с угловой точкой снизу от хорды. Наличие верхней угловой точки лишь смещает точку минимума в сторону увеличения  $\theta$  (например, до  $\theta = 0.339^\circ$  при  $M = 3$ ,  $\alpha = 15^\circ$  у коэффициента нормальной силы).

Заметим, что по решению задачи о взаимодействии скачка со слабым возмущением [4,5], убыванию  $c_N(\theta)$  и  $c_y(\theta)$  соответствует течение сжатия в начале волны V, и наоборот.

Коэффициент аэродинамического волнового сопротивления, вычисленный через интенсивности скачков и волн, при утолщении ромбического профиля монотонно возрастает. Для снижения сопротивления следует сместить угловые точки профиля к его задней кромке.

**Заключение.** Результаты работы показывают применимость точных аналитических методов, развитых при оптимизации ударно-волновых систем, к исследованию аэродинамических характеристик многоугольных профилей. Исследование поведения аэродинамических коэффициентов приводит к выводу, что утолщение профиля влияет на его подъемную и нормальную силы неоднозначно, а также позволяет говорить об определяющем влиянии нижней стороны профиля на его подъемную силу.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Петров Г.И. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования / Избр. труды. М.: Наука, 1992.

Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. №6.

Омельченко А.В., Усков В.Н. Оптимальные ударно-волновые системы при ограничениях на суммарный угол поворота потока // Изв. РАН. МЖГ. 1996. №4.

Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: ВО "Наука", 1995.

Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.

УДК 533.6

Шахов В. Г.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В последнее время снова возник интерес к задачам пограничного слоя на подвижной поверхности. Это связано не только с тем, что такие течения имеют место в различных технических устройствах, но и потому, что при исследовании обтекания тел, движущихся вблизи границы, используется принцип обращения движения. В результате этого граница получает: