ловые скорости γ_x, γ_z подвеса ПСБ по представленным выше аналитическим соотношениям с учетом ограничений на их модули.

Нелинейные цифровые алгоритмы управления основываются на структуре формирования вектора рассогласования $\varepsilon = \{\varepsilon_i\} = -(\mathbf{s} \times \mathbf{n})$, полученного при аналитическом синтезе непрерывных алгоритмов управления. Для повышения точности в установившемся режиме слежения рационально использование стандартного *дискретного* ПИ-регулятора: каждая компонента ε_{ik} вектора рассогласования $\varepsilon_k = -(\mathbf{s}_k \times \mathbf{n}_k)$ обрабатывается дискретным алгоритмом: $\mathrm{v}_{ik} = \mathrm{v}_{ik-1} + b_g(\varepsilon_{ik} + c_g \cdot \varepsilon_{ik-1})$ с постоянными параметрами b_g и c_g. Далее вектор $\mathrm{v}_k = \{\mathrm{v}_{ik}\}$ используется в формировании дискретного вектора $\omega^e_{ck} \equiv \omega^e_{ck} + a_g \mathrm{v}_k$, который «пересчитывается» в командные скорости перемещения ПСБ $u_{ki}, i = x, z, k \in N_0$ по явным формулам: $u_{zk} = \omega^e_{rcyk}, u_{xk} = \omega^e_{rcxk}/C\gamma_{xk}$, где $C\gamma_{xk} \equiv \cos\gamma_x(t_k)$ и два последних элемента вектора-столбца $\omega^e_{rck} \equiv \{\omega^e_{rcxk}, \omega^e_{rcyk}, \omega^e_{rczk}\} = \omega^e_k - A^e_k(\gamma_{zk}, \gamma_{xk}) \cdot \omega_k$ также получаются аналитически. При этом учитываются условия $(\phi_i(\cdot) \geq 0, i = 1,2)$ ограничений на область допустимых положений ПСБ относительно конструкции корпуса КА, а также условия расположения КА в тени Земли. Эффективность цифровых алгоритмов косвенного наведения ПСБ и ППА с последующим их слежением за заданными ориентирами подтверждена компьютерным моделированием.

УДК 531.01 : 629.78 : 681.51

Сомов Е.И., Бутырин С.А., Антонов Ю.Г., Мантуров А.И.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОВОРОТНОГО МАНЕВРА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

Многоаспектная проблема прецизионного гиросилового управления пространственным движением маневрирующих космических аппаратов (КА) наблюдения уже более 20 лет исследуются авторами [1-8]. Так, в [2] доказана теорема, в соответствие с которой решение задачи пространственного поворотного маневра (ПМ) КА на заданном интервале времени при произвольных краевых условиях по угловому положению и угловой скорости КА может быть представлено вектором конечного поворота в виде векторной полиномиальной функции времени, в [8] развит подход к построению различных программ углового движения с учетом заданных ограничений по угловым скоростям и ускорениям КА.

Задача аналитического синтеза параметров пространственного ПМ КА на заданном интервале времени $t \in \mathrm{T}_p \equiv [0, T_p]$ состоит в определении явных функций времени, однозначно определяющих кватернион ориентации $\Lambda(t)$, векторы угловой скорости $\omega(t)$ и углового ускорения $\varepsilon(t)$ связанного с корпусом КА базиса $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_i, i = 1:3\}$ относительно известного инерциального базиса $\mathbf{I} = \{\mathbf{i}_i\}$ Кватернион $\Lambda = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}$, векторы $\omega = \{\omega_i\}$, $\varepsilon = \{\varepsilon_i\} = \dot{\omega}$ и вектор производной ускорения $\varepsilon = \varepsilon' + \omega \times \varepsilon$ должны удовлетворять краевым условиям, заданным на левом (при $t = 0$) и правом (при $t = T_p$) концах траектории ПМ:

$$\Lambda(0) = \Lambda_0; \qquad \omega(0) = \omega_0; \qquad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \tag{1}$$

$$\Lambda(T_p) = \Lambda_f; \qquad \omega(T_p) = \omega_f; \qquad \varepsilon(T_p) = \varepsilon_f; \quad \varepsilon'(T_p) = 0 \quad (\dot{\varepsilon}(T_p) = \omega_f \times \varepsilon_f), \tag{2}$$

где условие $\varepsilon'(T_p) = 0$ отражает требование плавности движения КА на завершающем участке ПМ и предусматривает его гладкое сопряжение с последующим участком движения КА.

Подход к решению задачи основывается на необходимом и достаточном условии разрешимости классической задачи Дарбу [9] – аналитического определения $\Lambda(t)$ из уравнения $\dot{\Lambda}(t) = \frac{1}{2}\Lambda(t) \circ \omega(t)$ при известных Λ_0 и $\omega(t)$. Введем базис $\mathbf{E}_0$, фиксированный в инерциальном базисе $\mathbf{I}$ кватернионом Λ_0 (1), а также подвижные базисы $\mathbf{E}_k$ ($k = 1,...n$), где базис $\mathbf{E}_n$ совпадает со связанным базисом $\mathbf{B}$. Указанное условие разрешимости задачи Дарбу состоит [10] в возможности представления вектора $\omega(t)$ угловой скорости в виде $\omega(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t) + \cdots + \omega_n(t)$, где вектор $\omega_k(t)$ имеет неизменное направление в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ и является вектором мгновенной угловой скорости базиса $\mathbf{E}_k$ относительно базиса $\mathbf{E}_{k-1}$.

Решение поставленной задачи представляется как результат сложения в общем случае пяти одновременно происходящих элементарных поворотов «вложенных» базисов $\mathbf{E}_k$ вокруг ортов $\mathbf{e}_k$ осей Эйлера, положение которых определяется из краевых условий (1), (2) исходной пространственной задачи. Краевые условия пяти элементарных поворотов приведены в табл. 1, где для всех этих движений требуется дополнительно обеспечить равенство нулю локальной (собственной) производной ускорения на правом конце траектории.

Таблица 1.

N П/п	Тип элементарного движения	Краевые условия на левом конце траектории			Краевые условия на правом конце траектории		
		Угол	Скорость	Ускорение	Угол	Скорость	Ускорение
1	Гашение начального углового ускорения	0	0	ε_0	-	0	0
2	Гашение начальной угловой скорости	0	ω_0	0	-	0	0
3	Позиционный переход	0	0	0	φ^*	0	0
4	Разгон до конечной угловой скорости	0	0	0	-	ω_f	0
5	Разгон до конечного ускорения	0	0	0	-	0	ε_f

Кватернион $\Lambda(t)$ ориентации КА в базисе I определяется произведением

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \Lambda_1(t) \circ \Lambda_2(t) \circ \Lambda_3(t) \circ \Lambda_4(t) \circ \Lambda_5(t), \qquad (3)$$

где индексы 1–5 кватернионов $\Lambda_k(t)$ соответствуют их номерам в табл. 1, причем $\Lambda_k(t) = (\cos(\varphi_k(t)/2), \mathbf{e}_k \sin(\varphi_k(t)/2))$, где $\varphi_k(t)$ и $\mathbf{e}_k$ – текущий угол и орт оси Эйлера k-ого поворота. В силу неподвижности орта $\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{E}_{k-1}$ имеем $\omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t) \cdot \mathbf{e}_k$; $\varepsilon_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) \cdot \mathbf{e}_k$ и $\dot{\varepsilon}_k(t) = \dddot{\varphi}_k(t) \cdot \mathbf{e}_k$. Вектор угловой скорости $\omega(t)$, векторы углового ускорения $\varepsilon(t)$ и его производная $\dot{\varepsilon}(t)$ определяются аналитически по рекуррентному алгоритму:

- принимаются значения векторов $\omega^{(1)}(t) = \omega_1(t)$, $\varepsilon^{(1)}(t) = \varepsilon_1(t)$, $\dot{\varepsilon}^{(1)}(t) = \dot{\varepsilon}_1(t)$, где верхний индекс означает номер итерации;
- далее для индексов $i = 2:5 \equiv 2,\ldots 5$ используются рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} &\omega_q(t) =: \bar{\Lambda}_i(t) \circ \omega^{(i-1)}(t) \circ \Lambda_i(t); \quad \omega^{(i)}(t) = \omega_i(t) + \omega_q(t); \\ &\varepsilon^{(i)}(t) = \varepsilon_i(t) + \bar{\Lambda}_i(t) \circ \varepsilon^{(i-1)}(t) \circ \Lambda_i(t) + \omega_q(t) \times \omega_i(t); \qquad (4) \\ &\dot{\varepsilon}^{(i)}(t) = \dot{\varepsilon}_i(t) + \bar{\Lambda}_i(t) \circ \dot{\varepsilon}^{(i-1)}(t) \circ \Lambda_i(t) + (\omega_q(t) + 2\varepsilon^{(i-1)}(t)) \times \omega_i(t), \end{aligned}$$

- искомые векторы получаются как $\omega(t) = \omega^{(5)}(t)$, $\varepsilon(t) = \varepsilon^{(5)}(t)$, $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^{(5)}(t)$.

Функции $\varphi_k(t)$, представляющие в аналитическом виде углы элементарных поворотов, выбираются в классе полиномов (сплайнов) соответствующей степени.

Гашение угловой скорости и углового ускорения. Для первых двух движений выберем функции $\varphi_k(t)$, k=1,2, с краевыми условиями

$$\varphi_1(0)=0;\ \dot\varphi_k(0)=\omega_0 \equiv|\omega_0|;\ \ddot\varphi_k(0)=\varepsilon_0 \equiv|\varepsilon_0|,\ \dot\varphi_k(T_p)=0;\ \ddot\varphi_k(T_p)=0;\ \dddot\varphi_k(T_p)=0, \quad (5)$$

где условие $\dddot\varphi_k(T_p)=0$ учитывает указанное требование гладкости на правом конце ПМ, в виде полиномов (сплайнов) $\varphi_k(\tau)$ 4-ой степени нормированного времени $\tau=t/T_p \subset [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\dot\varepsilon_k(\tau)=-6(a_0-a_1\tau+2a_2\tau^2); \quad \varepsilon_k(\tau)=\varepsilon_0-\tau(6a_0-3a_1\tau+4a_2\tau^2);\\
&\omega_k(\tau)=\omega_0+T_p\tau[\varepsilon_0-\tau(3a_0-a_1\tau+a_2\tau^2)]; \qquad (6)\\
&\varphi_k(\tau)=T_p\tau\{\omega_0+T_p\tau[\varepsilon_0-\tau(20a_0-5a_1\tau+4a_2\tau^2)/10]/2\},
\end{aligned}$$

где коэффициенты a_i определяются соотношениями $a_0=2\omega_0/T_p+\varepsilon_0$; $a_1=8\omega_0/T_p+3\varepsilon_0$; $a_2=3\omega_0/T_p+\varepsilon_0$. Формально гашение начального углового ускорения получается из соотношений (6) при $\omega_0=0$, а гашение начальной угловой скорости – при $\varepsilon_0=0$.

Разгон до заданных значений угловой скорости и ускорения. Для последних двух движений функции $\varphi_k(t)$, k = 4,5 и их производные должны удовлетворять краевым условиям

$$\varphi_k(0)=0;\ \dot\varphi_k(0)=0;\ \ddot\varphi_k(0)=0;\ \dot\varphi_k(T_p)=\omega_f\equiv|\omega_f|;\ \ddot\varphi_k(T_p)=\varepsilon_f\equiv|\varepsilon_f|;\ \dddot\varphi_k(T_p)=0, \quad (7)$$

поэтому $\varphi_k(t)$ выбираются в виде сплайнов 5-ой степени нормированного времени τ:

$$\begin{aligned}
&\dot\varepsilon_k(\tau)=6(a_0+a_1\tau+2a_2\tau^2); \qquad \varepsilon_k(\tau)=\tau(6a_0+3a_1\tau+4a_2\tau^2);\\
&\omega_k(\tau)=T_p\tau^2(3a_0+a_1\tau+a_2\tau^2); \quad \varphi_k(\tau)=T_p\tau^3(20a_0+5a_1\tau+4a_2\tau^2)/20,
\end{aligned} \qquad (8)$$

где a_i даются соотношениями: $a_0=2\omega_f/T_p-\varepsilon_f$; $a_1=-8\omega_f/T_p+5\varepsilon_f$; $a_2=3\omega_f/T_p-2\varepsilon_f$.

Позиционный переход. Функция позиционного перехода $\varphi_3(t)$ по углу поворота в третьем замыкающем элементарном движении должна удовлетворять краевым условиям

$$\varphi_3(0)=0; \qquad \dot\varphi_3(0)=0; \qquad \ddot\varphi_3(0)=0; \qquad (9)$$

$$\varphi_3(T_p)=\varphi^*; \quad \dot\varphi_3(T_p)=0, \quad \ddot\varphi_3(T_p)=0; \quad \dddot\varphi_3(T_p)=0, \quad (10)$$

где угол $\varphi^*=2\arccos(\lambda_0^*)$ определяется краевыми условиями (1) и (2), λ_0^* – скалярная часть кватерниона $\Lambda^*\equiv(\lambda_0^*,\boldsymbol\lambda^*)=\bar\Lambda_2(T_p)\circ\bar\Lambda_1(T_p)\circ\bar\Lambda_0\circ\Lambda_f\circ\bar\Lambda_5(T_p)\circ\bar\Lambda_4(T_p)$, а кватернионы $\Lambda_k(T_p)$, k=1,2,4,5 определяются углами $\varphi_k(T_p)$ по соотношениям (6), (8) при $\tau=1$ и ортами

$$e_1 = e_0^{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0/\varepsilon_0;\ e_2 = e_0^{\omega} \equiv \omega_0/\omega_0;\ e_3 = \lambda^*/\sin(\varphi^*/2);$$
$$e_4 = \Lambda_5(T_p) \circ e_f^{\omega} \circ \tilde{\Lambda}_5(T_p);\ e_5 = e_f^{\varepsilon} \equiv \varepsilon_f/\varepsilon_f, \tag{11}$$

где орт $e_f^{\omega} = \omega_f/\omega_f$. На модуль скорости движения в позиционном переходе может накладываться ограничение с заданной константой ω^* вида

$$\max_{\tau \in [0,1]} |\dot{\varphi}_3(\tau)| \le \omega^*. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала случай позиционного перехода без ограничений (12). Весь интервал такого перехода в нормированном времени $\tau \in [0,1]$ разделим на 2 участка: первый участок длительностью $\mu < 1$ и второй участок длительностью $1-\mu$. На каждом участке введем свое нормированное время: $\tau_1 = t/T_1, T_1 \equiv \mu T_p$ и $\tau_2 = (t - T_1)/T_2, T_2 \equiv (1-\mu)\cdot T_p$. Угловое движение на первом участке представим полиномом 4-ой степени $\varphi_3^{(1)}(\tau_1)$ с краевыми условиями (9) на левом конце, а на втором участке – полиномом 5-ой степени $\varphi_3^{(2)}(\tau_2)$ с краевыми условиями (10) на правом конце. В момент абсолютного времени $t = \mu T_p$ для гладкого сопряжения указанных участков с достижением максимальной скорости $\omega_m = 10\varphi^*/(T_p(4+\mu))$ элементарного движения такого позиционного перехода потребуем равенства:

$$\varphi_3^{(1)}(1) = \varphi_3^{(2)}(0), \quad \dot{\varphi}_3^{(1)}(1) = \dot{\varphi}_3^{(2)}(0) = \omega_m, \quad \ddot{\varphi}_3^{(1)}(1) = \ddot{\varphi}_3^{(2)}(0). \tag{13}$$

Параметр $\mu \in (0,1)$ является свободным, его можно использовать для перераспределения интенсивности ПМ на участках: уменьшение μ увеличивает интенсивность ПМ на первом участке и уменьшает ее на втором. При определении параметра μ из условия равенства третьей производной угла при стыке участков ($\dddot{\varphi}_3^{(1)}(1) = \dddot{\varphi}_3^{(2)}(0)$) получается значение $\mu = \sqrt{2} - 1$. Функции позиционного перехода $\varphi_3^{(1)}(\tau_1), \varphi_3^{(2)}(\tau_2)$ имеют в данном случае вид:

участок 1:
$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_3^{(1)}(\tau_1) = \dddot{\varphi}_3^{(1)}(\tau_1) = \dot{\varepsilon}_m(1 - 2\tau_1); \quad \varepsilon_3^{(1)}(\tau_1) = \ddot{\varphi}_3^{(1)}(\tau_1) = \varepsilon_m \tau_1(1-\tau_1); \\ &\omega_3^{(1)}(\tau_1) = \dot{\varphi}_3^{(1)}(\tau_1) = \omega_m \tau_1^2(3 - 2\tau_1); \quad \varphi_3^{(1)}(\tau_1) = \omega_m T_1 \tau_1^3(2 - \tau_1)/2; \end{aligned} \tag{14}$$

участок 2:
$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_3^{(2)}(\tau_2) = \dddot{\varphi}_3^{(2)}(\tau_2) = 6(-a_0 + a_1\tau_2 - 2a_2\tau_2^2)/T_2; \\ &\varepsilon_3^{(2)}(\tau_2) = \ddot{\varphi}_3^{(2)}(\tau_2) = -\tau_2(6a_0 - 3a_1\tau_2 + 4a_2\tau_2^2); \\ &\omega_3^{(2)}(\tau_2) = \dot{\varphi}_3^{(2)}(\tau_2) = \omega_m - T_2\tau_2^2(3a_0 - a_1\tau_2 + a_2\tau_2^2); \\ &\varphi_3^{(2)}(\tau_1) = \varphi_{31} - T_2\tau_2(\omega_m - T_2\tau_2^2(20a_0 - 5a_1\tau_2 + 4a_2\tau_2^2)/20), \end{aligned} \tag{15}$$

где $a_0 = 2\omega_m/T_2$; $a_1 = 8\omega_m/T_2$; $a_2 = 3\omega_m/T_2$; $\dot{\varepsilon}_m = 6\omega_m/T_1^2$; $\varepsilon_m = 6\omega_m/T_1$; $\varphi_{31} = \omega_m T_1/2$.

Рассмотрим теперь случай наличия условия (12). В этом варианте между первым и вторым участком должен «вставляться» участок движения длительностью T_c с постоянной скоростью $\dot{\varphi}_3(t)=\omega^*=\text{const}$ («полка»). При этом длительности всех участков движения:

$$T_1=\mu T_p/(1+q\mu);\ T_c=q(1-\mu(1-\mu)(2-q))T_p/(1+q(1+q\mu(1-\mu)));\ T_2=(1-\mu)T_p/(1+q(1-\mu)),$$

а параметр q, определяющий длительность T_c «полки», находится из квадратного уравнения: $q^2+bq+c=0$, где при обозначениях $z=\mu(1-\mu)(10a-1)$ и $a=10\omega^* T_p\varphi^*$ коэффициенты: $b=((10a-1)-11a\mu(1-\mu))/z$ и $c=((4+\mu)a-1)/z$. Если значение $q\le 0$, то при $\omega_m<\omega^*$ позиционный переход будет без «полки». при $\omega_m>\omega^*$ требуемое движение неосуществимо. Если же $q>0$, то позиционный переход обязательно имеет «полку» длительностью T_c. Соотношения для аналитического описания позиционного перехода на участке 1 (от начала движения до времени начала «полки») и участке 2 (с момента времени схода с «полки» до завершения движения) по-прежнему имеют вид (14), (15), но с подстановкой в них ω^* вместо ω_m, нормированного времени на втором участке $\tau_2=(t-(T_1+T_c))/T_2\subset[0,1]$ и значения $\varphi_{31}=\omega^*(T_c+T_1/2)$. На участке «полки» параметры движения определятся формулами

$$\varepsilon_3^{(c)}(\tau_c)=\ddot{\varphi}_3^{(c)}(\tau_c)=0;\ \varepsilon_3^{(c)}(\tau_c)=\ddot{\varphi}_3^{(c)}(\tau_c)=0;\ \omega_3^{(c)}(\tau_c)=\dot{\varphi}_3^{(c)}(\tau_c)=\omega^*;\ \varphi_3^{(c)}(\tau_c)=T_c\omega^*(1/2+\tau_c),$$

где нормированное время $\tau_c=(t-T_1)/T_c\subset[0,1]$.

Численные результаты. Представленный метод аналитического синтеза параметров ПМ КА реализован в виде комплекса программ и успешно апробирован на тестовых задачах управления ориентацией КА наблюдения [6] при ограниченных ресурсах силового гирокомплекса (СГК) [5]. На рис. 1 приведены все параметры ПМ КА на интервале времени $T_p=[0,85]$с и потребные скорости прецессии СГК $\dot{\beta}_i(t)$, $i=1:4$ при векторе начальных углов прецессии СГК $\beta(0)=\{40.716,-11.198,-152.739,74.221\}^\circ$ и краевыми условиями ПМ

$\Lambda_0=\{0.92667,-0.019725,0.37420,-0.030397\}$; $\Lambda_f=\{0.92095,-0.092125,-0.37859,-0.0052309\}$;

$\omega_0=\{-0.9,0.04,0.7\}^\circ/\text{с}$; $\omega_f=\{-0.9,-0.01,-0.7\}^\circ/\text{с}$;

$\varepsilon_0=\{-0.01,0,0.005\}^\circ/\text{с}^2$; $\varepsilon_f=\{-0.0119549,-0.00106716,-0.0089966\}^\circ/\text{с}^2$,

причем рис. 1a соответствует случаю движения в позиционном переходе без ограничений, а рис. 1b – при наличии ограничения (12) с параметром $\omega^*=1.5\,^\circ/\text{с}$.

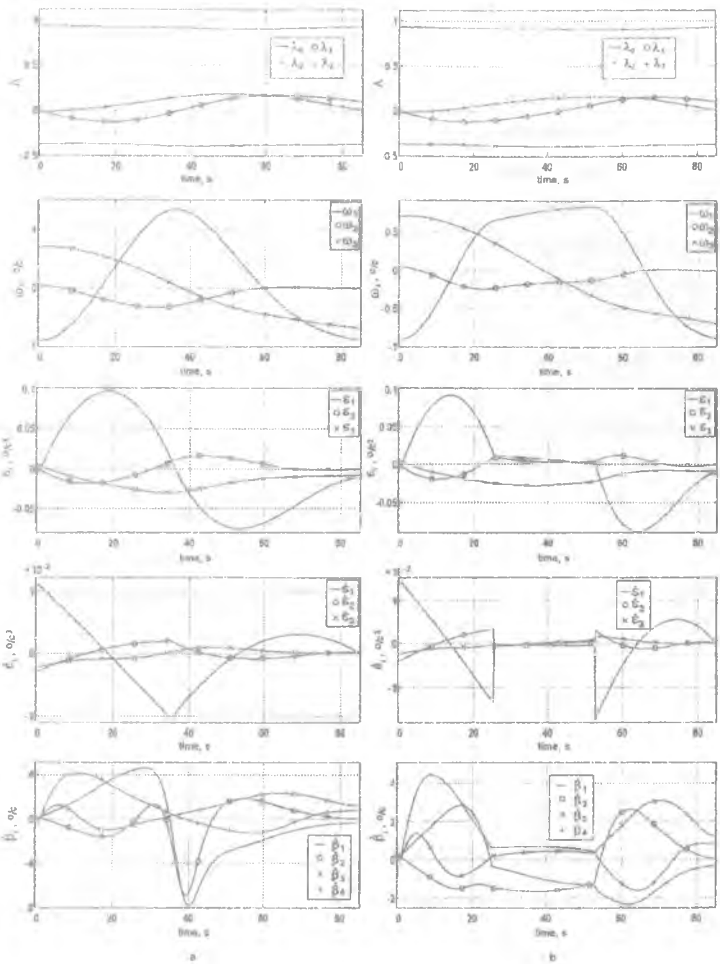

Рис. 1

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сомов Е.И. Оптимизация экстенсивного управления при переориентации летательного аппарата с управляющими силовыми гироскопами // Оптимизация процессов в авиационной технике. – Казань: КАИ, 1981, с. 106-110.
2. Антонов Ю.Г., Монахов Ю.В. Пространственные угловые маневры космического летательного аппарата // Сб. докладов 2-го Всесоюзного НТС по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Куйбышев: КуАИ, 1987, с. 45-47.
3. Anshakov G.P, Antonov Yu.G, Butyrin S.A., Makarov V.P., Matrosov V.M., Somov Ye.I. Gyromoment attitude control systems dynamics of rapid manoeuvring remote sensing spacecraft // Proceedings of Intern. Aerospace Congress. Theory, Applications, Technologies, vol. 2. – Moscow, 1995, pp. 125-128.
4. Somov Ye.I. Nonlinear Spacecraft Gyromoment Attitude Control // Proceedings of the 1st Intern. Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace. - Daytona Beach, USA: ERAU, 1997, pp. 625-630.
5. Сомов Е.И., Герасин И.А. Оценка реализуемости поворотного маневра космического аппарата, управляемого избыточной системой гиродинов // Управление движением и навигация летательных аппаратов. – Самара: Академия космонавтики, 1998, с.138-143.
6. Somov Ye.I., Butyrin S.A., Matrosov V.M., Anshakov G.P., Antonov Yu.G., Makarov V.P. et al. Ultra-precision attitude control of a large low-orbital space telescope // *Control Engineering Practice*, vol. 7, no 7, 1999, pp 1127 – 1142.
7. Kozlov D.I., Anshakov G.P., Antonov Yu.G., Makarov V.P., Somov Ye.I. Precision flight control systems of Russian remote sensing spacecraft // *Space Technology*, 1999, no.3&4, pp. 37-52.
8. Аншаков Г.П., Антонов Ю.Г., Мантуров А.И., Усталов Ю.М. Формирование программ управления ориентацией КА наблюдения // Сб. научно-технических статей по ракетно-космической тематике. – Самара: ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», 2001
9. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматлит, 1961.
10. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.