

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

А. А. Авраменко

Теория нелинейных колебаний

Электронное учебное пособие

Самара

2010

Автор: Авраменко Александр Алексеевич

Пособие посвящено описанию методов исследования нелинейных колебаний механических систем. В пособии представлены как классические результаты теории нелинейных колебаний, так и асимптотические методы нелинейной механики. Рассмотрены примеры применения методов теории нелинейных колебаний к исследованию задач небесной механики и движения искусственных спутников.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по магистерской программе «Математическое и компьютерное моделирование механики космических систем» по направлению 010800.68 «Механика и математическое моделирование».

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Вынужденные колебания нелинейных систем	5
1.1 Метод Дуффинга	5
1.2 Метод гармонического баланса	7
1.3 Метод Галеркина	10
2. Автоколебательные системы	13
2.1 Общие свойства автоколебательных систем	13
2.2 Метод Ван-дер-Поля	14
2.3 Основные случаи поведения автоколебательных систем	17
2.4 Устойчивость предельных циклов	20
2.5 Метод Пуанкаре	21
2.6 Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным	24
3. Линейные системы с периодическими коэффициентами	29
3.1 Решение уравнения Хилла	30
3.2 Уравнение Мейснера	31
3.3 Уравнение Матье	32
4. Асимптотические методы разделения движений	34
4.1 Стандартная система	34
4.2 Приведение квазилинейной системы к стандартному виду	35
4.3 Метод Ван-дер-Поля для нелинейной консервативной системы	37
4.4 Системы с медленным временем	41
4.5 Асимптотическое интегрирование для случая одной быстрой переменной	45
4.6 Алгоритм асимптотического интегрирования в случае нескольких быстрых переменных	50
4.7 Резонансы в нелинейных колебательных системах	52
4.8 Метод усреднения при исследовании резонансного движения системы	55
4.9 Резонансные случаи	58
5. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний	64
5.1 Виды движений маятниковых систем	64
5.2 Возмущения кеплеровских орбит	70
5.3 Уравнения для оскулирующих элементов	73
5.4 Задача о трансверсальной тяге	76
5.5 Движение спутника на последних оборотах	81
5.6 Движение спутника в конце последнего оборота	85
5.7 Резонансные задачи в динамике искусственных спутников	91
Рекомендуемая литература.	96

Введение

Колебания во всем их разнообразии играют очень большую роль в современной науке и технике. Трудно указать те области, где не встречались бы колебания, причем с расширением и углублением наших познаний о явлениях природы открываются все новые области, к которых имеют место колебательные процессы, а там где эти процессы были известны ранее только в самых общих чертах, они постигаются более глубоко.

Первоначальные сведения о колебаниях в природе и технике даются в курсах физики, высшей математики и далее развиваются в курсах теоретической механики и специальных дисциплин. Настоящее пособие посвящено различным видам колебаний, возникающих в нелинейных системах.

Движение в механических колебательных системах в зависимости от принимаемых допущений может описываться линейными, квазилинейными и нелинейными дифференциальными уравнениями. К каждой из перечисленных категорий уравнений требуется свой подход и свои методы исследования. Наиболее развита теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений, которая позволяет получать точные решения в аналитическом виде. На этой теории построена теория линейных колебаний. Квазилинейные дифференциальные уравнения отличаются от линейных наличием малых нелинейных членов, которые оказывают влияние на основные характеристики колебательных процессов. Хотя это влияние невелико, но на больших промежутках времени оно может принципиально изменить поведение колебательной системы. Колебания в нелинейных системах наиболее сложны для исследования и изучены только в некоторых специальных случаях. Основными методами исследования квазилинейных и нелинейных систем являются разнообразные методы возмущений и усреднения.

1 Вынужденные колебания нелинейных систем

В общем случае уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы можно записать в следующем виде

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) + g(x) = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ - возмущающая функция, явно зависящая от времени, как правило – периодическая; $g(x)$ - восстанавливающая сила, в общем случае нелинейная; $f(x, \dot{x})$ - комбинация диссипативной и ускоряющей сил.

Общих методов интегрирования подобных уравнений не существует, поэтому рассмотрим, как можно получить приближенное периодическое решение, соответствующее периодическому возбуждению. В случае нелинейности дифференциального уравнения принцип суперпозиции неприменим, поэтому отделять вынужденные колебания от собственных нельзя.

1.1 Метод Дуффинга

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, которая находится под действием гармонической возмущающей силы и описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}) + f_0 \cos pt,$$

где μ - некоторая малая величина.

Сначала ограничимся случаем отсутствия силы сопротивления и выберем простейший вид нелинейной восстанавливающей силы

$$\ddot{x} + \omega^2 (x + \mu x^3) = f_0 \cos pt.$$

Число μ может быть как положительным, так и отрицательным. По аналогии с классификацией пружин по виду зависимости восстанавливающей силы от ее деформации можно сказать, что при $\mu > 0$ мы имеем жесткую восстанавливающую силу, при $\mu < 0$ - мягкую, при $\mu = 0$ - линейную.

Для отыскания периодического решения нашего уравнения воспользуемся методом последовательных приближений Дуффинга, заключающимся в том, что выбираем вид первого приближения и следующее ищем путем подстановки первого в дифференциальное уравнение. При этом во втором приближении коэффициент у $\cos pt$ будем считать равным A .

Пусть первое приближение есть следующая функция

$$x_1 = A \cos pt.$$

Тогда для нахождения второго приближения мы составим такое дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 (x_1 + \mu x_1^3) + f_0 \cos pt.$$

Подставим в него x_1 и избавимся от степеней тригонометрических функций. В результате получим следующее уравнение

$$\ddot{x}_2 = -\left[\omega^2 A \left(1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - f_0 \right] \cos pt - \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^3 \cos 3pt.$$

Так как мы ищем периодическое решение, то в решении после интегрирования постоянные интегрирования должны быть равны нулю, что дает такое второе приближение

$$x_2 = \frac{1}{p^2} \left[\omega^2 A \left(1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - f_0 \right] \cos pt + \frac{1}{36 p^2} \mu \omega^2 A^3 \cos 3pt$$

Приравняв коэффициент у $\cos pt$ амплитуде первого приближения A , получим уравнение, связывающее эту амплитуду и частоту вынуждающей силы

$$p^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - \frac{f_0}{A}.$$

Для определения амплитуды как функции частоты p надо решить кубическое уравнение, которое может иметь один или три вещественных корня. Отрицательным значениям корней, как и для линейной системы, будут соответствовать колебания с отставанием на половину периода от возмущающей силы. На рисунке приведены зависимости амплитуды колебаний от частоты при различных μ и f_0 .

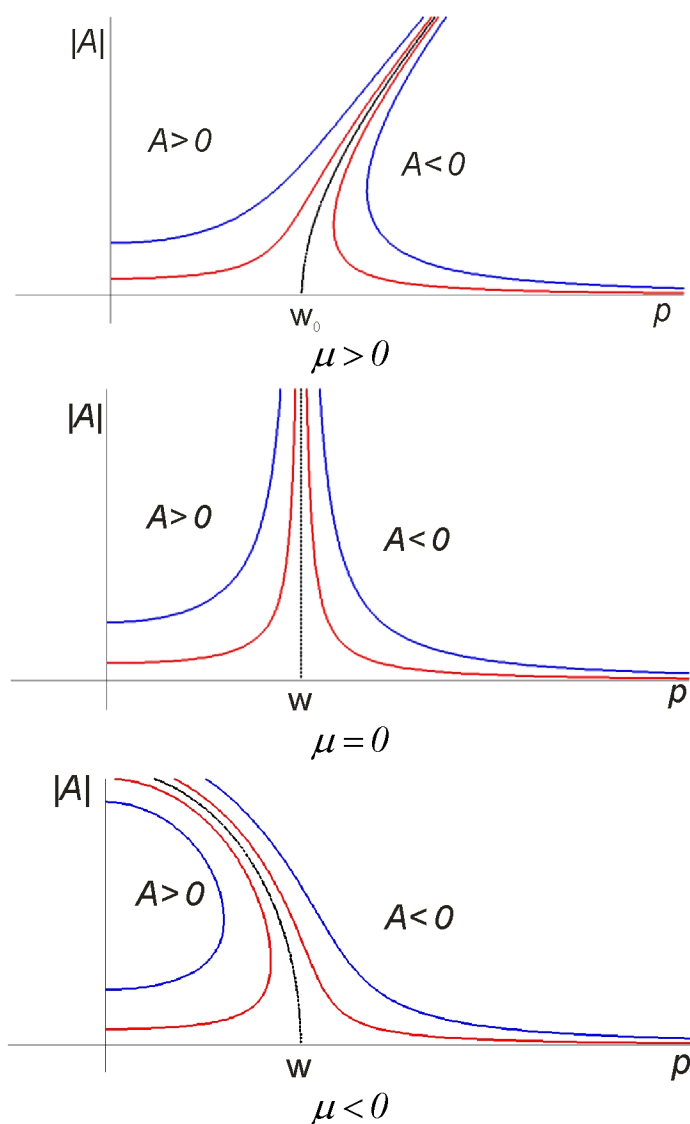


Рисунок 1.1 - Зависимость амплитуды вынужденных колебаний нелинейной системы от частоты

1.2 Метод гармонического баланса

Поиск периодических решений нелинейных уравнений удобно проводить с помощью принципа гармонического баланса, предложенного Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым, и метода, имеющего то же название.

Идея метода заключается в том, что в качестве первого приближения выбирают такое

$$x_1 = A \sin(pt - \varepsilon).$$

Это решение подставляется в решаемое уравнение, нелинейные функции раскладываются в ряд Фурье, после чего сравниваются коэффициенты у одинаковых тригонометрических функций. При этом полагается, что вследствие малости параметра μ члены с высшими гармониками малы по сравнению с первыми гармониками. Такой способ поиска решения дал второе название используемому принципу – принцип эквивалентной линеаризации. Вводя высшие гармоники, можно продолжить решение, уточняя при этом амплитуду и фазу первой гармоники и определяя высшие гармоники.

Рассмотрим применение принципа гармонического баланса на примере системы, в которой нелинейной является только восстанавливающая сила

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + f(x) = f_0 \cos pt.$$

Первое приближение будем искать в виде

$$x_1 = A \cos(pt - \varepsilon).$$

Подставим это приближение в дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} -p^2 A \cos(pt - \varepsilon) - 2hpA \sin(pt - \varepsilon) + f[A \cos(pt - \varepsilon)] &= \\ = f_0 \cos \varepsilon \cos(pt - \varepsilon) - f_0 \sin \varepsilon \sin(pt - \varepsilon) \end{aligned}$$

Разложим функцию $f[A \cos(pt - \varepsilon)]$ в ряд Фурье и в соответствии с принципом гармонического баланса ограничимся первым членом. Приравнявая коэффициенты у косинуса и синуса, получим

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi) \cos \psi d\psi - p^2 \right] A = f_0 \cos \varepsilon, \\ 2hpA = f_0 \sin \varepsilon. \end{cases}$$

При $f_0 = 0$ имеем свободные незатухающие колебания, частота которых зависит от амплитуды и определяется следующим образом

$$\omega^2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi) \cos \psi d\psi.$$

Амплитуда и фаза для первого приближения находятся по формулам, полностью совпадающим с соответствующими формулами для линейной системы, но следует помнить, что сейчас частота колебаний будет зависеть от их амплитуды $\omega = \omega(A)$:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2hp}{\omega^2 - p^2}.$$

Рассмотрим применение метода гармонического баланса к уравнению Дуффинга. Нелинейная восстанавливающая сила в этом уравнении имеет следующий вид

$$f(x) = \omega_0^2 (x + \mu x^3).$$

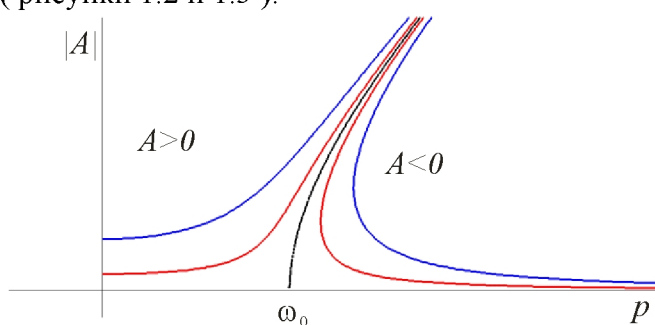
Найдем зависимость частоты собственных колебаний от их амплитуды

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \omega_0^2 (A \cos \psi + \mu A^3 \cos^3 \psi) \cos \psi d\psi = \\ &= \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right). \end{aligned}$$

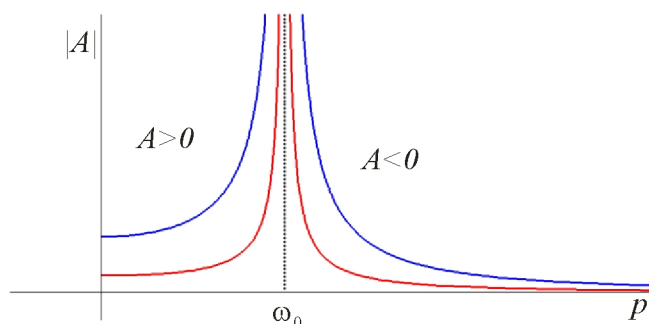
Поставим это соотношение в формулу для определения амплитуды

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left[\omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - p^2 \right]^2 + 4h^2 p^2}},$$

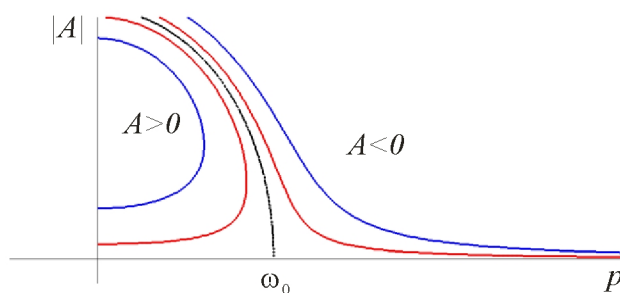
Теперь можно построить зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы (рисунки 1.2 и 1.3).



а) жесткая восстанавливающая сила $\mu > 0$;

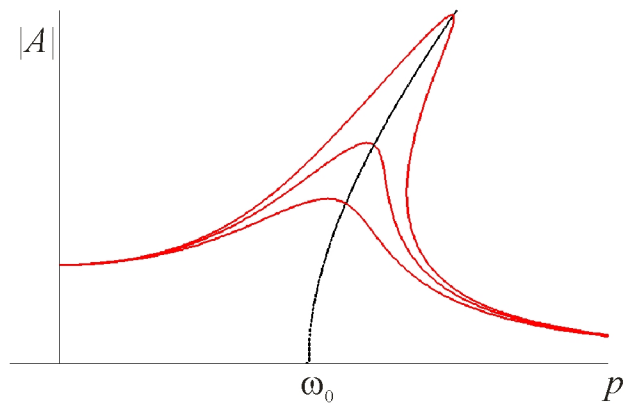


б) линейная система $\mu = 0$;

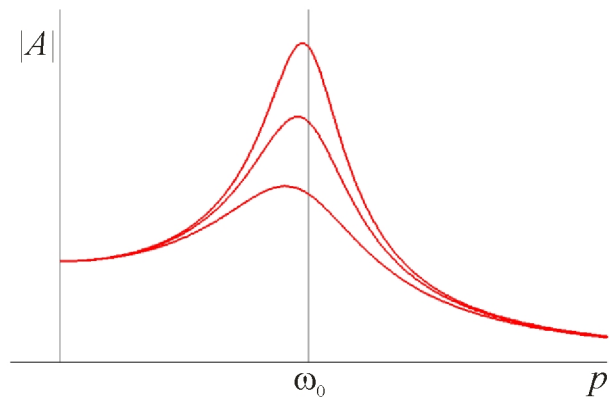


в) мягкая восстанавливающая сила $\mu < 0$.

