

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

**И. Е. ДАВЫДОВ**

**Теория УПРАВЛЕНИЯ ЛА**

Электронное учебное пособие

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование  
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ  
на 2009 – 2018 годы по проекту «Разработка образовательной программы  
по направлению подготовки магистров  
161100.68-системы управления движением и навигация»  
Соглашение № 1/8 от 03 июня 2013 г.

С А М А Р А

2013

УДК 629.78 (075)  
ББК 39.6я7  
Д 138

Автор: Давыдов Игорь Евгеньевич

Компьютерная вёрстка И. Е. Давыдов

**Давыдов, И. Е. Теория управления ЛА** [Электронный ресурс] : Электронное учебное пособие / И. Е. Давыдов; М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. И.Е. Давыдов - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Излагается конспект лекций по дисциплине «Теория управления ЛА» по дистанционной форме обучения, который выполнен на основе соответствующих рабочих программ для разделов «Непрерывные линейные системы автоматического управления» и «Нелинейные системы автоматического управления».

Пособие предназначено для научно-методического сопровождения курса «Теория управления ЛА», читаемого магистрантам СГАУ, обучающимся по направлению 161100.68 «Системы управления движением и навигация». Также пособие будет полезно студентам специалитета и магистрантам, обучающимся по смежным техническим и естественнонаучным специальностям и направлениям подготовки (в рамках УГС 010000 «Физико-математические науки» и 160000 «Авиационная и ракетно-космическая техника»). Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва» на 2009-2018 годы.

Подготовлено на кафедре космического машиностроения.

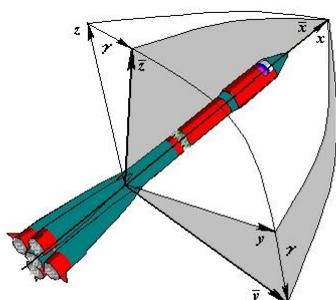
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2013

# 1. ПРИНЦИП РАБОТЫ И ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

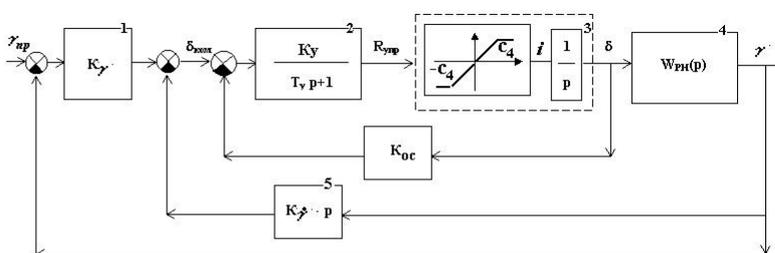
## Цели и задачи теории автоматического управления (ТАУ)

Курс ТАУ изучает общие принципы построения систем автоматического управления, методы анализа. Общая ТАУ охватывает процессы, протекающие как в живой, так и неживой природе.

### САУ ракеты – носителя (РН) по каналу крена



Возмущённое движение РН по каналу крена



Упрощённая структурная схема РН - АС по каналу крена

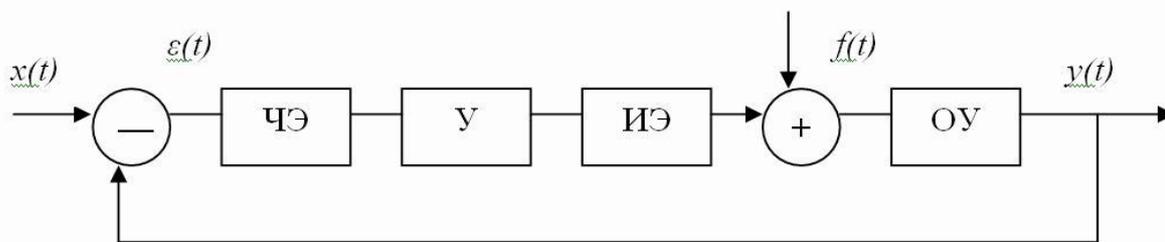
Рисунок 1.1 — Упрощённая схема анализа возмущённого движения ракеты – носителя по каналу крена

Где:  $\gamma$  - угол крена;  $\gamma_{пр}$  - программное значение угла крена;  $Oxyz$  - невозмущённая связанная система координат;  $Ox\bar{y}\bar{z}$  - возмущённая связанная система координат; 1 – гировертикант (ДУ - датчик угла) ; 2 – усилитель сервопривода; 3 – рулевая машина; 4 – передаточная функция объекта управления (ОУ), описывающая движение РН по каналу крена; 5 – датчик угловой скорости (ДУС).

Вращение РН относительно продольной оси ( $Ox$ ) отслеживается гировертикантом и ДУСом. Под действием различных возмущающих моментов (аэродинамических, от перекоса вектора тяги двигательной установки и т.д.) происходит вращение ЛА относительно продольной оси  $Ox$  (Рис.1). То есть, действие возмущающих моментов приводит к появлению дополнительного угла крена  $\gamma$  и угловой скорости  $\omega$  (вариации относительно программных значений), а положение РН будет определяться связанной возмущённой системой координат  $Ox\bar{y}\bar{z}$ . При вращении РН относительно продольной оси ( $Ox$ ) гировертикант (1) выдаёт сигнал рассогласования ( $\gamma$ ), а ДУС (2) - сигнал рассогласования, равный  $\omega$ .

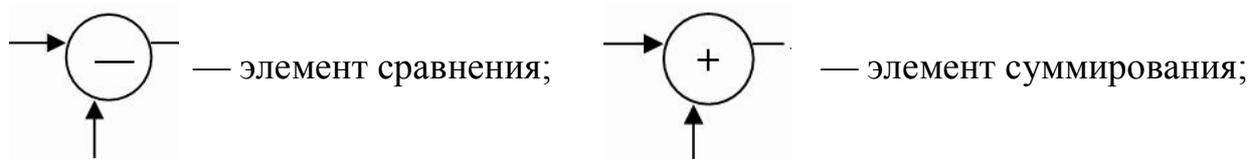
Ликвидировать вращение относительно продольной оси и поддерживать нулевой угол крена  $\gamma$  и нулевое значение угловой скорости  $\omega$  – задача системы автоматического управления, в данном случае – автомата стабилизации (АС).

Любую САУ можно представить в виде функциональной структурной схемы.



Главная отрицательная обратная связь

Рисунок 1.2 — структурная схема САУ



$x(t)$  — управляющее воздействие (заданное значение регулируемой величины);

$y(t)$  — реакция системы (действующее значение регулируемой величины);

$f(t)$  — возмущающее воздействие (порыв ветра, метеорные частицы);

$\varepsilon(t)$  — ошибка, сигнал рассогласования;

ЧЭ — чувствительный элемент;

У — усилитель;

ИЭ — исполнительный элемент

Кроме главной отрицательной обратной связи (ОС), могут быть местные ОС, которые охватывают одно или несколько звеньев. Для улучшения качественных характеристик системы они могут быть как положительными, так и отрицательными. Но главная обратная связь бывает только отрицательной. Все элементы, входящие в эту схему, являются функционально необходимыми, то есть без них не может работать система.

### Классификация САУ

Все САУ делят на три группы:

- 1) обыкновенные;
- 2) самонастраивающиеся;
- 3) игровые.

**Самонастраивающиеся системы** — это системы, в которых автоматически, заранее непредусмотренным образом изменяются параметры системы. По методу исследования САУ делят на:

- линейные;
- нелинейные;
- особые.



Рисунок 1.3 — Классификация САУ

**Линейные системы** — системы, поведение которых описывается линейными уравнениями.

**Нелинейные системы** — такие системы, в которых поведение хотя бы одного элемента описывается нелинейными уравнениями.

**Особые системы** — системы, поведение которых описывается уравнением с переменными коэффициентами.

**Системы с распределенными параметрами** — системы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

**Импульсные системы** — системы, реагирующие дискретно на поданный на её вход сигнал.

**Системы с запаздыванием** — системы, имеющие в своём составе элемент с «чистым» запаздыванием.

САУ можно классифицировать по:

- физической природе регулируемой величины (система регулирования тока, числа оборотов, температуры и т. д.);
- физической природе основных элементов (электрические, гидравлические, механические системы и т. д.);
- точности системы в установившемся режиме: астатические и статические.

**Астатические системы** — это системы, у которых статическая ошибка не зависит от величины управляющего воздействия, в противном случае систему называют статической.

**Статическая ошибка** – это разность между заданным и действительным значением регулируемой величины.

Системы можно классифицировать по виду управляющего воздействия

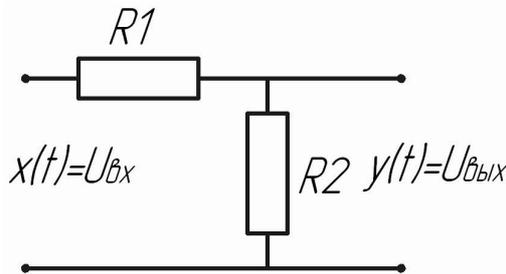
- системы стабилизации;
- следящие системы;
- программные системы;

**Системы стабилизации** – управляющее воздействие  $x(t) = \text{const}$  (например, стабилизация напряжения 220В).

**Программные системы** – когда управляющее воздействие заранее задано по определенному закону  $x(t) = \text{var}$  (например, станки с программным управлением).

**Следящие системы** – это автоматическое устройство для воспроизведения величины, меняющейся по определенному закону (например, слежение радиолокатора за целью).

САУ - динамические системы.



$$I = \frac{U_{\text{вх}}}{R_1 + R_2};$$

$$U_{\text{вых}} = I \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{\text{вх}} = K \cdot U_{\text{вх}};$$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ — статический коэффициент}$$

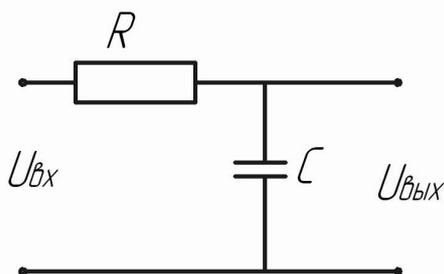
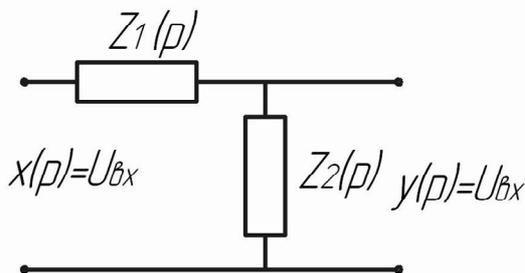
усиления

$$p = \frac{d}{dt};$$

$z(p) = R$  — омическое сопротивление;

$z(p) = L \cdot p$  — индуктивное сопротивление;

$z(p) = \frac{1}{c \cdot p}$  — ёмкостное сопротивление;



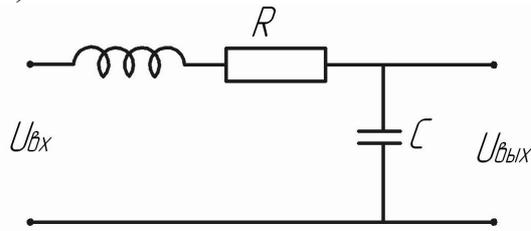
$$y(p) = U_{\text{вых}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{\text{вх}}$$

Рисунок 1.4 – Пример

$$1) U_{\text{вых}} = \frac{1}{R + \frac{1}{c \cdot p}} \cdot U_{\text{вх}} = \frac{1}{Rc p + 1} \cdot U_{\text{вх}};$$

$$Rc \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t), \quad T = Rc \text{ — постоянная времени.}$$

2)



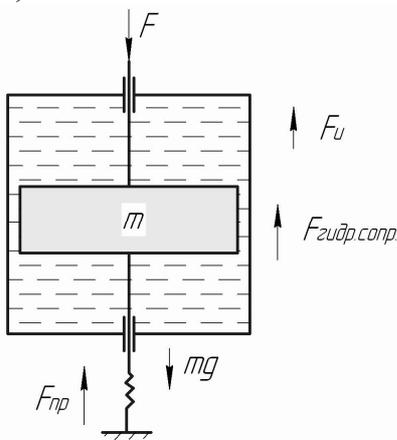
$$U_{\text{вых}} = \frac{\frac{1}{c \cdot p}}{L \cdot p + R + \frac{1}{c \cdot p}} \cdot U_{\text{вх}} = \frac{1}{Lcp^2 + Rcp + 1} \cdot U_{\text{вх}};$$

Рисунок 1.5 - Пример

$$Lc \frac{d^2 y}{dt^2} + Rc \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t);$$

$$(Lcp^2 + Rcp + 1) \cdot U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}}; U_{\text{вых}} = y(t); U_{\text{вх}} = x(t).$$

3)



$$F = F_{\text{зудр. снр.}} + F_{\text{сп.}};$$

$$c\dot{y} + ky = F;$$

$$c \frac{dy}{dt} + ky = F;$$

$$mg + F = F_{\text{зудр. снр.}} + F_{\text{сп.}} + F_u = m\ddot{y} + c\dot{y} + ky.$$

$$U_{\text{вых}} = k \cdot U_{\text{вх}} \Rightarrow y(t) = k \cdot x(t)$$

Рисунок 1.6 - Пример

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ САУ. ТИПОВЫЕ (ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ) ЗВЕНЬЯ

### 2.1. Дифференциальные уравнения элементов и САУ

САУ — динамическая система и её поведение описывается ДУ. В общем виде любой элемент или САУ записывается:

(1):

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x,$$

где  $a_i$ ,  $b_i$  — коэффициенты, зависящие от параметров системы (инерционные, массовые, аэродинамические характеристики системы);

$y(t)$  — выходной сигнал или реакция системы;

$x(t)$  — входной сигнал.

Если предположить, что  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования, то ДУ (1)

можно представить в виде:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t) \quad (2)$$

Уравнение (2) — это ДУ (1) в операторном виде.

## 2.2. Типовые (эквивалентные) звенья

Элементы, образующие САУ, по физической природе весьма разнообразны. Если математическое описание проводить, исходя из физической природы их элементов и учитывать выполняемые ими функции, то такое описание окажется чрезвычайно трудоёмким. Поэтому математическое описание производят не с точки зрения выполняемой функции, а с точки зрения того, как то или иное звено реагирует на поданное на его вход типовое воздействие. В результате большое число элементов можно свести к типовым (эквивалентным) звеньям. Каждое такое звено описывается ДУ не выше второго порядка. Таких звеньев около 12-15.

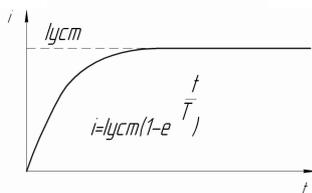
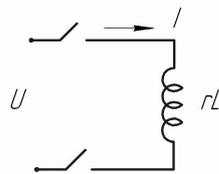
### 1. Усилительное, или безынерционное звено.

$y = k \cdot x$ , где  $k$  — статический коэффициент усиления.

Пример. Ламповый или транзисторный усилитель описывается уравнением  $U_{\text{вых}} = k \cdot U_{\text{вх}}$ .

### 2. Апериодическое звено.

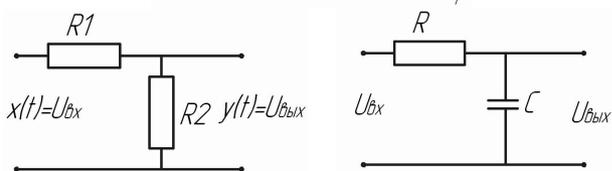
$$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x; \quad (Tp + 1) \cdot y = k \cdot x.$$



$$U = ir + Lpi; \quad U = ir(1 + \frac{L}{r} \cdot p);$$

$$T = \frac{L}{r}, \quad i = kU(1 + Tp); \quad k = \frac{1}{r}.$$

$I_{\text{уст}}$  — установившийся ток.



$$U_{\text{вых}} \cdot (Tp + 1) = k \cdot U_{\text{вх}};$$

$$T = Rc.$$

Рисунок 2.1. — Апериодическое звено

### 3. Колебательное звено.

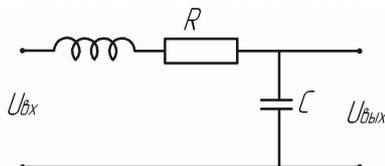


Рисунок 2.2 — Колебательное звено

$$T^2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2c \cdot T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x_{\text{вх}}; \quad (T^2 p^2 + 2cTp + 1) \cdot y = k \cdot x_{\text{вх}}$$

$T$  — постоянная времени,  $c$  — коэффициент демпфирования, который определяет степень колебательности системы.

### 4. Консервативное звено. $c = 0$ ; $(T^2 p^2 + 1) \cdot y = k \cdot x_{\text{вх}}$ — колебания с постоянной амплитудой.

### 5. Интегрирующее звено.

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot x; \quad py = k \cdot x, \quad k - \text{статический коэффициент усиления.}$$

Пример: электродвигатель.

### 6. Дифференцирующее звено.

$$y = k \cdot \frac{dx}{dt}; \quad y = kpx, \quad k - \text{статический коэффициент усиления.}$$

### 7. Форсирующее звено 1-го порядка.

$$y = k(Tp + 1)x$$

### 8. Форсирующее звено 2-го порядка.

$$y = k(T^2 p^2 + 2cTp + 1)x$$

### 9. Звено с «чистым» запаздыванием.

$$y = x(t - \tau), \quad \tau - \text{«чистое» запаздывание.}$$

## 3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Для определения реакции на выходе системы необходимо решить ДУ (2):  
 $(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t).$

Это уравнение можно решить классическим способом или с использованием других способов преобразования. Эффективным способом является операционный метод, который позволяет заменить действия интегрирования и дифференцирования обычными алгебраическими действиями (умножения, деления) и исключает нахождение постоянной интегрирования.

Эффективным методом является прямое преобразование Лапласа, которое осуществляет преобразование вещественной переменной  $f(t)$  в комплексную переменную  $F(p)$ . Т.е.,  $f(t) \rightarrow F(p)$ ,  $y(t) \rightarrow Y(p)$ .

$f(t)$  — оригинал;  $F(p)$  — изображение.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt - \text{прямое преобразование по Лапласу для функции } f(t).$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp - \text{обратное преобразование по Лапласу для функции}$$

$F(p)$ .

$p = \alpha + j \cdot \omega$  - комплексная переменная, иногда ее обозначают через  $s$ ;

$c$  - абсцисса абсолютной сходимости. Для типовых сигналов  $c = 0$ , например,  $f(t) = 0, t < 0$ :

$$\int f(t) dt \leftarrow \frac{F(p)}{p}$$

$$\frac{df(t)}{dt} \leftarrow F(p) \cdot p$$

Если провести преобразование по Лапласу для ДУ (2), получим:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot Y(p) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot X(p).$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}$$

— передаточная функция звена или системы.

Передаточная функция имеет фундаментальное значение:

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-pt} dt;$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt;$$

$$p = \alpha + j \cdot \omega.$$

**Передаточной функцией звена или системы** называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу на входе при нулевых начальных условиях.

### Передаточная функция типовых элементов

#### 1. Усилительное звено.

$$W(p) = k = \frac{Y(p)}{X(p)}; X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt; p = \alpha + j \cdot \omega$$

$$y(t) = k \cdot x(t), \quad k \text{ — статический коэффициент усиления.}$$

#### 2. Аperiodическое звено.

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}; p = \alpha + j \cdot \omega; \text{ ДУ: } T \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = k \cdot x(t); (Tp+1) \cdot y = k \cdot x; p = \frac{d}{dt}.$$

#### 3. Колебательное звено.

$$\text{ДУ: } (T^2 p^2 + 2cTp + 1) \cdot y(t) = k \cdot x(t)$$

$T$  - постоянная времени,  $c$  - коэффициент демпфирования, который определяет степень колебательности системы.

Если взять прямое преобразование по Лапласу для функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , то получим передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2cTp + 1}.$$

#### 4. Консервативное звено. $c = 0$ ; $W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$ .

#### 5. Неустойчивое колебательное звено.

$$c < 0; W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2cTp + 1}.$$

#### 6. Интегрирующее звено.

$$\text{ДУ: } py(t) = k \cdot x_{\text{ex}}(t); W(p) = \frac{k}{p}.$$

#### 7. Дифференцирующее звено.

$$\text{ДУ: } y(t) = kpx(t); W(p) = k \cdot p.$$

#### 8. Форсирующее звено 1-го порядка.

$$\text{ДУ: } y(t) = k(Tp+1)x(t); W(p) = k(Tp+1).$$

#### 9. Форсирующее звено 2-го порядка.

$$\text{ДУ: } y(t) = k(T^2 p^2 + 2cTp + 1)x(t); W(p) = k(T^2 p^2 + 2cTp + 1).$$

#### 10. Звено с «чистым» запаздыванием.

ДУ:  $y(t) = x(t)(t - \tau)$ ;  $W(p) = e^{-\tau p}$ ,  $\tau$  — «чистое» запаздывание.

### 11. Неустойчивое апериодическое звено.

$$W(p) = \frac{k}{Tp - 1}.$$

## 4. ТИПОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В САУ. ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Характеристикой звена или системы является их реакция на вполне определённое входное воздействие. Такими воздействиями являются:

### 1. Единичное ступенчатое воздействие

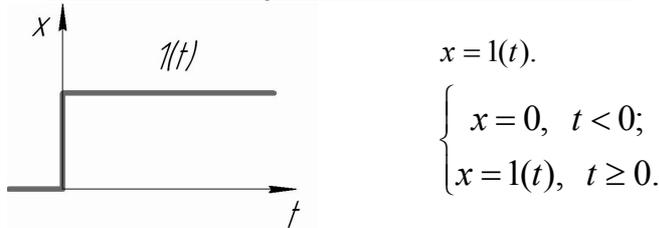


Рисунок 4.1 – Ступенчатое воздействие

### 2. Импульсное входное воздействие

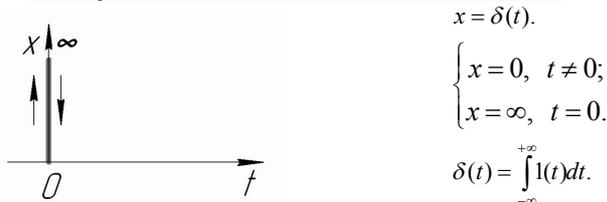


Рисунок 4.2 – Импульсное воздействие

### 3. Линейно нарастающий сигнал

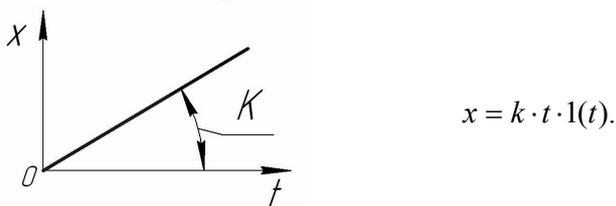


Рисунок 4.3 – Лиейное воздействие

### 4. Гармонический входной сигнал

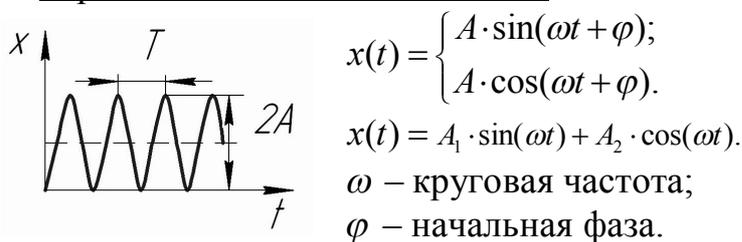


Рисунок 4.4 – Гармоническое воздействие

Используется при частотных испытаниях.

Реакция системы или элемента на ступенчатое воздействие называется **переходной характеристикой**.

Реакция системы или элемента на импульсное входное воздействие называется **импульсной переходной характеристикой**.

# Переходные характеристики типовых элементов

## 1. Усилительное звено

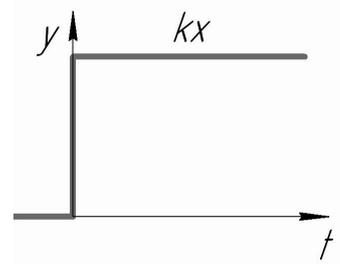
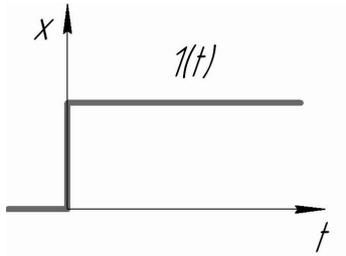
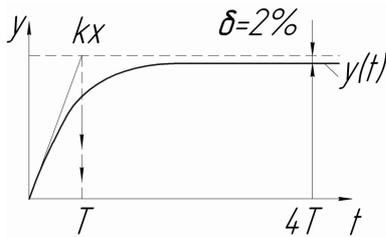


Рисунок 4.5 – Временная зависимость усилительного звена

## 2. Аperiodическое звено



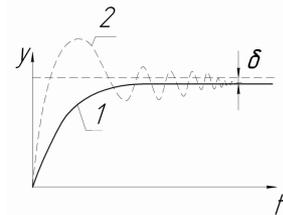
$$y = kx(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Если провести касательную к началу координат, то получим постоянную времени  $T$ .

$4T$  – время затухания переходного процесса.

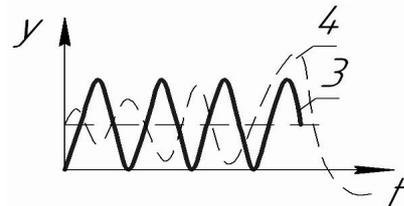
Рисунок 4.6 – Временная зависимость аperiodического звена

## 3. Колебательное звено



1, когда  $c > 1$ .

2, когда  $0 < c < 1$  – затухающий колебательный процесс.

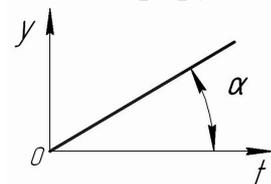


3, когда  $c = 0$  – колебания с постоянной амплитудой в линейных системах.

4, когда  $c < 0$  – колебания с нарастающей амплитудой.

Рисунок 4.7 – Временная зависимость колебательного звена

## 4. Интегрирующее звено



$$\alpha = \arctg(k).$$

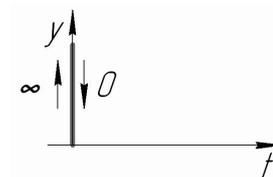


Рисунок 4.8 – Временная зависимость аperiodического звена

Для получения переходной характеристики в аналитическом виде, необходимо решить следующее ДУ:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t).$$

## 5. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К САУ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 5.1. Основные требования, предъявляемые к САУ

Здесь не рассматриваются требования с общеинженерной точки зрения (прочность, надёжность, экономичность), а рассматриваются требования, вытекающие из специфики работы САУ.

1. Система должна быть устойчива. При выведении САУ из равновесия под действием внешних сил, она должна с течением времени вернуться в исходное состояние с точностью до величины статической ошибки. Это физическое понятие устойчивости.
2. Статическая ошибка не должна превышать заданного значения. **Статическая ошибка** - это разность между заданным и действительным значением регулируемой величины в установившемся режиме.
3. Требование, предъявляемое к переходному процессу. В конкретном случае требования различны:
  - монотонность процесса;
  - быстродействие.

Целью анализа САУ является подбор таких параметров системы, которые удовлетворяли бы этим трём требованиям.

### 5.2. Частотные характеристики

При подаче на вход системы гармонического сигнала  $x(t) = x^{\max} \sin(\omega t)$  (\*) по окончании переходного процесса на выходе устанавливаются колебания той же самой частоты, но отличные по амплитуде и по фазе

$y(t) = y^{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  (\*\*), где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота;  
 $f$  – частота, Гц;  $\varphi$  – фаза колебаний.

В системе устанавливаются незатухающие колебания. Поведение системы описывается частным решением однородного ДУ:

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_m \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dx}{dt} + b_0 \cdot x \quad (1)$$

Определим реакцию на выходе системы, т.е.  $y$ .

Заменяем  $\sin(\omega t)$  на  $e^{j\omega t}$ , а  $\sin(\omega t + \varphi)$  на  $e^{j(\omega t + \varphi)}$ . Подставив замену в уравнения (\*) и (\*\*), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \right) &= j\omega x^{\max} \cdot e^{j\omega t} & \frac{d}{dt} \left( y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \right) &= j\omega \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \right) &= (j\omega)^2 x^{\max} \cdot e^{j\omega t} & \frac{d^2}{dt^2} \left( y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \right) &= (j\omega)^2 \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \frac{d^m}{dt^m} \left( x^{\max} \cdot e^{j\omega t} \right) &= (j\omega)^m x^{\max} \cdot e^{j\omega t} & \frac{d^n}{dt^n} \left( y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \right) &= (j\omega)^n \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \left( a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0 \right) \cdot y^{\max} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \\ & = \left( b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0 \right) \cdot x^{\max} \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее запишем:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} = \\ &= \frac{y^{\max}}{x^{\max}} \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{e^{j\omega t}} = \frac{y^{\max}}{x^{\max}} \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= P(\omega) + jQ(\omega) \end{aligned} \quad (4)$$

Эта функция может быть получена из передаточной функции путём простой замены  $p$  на  $j\omega$ .

$A(\omega)$  – амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$  – фазовая частотная характеристика (ФЧХ);

$P(\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$Q(\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

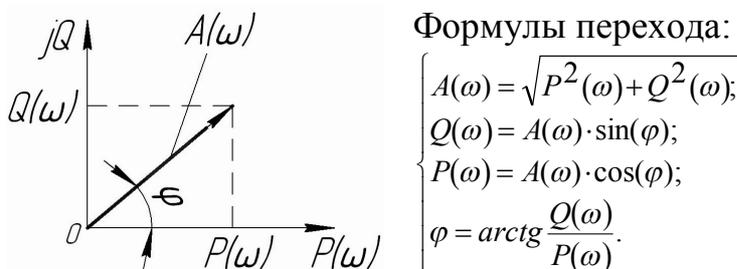


Рисунок 5.1 – Построение АЧХ и ФЧХ

Эти характеристики имеют физический смысл и могут определяться экспериментально, что широко используется.

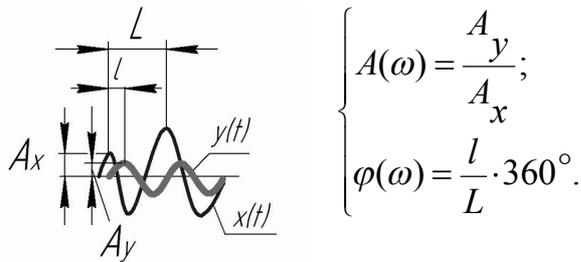


Рисунок 5.2 – Отношение амплитуд и фазовый сдвиг на выбранной частоте

## 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

При анализе САУ очень часто используют логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ), которые позволяют уменьшить объём вычислительных работ. Эти характеристики могут быть построены по виду передаточной функции. Кроме того, метод ЛЧХ позволяет оценить влияние каждого звена на поведение системы и выбрать корректирующий контур для получения необходимых свойств системы.

Прологарифмируем (4), тогда получим  $\lg W(j\omega) = \lg A(\omega) + j\varphi(\omega)$ ,

где  $\lg A(\omega)$  - логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ);

$\varphi(\omega)$  – логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ).

Так как  $A(\omega)$  – отношение выходного и входного сигналов, то целесообразно её строить в координатах  $G = 20 \lg A(\omega)$ , дБ.

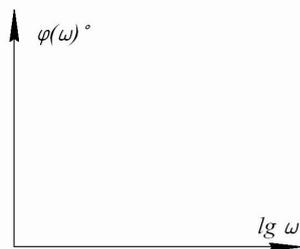
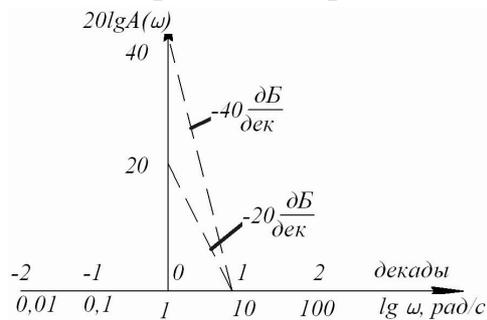


Рисунок 6.1 – Пример масштабирования

### ЛЧХ типовых звеньев

#### 1. Усилительное звено

$$W(p) = k, \quad A(\omega) = k, \quad 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0.$$

Логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики имеют следующий вид:

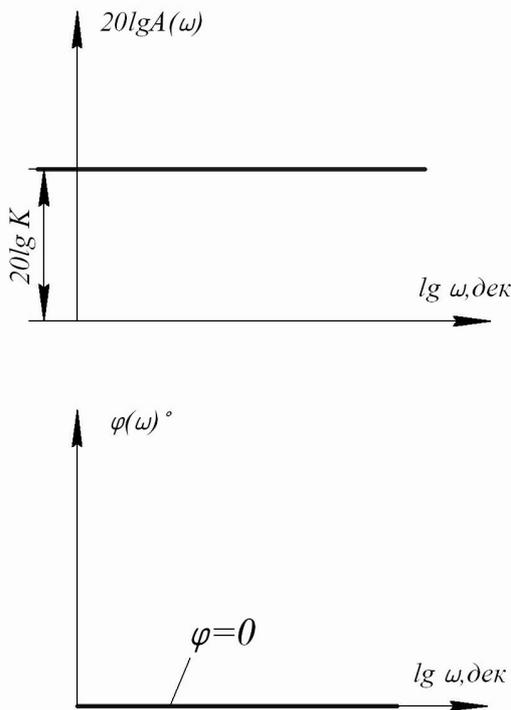


Рисунок 6.2 – ЛЧХ усилительного звена

## 2. Аperiodическое звено

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}, \quad p = j\omega,$$

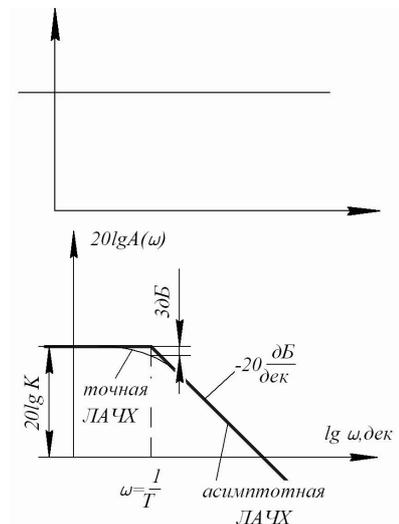
$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k \cdot (Tj\omega-1)}{(Tj\omega+1) \cdot (Tj\omega-1)} = \frac{k \cdot (Tj\omega-1)}{-T^2\omega^2-1} = \frac{k}{T^2\omega^2+1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1},$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{k}{T^2\omega^2+1}\right)^2 + \left(-j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}},$$

$$20\lg A(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{T^2\omega^2+1}.$$

Если: 1)  $T^2\omega^2 < 1$ , то  $\omega < \frac{1}{T}$ .

2)  $T^2\omega^2 > 1$ , то  $20\lg A(\omega) = 20\lg k - 20\lg(T\omega)$ .



$$\varphi(\omega) = \arctg \left( -\frac{kT\omega \cdot (T^2\omega^2 + 1)}{(T^2\omega^2 + 1) \cdot k} \right) = \arctg(-T\omega).$$

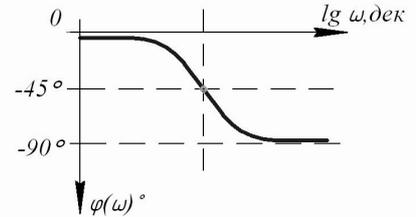


Рисунок 6.3 — ЛЧХ аperiodического звена — зеркальное отображение

### 3. Форсирующее звено 1-го порядка аperiodического звена.

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1).$$

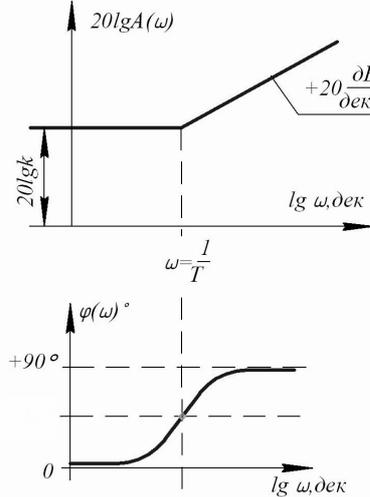


Рисунок 6.2 – ЛЧХ форсирующего звена 1-го порядка

### 4. Интегрирующее звено

$$W(j\omega) = \left( \frac{k}{j\omega} \right) \cdot \frac{j\omega}{j\omega} = -\frac{kj}{\omega};$$

$$20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega.$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{k}{-\omega} \right) = \arctg(\infty) = -90^\circ.$$

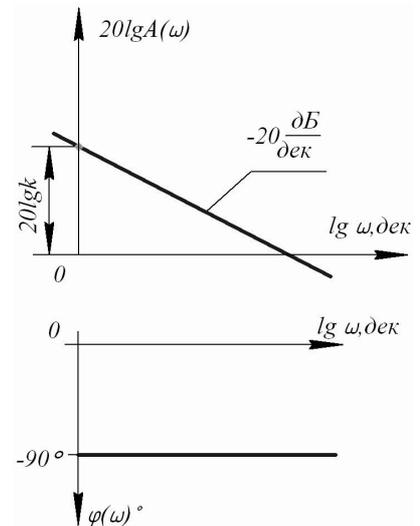
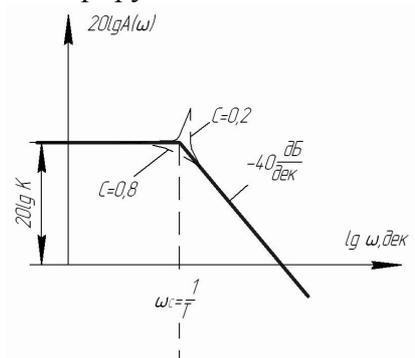


Рисунок 6.5 — ЛЧХ интегрирующего звена

### 5. Колебательное звено

$$p = j\omega; W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 2cTj\omega + 1}.$$



$\omega_c$  – сопрягающаяся частота возникает там,  
 где низкочастотная ветвь сопрягается с  
 высокочастотной ветвью.

6. **Форсирующее звено 2-го порядка** -  
 зеркальное отображение колебательного звена.

$$W(j\omega) = k \cdot (T^2(j\omega)^2 + 2cTj\omega + 1).$$

Рисунок 6.6 – ЛЧХ  
 колебательного звена

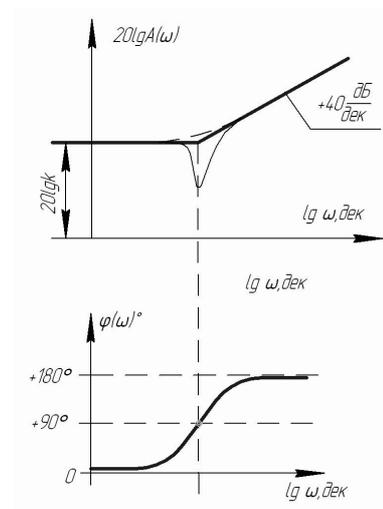


Рисунок 6.7– ЛЧХ форсирующего  
 звена 2-го порядка

7. Дифференцирующее звено — зеркальное отображение интегрирующего звена.

$$W(j\omega) = kj\omega.$$

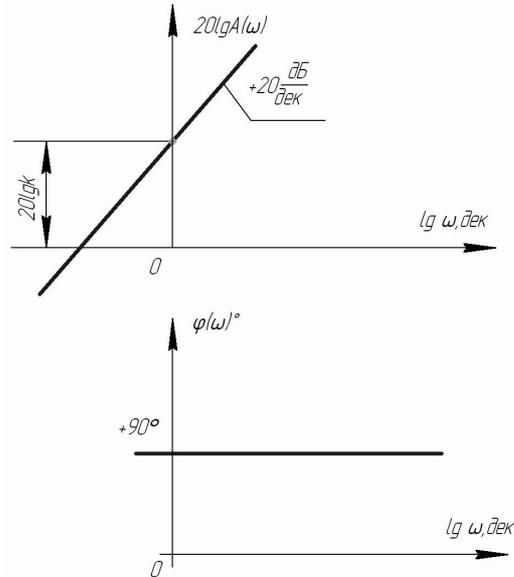


Рисунок 6.8 – ЛЧХ дифференцирующего звена

8. Консервативное звено (частный случай колебательного звена  $C=0$ ).

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2(j\omega)^2 + 1}$$

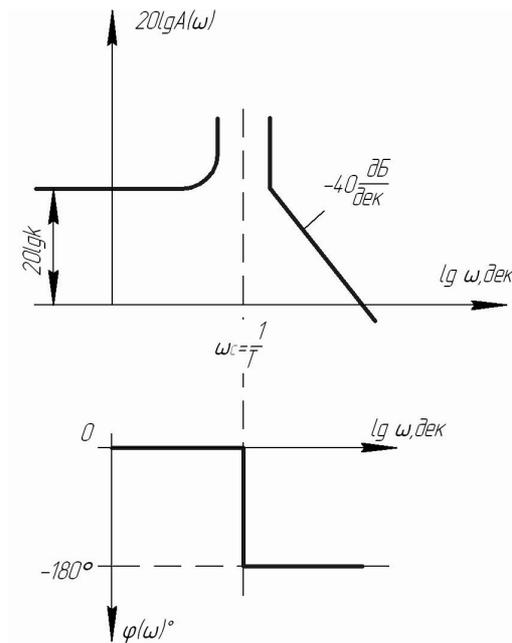


Рисунок 6.9 – ЛЧХ консервативного звена

### 9. Звено с «чистым» запаздыванием

$$W(j\omega) = e^{-Tj\omega}$$

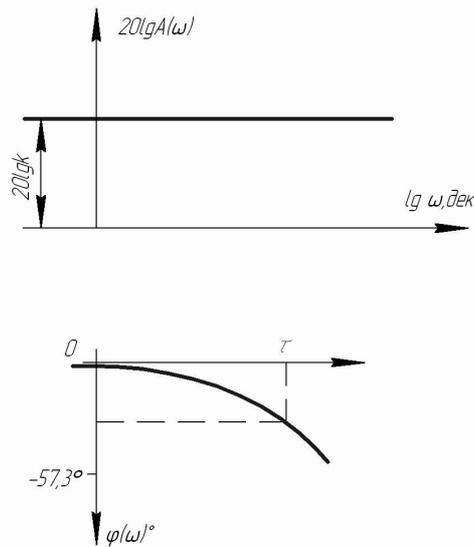


Рисунок 6.10 – ЛЧХ запаздывающего звена

### 10. Неустойчивое апериодическое звено

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega - 1}$$

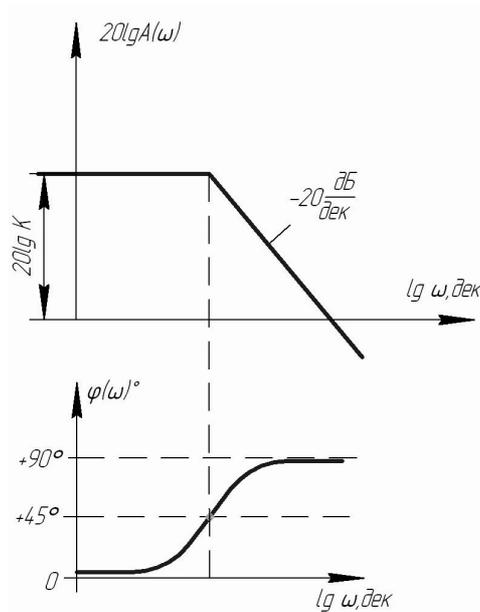


Рисунок 6.11 – ЛЧХ неустойчивого апериодического звена

## 7. ТИПОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Разнообразные связи в САУ можно свести к трём типовым формам связи:

1. Последовательное соединение элементов;
2. Согласно-параллельное соединение элементов;
3. Встречно-параллельное соединение элементов.

## 1. Последовательное соединение элементов

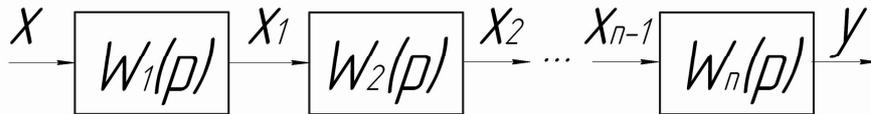


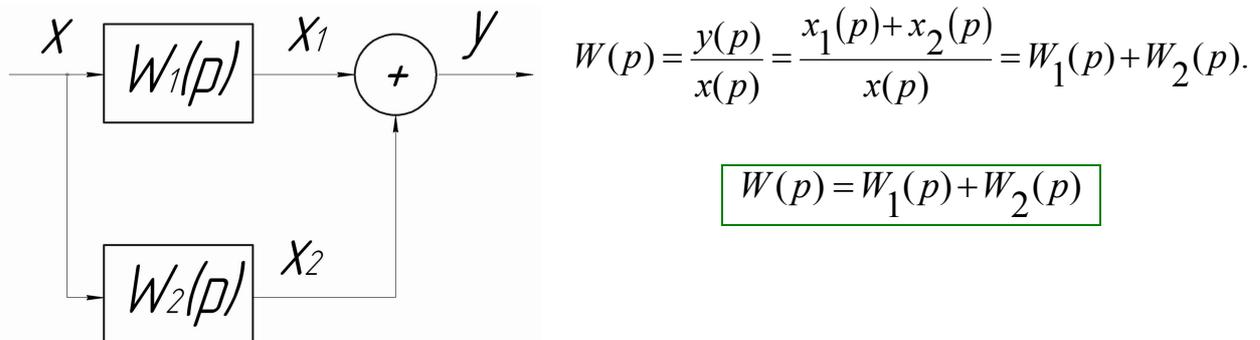
Рисунок 7.1 – Последовательное соединение звеньев

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{x_1(p)}{x} \cdot \frac{x_2(p)}{x_1(p)} \cdot \frac{x_3(p)}{x_2(p)} \cdot \dots \cdot \frac{y(p)}{x_n(p)}$$

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p)$$

**Вывод:** при последовательном соединении элементов передаточная функция участка цепи равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

## 2. Согласно-параллельное соединение элементов



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{x_1(p) + x_2(p)}{x(p)} = W_1(p) + W_2(p).$$

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p)$$

Рисунок 7.2 – Параллельное соединение звеньев

Возможна перестановка элементов между собой с точки зрения математики.

## 3. Встречно-параллельное соединение элементов

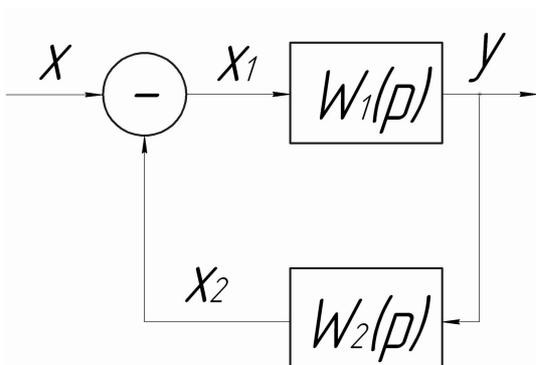


Рисунок 7.3 – Встречно – параллельное соединение звеньев

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)};$$

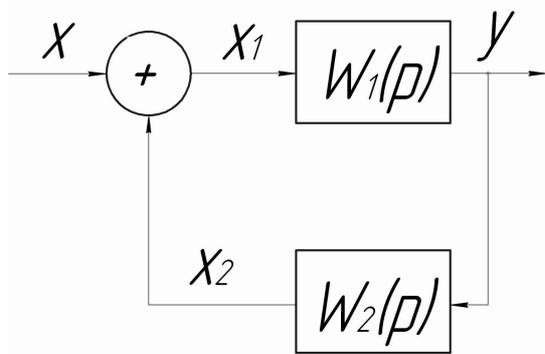
$$x_1(p) = x(p) - x_2(p);$$

$$x(p) = x_1(p) + x_2(p);$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x_1(p) + x_2(p)} = \frac{1}{\frac{x_1(p)}{y(p)} + \frac{x_2(p)}{y(p)}} = \frac{1}{\frac{1}{W_1(p)} + W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{W_1(p) \cdot W_2(p) + 1}.$$

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{W_1(p) \cdot W_2(p) + 1}$$

Если  $W_2(p) = 1$ , то жёсткая обратная связь. В этом случае передаточная функция принимает вид:  $W(p) = \frac{W_1(p)}{W_1(p) + 1}$ .



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$$

$$x_1(p) = x(p) + x_2(p);$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{x_1(p) - x_2(p)} = \frac{1}{\frac{x_1(p)}{y(p)} - \frac{x_2(p)}{y(p)}} = \frac{1}{\frac{1}{W_1(p)} - W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

Рисунок 7.4 – Встречно – параллельное соединение звеньев

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}$$

— передаточная функция для положительной обратной связи.

### Эквивалентные структурные преобразования

Пример:

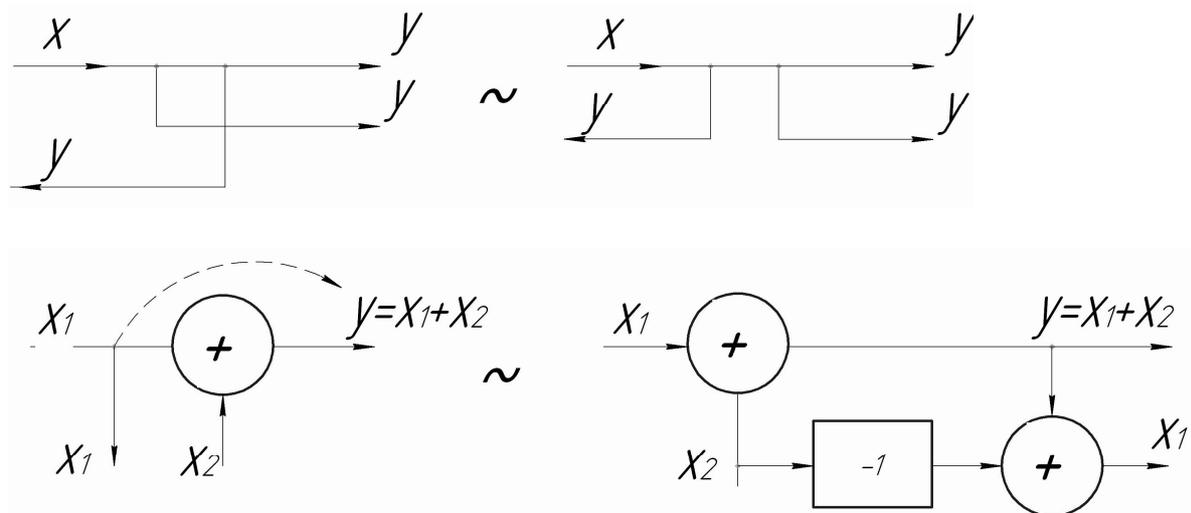


Рисунок 7.5 – Эквивалентные структурные преобразования

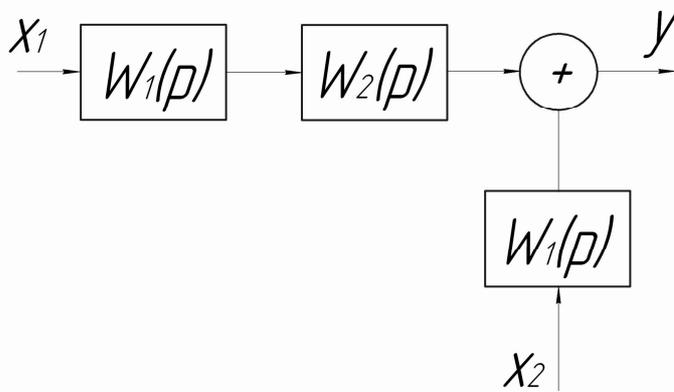
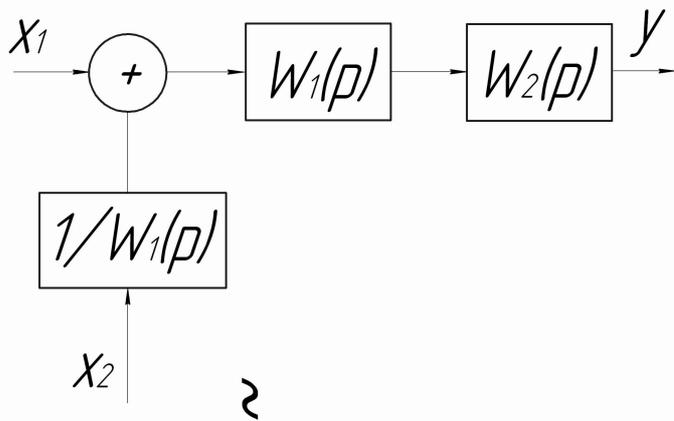
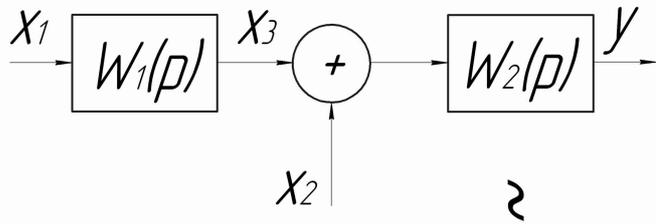
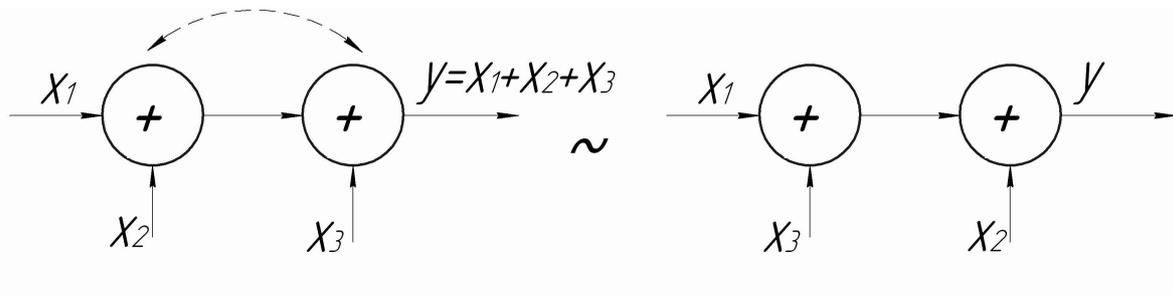


Рисунок 7.6 – Эквивалентные структурные преобразования

## Свёртывание структурных схем

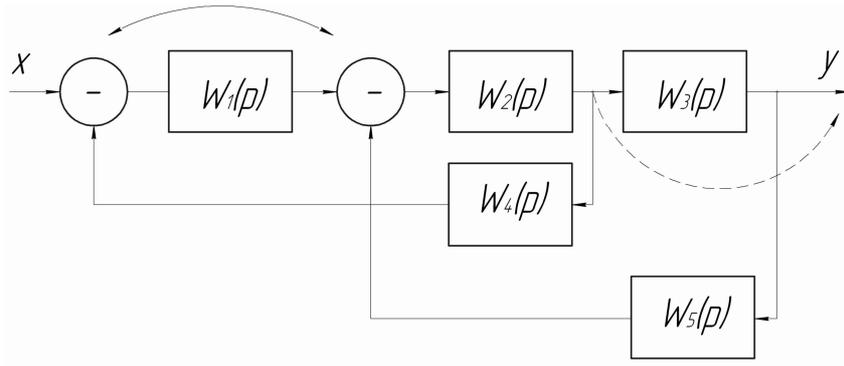


Рисунок 7.7 – Свёртывание структурных схем

Определим передаточную функцию представленной схемы. Т.е.  $W(p) = ?$

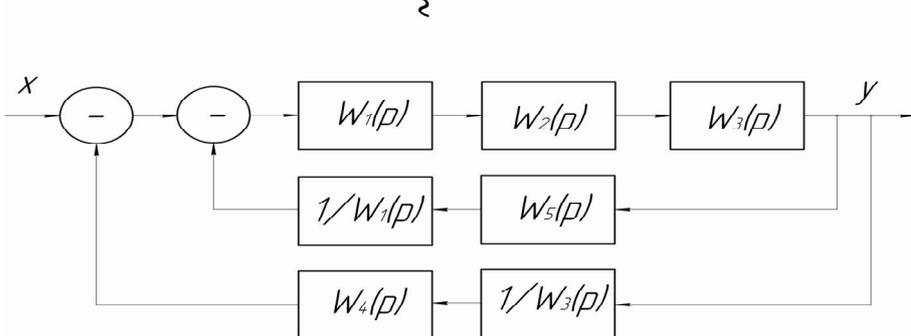


Рисунок 7.8 – Пример

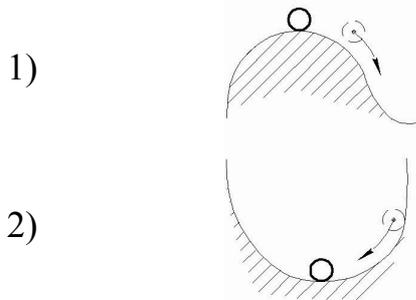
$$W_{13}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p);$$

$$W_{15}(p) = \frac{W_5(p)}{W_1(p)}; \quad W_{43}(p) = \frac{W_4(p)}{W_3(p)}.$$

## 8. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ

**Понятие устойчивости. Необходимое условие устойчивости.**

Рассмотрим физическую трактовку понятия устойчивости



1)

Рисунок 8.1 - Неустойчивая система

2)

Рисунок 8.2 - Устойчивая система

**Устойчивость** - свойство системы (шар - поверхность) вернуться в исходное состояние после прекращения действия возмущения.

Устойчивость линейных систем не зависит от величины начального отклонения.

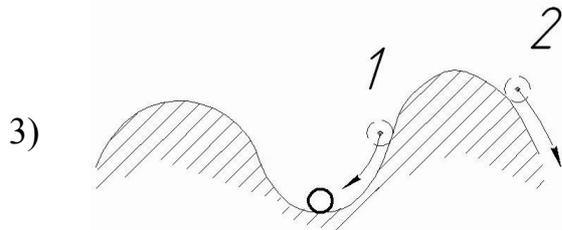


Рисунок 8.3 - Система устойчивая в малом и неустойчивая в большом

В качестве исходного состояния необязательно брать состояние покоя. В общем виде за исходное состояние обычно принято состояние невозмущённого движения. (Движение КА по орбите можно принять в качестве невозмущённого, а все отклонения — возмущёнными.)

Характерной особенностью САУ является то, что эти системы являются замкнутыми, то есть входной сигнал подаётся на вход системы, где действительное и заданное значения сравниваются друг с другом. В нормально функционирующей системе эта разность, как правило, уменьшается. Но бывает и наоборот.

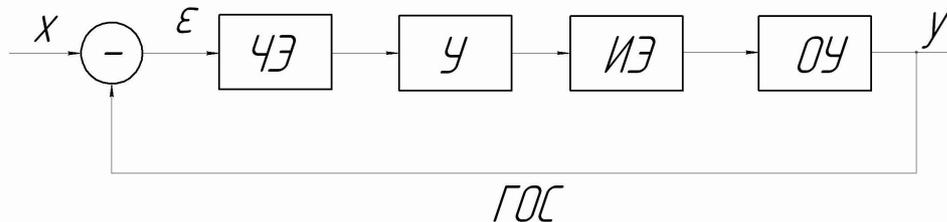


Рисунок 8.4 – САУ с жёсткой отрицательной обратной связью

### Математическая оценка устойчивости

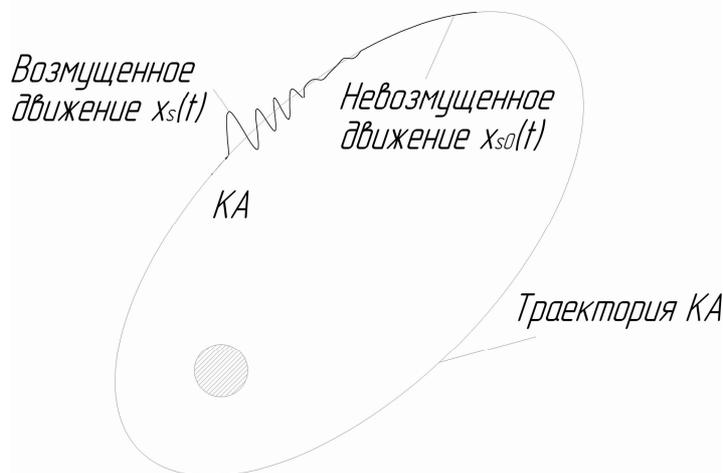


Рисунок 8.5 – Пример возмущённого и невозмущённого движения КА

**Математическая устойчивость** определяется по характеру возмущённого движения относительно невозмущённого движения после прекращения действия возмущения.

*Физическая трактовка понятия «устойчивости»:* если выведенная из состояния равновесия, а далее предоставленная самой себе система вновь приходит в исходное положение — **это устойчивая система**.

Впервые математически устойчивость систем была сформулирована в диссертации Ляпуновым А.М., «О прочности движения» в 1882г.

Так как выводы, сделанные Ляпуновым для механических систем описаны дифференциальными уравнениями, то определение устойчивости по Ляпунову справедливо для любых систем (механические, гидравлические и т.д.)

Невозмущенная система является устойчивой, если можно подобрать такое положительное число  $\varepsilon$ , для которого справедливо условие:

$$|\Delta x_S(t)| < r(\varepsilon), \quad |\Delta x_S(0)| < \varepsilon(t).$$

$x_S(t)$  — возмущённое движение;

$x_{S0}(t)$  — невозмущённое движение;

$$\Delta x_S(t) = x_{S0}(t) - x_S(t), \quad S = \overline{0, n-1}.$$

$$(1) \quad a_n \cdot \frac{d^n \Delta x}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} \Delta x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{d \Delta x}{dt} + a_0 \Delta x = 0 \quad \text{— однородное ДУ.}$$

$$\frac{d^k \Delta x(0)}{dt^k} = \Delta x^{(k)}(0) \rightarrow \text{НУ (начальные условия)}$$

Для оценки устойчивости необходимо решить ДУ (1), без правой части, с НУ. Решение этого ДУ представляет собой сумму гармоник:

$$\Delta x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{P_k t},$$

где  $P_k$  — корни характеристического уравнения, их  $n$ .

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 = 0 \quad (2) \quad \text{- характеристическое уравнение.}$$

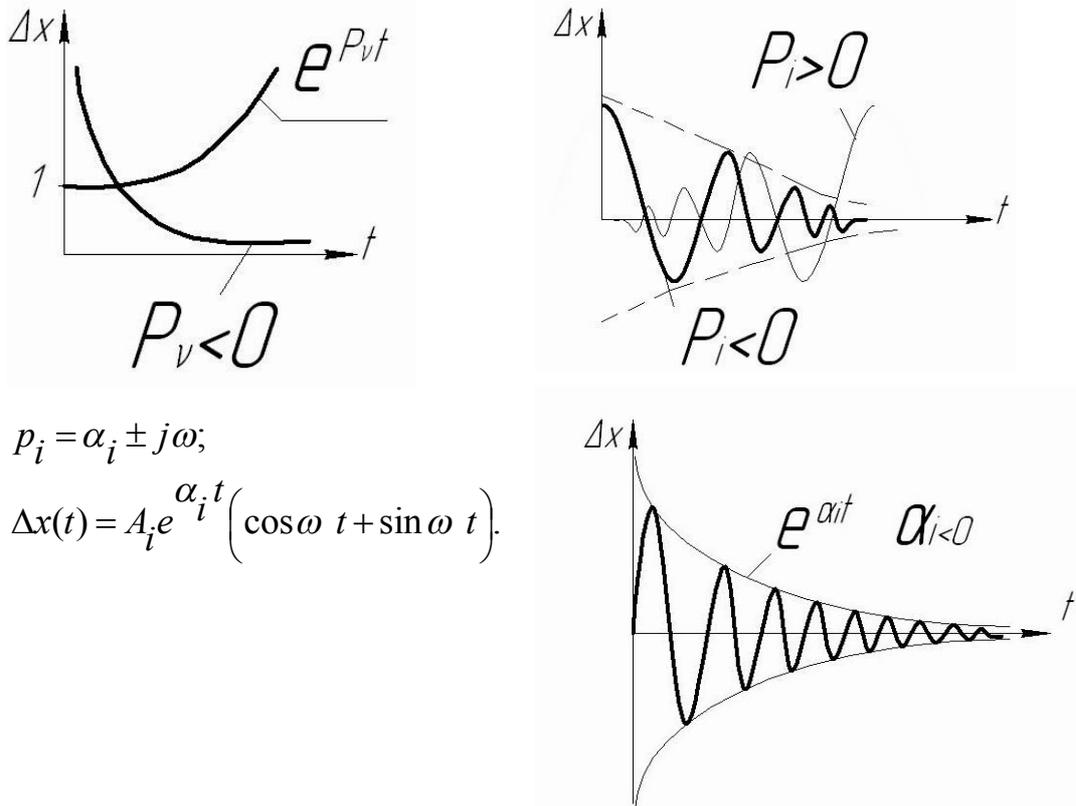
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_k e^{P_k t} = 0.$$

Пусть в этой системе  $S$  вещественных (действительных) корней, тогда  $(n-S)$  — комплексно-сопряженные корни.

$$\Delta x(t) = \sum_{\nu=1}^S C_\nu e^{P_\nu t} + \sum_{i=1}^{\frac{n-S}{2}} C_i e^{P_i t}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^S C_\nu e^{P_\nu t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\frac{n-S}{2}} C_i e^{P_i t} = 0 \quad \text{- условие}$$

устойчивости.



$$p_i = \alpha_i \pm j\omega;$$

$$\Delta x(t) = A_i e^{\alpha_i t} (\cos \omega t + \sin \omega t).$$

Рисунок 8.6 – Условие устойчивости САУ

**Вывод: Определение устойчивости по корням характеристического уравнения:** для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения (2) имели отрицательную вещественную часть, или же вещественная часть комплексно-сопряженного корня  $\alpha_i < 0$ .

Определение устойчивости по корням характеристического уравнения для 3-го и 4-го порядка затруднительно, а для 5-го и более высокого порядка уравнений аналитически не решается, для определения устойчивости есть так называемые критерии устойчивости, которые позволяют, не решая ДУ, определить устойчивость. Эти критерии определяют знак корней характеристического уравнения, не вычисляя их численного значения. Положительные корни указывают на неустойчивость системы, а отрицательные — на устойчивость.

Все критерии устойчивости делятся на алгебраические и частотные. К алгебраическим критериям относятся критерии Гурвица, Рауса, Вышнеградского и др. К частотным критериям относятся критерии Михайлова, Найквиста. Частотные критерии основаны на ЛЧХ.

## 9. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫШНЕГРАДСКОГО

### 9.1. Критерий устойчивости Гурвица

Предложен Гурвицем в 1895г.

Для того чтобы корни характеристического уравнения (1)

$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0$  имели отрицательную вещественную часть, а система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  диагональные определители таблиц, составленных из коэффициентов уравнения (1), были больше нуля.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Условие устойчивости:

$$a_0 > 0$$

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_n > 0 -$$

– диагональные определители

**Правило составления таблицы:**

1. По главной диагонали записываются коэффициенты с нарастающими индексами, начиная с  $a_1$ .
2. Каждый из столбцов заполняется вверх коэффициентами с нарастающими индексами, вниз — с убывающими индексами.
3. На место отсутствующих коэффициентов проставляются нули.

**Примеры:**

1)  $a_0 \cdot p + a_1 = 0, a_0 > 0.$

$$\Delta_1 > 0; [a_1] \quad \Delta_1 = a_1 > 0.$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0$$

2)  $a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2 = 0, a_0 > 0.$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 > 0.$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_1 \cdot a_2 > 0$$

3)  $a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0, a_0 > 0.$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0.$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0$$

Необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Пропуск хотя бы одного из слагаемых в характеристическом уравнении говорит о неустойчивости (граница устойчивости).

Вывод: критерий Гурвица целесообразно использовать для систем не выше 5-го порядка. С повышением порядка уравнения  $n \geq 5$  трудность вычислений настолько увеличивается, что критерий Гурвица становится нецелесообразно использовать.

Сложно оценить влияние каждого коэффициента на устойчивость. Иногда это вовсе не удаётся.

## 9.2. Критерий устойчивости Вышнеградского

Предложен в 1876г. для случая уравнения 3-го порядка.

Условие устойчивости: 1) Положительность всех коэффициентов характеристического уравнения; 2)  $a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0$ .

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0.$$

$$\frac{a_1 \cdot a_2}{a_0 \cdot a_3} > 1, A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 \cdot a_3}}, B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 \cdot a_3^2}}, A \cdot B > 1.$$

## 10. КРИТЕРИЙ РАУСА

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0 \quad (1)$$

Чтобы корни (1) имели отрицательную вещественную часть, а система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительными.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots & 0 \\ c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ — таблица Рауса.}$$

Коэффициенты таблицы Рауса определяются по следующим формулам:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1};$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1};$$

$$b_5 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_6 - a_0 \cdot a_7}{a_1}.$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_3}{b_1};$$

$$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_5}{b_1}$$

Таким образом, должно выполняться условие:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, \dots K > 0$$

Число нарушений этого правила равно числу коэффициентов с положительной вещественной частью.

Критерий Рауса целесообразно использовать для систем высокого порядка.

Пример:

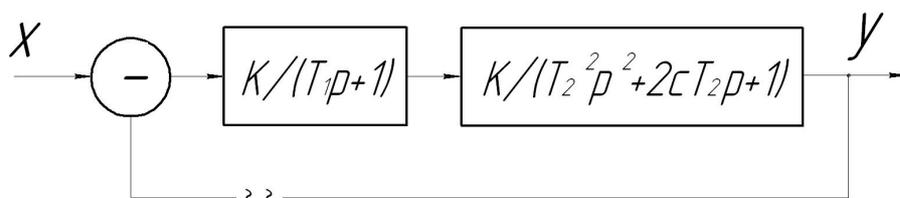


Рисунок 10.1 – Пример

$$T_1 = 0,1 \text{ с};$$

$$T_2 = 1,0 \text{ с};$$

$$c = 0,5.$$

$$W_{раз}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2^2 p^2 + 2c T_2 p + 1)} = \frac{K}{(0,1 p + 1) \cdot (p^2 + p + 1)} =$$

$$= \frac{K}{0,1 p^3 + 0,1 p^2 + 0,1 p + p^2 + p + 1} = \frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1}.$$

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{\frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1}}{1 + \frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1}} =$$

$$= \frac{K}{0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1 + K} = \frac{y(p)}{x(p)}.$$

$$(0,1 p^3 + 1,1 p^2 + 1,1 p + 1 + K) \cdot y(p) = K \cdot x(p).$$

$0,1p^3 + 1,1p^2 + 1,1p + 1 + K = 0$  — характеристическое уравнение.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix};$$

$$a_0 = 0,1 > 0;$$

$$\Delta_1 = |a_1| = a_1 = 1,1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,1 & 1+K \\ 0,1 & 1,1 \end{vmatrix} = 1,1^2 - 0,1 \cdot (1+K) > 0;$$

$$1,21 > 0,1 \cdot (1+K); (1+K) < 12,1; K < 11,1.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1,1 & 1+K & 0 \\ 0,1 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+K \end{vmatrix} = (1+K) \cdot [1,21 - 0,1 \cdot (1+K)] > 0.$$

$a_0 > 0, a_1 > 0, (1+K) > 0, K > -1$  — условие устойчивости системы.

## 11. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

### 11.1. Кривая Михайлова

Разработан в 1935г. Относится к группе частотных методов.

Необходимо определить условия, при которых корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть.

Рассмотрим полином  $F(p) = a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n$  (1),

который соответствует характеристическому уравнению

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0 \quad (2)$$

Выразим полином через корни уравнения:

$$F(p) = a_0 \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n),$$

где  $p_1, p_2, p_n$  — корни характеристического уравнения.

Каждый из корней  $p_1, p_2, p_n$  можно представить на комплексной плоскости в виде точки, вещественная часть которой определяется по оси абсцисс, а мнимая — по оси ординат. Кроме того, каждая точка может быть определена в виде вектора, модуль которого равен произведению модулей отдельных сомножителей, а аргумент — сумме аргументов отдельных сомножителей.

$$p = j\omega, F(j\omega) = a_0 \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n)$$

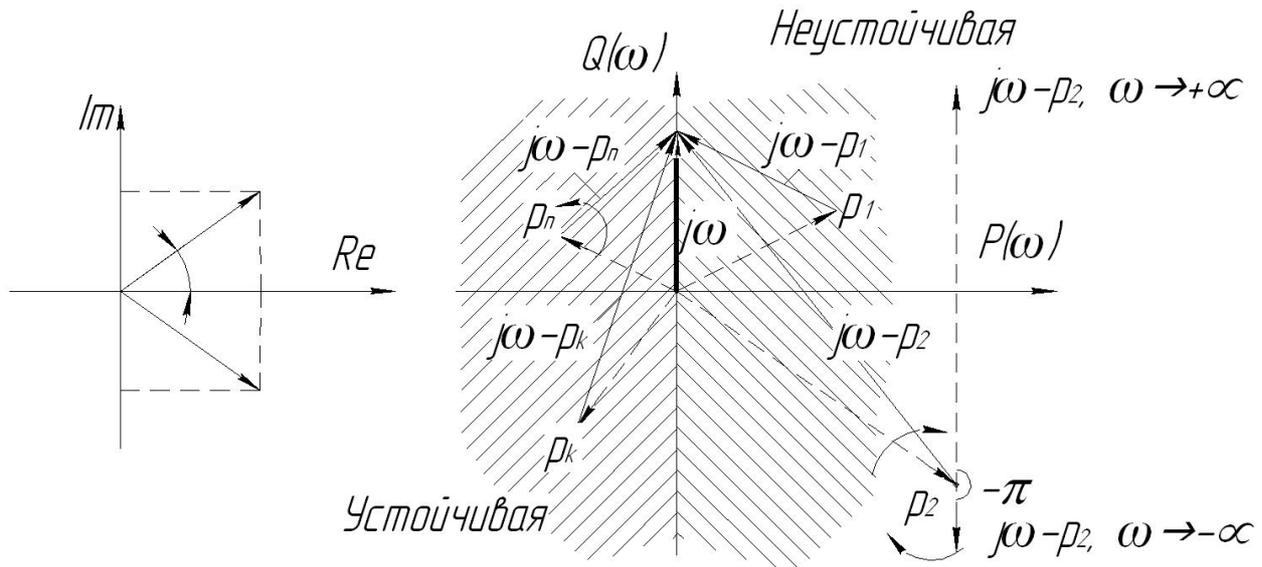


Рисунок 11.1 – Изменение аргумента вектора  $j\omega - p_k$  при возрастании частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$

Так как корни  $p_1, p_2, p_n$  — вектора,  $j\omega$  — вектор, следовательно,  $(j\omega - p_k)$  — тоже вектор.

Предположим, что в левой полуплоскости, соответствующей устойчивости, располагается  $m$  корней. Тогда в правой полуплоскости будет  $(n - m)$  корней, где  $n$  — порядок характеристического уравнения. Предположим, что  $\omega = -\infty \div +\infty$ . каждый из разностных векторов сходится в одной точке.

При изменении  $\omega = -\infty \div +\infty$   $m$  разностных векторов, соответствующих устойчивой системе и расположенных в левой полуплоскости, повернутся против часовой стрелки (положительное направление) на угол  $+\pi$ , а  $(n - m)$  разностных векторов, расположенных в правой полуплоскости, повернутся по часовой стрелке (отрицательное направление) на угол  $-\pi$ .

Так как аргумент множителя равен сумме аргументов отдельных множителей, то суммарный угол поворота определяется следующим образом:

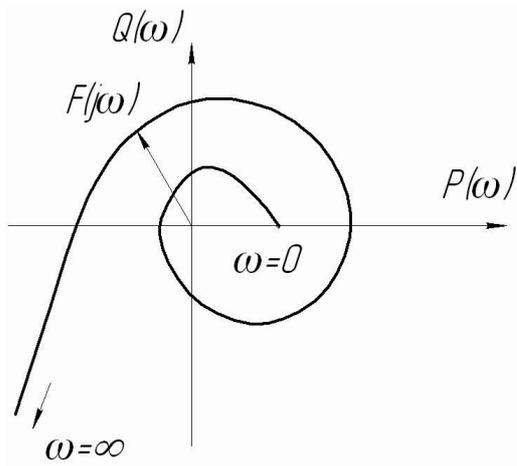
$\alpha_1 = m \cdot \pi$  — в левой полуплоскости;  $\alpha_2 = -(n - m) \cdot \pi$  — в правой полуплоскости.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = m \cdot \pi - (n - m) \cdot \pi = (2m - n) \cdot \pi .$$

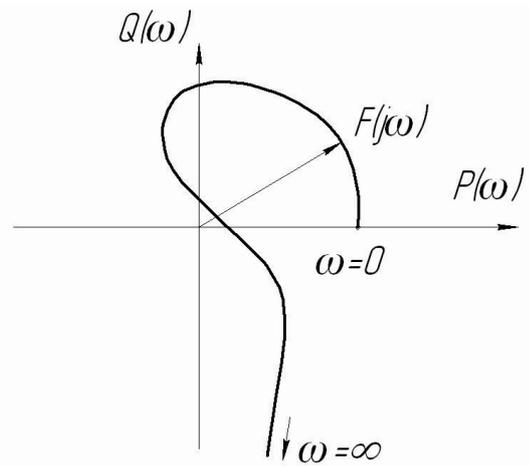
Если бы все корни уравнения (2) располагались в левой полуплоскости, что соответствовало бы устойчивой системе, тогда суммарный угол поворота был бы  $\alpha = n \cdot \pi$  (устойчивая САУ). Следовательно, об устойчивости можно судить по углу поворота вектора.

При изменении  $\omega = 0 \div \infty$  конец вектора  $F(j\omega)$  описывает кривую, которая называется **кривой Михайлова (характеристическая кривая)**. Она симметрична относительно оси  $OX$ .

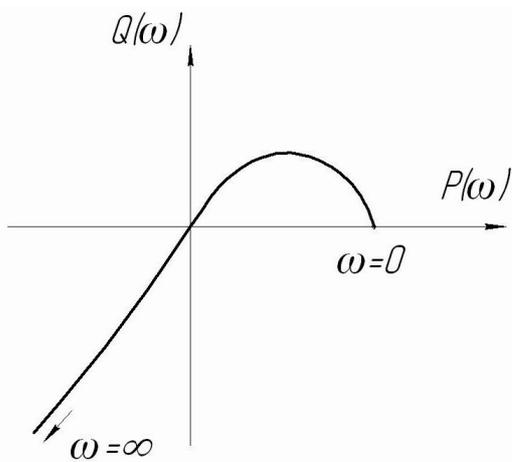
**Критерий Михайлова:** если при изменении  $\omega = 0 \div \infty$  характеристическая кривая проходит последовательно  $n$  квадрантов в положительном направлении, то такая система устойчива ( $n$  - степень характеристического уравнения).



Устойчивая САУ  
n=7



Неустойчивая САУ  
(порядок обхода нарушен)  
n=4



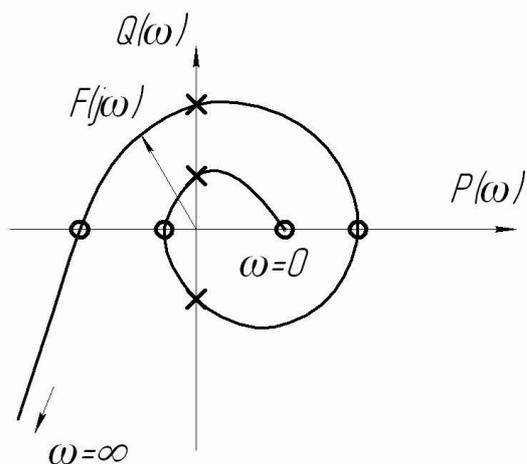
Граница устойчивости САУ  
n=3

Рисунок 11.2 – Построение кривой Михайлова

Для построения характеристической кривой:

$$\begin{aligned}
 p = j\omega, \quad F(j\omega) = P(\omega) + Q(\omega) &= a_0 \cdot (j\omega)^n + a_1 \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot (j\omega) + a_n = \\
 &= \underbrace{a_n - a_{n-2} \cdot \omega^2 + a_{n-4} \cdot \omega^4 - \dots}_{P(\omega)} + \underbrace{a_{n-1} \cdot j\omega - a_{n-3} \cdot j\omega^3 + a_{n-5} \cdot j\omega^5 - \dots}_{jQ(\omega)}
 \end{aligned}$$

## 11.2. Критерий перемежаемости (частный случай критерия Михайлова)



При некоторых значениях частот  $\omega$  вещественная часть обращается в нуль. При других значениях частот мнимая часть обращается в нуль.

$$(3) \quad \begin{cases} P(\omega) = 0 - \text{частоты, при которых} \\ \text{вещественная часть равна нулю} \\ Q(\omega) = 0 - \text{частоты, при которых} \\ \text{мнимая часть равна нулю} \end{cases}$$

Рисунок 11.3 – Кривая Михайлова

При последовательном обходе  $\omega \rightarrow$ , корни уравнения (3) чередуются между собой.

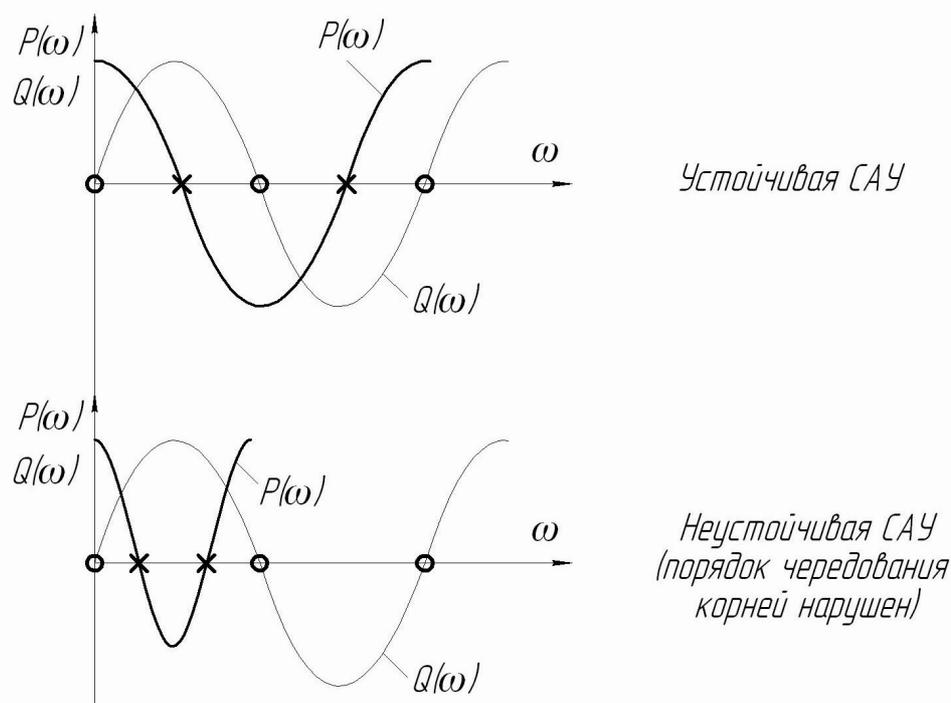


Рисунок 11.4 – Критерий перемежаемости

**Пример:** Устройство гироскопической стабилизации.

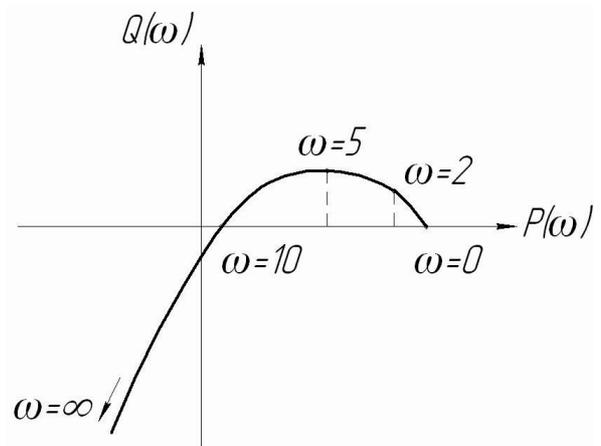
$$P \cdot (1 + T_1 P) \cdot (1 + T_2 P) + K = 0. \quad T_1 = 0,01 \text{ с}; \quad T_2 = 1 \text{ с}; \quad K = 120.$$

$$a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0 \quad p = j\omega$$

$$-a_0 \cdot j\omega^3 - a_1 \cdot \omega^2 + a_2 \cdot j\omega + a_3 = \underbrace{a_3 - a_1 \cdot \omega^2}_{P(\omega)} + j \cdot \underbrace{(a_2 \cdot \omega - a_0 \cdot \omega^3)}_{Q(\omega)}$$

$$F(j\omega) = 120 - \omega^2 + j\omega \cdot (1 - 0,01 \cdot \omega^2).$$

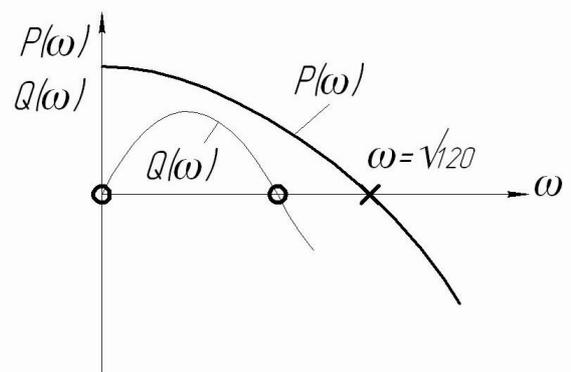
$\omega$	0	2	5	10	20	$\infty$
$P(\omega)$	120	116	95	20	-280	$-\infty$
$Q(\omega)$	0	1,92	3,75	0	-60	$\infty$



*Система неустойчива*

Критерий перемежаемости:

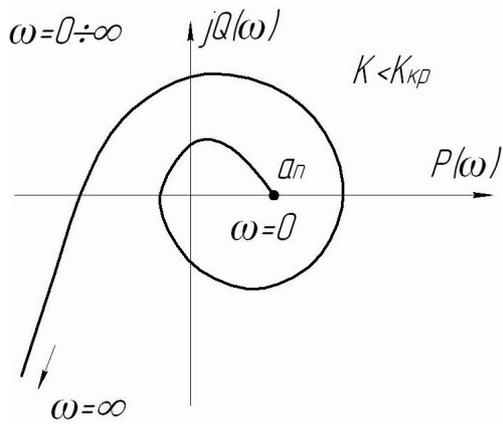
$$\begin{cases} P(\omega) = 120 - \omega^2 = 0; \\ Q(\omega) = \omega \cdot (1 - 0,01 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases}$$



*Неустойчивая САУ  
(порядок чередования  
корней нарушен)*

Рисунок 11.5 – Пример использования критерия перемежаемости

### 11.3. Критический коэффициент усиления



Устойчивая САУ

Рисунок 11.6 – Кривая Михайлова при  $K < K_{кр}$

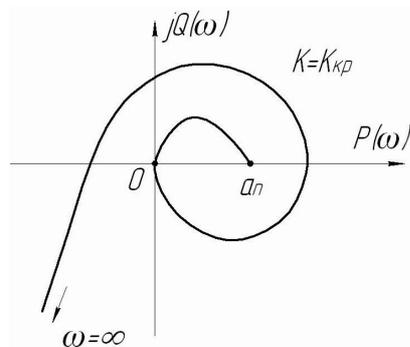
Величина свободного члена в характеристическом уравнении определяет точку на оси  $P(\omega)$ .

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = 0, \text{ где } a_n \text{ — свободный член.}$$

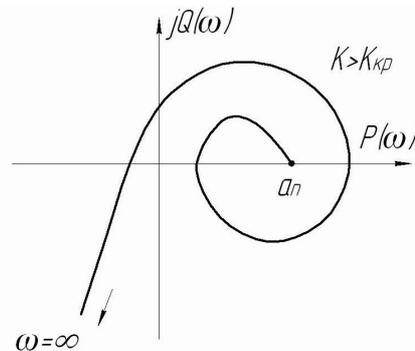
Для статических систем  $a_n = K$  — коэффициент усиления.

Для астатических систем  $a_n = K + 1$ .

При увеличении коэффициента усиления характеристическая кривая начнёт перемещаться параллельно самой себе по оси абсцисс. Может случиться, что кривая займет одно из положений:



САУ на границе устойчивости



Неустойчивая САУ

Рисунок 11.7 – Положение кривой Михайлова при  $K = K_{кр}$  и  $K > K_{кр}$

Предельное значение коэффициента усиления, при котором система находится в устойчивом состоянии, называется **критическим коэффициентом усиления**  $K_{кр}$ .

### 11.4. Передаточная функция и дифференциальные уравнения разомкнутой и замкнутой систем

Любые САУ можно привести к виду:

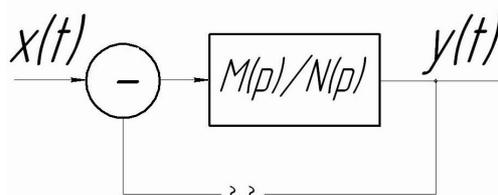


Рисунок 11.8 –САУ с главной отрицательной обратной связью

Для разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0} \quad (1)$$

Для замкнутой системы:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{M(p)/N(p)}{1 + M(p)/N(p)} = \frac{M(p)}{N(p) + M(p)}$$

$M(p)$  — полином степени  $m$ ;

$N(p)$  — полином степени  $n$ ;

$m \leq n$  — в реальных системах САУ.

(1) представим в виде:

$$(b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) \cdot X(p) = (c_n p^n + \dots + c_1 p + c_0) \cdot Y(p) \quad (2)$$

Берём обратное преобразование по Лапласу для (2)

$$c_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + c_1 \frac{dy}{dt} + c_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad \text{— дифференциальное}$$

уравнение разомкнутой системы.

$$W_p(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad \text{— дифференциальное}$$

уравнение замкнутой системы.

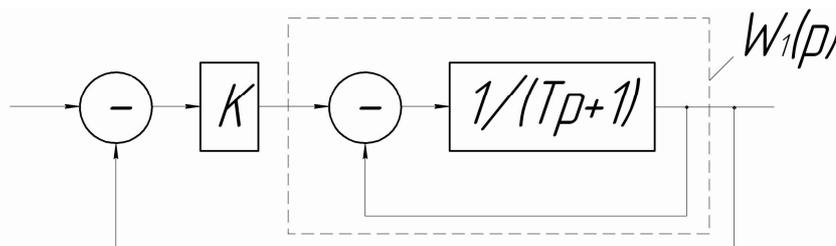


Рисунок 11.9 - Пример

$W_p(p)$ —?;  $W_3(p)$ —? ДУ разомкнутой САУ? ДУ замкнутой САУ?

$$W_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Tp+1}} = \frac{1}{Tp+2}; \quad W_p(p) = \frac{K}{Tp+2} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$T \frac{dy}{dt} + 2y = Kx$  — дифференциальное уравнение разомкнутой системы.

$$W_3(p) = \frac{\frac{K}{Tp+2}}{1 + \frac{K}{Tp+2}} = \frac{K}{Tp+2+K} = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

$$(Tp+2+K) \cdot y(p) = K \cdot x(p) \quad (3)$$

Взяв обратное преобразование по Лапласу, получим:

$T \frac{dy(t)}{dt} + (2+K)y(t) = Kx(t)$  — дифференциальное уравнение замкнутой системы.

## 12. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Этот критерий предложен в 1932г.

Критерий основан на анализе поведения замкнутой системы по её поведению в разомкнутом состоянии. В основе его лежит уже не характеристическое уравнение замкнутой системы, а передаточная функция разомкнутой системы.

Рассмотрим полином, соответствующий характеристическому уравнению замкнутой системы:  $N(p) + M(p) = 0$ .

Полином, соответствующий характеристическому уравнению разомкнутой системы:  $N(p) = 0$ .

$$L(p) = \frac{N(p) + M(p)}{N(p)} = 1 + W_p(p) \quad (4)$$

Корни характеристического уравнения замкнутой системы:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Корни характеристического уравнения разомкнутой системы:  $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$ .

$$L(p) = \frac{a_n \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot (p - p_n)}{c_n \cdot (p - p'_1) \cdot (p - p'_2) \cdot (p - p'_n)}, \quad p = j\omega.$$

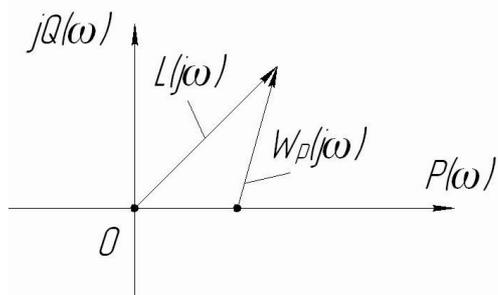
$$L(p) = \frac{a_n \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot (j\omega - p_n)}{c_n \cdot (j\omega - p'_1) \cdot (j\omega - p'_2) \cdot (j\omega - p'_n)} = \frac{D(j\omega)}{N(j\omega)}.$$

Предположим, что замкнутая система устойчива. Тогда амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) замкнутой системы при изменении  $\omega = -\infty \div +\infty$  должна повернуться на угол  $\pi \cdot n$ . При устойчивости разомкнутой системы вектор АФХ тоже поворачивается на угол  $\pi \cdot n$ .

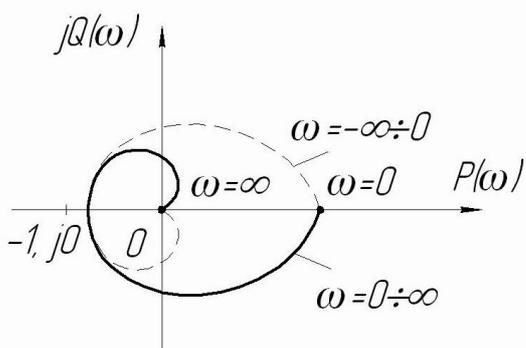
Так как аргумент частного равен разности аргументов:

$\arg L(j\omega) = \arg D(j\omega) - \arg N(j\omega) = 0$ , следовательно, при изменении  $\omega$  АФХ не должна охватывать начало координат.

Из формулы (4) следует, что при любом значении  $\omega$  концы векторов  $L(j\omega)$  и  $W_p(j\omega)$  совпадают.

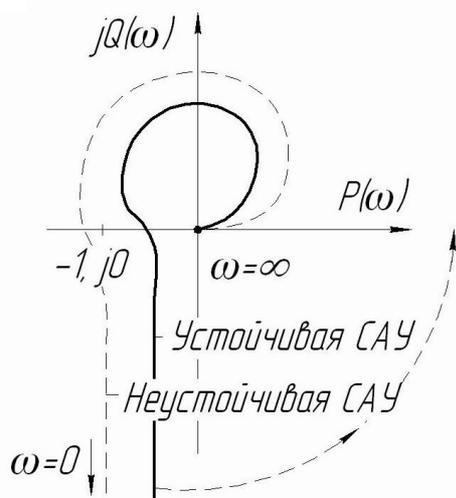


Следовательно, судить об устойчивости можно по вектору  $W_p(j\omega)$ , соответствующему разомкнутой системе. Для этого смещают начало координат в точку  $(-1, j0)$ .



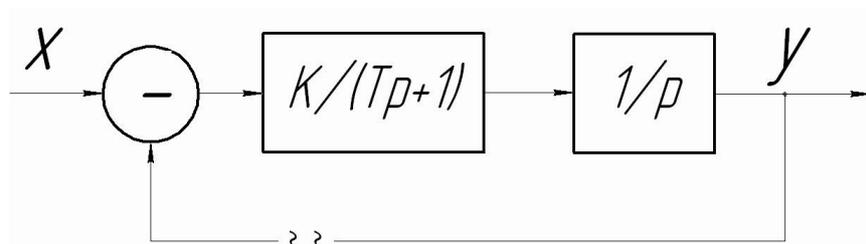
Для критерия устойчивости Найквиста: для устойчивости замкнутой системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая кривая при  $\omega=0 \div +\infty$  не охватывала критической точки с координатами  $(-1, j0)$ .

Устойчивая САУ



Для систем, имеющих интегрирующее звено, характеристическая кривая при  $\omega=0$  уходит в бесконечность. Чтобы определить, охватывает ли кривая точку  $(-1, j0)$ , необходимо кривую мысленно совместить с положительной осью  $P(\omega)$ .

Рисунок 12.1 – Определение устойчивости САУ



$$W_p(p) = \frac{K}{(Tp+1) \cdot p} = \frac{K}{Tp^2 + p}, \quad p = j\omega$$

Рисунок 12.2 – Пример

$$W_p(j\omega) = \frac{K}{-T\omega^2 + j\omega} = \frac{K(T\omega^2 + j\omega)}{(j\omega - T\omega^2) \cdot (j\omega + T\omega^2)} = \frac{K(T\omega^2 + j\omega)}{-\omega^2 - T^2\omega^4} =$$

$$= -\frac{KT}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{K}{\omega + T^2\omega^3} = \frac{KT}{P(\omega)} - j\frac{K}{Q(\omega)}$$

$\omega = 0 \div \infty, K = 10, T = 1.$

$\omega$	0	1	3	10	$\infty$
$P(\omega)$	-10	-5	-1	-0,1	0
$Q(\omega)$	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{3}$	-	0

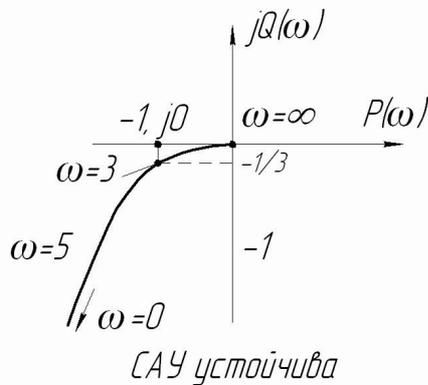


Рисунок 12.3 – Пример устойчивости САУ

### 13. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Если АФХ разомкнутой системы проходит через критическую точку, то такая система находится на границе устойчивости. Такую систему принято считать неработоспособной, так как в процессе изготовления и эксплуатации параметры могут изменить своё значение. Система должна обладать запасом устойчивости. Запас устойчивости можно оценить степенью удалённости АФХ от критической точки.

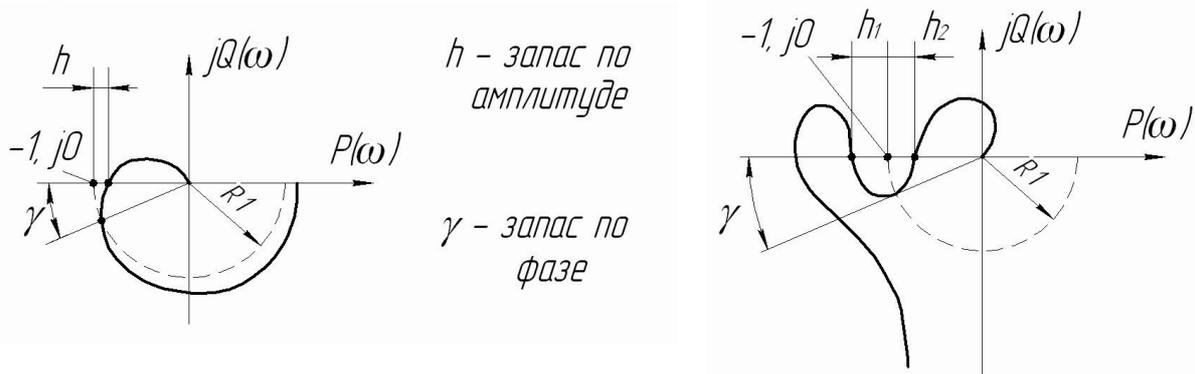


Рисунок 13.1 – Определение запаса устойчивости

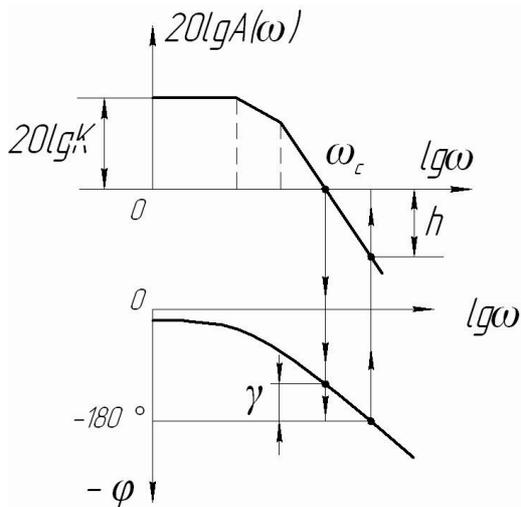
**Определение устойчивости по ЛЧХ разомкнутой системы:** если АФХ пересекает вещественную ось левее критической точки, то это означает, что амплитуда выходного сигнала будет больше амплитуды входного сигнала, а сдвиг по фазе составит  $-\pi$ . При замыкании этой системы возникнут колебания с нарастающей амплитудой. Если АФХ пересекает вещественную ось правее критической точки, то амплитуда выходного сигнала будет меньше амплитуды входного сигнала, и при замыкании схемы колебания начнут затухать.

Метод ЛЧХ является основным методом анализа и синтеза САУ.

При последовательном соединении:

$$20 \lg A_i(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + \dots$$

$$\varphi_i(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$$



$\gamma$  — запас устойчивости по фазе;

$h$  — амплитудный запас устойчивости;

$\omega_{среза} = \omega_c$  — частота среза, где ЛАЧХ пересекается с осью частот ( $\lg \omega$ ).

Рисунок 13.2 — Определение запаса устойчивости по фазе ( $\gamma$ ) и амплитуде ( $h$ )

**Вывод:** если ЛАЧХ пересекает ось частот раньше, чем фазовая характеристика со значением  $-180^\circ$ , то такая система устойчива. Иначе — неустойчива.

Обычно рекомендуется запас по фазе выбирать не менее  $30^\circ$ , а по амплитуде —  $6 \text{ дБ}$ .

**Пример:**

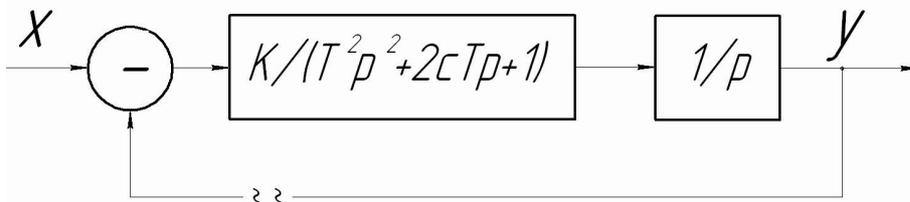


Рисунок 13.3 — Пример САУ

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2cTp + 1}, \quad W(p) = \frac{K}{p}$$

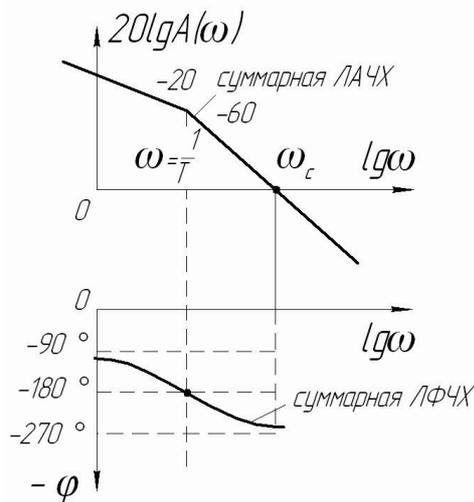


Рисунок 13.4 – ЛЧХ для приведённого примера

## 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ. МЕТОД Д-РАЗБИЕНИЯ

### 14.1. Определение устойчивости при изменении одного из параметров системы

Все рассмотренные до сих пор методы позволяют определять устойчивость при каких-то значениях параметров. Построение области при изменении какого-либо параметра связано с большой трудоёмкостью. Эти методы не позволяют выделить область изменённых параметров, при которых система устойчива.

Метод Д-разбиения позволяет выделить целую область изменяемых параметров, при которых система устойчива.

Д-разбиение – это линия, которая делит плоскость параметров на различные области, в которых имеются корни с различными значениями в вещественной части.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением, характеристическое уравнение которого:

$$\left( a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 \right) = 0 \quad (1)$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$  — параметры, характеризующие свойства системы.

Пусть  $\tau$  — изменяемый параметр в уравнении (1). Пусть  $\tau$  линейно входит в уравнение (1).  $p = j\omega$ . Тогда (1) предстанет в виде:

$$P(\omega) + \tau \cdot Q(\omega) = 0.$$

$$\tau = -\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = C(\omega) + jB(\omega).$$

$C(\omega), B(\omega)$  — комплексная плоскость (плоскость параметров).

Кривая Д-разбиения — кривая, которая разбивает плоскость на несколько областей. Кривая Д-разбиения, построенная в плоскости

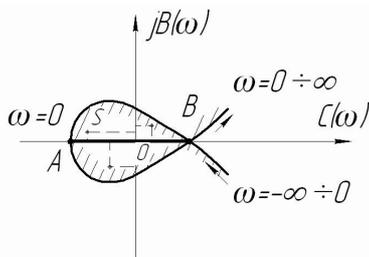


Рисунок 2

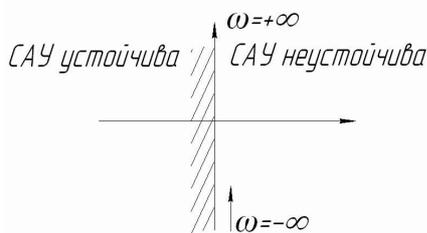


Рисунок 1

Рисунок 14.1 – Метод Д-разбиения

является областью устойчивости. Так как физические параметры системы не комплексные, а вещественные, численное значение  $\tau$  выбирается от  $A$  до  $B$  по вещественной оси  $C(\omega)$ .

Пример:

Построить границу Д-разбиения при изменении параметра  $K$

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = 0 \quad (1)$$

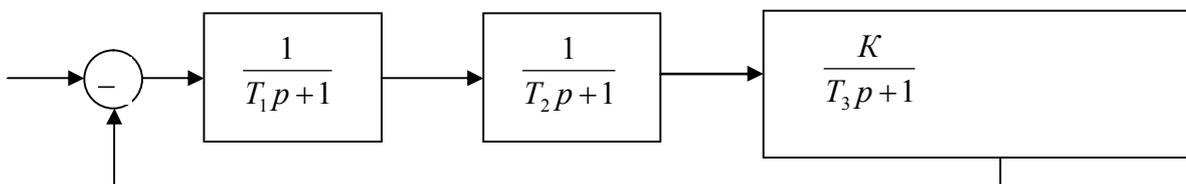


Рисунок 14.2 – Пример САУ

$T_1=0,1\text{с}; T_2=0,2\text{с}; T_3=0,5\text{с}; K=\text{var};$

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K + 1 = 0,$$

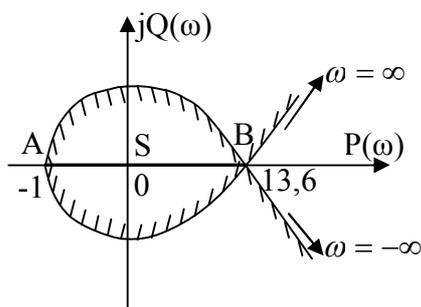
– характеристическое уравнение замкнутой системы.

$$0,01p^3 + 0,17p^2 + 0,8p + K + 1 = 0,$$

$$K = -0,01p^3 - 0,17p^2 - 0,8p - 1,$$

$$p = j\omega, \quad K = -0,01j\omega^3 - 0,17j\omega^2 - 0,8j\omega - 1 = 0,17\omega^2 - 1 + j(0,1\omega^3 - 0,8\omega) = P(\omega) + Q(\omega)$$

$\omega$	0	2	4	6	9	12	20	$\infty$
$P(\omega)$	-1	-0,72	1,88	5,48	13,6	25	72	$+\infty$
$Q(\omega)$	0	-1,52	-2,58	-2,64	0	7,7	64	$+\infty$



При  $\omega = -\infty \div +\infty$  кривая Д-разбиения штрихуется слева.

Область  $S$  является претендентом на область устойчивости. Чтобы убедиться в этом, возьмём какую-либо точку из этой области, например,

$(0, j0)$  – начало координат. Это соответствует  $K=0$ .

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) = 0$$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad p_2 = -\frac{1}{T_2}; \quad p_3 = -\frac{1}{T_3}.$$

Все корни отрицательны, следовательно, САУ устойчива и вся область  $S$  является областью устойчивости системы.

В реальной системе величина коэффициента усиления является действительным значением, поэтому областью устойчивости является отрезок АВ.

Отрицательный коэффициент  $K=0 \div -1$  соответствует положительной обратной связи в системе.

## 14.2. Определение области устойчивости при изменении двух параметров

Во многих случаях при исследовании на устойчивость возникает необходимость определения устойчивости при изменении двух параметров.

Пусть изменяемыми параметрами являются  $\nu$  и  $\tau$ . Постановка задачи: определить область устойчивости при изменении двух параметров.

Представим характеристический полином в виде:

$$P(p)\nu + Q(p)\tau + R(p) = 0 \quad (2)$$

$Q(p)$  - полином, который содержит варьируемый параметр  $\tau$ ;

$P(p)$  - полином, который содержит варьируемый параметр  $\nu$ ;

$R(p)$  - полином, который не содержит ни  $\tau$ , ни  $\nu$ ;

Полагаем, что  $\tau$  и  $\nu$  входят линейно в уравнение (2).

$$p = j\omega.$$

$$\begin{cases} P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega); \end{cases} \quad (4)$$

$$P(j\omega)\nu + Q(j\omega)\tau + R(j\omega) = 0 \quad (3)$$

Подставляя (4) в (3), получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \text{вещественное уравнение:} \\ P_1(\omega)\nu + Q_1(\omega)\tau + R_1(\omega) = 0, \\ \text{мнимое уравнение:} \\ P_2(\omega)\nu + Q_2(\omega)\tau + R_2(\omega) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Имея два уравнения с двумя неизвестными можно найти параметры  $\tau$  и  $\nu$

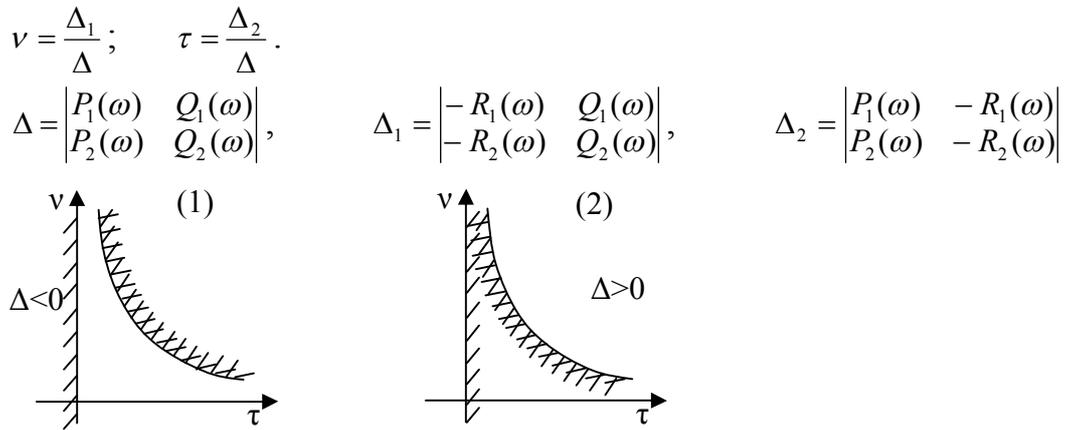


Рисунок 14.3 – Определение границы области устойчивости методом Д-разбиения

При некоторых значениях  $\omega$  главный определитель  $\Delta$  может обратиться в ноль. Если одновременно будет  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2 = 0$ , то в этом случае на плоскости параметров будет отображаться не точка, а прямая, которая называется особой прямой. Это бывает при  $\omega=0$  или  $\omega = \infty$ .

И в уравнении (5) каждое из уравнений отличается на постоянный множитель (система вырождается).

Штриховка особой прямой проводится таким образом, чтобы заштрихованные части были направлены друг к другу (2) или друг от друга (1).

Пример:

$$T_1=v; T_2=1c; T_3=10c;$$

$$K+1=\tau;$$

Необходимо определить область устойчивости, когда два параметра  $\tau$  и  $v$  варьируются.

$$10vp^3 + (11v + 10)p^2 + (v + 11)p + \tau = 0,$$

$$p = j\omega,$$

$$-10vj\omega^3 - (11v + 10)\omega^2 + (v + 11)j\omega + \tau = 0;$$

$$\begin{cases} -11v\omega^2 + \tau - 10\omega^2 = 0, \\ -10v\omega^3 + v\omega + 11\omega = 0; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -10\omega^2 & 1 \\ -10\omega^3 + \omega & 0 \end{vmatrix} = 10\omega^3 - \omega,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10\omega^2 & 1 \\ -11\omega & 0 \end{vmatrix} = 11\omega,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -11\omega^2 & 10\omega^2 \\ -(10\omega^3 - \omega) & -11\omega \end{vmatrix} = 121\omega^3 + 10\omega^2(10\omega^3 - \omega) = 121\omega^3 + 100\omega^5 - 10\omega^3 = 111\omega^3 + 100\omega^5$$

$$v = \frac{11\omega}{10\omega^3 - \omega} = \frac{11}{10\omega^2 - 1}; \quad \tau = \frac{111\omega^3 + 100\omega^5}{10\omega^3 - \omega} = \frac{100\omega^4 + 111\omega^2}{10\omega^2 - 1}.$$

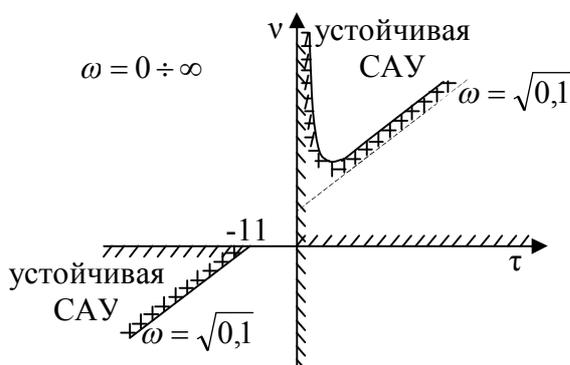


Рисунок 14.4 – Область устойчивости

$$\omega=0, \quad v=-11, \quad \tau=0.$$

$$\omega=\infty, \quad v=0, \quad \tau=\infty.$$

## 15. СТРУКТУРНО-УСТОЙЧИВЫЕ И СТРУКТУРНО-НЕУСТОЙЧИВЫЕ СИСТЕМЫ

Если систему можно за счёт изменения элементов системы сделать устойчивой, она называется **структурно-устойчивой**.

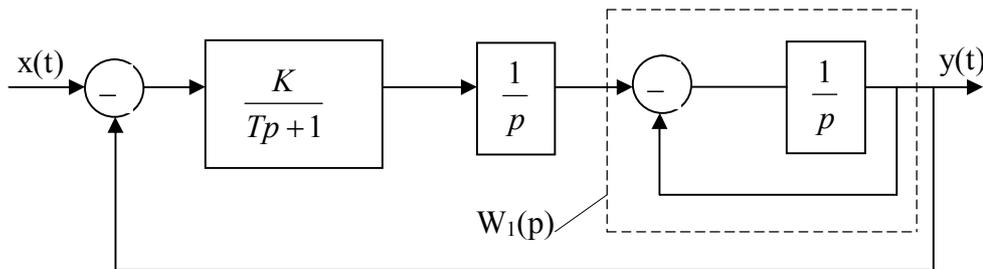


Рисунок 15.1 – Изменение элементов САУ. Пример 1.

$$W_1(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{p+1};$$

$$W_p(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1};$$

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{K}{(Tp+1)p(p+1) + K};$$

$Tp^3 + (T+1)p^2 + p + K = 0$  - х.у. замкнутой системы.

Эту систему можно сделать устойчивой за счёт подбора коэффициентов  $K$  и  $T$ .

$(T+1) \cdot 1 > K \cdot T$  - условие устойчивости по Гурвицу.

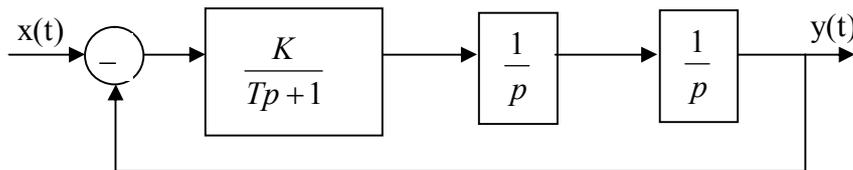


Рисунок 15.2 – Пример САУ. Пример 2

$$W_p(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1};$$

$$W_3(p) = \frac{K}{(Tp+1)p^2 + K};$$

$Tp^3 + p^2 + 0 \cdot p + K = 0$  - х.у. замкнутой системы.

$a_1=0$  – Система неустойчива ни при каких значениях параметров.

Система называется **структурно-неустойчивой**, если её невозможно сделать устойчивой за счёт изменения параметров.

Для обеспечения устойчивости такой системы, необходимо ввести в систему корректирующие звенья или обратные связи, как в первом примере.

# 16. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ. КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.

## ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

### 16.1. Характеристики переходного процесса

Основное требование, предъявляемое к системе – устойчивость. Но даже устойчивая система может оказаться неработоспособной. Она должна удовлетворять некоторым показателям качества. В установившемся режиме качество процесса управления характеризуется статической ошибкой, ошибкой по фазе, ошибкой по амплитуде. В переходном режиме качество процесса управления характеризуется по переходному процессу.

#### 1) Характер переходного процесса (монотонный и колебательный).

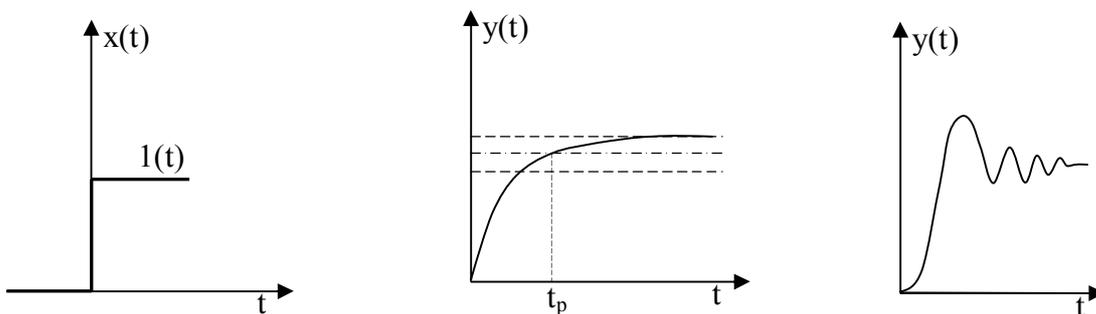


Рисунок 16.1 – График переходного процесса

#### 2) Время регулирования.

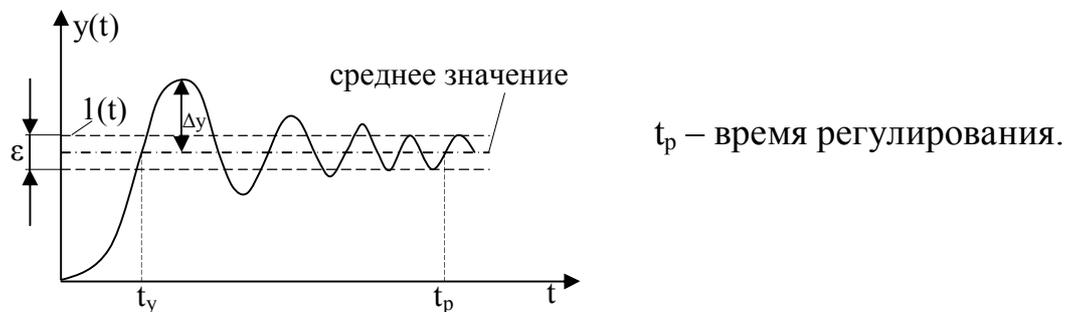


Рисунок 16.2 – Определение времени регулирования

#### 3) Статическая ошибка:

$$\varepsilon = y(t) - x(t),$$

$$\varepsilon = 3...5\% .$$

#### 4) Максимальное перерегуливание:

$$\Delta y = \frac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100\% - \text{характеризует колебательные системы.}$$

$$\Delta y < 20...30\% .$$

$\Delta u$  влияет на колебательность системы, что в ряде случаев для систем приводит к большим инерционным перегрузкам, что нежелательно.

В химической промышленности переходный процесс должен носить монотонный характер. Иначе он может привести к порче компонентов.

5)  $t_y$  - время установления первого согласования  $y(t)=x(t)$ . Основные качественные показатели  $\omega$  и  $T$ .

Переходный процесс может быть получен тремя способами:

1. расчётный;
2. экспериментальный;
3. моделирование.

## 16.2. Анализ качества переходного процесса по корням характеристического уравнения

Этот способ применяется в том случае, если имеются в наличии корни х.у. системы. Известно общее решение системы в виде:

$$y_{\text{общ}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad p_i - \text{корни х.у.}$$

a)  $p_{i, i+1} = -\alpha_i \pm j\omega_i$  - если имеются комплексно-сопряженные корни.

$$y_{\text{общ}}(t) = \sum_{i=1}^n e^{-\alpha_i t} (C_i \cos \omega_i t + C_{i+1} \sin \omega_i t).$$

b)  $\omega_i = 0$

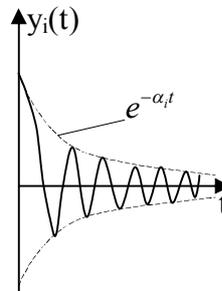
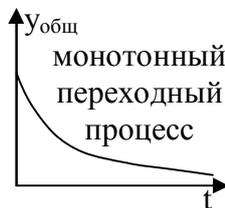


Рисунок 16.3 – Оценка качества переходного процесса

$\mu_k = \frac{\omega_k}{\alpha_k}$  - показатель колебательности  $k$ -ой составляющей.

При  $\omega_k = 0$ ,  $\mu_k = 0$  - процесс будет монотонным.

$f_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$  - частота  $k$ -ой составляющей.

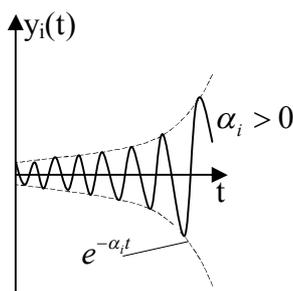


Рисунок 16.4 – Оценка качества переходного процесса

### 16.3. Анализ качества переходного процесса по частотным характеристикам

Для идеального звена частотная характеристика имеет вид:

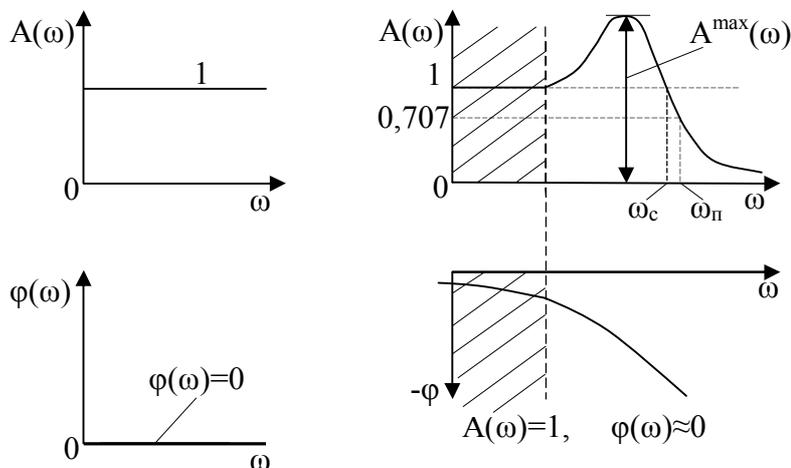


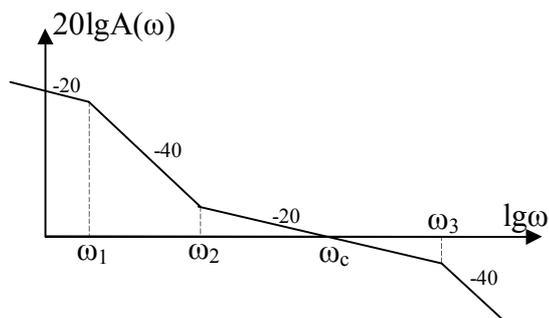
Рисунок 16.5 – Анализ качества переходного процесса по частотным характеристикам

$0 < \omega < \omega_n$  - частота пропускания.

$$\omega_n = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

$\omega_c$  - частота среза.

Чем шире полоса пропускания, тем лучше, т.е. без искажений, проходит и входной сигнал. Однако также будут хорошо проходить и помехи. Вводим показатель колебательности  $M = \frac{A^{\max}(\omega)}{A(0)}$ .



$$t_p \approx \frac{2\pi}{\omega_c}$$

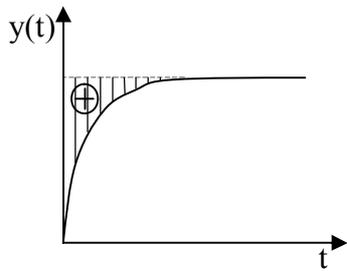
$\omega_c, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow t_p, M, \varepsilon$  можно найти по этим параметрам.

Рисунок 16.6 – Анализ качества переходного процесса по частотным характеристикам

### 16.4 Интегральные оценки качества переходного процесса

Все рассмотренные до сих пор показатели переходного процесса дают одностороннюю оценку.

Возникает вопрос, можно ли оценить качество переходного процесса каким-либо одним обобщённым показателем.



$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t)$$

Вводится так называемая линейная интегральная оценка:

$$I_{00} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt = \int_0^{\infty} [y(t) - x(t)] dt .$$

Чем меньше значение этого интеграла, тем реальная система ближе к идеальной.

Рисунок 16.7 – Интегральная оценка качества  $I_{00}$

$I_{00}$  справедлива только для монотонных процессов.

$$I_{01} = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt$$

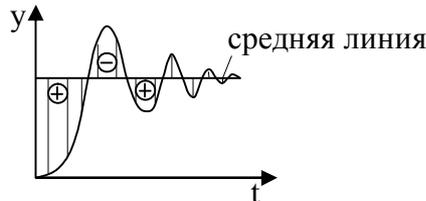
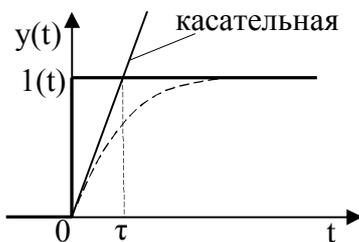


Рисунок 16.8 – Интегральная оценка качества  $I_{01}$

$I_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$  - квадратичная интегральная оценка.

$I_0 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \tau^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt$  - интегральная оценка, учитывающая производные от ошибки.



Существуют интегральные оценки, учитывающие первые, вторые и более высокие производные.

И степень приближения реальной системы оценивается к монотонному процессу степенью приближения.

Рисунок 16.9 – Интегральная оценка качества  $I_0$

## 17. КОРРЕКЦИЯ САУ

### 17.1. Коррекция за счет изменения коэффициента усиления разомкнутой системы

Коррекция САУ производится с целью обеспечения устойчивости, получения необходимых показателей качества, статической ошибки и т.д.

Проще всего коррекции проводить по ЛАЧХ, с дальнейшим уточнением расчетов на ЭВМ.

#### Коррекция проводится тремя способами:

1. Коррекция за счёт изменения коэффициента усиления разомкнутой системы.
2. Коррекция за счёт последовательного корректирующего контура.
3. Коррекция за счёт параллельного корректирующего контура.

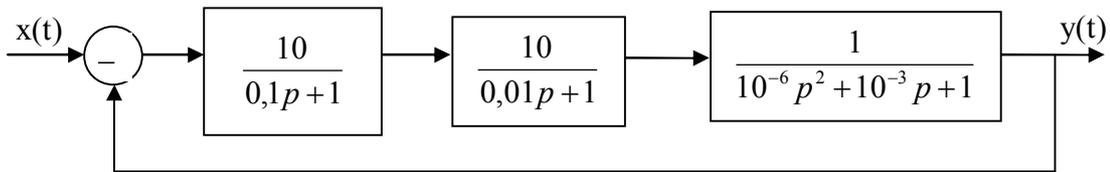
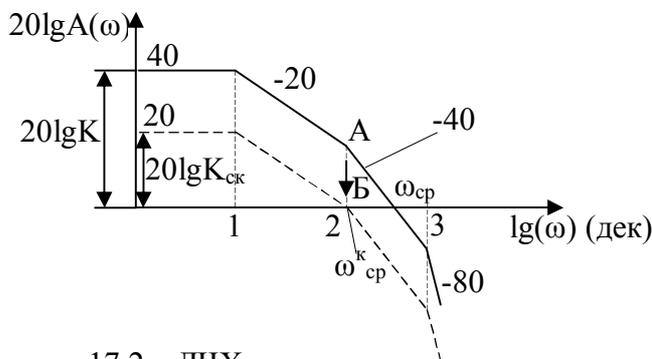


Рисунок 17.1 – Пример САУ



$$20 \lg K = 20 \lg 100 = 40$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad \lg 10 = 1 \text{дек}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,01} = 100, \quad \lg 100 = 2 \text{дек}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,001} = 1000, \quad \lg 1000 = 3 \text{дек}$$

Рисунок 17.2 – ЛЧХ

Предположим, что к данной системе предъявляется требование монотонности переходного процесса.

**Процесс будет монотонным**, если выше оси частот ЛАЧХ будет иметь наклон не более -20дБ/дек.

$$20 \lg K_{ск} = 20, \quad \lg K_{ск} = 1, \quad K_{ск} = 10.$$

**Вывод:** для коррекции необходимо, чтобы точка А стремилась в точку Б путем снижения коэффициента усиления, отсюда  $K_{ск}=10$  (коэффициент усиления скорректированной системы).

$$t_p \approx \frac{2\pi}{\omega_{cp}}$$

С уменьшением коэффициента усиления добились монотонности переходного процесса, но другие показатели качества, например, быстродействие, ухудшилось (время регулирования  $t_p$  увеличилось).

## 17.2. Коррекция за счёт последовательного корректирующего контура

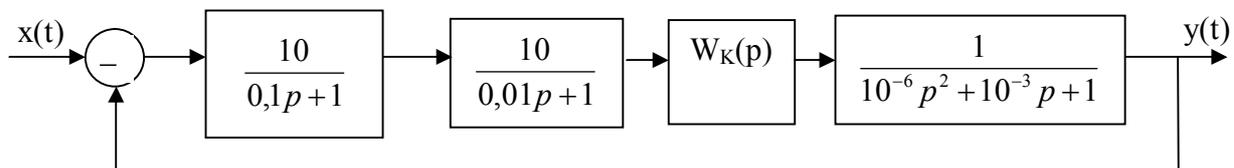
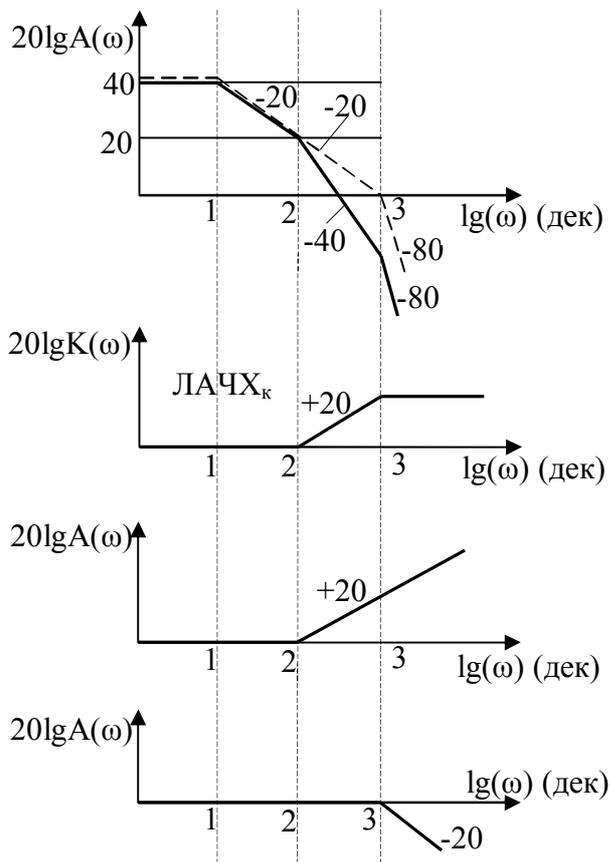


Рисунок 17.3 – Пример САУ

### Требования к системе:

1. Монотонность;
2.  $t_p \leq 0,006c$ .

При последовательном соединении элементов передаточная функция разомкнутой системы равна произведению отдельных элементов и корректирующего контура. Следовательно, ЛАЧХ равно сумме всех составляющих элементов и корректирующего контура.



$$\text{ЛАЧХ}_{\text{жел}} - \text{ЛАЧХ}_{\text{исх}} = \text{ЛАЧХ}_{\text{к}}$$

$$W(p) = K(Tp + 1)$$

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$$

Рисунок 17.4 – ЛЧХ

Коррекция последовательным корректирующим контуром осуществляется в три этапа:

1. Строится желаемая ЛАЧХ, исходя из требований по качеству управления;
2. Из желаемой ЛАЧХ вычитается ЛАЧХ исходной системы и определяется ЛАЧХ корректирующего контура;
3. По ЛАЧХ корректирующего контура определяется передаточная функция корректирующего контура. И по нему определяется техническая реализация.

Процесс монотонный, если выше оси частот ЛАЧХ имеет наклон не более -20дБ/дек. Определяем  $\omega_{cp} = \frac{2\pi}{t_p} = \frac{2\pi}{0,006} \approx 1000$ ,  $\lg 1000 = 3 \text{ дек}$ .

Для обеспечения предъявленных требований по качеству необходимо в области частот, которые существенно влияют на качество, построить желаемую характеристику ЛАЧХ (пунктирная линия).

### Недостатки последовательного корректирующего контура

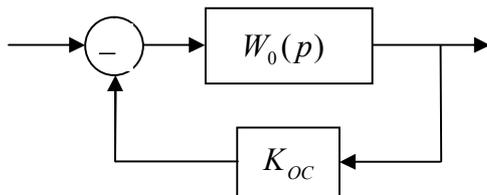
1. Наличие громоздких конденсаторов;
2. Помехи и шумы.

### 17.3. Коррекция за счёт параллельных корректирующих элементов

Параллельно корректирующие контуры обеспечивают большую устойчивость к шумам и помехам.

В параллельно корректирующий контур может быть установлен статический элемент. В этом случае система называется с жёсткой обратной связью (ОС). Если в ОС стоит идеальный дифференцирующий элемент, то в этом случае система называется с гибкой обратной связью.

#### I Коррекция жёсткой ОС



$$W_{oc}(p) = K_{oc}$$

Оценим, каким образом  $K_{oc}$  влияет на характеристики САУ (на рисунке).

Рисунок 17.5 – Коррекция жёсткой ОС

$$1. \quad W_0(p) = \frac{K_0}{T_0 p + 1}.$$

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_{oc}(p)} = \frac{\frac{K_0}{T_0 p + 1}}{1 + \frac{K_0}{T_0 p + 1} \cdot K_{oc}} = \frac{K_0}{T_0 p + 1 + K_0 \cdot K_{oc}} = \frac{K}{T p + 1};$$

$$K = \frac{K_0}{1 + K_0 K_{oc}}, \quad T = \frac{T_0}{1 + K_0 K_{oc}}.$$

**Вывод:** При обхвате апериодического звена жесткой ОС получается апериодическое звено с постоянной времени и коэффициентом усиления, меньшими, чем в исходном звене.

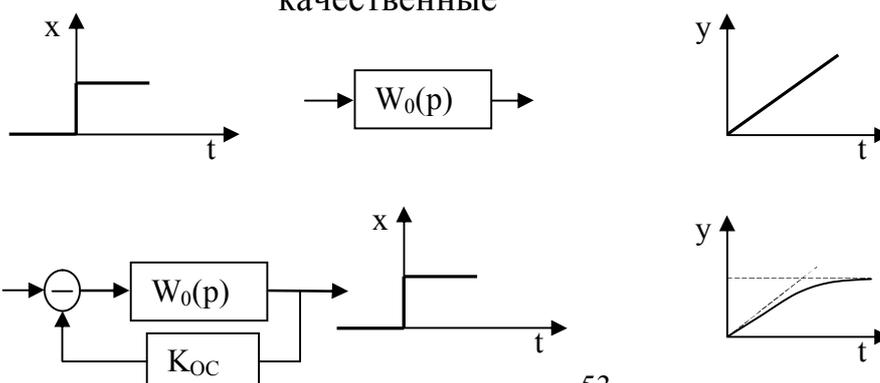
При обхвате колебательного звена уменьшается колебательность.

$$2. \quad W_0(p) = \frac{K_0}{p}.$$

$$W(p) = \frac{\frac{K_0}{p}}{1 + \frac{K_0}{p} \cdot K_{oc}} = \frac{K_0}{p + K_0 \cdot K_{oc}} = \frac{K}{T p + 1};$$

$$K = \frac{1}{K_{oc}}, \quad T = \frac{1}{K_0 K_{oc}}.$$

**Вывод:** При обхвате интегрирующего звена жесткой ОС, оно преобразовалось в апериодическое. Это благотворно влияет на устойчивость и качественные характеристики.



## 2 Коррекция гибкой ОС

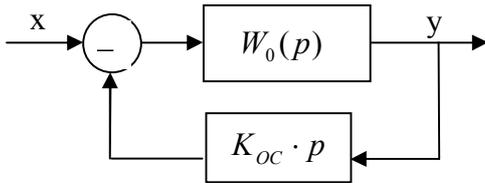


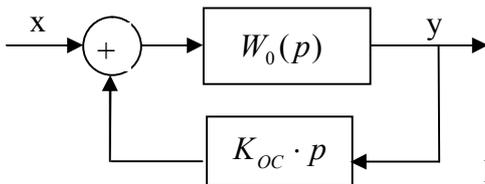
Рисунок 17.7– Коррекция гибкой ОС

$$1. W_0(p) = \frac{K_0}{T_0 p + 1}, \quad K = K_0, \quad T = T_0 + K_0 K_{oc}$$

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_{oc}(p)} = \frac{\frac{K_0}{T_0 p + 1}}{1 + \frac{K_0}{T_0 p + 1} \cdot K_{oc} \cdot p} = \frac{K_0}{1 + (K_0 \cdot K_{oc} + T_0)p} = \frac{K}{Tp + 1};$$

**Вывод:** В результате обхвата с ГОС получилось апериодическое звено с тем же коэффициентом усиления  $K_0$ , а постоянная времени увеличилась.

В случае положительной ОС постоянная времени уменьшается.



$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 - W_0(p)W_{oc}(p)};$$

Рисунок 17.8 – Пример коррекции гибкой ОС

$$1. W_0(p) = \frac{K_0}{p} \cdot W(p) = \frac{\frac{K_0}{p}}{1 + \frac{K_0}{p} \cdot K_{oc} \cdot p} = \frac{K_0}{p(1 + K_0 \cdot K_{oc})} = \frac{K}{p}; \quad K = \frac{K_0}{1 + K_0 \cdot K_{oc}}.$$

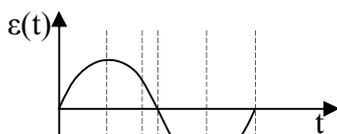


Рисунок 17.9 - Сигнал ошибки ( $\varepsilon(t)$ )

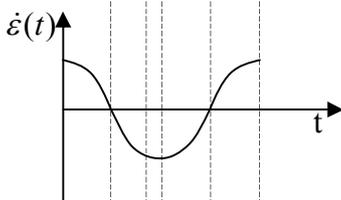
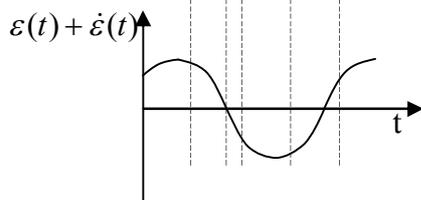


Рисунок 17.10 - Производная от сигнала ошибки ( $\dot{\varepsilon}(t)$ )



$$\Delta y_{уст} = \frac{x}{1 + K} \text{ - статическая ошибка в статической системе.}$$

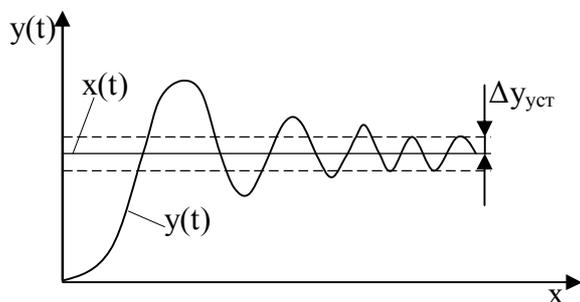


Рисунок 17.11 – Определение статической ошибки

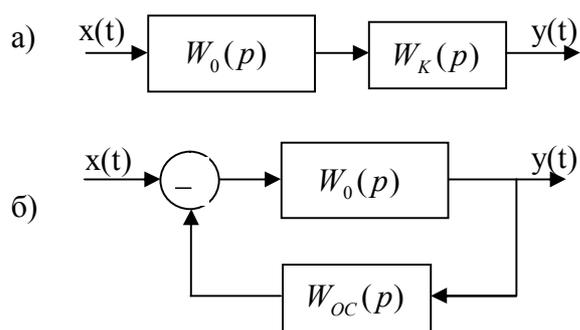
В статической системе точность зависит от коэффициента усиления. Уменьшая коэффициент усиления, можем обеспечить устойчивость, но время регулирования увеличивается, статическая ошибка так же увеличивается.

**Статическая система** – система, в которой статическая ошибка зависит от величины входного воздействия. В противном случае система – **астатическая**.

$\Delta y_{уст} = 0$  - астатическая САУ.

$\Delta y_{уст} \neq 0$  - статическая САУ.

В линейных системах коррекция последовательным и параллельным корректирующими контурами эквивалентны.



Под эквивалентностью понимается неизменность входных и выходных сигналов.

а)  $W(p) = W_0(p) \cdot W_K(p)$ ;

б)  $W(p) = \frac{W_0 p}{1 + W_0(p) \cdot W_{OC}(p)}$ .

Рисунок 17.12 – Пример последовательного и параллельного корректирующего контура

а) и б) – эквивалентны.

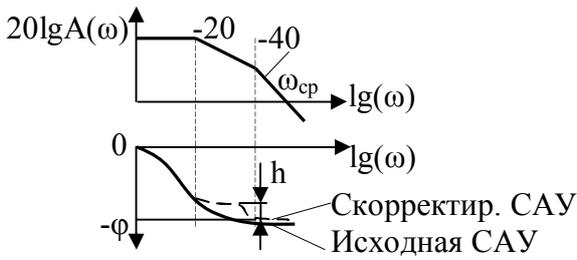
$$W_0(p) \cdot W_K(p) = \frac{W_0 p}{1 + W_0(p) \cdot W_{OC}(p)};$$

$$W_K(p) = \frac{1}{1 + W_0(p) \cdot W_{OC}(p)};$$

$$W_{OC}(p) = \frac{1 - W_K(p)}{W_0(p) \cdot W_K(p)}.$$

**Вывод:** коррекция системы представляет собой творческую работу, которая во многом зависит от творчества и интуиции исполнителя. При этом приходится включать последовательный корректирующий контур с охватом одного или нескольких звеньев ОС и с изменением коэффициента усиления всей системы.

Обычно включают такие звенья, которые существенно влияют на качество управления. Обычно это в районе частоты среза.



$$W_k(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1};$$

$h$  – запас устойчивости по амплитуде у скорректированной системы.

Рисунок 17.13- Пример ЛЧХ

## 18. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 18.1. Общие сведения о нелинейных системах

Система называется нелинейной, если связь между выходными и входными величинами описывается нелинейными уравнениями (чаще  $d/y$ ).

Все реальные системы являются нелинейными. В природе не существует линейных систем и элементов.

Нелинейные уравнения довольно часто заменяют линейными. Например, если зона нечувствительности элемента мала в сравнении с конечными отклонениями выходной величины, можно пренебречь петлей гистерезиса в электромашинном преобразователе и т.д.

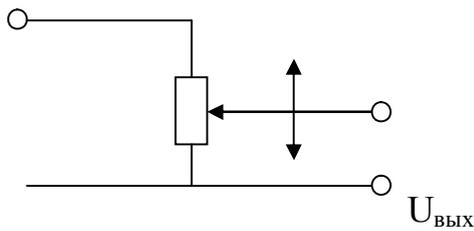
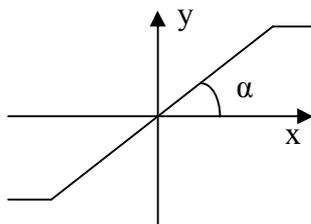


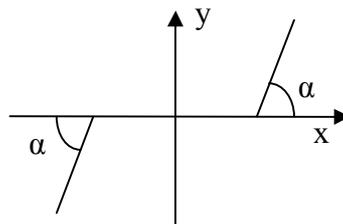
Рисунок 18.1 - Потенциометр

Примером существенной нелинейности является двухпозиционное реле.

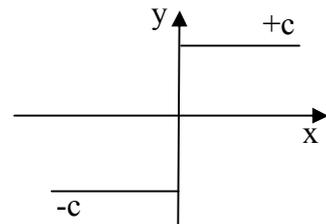
### Примеры типовых нелинейных звеньев



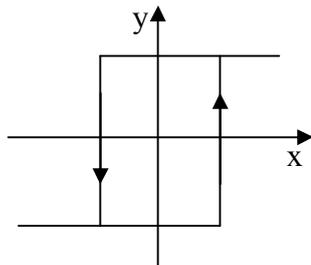
Звено с ограничением (насыщением)



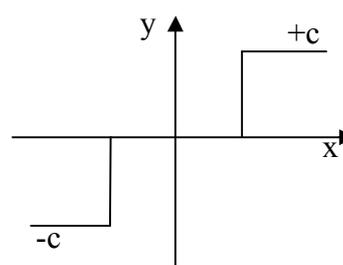
Звено с зоной нечувствительности



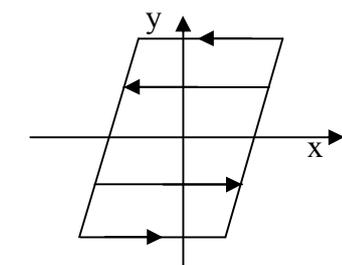
Идеальное двухпозиционное реле



Двухпозиционное звено с зоной нечувствительности



Трехпозиционное звено



Характеристика типа сухого трения

Пример звена с зоной нечувствительности

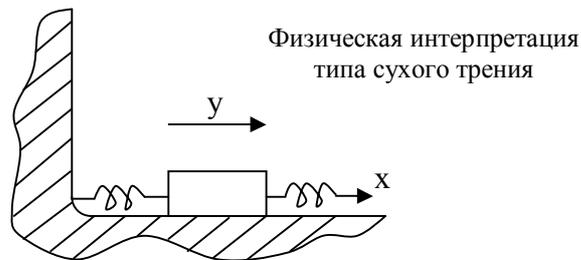
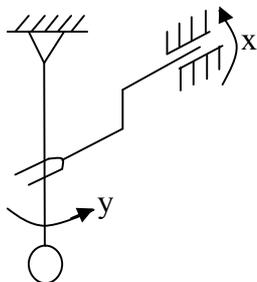
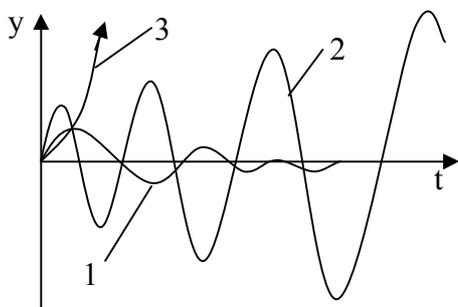


Рисунок 18.2 – Примеры типовых нелинейных звеньев

Нелинейность существенно усложняет исследование систем, так как не существует общих методов решения нелинейных д/у.

Нелинейности оказывают как полезное, так и вредное воздействие. В отличие от линейных систем устойчивость, точность и качество переходного процесса зависит от величины внешнего воздействия. Так, одна и та же система при малых воздействиях является устойчивой, а при больших воздействиях неустойчивой.



САУ в устойчивом и неустойчивом состоянии:

- 1 – устойчивая система;
- 2, 3 – неустойчивая система.

Рисунок 18.3 – Переходные процессы САУ

**Устойчивость в малом** – устойчивость системы при бесконечно малых отклонениях от исходного режима.

**Устойчивость в большом** – устойчивость при конечных отклонениях, допустимых при работе САУ.

**Устойчивость в целом** – устойчивость при любых отклонениях, когда отклонения не оговорены.

Для анализа нелинейные системы разделяют на линейную часть и нелинейную часть. Если система имеет хоть один нелинейный элемент, то методы исследования этих систем должны быть как для нелинейных.

## 18.2. Методы устойчивости по Ляпунову

**Теорема 1.** Если линеаризованная система устойчива, то устойчива и исходная нелинейная система.

**Теорема 2.** Если линеаризованная система неустойчива, то будет неустойчива и исходная нелинейная система.

**Теорема 3.** Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то вопрос об устойчивости исходной нелинейной системе

подлежит дополнительному исследованию по нелинейным уравнениям исходной системы.

Теорема Ляпунова позволяет судить об устойчивости нелинейной системы по линейным уравнениям.

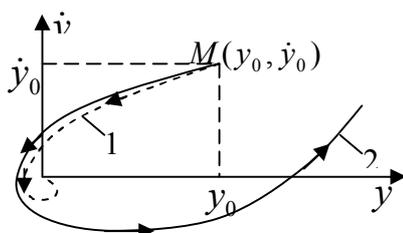
### 18.3. Метод фазовых траекторий

Этот метод позволяет судить об устойчивости нелинейных систем. Его отличает геометрическая наглядность. Пусть система (это суть метода) описывается д/у n-го порядка. Её состояние оценивается n числами, например, значение функции и (n-1)-ых производных. Если система описывается д/у второго порядка:

$(a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) = x(t)$ , то состояние системы оценивается значением функции и её производной ( $y$  и  $\dot{y}$ ).

n-мерное пространство обычно называют **фазовым пространством**.

Для  $n=2$  фазовое пространство определяется плоскостью.



- 1 – изображающая тонкая;
- 2 – фазовая траектория.

Рисунок 18.4 – Фазовая плоскость

При изменении состояния системы изображающая точка на плоскости начинает перемещаться и описывать так называемую фазовую траекторию.

Состояние системы в каждый момент времени определяет изображающая точка.

$$(a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0)y(t) = x(t)$$

Для  $n=3$  фазовое пространство является трехмерным.

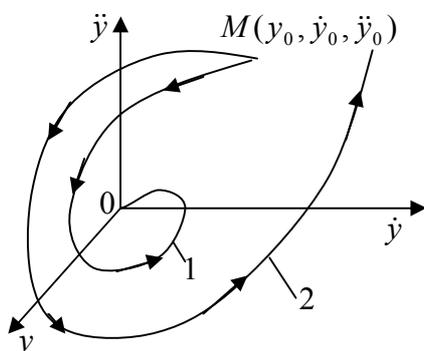
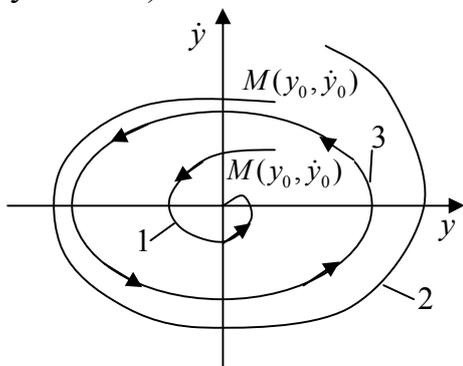


Рисунок 18.5 – Фазовое пространство  $n=3$

Метод фазовых траекторий позволяет определить состояние системы без временной переменной, и его характеризует простая геометрическая наглядность. Этот метод является основным для исследования систем второго порядка.

В качестве начала координат фазового пространства выбирается исходный режим или невозмущённое движение (траектория движения КА).

По характеру фазовой траектории можно судить об устойчивости. Если фазовая траектория «стягивается» в начало координат, то такая система устойчива (случай устойчивости САУ №1). Иначе, система неустойчива (случай №2).



Если фазовая траектория имеет замкнутый вид, то такой процесс называется **предельный цикл** (случай №3). Такой системе соответствуют колебания с незатухающей амплитудой.

Рисунок 18.6 – Предельный цикл

Изображающая точка движется всё время по одной траектории. Если фазовая траектория стремится в начало координат (случай 1), то САУ устойчива. В случае 2 – САУ неустойчива. САУ устойчива в малом (случай 2), и не устойчива - (случай 3) – предельный цикл.

В линейной системе не удастся получить устойчивые незатухающие колебания. Малейшее изменение одного из параметров приведёт либо к затуханию колебаний, либо к их увеличению (частный случай автоколебаний рассмотрен в п.11).

В нелинейной системе автоколебания, как правило, устойчивы. Система устойчива в большом и неустойчива в малом.

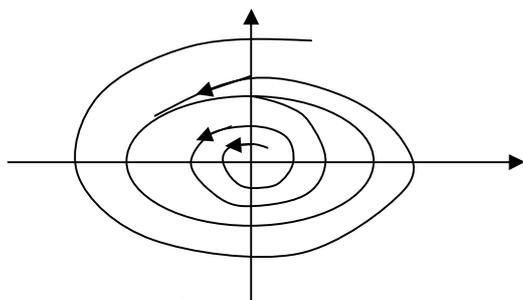


Рисунок 18.7 – Фазовая плоскость системы, устойчивой в большом и неустойчивой в малом

### Пример. Фазовые траектории нелинейных систем.

#### 1. Релейная характеристика.

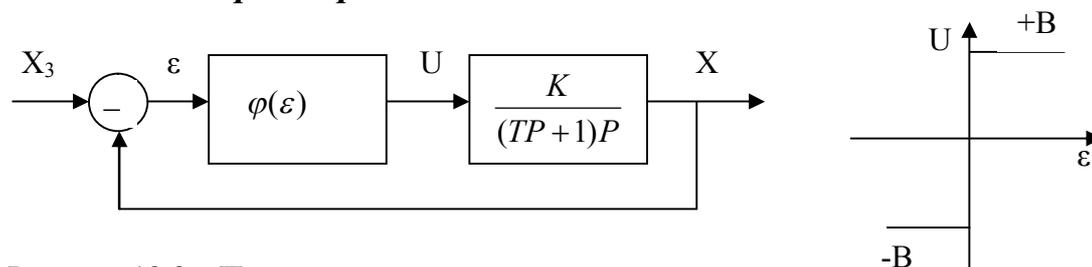


Рисунок 18.8 – Пример релейной характеристики

$$(TP+1)PX = KU, \quad U = \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = X_3 - X.$$

$(TP+1)PX = K \cdot \varphi(X_3 - X)$  - получаем, исключив промежуточные переменные

$U$  и  $\varepsilon$ .

Произведем замену  $x=X-X_3$ ,  $PX=y$ .

$$(TP+1)y = -y - K \cdot \varphi(x).$$

$$(1) \begin{cases} T \frac{dy}{dt} = -y - K\varphi(x) & (1)' \\ \frac{dx}{dt} = y & (2)' \end{cases}$$

Теперь  $\frac{(1)'}{(2)'}$  и исключим время.

$$(2) T \frac{dy}{dx} = -1 - K \frac{\varphi(x)}{y} - d/y, \text{ в котором исключено время.}$$

На различных участках нелинейные характеристики  $\varphi(\varepsilon)$  д/у (2) распадается на два линейных д/у.

$$x = -T[y + K\varphi \ln(y - K\varphi)] + C_1,$$

$$C_1 = T[y_0 + K\varphi \ln(y - K\varphi)] + x_0.$$

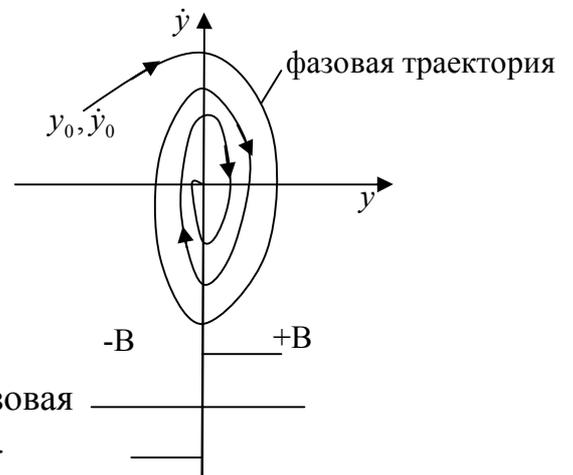


Рисунок 18.9 – Фазовая плоскость

Система является устойчивой, так как фазовая траектория «стягивается» в начало координат.

## 2. Возьмем другую нелинейность (зона нечувствительности).

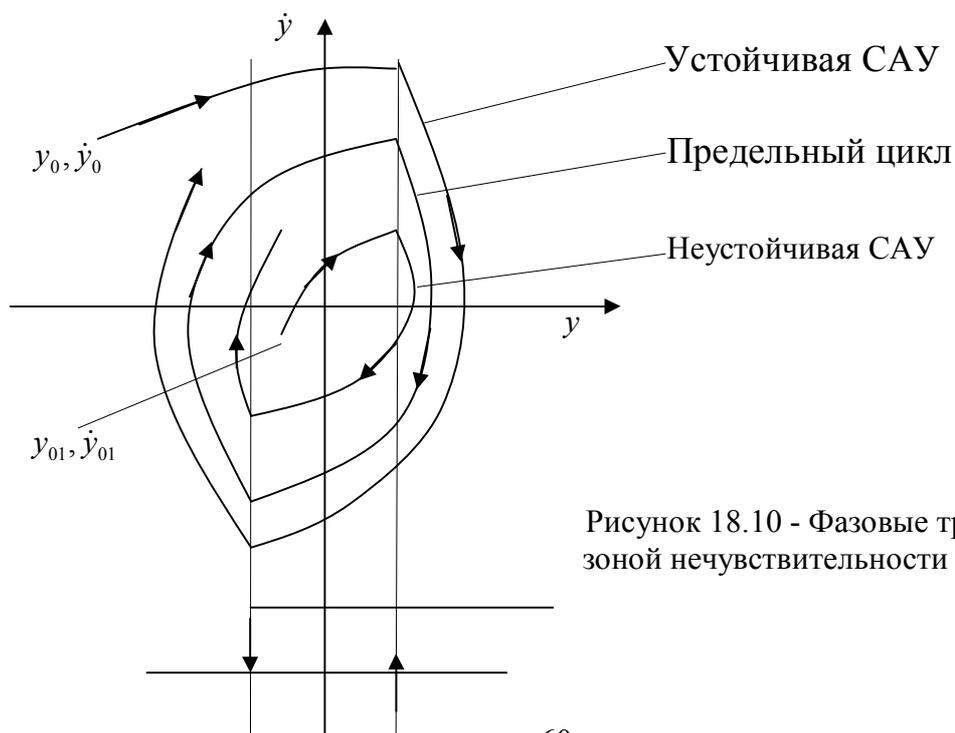


Рисунок 18.10 - Фазовые траектории звена с зоной нечувствительности

Фазовая траектория соответствующая второму случаю (зона нечувствительности) соответствует: при начальных условиях  $y_0, \dot{y}_0$  соответствует устойчивой системе; при начальных условиях  $y_{01}, \dot{y}_{01}$  соответствует неустойчивой САУ (неустойчива в малом). Замкнутая фазная траектория – предельный цикл – соответствует незатухающим колебаниям, которые называются автоколебания.

#### 18.4. Способы подавления автоколебаний в релейных системах

Возникновение автоколебаний в релейных системах связано с тем, что исполнительный орган движется с постоянной скоростью независимо от величины управляющего воздействия.

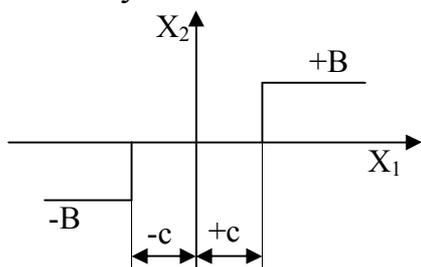


Рисунок 18.11 – Пример 1

При  $|x_1| > C$  исполнительный орган вследствие своей инерции проходит нейтральное положение и движется в противоположную сторону. Поэтому процесс будет повторяться.

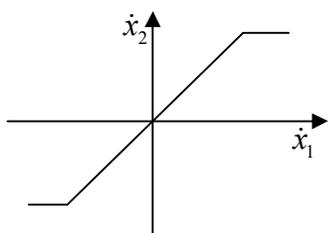


Рисунок 18.12 – Пример 2

- 1) Для устранения автоколебаний необходимо, чтобы скорость перемещения исполнительного органа была линейной (рис.18.12). Т.е. необходима линеаризация нелинейного элемента.
- 2) Автоколебания можно исключить, если увеличить зону нечувствительности. Но это ухудшает точность и эксплуатационные характеристики системы.

3) Устранить автоколебания можно путём линеаризации релейного элемента. В этом случае на входе нелинейного элемента подаются высокочастотные колебания (ВЧК).

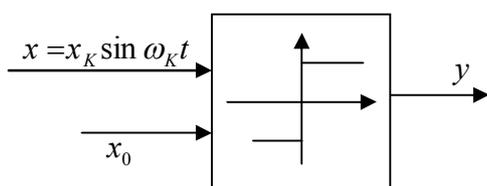


Рисунок 18.13 – Пример 3

$\omega_k$  - частота ВЧК.

$x_k$  - амплитуда ВЧК.

$\omega_k$  выбирается таким образом, чтобы последующие звенья не пропускали высокую частоту, т.е. звенья являются фильтрами нижних частот и отсеивают высокие частоты.

$$y_0 = \frac{T_1 C_1 - T_2 C_2}{T_1 + T_2} = 0 \quad (\text{к рис.18.14})$$

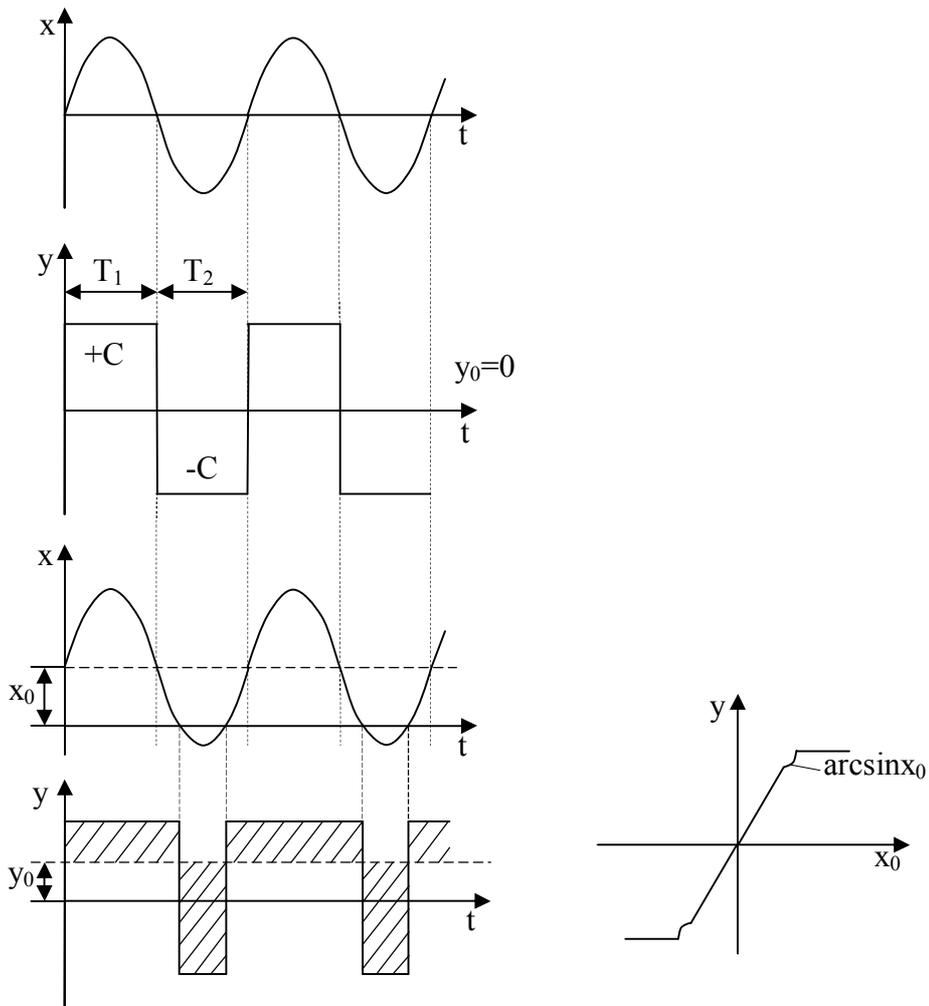


Рисунок 18.14 – Переходной процесс

В результате подачи на НЭ (нелинейный элемент) ВЧК статическая характеристика НЭ будет почти линейной (рис. 18.14). Если на НЭ подать пилообразные колебания, то статическая характеристика НЭ будет иметь линейный характер.

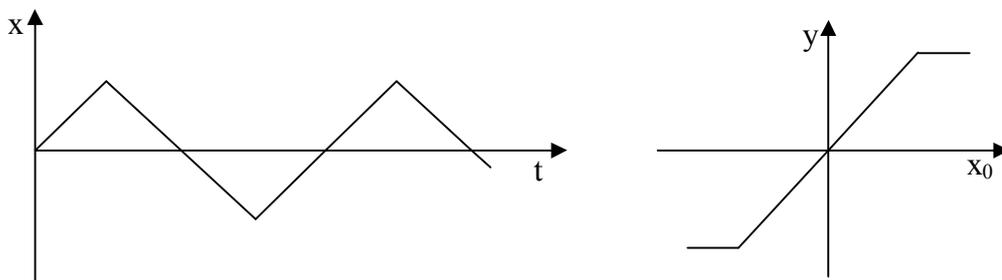


Рисунок 18.15 – Пилообразное входное воздействие

Операция по замене статической характеристики нелинейного элемента линейной статической характеристикой называется **вибрационной линеаризацией**. Она значительно улучшает качественные характеристики по устойчивости, точности системы.

$$\frac{f_x}{f_{x_0}} \geq 3, \quad f_x - \text{частота [Гц]}.$$

### 18.5. Метод припасовывания

Это метод решения нелинейных д/у. Суть метода заключается в следующем:

проводиться линейная аппроксимация нелинейности, и на каждом из этих линейных участков д/у является линейным. При переходе к другому участку конечные условия для первого участка являются начальными для второго участка. При переходе к третьему участку конечные значения переменных второго участка являются начальными условиями для третьего участка и т.д. Метод чрезвычайно громоздкий и трудоёмкий.

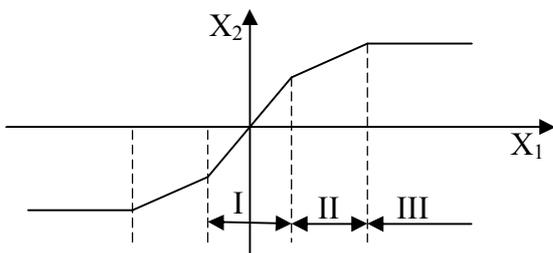


Рисунок 18.16 – Графическая интерпретация метода припасовывания

### 19. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Это основной метод (приближенный) исследования нелинейных элементов. Он справедлив для системы любого порядка. Основа этого метода заложена Боголюбовым.

Этот метод позволяет определить параметры предварительного цикла, соответствующего автоколебательному режиму. Этот предельный цикл разделяет систему на переходные процессы устойчивые и неустойчивые.

Пример:

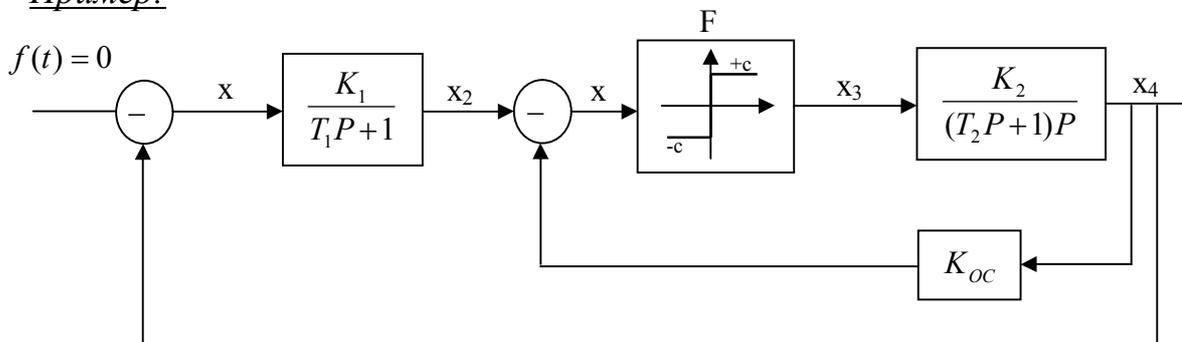


Рисунок 19.1 – Пример САУ

Составляем математическое описание этой системы.

$$(T_1P + 1)x_2 = -K_1x_4,$$

$$x = x_2 - K_{oc}x_4,$$

$$x_3 = F(x),$$

$$(T_2 P + 1) P x_4 = K_2 x_3 \quad (1)$$

Метод гармонической линеаризации основан на предположении, что в системе действует синусоидальный сигнал (немного от него отличается).

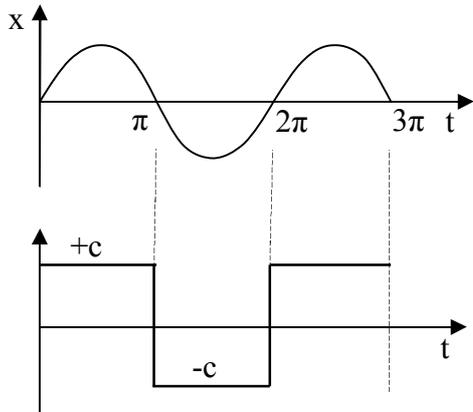


Рисунок 19.2 – Гармонический входной сигнал

Всякое периодическое движение можно разложить в ряд Фурье. В этом случае

$$x_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} (A_K \cos K\Omega t + B_K \sin K\Omega t),$$

$A_K$ ,  $\Omega$  - амплитуда и частота  $K$ -той гармоники.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_3(t) dt = 0.$$

$$A_K = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_3(t) \cos K\Omega t d\Omega t = 0.$$

$$B_K = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x_3(t) \sin K\Omega t d\Omega t \neq 0.$$

$$x = A \sin \Omega t \quad (2)$$

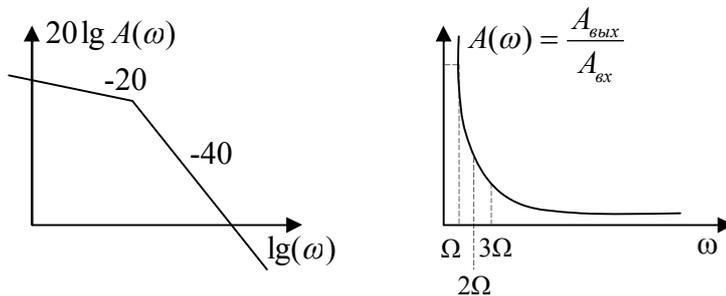


Рисунок 19.3 – Построение ЛЧХ

После нелинейного звена идут инерционные звенья (апериодическое и интегральное звенья), которые хорошо пропускают низкие частоты и не пропускают высокие (это фильтр высоких частот – см. рис.19.3).

Поэтому можно ограничиться в разложении Фурье первым слагаемым.

$$x_3(t) = B_1 \sin \Omega t + B_3 \sin 3\Omega t + \dots, \quad K=1,3,5\dots$$

$$x_3(t) = B_1 \sin \Omega t \quad (3);$$

из (1) можно записать:

$$\sin \Omega t = \frac{x}{A} \quad (4);$$

$$x_3(t) = B_1 \frac{x}{A} = \frac{B_1}{A} x(t) = qx,$$

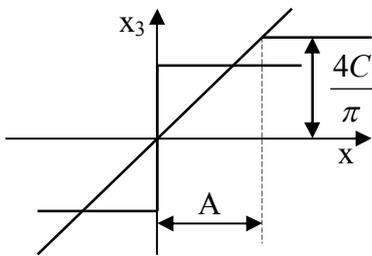
где  $q$  – гармонический коэффициент усиления.

$$\frac{B_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \Omega t) \sin \Omega t d\Omega t = \frac{1}{\pi A} \left( \int_0^{\pi} C \sin \Omega t d\Omega t + \int_0^{2\pi} (-C) \sin \Omega t d\Omega t \right) = \frac{4C}{\pi A}.$$

$$x_3(t) = qx, \quad \text{где } q = \frac{4C}{\pi A}.$$

В результате преобразований нелинейное звено преобразовано в линейное, коэффициент усиления которого зависит от величины амплитуды колебаний. Эта операция по замене нелинейного звена линейным называется гармонической линеаризацией.

$q$  – коэффициент гармонической линеаризации. Он показывает усиление по первой гармонике колебаний.



В исходное уравнение производим подстановку  $x_3 = qx$ .

Перейдем к х.у. этой системы

$$T_1 T_2 P^3 + (T_1 + T_2) P^2 + (1 + T_1 K_2 K_{oc} q) P + (K_1 + K_{oc}) K_2 q = 0 \quad (5)$$

Рисунок 19.4 – Определение коэффициента гармонической линеаризации

Определим периодическое движение для (5):

$$P = j\omega;$$

$$P(\Omega) + jQ(\Omega) = 0;$$

$$-T_1 T_2 j\Omega^3 - (T_1 + T_2)\Omega^2 + (1 + T_1 K_2 K_{oc} q) j\Omega + (K_1 + K_{oc}) K_2 q = 0;$$

$$(K_1 + K_{oc}) K_2 q - (T_1 + T_2)\Omega^2 + j\Omega(1 + T_1 K_2 K_{oc} q) - T_1 T_2 j\Omega^3 = 0;$$

$$(K_1 + K_{oc}) K_2 q - (T_1 + T_2)\Omega^2 = 0;$$

$$(1 + T_1 K_2 K_{oc} q)\Omega - T_1 T_2 \Omega^3 = 0;$$

$$\Omega^2 = \frac{(K_1 + K_{oc}) K_2 q}{T_1 + T_2}; \quad q = \frac{4C}{\pi A};$$

$$A = \frac{4CK_2(T_2 K_1 - T_1 K_{oc})}{\pi(T_1 + T_2)}.$$

Необходимо определить, что эти периодические колебания являются устойчивыми. Для этого в уравнении (5) делаем подстановку  $q = \frac{4C}{\pi A}$ .

По критерию Гурвица убеждаемся, что система устойчива.

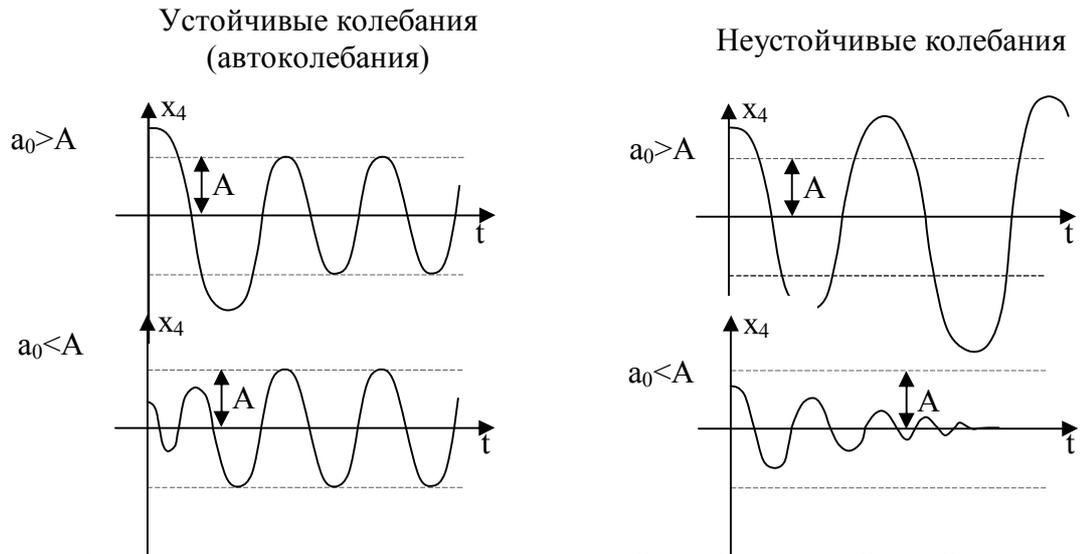


Рисунок 19.5 – Переходные характеристики устойчивой и неустойчивой систем

Если при начальных условиях  $a_0 > A$  переходный процесс расходится, а при  $a_0 < A$  начинает сходиться, то автоколебаний не будет.

Эту проверку лучше проводить по критерию Гурвица.

В справочной литературе приведены коэффициенты гармонической линеаризации для различных нелинейностей (трёхпозиционное звено, с ограничением, двухпозиционное звено и т.д.)

## 20. АВТОКОЛЕБАНИЯ ЗАМКНУТЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Из ТАУ известно, что при увеличении коэффициента усиления разомкнутой линейной системы запас устойчивости замкнутой линейной системы уменьшается. При некоторых значениях коэффициента критического усиления  $K_y$  система выходит на границу устойчивости. Если при этом решение характеристического уравнения показывает пару мнимых сопряженных корней ( $j\omega$  и  $-j\omega$ ), то в системе возникает режим гармонических колебаний с постоянной амплитудой и частотой, что поддерживается за счет энергии системы. При этом необходимо учесть, что данный режим непостоянен. Это связано с тем, что режим существует только при строго определенных значениях, а иначе система становится (не-)устойчивой, т.е. колебания или возрастают, или затухают (рис.20.4). В реальной системе параметры непостоянны из-за износа, внешних воздействий и пр. Поэтому в линейных системах режим гармонических колебаний с постоянной амплитудой и частотой невозможен. Но в нелинейных системах этот режим существует и является основным при устойчивости системы.

Рассмотрим простейшую нелинейную систему (рис.20.1):

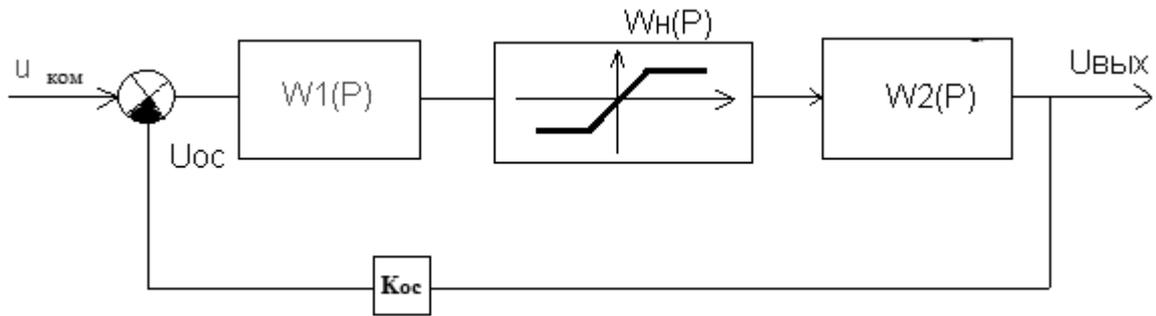


Рисунок 20.1 – Структурная схема нелинейной системы

$W_1(P)$  и  $W_2(P)$  – линейные передаточные звенья.  
 $W_n(P)$  - нелинейное передаточное звено (рис.20.2.)

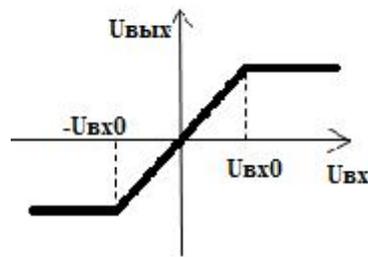


Рисунок 20.2 – Нелинейное звено с зоной насыщения

Будем считать, что параметры всех линейных элементов системы постоянны.  $K_y$  разомкнутой системы будет равен  $K_n \cdot K_{нл}$

$K_n$  — это  $K_y$  всех линейных элементов системы;

Примем  $K_n = 1$ , следовательно  $K_y$  разомкнутой системы определяется через  $K_{нл}$ . Пусть входная величина в нелинейном элементе имеет среднее значение равное нулю. Тогда:

$$K_{нл} = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \operatorname{tg} \alpha$$

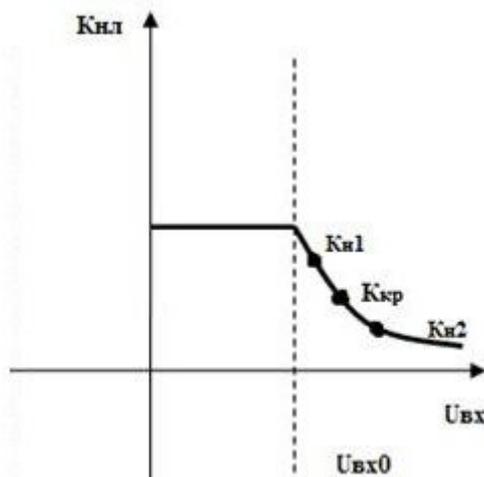


Рисунок 20.3 – График зависимости среднего коэффициента усиления нелинейного элемента с зоной насыщения от величины входного сигнала

Пусть система на границе устойчивости, а  $K_y = K_{кр}$ . Следовательно, в системе возникают гармонические колебания с постоянной амплитудой и частотой. Если изменение одного из проектных параметров привело к тому, что система изменила значение  $K_y$ :  $K_{кр} \rightarrow K_n^1$ . Значит, амплитуда уменьшилась. Но так как  $K_y$  увеличился, то система стала неустойчивой, что ведёт к увеличению амплитуды сигнала, т.е.  $U_{вх}$  увеличивается. Следовательно,  $K_y = K_{кр}$ .

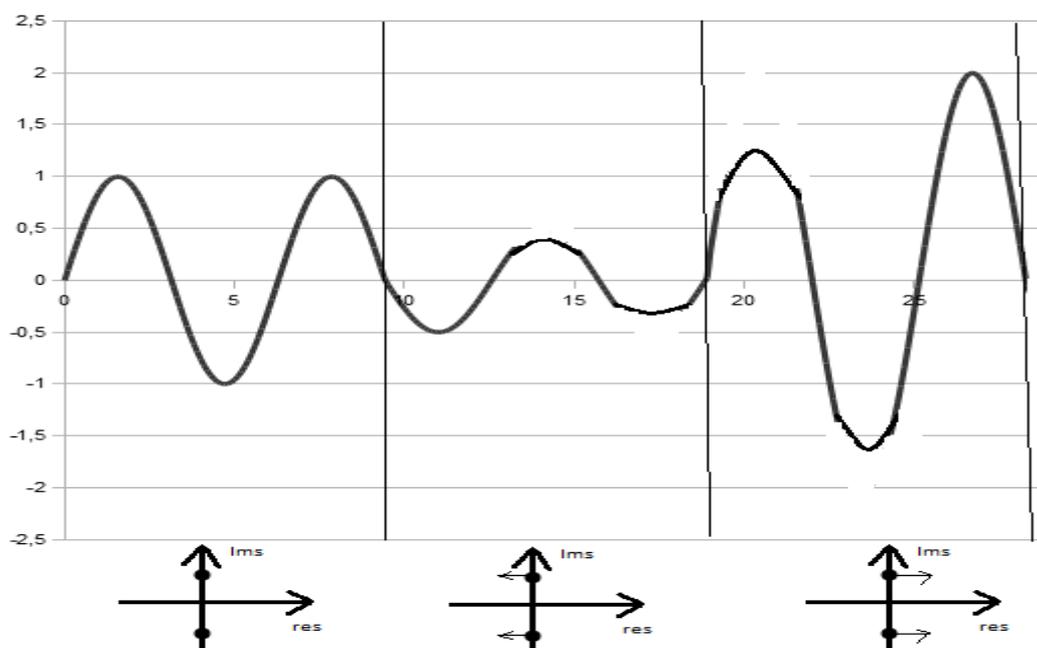


Рисунок 20.4 – Изменение амплитуды и частоты колебаний линейных систем при изменении проектных параметров

Пусть под действием проектных параметров уменьшился общий  $K_y$ :  $K_{кр} \rightarrow K_n^2$ . Амплитуда входного сигнала  $U_{вх}$  увеличилась. Но система находилась на границе устойчивости, а значит, теперь она стала устойчивой. Для такой системы характерны затухающие переходные процессы. Следовательно, амплитуда входного сигнала  $U_{вх}$  должна уменьшиться, а  $K_y$  - увеличиться до значения  $K_{кр}$ , таким образом система возвращается в первоначальное состояние. Нелинейная система при  $K_y = K_{кр}$  находится на границе устойчивости, а колебания устойчивы. Этот процесс называется автоколебаниями. Они поддерживаются за счет энергии системы, а их амплитуда и частота определяются её параметрами.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Теория систем автоматического управления \ В.А. Бесекерский, Е. П. Попов –Изд.4-е, перераб. и доп. Санкт-Петербург, профессия, 2007–752с.
2. Душин, С.Е. Теория автоматического управления / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев. – М.: Высш. шк., 2005. – 567с.
3. Клавдиев А.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах. Часть 2. Моделирование линейных непрерывных систем автоматики: Уч. пособ. Санкт-Петербург, СФЗТУ, 2005,-81с.
4. Основы управления полетом космических аппаратов: учеб. пособие для вузов / – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 480 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРИНЦИП РАБОТЫ И ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	3
2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ САУ. ТИПОВЫЕ (ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ) ЗВЕНЬЯ .....	7
2.1. Дифференциальные уравнения элементов и САУ .....	7
2.2. Типовые (эквивалентные) звенья .....	7
3. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ .....	9
4. ТИПОВЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В САУ. ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ .....	11
5. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К САУ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	13
5.1. Основные требования, предъявляемые к САУ .....	13
5.2. Частотные характеристики .....	13
6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ .....	15
7. ТИПОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ .....	20
8. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ .....	24
9. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫШНЕГРАДСКОГО .....	27
9.1. Критерий устойчивости Гурвица .....	27
9.2. Критерий устойчивости Вышнеградского .....	29
10. КРИТЕРИЙ РАУСА .....	29
11. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА .....	31
11.1. Кривая Михайлова .....	31
11.2. Критерий перемежаемости (частный случай критерия Михайлова) .....	34
11.3. Критический коэффициент усиления .....	36
11.4. Передаточная функция и дифференциальные уравнения разомкнутой и замкнутой систем .....	36
12. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА .....	38
13. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	40
14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ. МЕТОД Д-РАЗБИЕНИЯ .....	42
14.1. Определение устойчивости при изменении одного из параметров системы .....	42
14.2. Определение области устойчивости при изменении двух параметров .....	44
15. СТРУКТУРНО-УСТОЙЧИВЫЕ И СТРУКТУРНО- НЕУСТОЙЧИВЫЕ СИСТЕМЫ .....	46
16. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ. КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМ	

УПРАВЛЕНИЯ. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА .....	47
16.1. Характеристики переходного процесса .....	47
16.2. Анализ качества переходного процесса по корням характеристического уравнения .....	48
16.3. Анализ качества переходного процесса по частотным характеристика .....	49
16.4. Интегральные оценки качества переходного процесса .....	49
17. КОРРЕКЦИЯ САУ .....	50
17.1. Коррекция за счёт изменения коэффициента усиления разомкнутой системы .....	50
17.2. Коррекция за счёт последовательного корректирующего контура .....	52
17.3. Коррекция за счёт параллельных корректирующих элементов ...	53
18. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ .....	56
18.1. Общие сведения о нелинейных системах .....	56
18.2. Методы устойчивости по Ляпунову .....	57
18.3. Метод фазовых траекторий .....	58
18.4. Способы подавления автоколебаний в релейных системах .....	61
18.5. Метод припасовывания .....	63
19. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ .....	63
20. АВТОКОЛЕБАНИЯ ЗАМКНУТЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	66
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	69