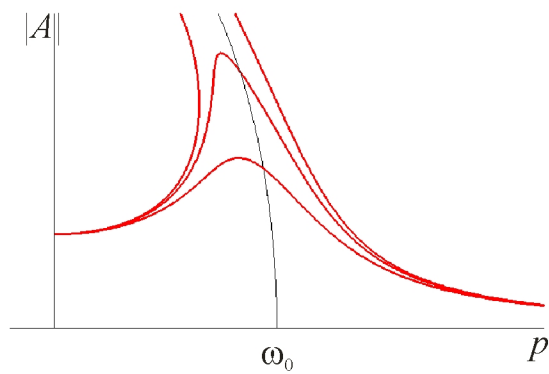
Рисунок 1.2 - Зависимость амплитуды вынужденных колебаний нелинейной системы от частоты.



а) жесткая восстанавливающая сила $\mu > 0$;



б) линейная система $\mu = 0$;



в) мягкая восстанавливающая сила $\mu < 0$.

Рисунок 1.3 - Влияние коэффициента затухания на зависимость амплитуды вынужденных колебаний нелинейной системы от частоты.

Также как и при отсутствии сил сопротивления на приведенных графиках мы видим многозначность амплитуды. Рассмотрим подробнее, что будет происходить с амплитудой при медленном изменении частоты. Допустим, что восстанавливающая сила является жесткой. Пусть частота растет от некоторого начального значения $0 < \omega_1 < \omega_0$ (точка I на рисунке 1.4).

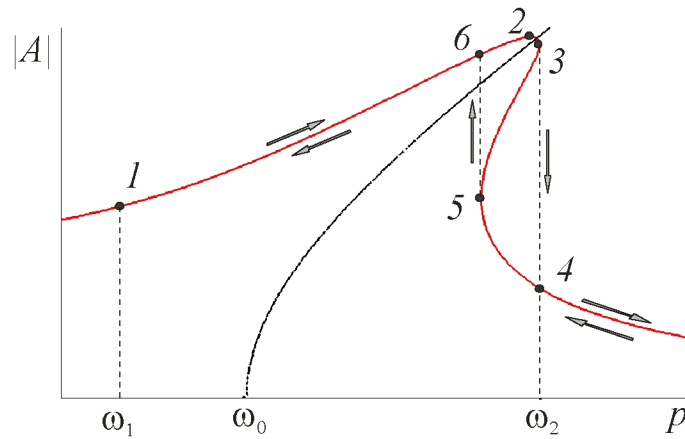


Рисунок 1.4 - Изменение амплитуды нелинейных колебаний при медленном изменении частоты

Амплитуда начнет увеличиваться и будет расти до некоторого максимального значения, соответствующего точке 2. Затем она немного уменьшится до точки 3, где произойдет срыв амплитуды до ее значения в точке 4, после чего опять она снова будет плавно уменьшаться. При уменьшении частоты скачок произойдет в точке 5, где амплитуда увеличится до значения в точке 6, а далее с уменьшением частоты будет плавно уменьшаться. Таким образом, в точках 3 и 5 нарушается непрерывное изменение амплитуды. Это явление присуще только нелинейным системам.

Аналогично обстоит дело и в случае мягкой восстанавливающей силы. Мы видим, что в нелинейных системах возникает неоднозначность амплитуды, величина которой зависит не только от величины частоты вынуждающей силы, но и от направления изменения этой частоты. Путем задания соответствующих начальных условий можно осуществить изменение амплитуды по среднему участку кривой между двумя вертикальными пунктирными линиями, но здесь амплитуды оказываются неустойчивыми, и переходят на верхнюю или нижнюю часть кривой.

1.3 Метод Галеркина

Метод, предложенный в 1915 г. Б.Г. Галеркиным в теории упругости, относится к числу вариационных методов.

Согласно вариационному принципу Гамильтона вариация действия есть нуль

$$\delta \int_{t_0}^{t_0+\tau} (T - \Pi) dt = 0.$$

Полагая, что возмущающая сила является периодической с частотой p , будем искать периодическое решение нелинейного уравнения с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{p},$$

причем это же значение τ примем за интервал интегрирования. Меняя порядок варьирования и интегрирования, получим для системы с одной степенью свободы следующее выражение

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} F(q, t) \delta q dt = 0,$$

где $F(q, t) = 0$ есть уравнение движения рассматриваемой системы.

Вместо точного решения $q = q(t)$, которое часто вообще нельзя найти, зададимся его линейной аппроксимацией

$$\tilde{q} = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t),$$

где $\varphi_j(t)$ - некоторые функции, которые выбираются из соображения простоты и целесообразности, а a_j - неизвестные пока постоянные коэффициенты, принимающие различные значения на прямом и окольном путях. Тогда

$$\delta \tilde{q} = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \delta a_j$$

и вариационное уравнение Галеркина приобретает такой вид

$$\sum_{k=1}^n \delta a_k \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(\tilde{q}, t) \varphi_k(t) dt = 0.$$

Так как вариации произвольны, то, полагая $t_0 = 0$, получаем уравнения

$$\int_0^{\tau} F(\tilde{q}, t) \varphi_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

После интегрирования получаем систему уравнений для определения постоянных a_k .

Пример 1. Рассмотрим применение метода Галеркина для поиска решения уравнения Дуффинга:

$$F(x, t) = \ddot{x} + \omega^2 (x + \varepsilon x^3) - f_0 \sin pt = 0.$$

Так как восстанавливающая сила является нечетной, будем искать решение в виде следующей суммы:

$$x = \sum_{k=0}^n a_{2k+1} \sin(2k+1)pt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае $\varphi_k(t) = \sin(2k+1)pt$.

Составим уравнения для первых значений n .

$$n = 0 \Rightarrow \tilde{x} = a_1 \sin pt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} F(\tilde{x}, t) \varphi_0(t) dt &= -a_1 p^2 \int_0^{\tau} \sin pt \sin pt dt + \\ &+ \omega^2 a_1 \int_0^{\tau} \sin pt \sin pt dt + \omega^2 \varepsilon a_1^3 \int_0^{\tau} \sin^3 pt \sin pt dt - f_0 \int_0^{\tau} \sin^2 pt dt = 0 \end{aligned}$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{\tau} \sin^2 pt dt = \frac{\pi}{p}, \quad \int_0^{\tau} \sin^4 pt dt = \frac{3\pi}{4p}.$$

После подстановки получим

$$\int_0^{\tau} F(\tilde{x}, t) \varphi_0(t) dt = -a_1 p^2 \frac{\pi}{p} + \omega^2 a_1 \frac{\pi}{p} + \omega^2 \varepsilon a_1^3 \frac{3\pi}{4p} - f_0 \frac{\pi}{p} = 0$$

Выразим соотношение между частотой вынуждающей силы p и амплитудой первого приближения:

$$p^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon a_1^2 \right) - \frac{f_0}{a_1}.$$

Получим уравнения для определения амплитуд двух первых гармоник. В этом случае

$$n = 1 \Rightarrow \tilde{x} = a_1 \sin pt + a_3 \sin 3pt.$$

Для поиска двух коэффициентов надо составить два уравнения:

$$\int_0^\tau F(\tilde{x}, t) \varphi_0(t) dt = \int_0^\tau F(\tilde{x}, t) \sin pt dt = 0,$$

$$\int_0^\tau F(\tilde{x}, t) \varphi_1(t) dt = \int_0^\tau F(\tilde{x}, t) \sin 3pt dt = 0.$$

При составлении первого уравнения отличие от предыдущего случая будет заключаться в вычислении интегралов от x^3 :

$$x^3 = a_1^3 \sin^3 pt + 3a_1^2 \sin^2 pt \cdot a_3 \sin 3pt + \\ + 3a_1 \sin pt \cdot a_3^2 \sin^2 3pt + a_3^3 \sin^3 3pt.$$

$$\int_0^\tau \tilde{x}^3 \sin pt dt = a_1^3 \int_0^\tau \sin^4 pt dt + 3a_1^2 a_3 \int_0^\tau \sin^3 pt \sin 3pt dt + \\ + 3a_1 a_3^2 \int_0^\tau \sin^2 pt \sin^2 3pt dt + a_3^3 \int_0^\tau \sin^3 3pt \sin pt dt = \\ = a_1^3 \frac{3\pi}{4p} - 3a_1^2 a_3 \frac{\pi}{2p} + 3a_1 a_3^2 \frac{\pi}{2p}$$

В результате получим

$$\int_0^\tau F(\tilde{q}, t) \varphi_0(t) dt = \\ = -a_1 p^2 \frac{\pi}{p} + a_1 \omega^2 \frac{\pi}{p} + \omega^2 \varepsilon \left(a_1^3 \frac{3\pi}{4p} - 3a_1^2 a_3 \frac{\pi}{2p} + 3a_1 a_3^2 \frac{\pi}{2p} \right) - f_0 \frac{\pi}{p} = 0$$

Составим второе уравнение.

$$k = 1, \quad \int_0^\tau F(\tilde{q}, t) \varphi_1(t) dt = \int_0^\tau F(\tilde{q}, t) \sin 3pt dt = 0$$

$$\int_0^\tau F(\tilde{q}, t) \varphi_1(t) dt = \\ = -a_1 9p^2 \frac{\pi}{3p} + a_1 \omega^2 \frac{\pi}{3p} + \omega^2 \varepsilon \left(-a_1^3 \frac{\pi}{4p} - 3a_1^2 a_3 \frac{\pi}{2p} + a_3^3 \frac{3\pi}{4p} \right) = 0$$

Решая полученные уравнения, получим уточненное значение первой гармоники и амплитуду третьей гармоники.

2 Автоколебательные системы

2.1 Общие свойства автоколебательных систем

Автоколебательные системы относятся к системам неконсервативным, т.к. в составе действующих на такие системы сил имеются силы сопротивления, и движение системы сопровождается расходом энергии. В этом отношении автоколебательные системы ведут себя аналогично диссипативным. Но в то время как в диссипативных системах энергия, расходуемая на преодоление сопротивления, ничем не компенсируется и колебания в таких системах затухают, в автоколебательных системах расход энергии на сопротивление точно компенсируется поступлениями из некоторого входящего в состав системы неколебательного источника – поступлениями, дозировка которых по времени подачи и величине регулируется самой колебательной системой. Вследствие этого в автоколебательной системе могут возникать устойчивые периодические незатухающие колебания – автоколебания. Примером таких колебаний могут служить колебания маятника часов, в которых энергия пружины или падающего груза передается через храповой механизм маятнику порциями, величина и время подачи которых определяется колебаниями самого маятника.

Способ компенсации расхода энергии является наиболее характерным свойством автоколебательной системы, по которому большей частью и распознаются эти системы в отличие от систем диссипативных, совершающих периодические колебания под действием периодических возмущающих сил. Таким же характерным свойством автоколебательной системы является наличие в ее конструктивной схеме следующих четырех частей:

- постоянный (неколебательный) источник энергии;
- колебательная система;
- устройство, регулирующее поступления в колебательную систему энергии из источника энергии;
- обратная связь между колебательной системой и регулирующим устройством, осуществляющая управление дозировкой подачи энергии в колебательную систему.

Большой частью автоколебания возникают в системах с нелинейным сопротивлением, изменения которого в зависимости от положения и скорости колеблющейся системы, происходят по особому характерному именно для автоколебаний закону. Примером такого рода изменений сопротивления может служить система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

где $\mu > 0$. Равновесное состояние системы в положении $x = 0$ неустойчиво (это следует из уравнений первого приближения). Система выходит из этого положения без какого-либо внешнего воздействия и, пока $x^2 < 1$, колеблется с возрастающими амплитудами, т.к. в этом случае

$$\frac{dH^*}{dt} = -\mu(x^2 - 1)\dot{x} \cdot \dot{x} > 0.$$

Следовательно, приток энергии превышает расход. Когда $x^2 > 1$, система ведет себя как диссипативная и ее колебания затухают. В этом случае

$$\frac{dH^*}{dt} = -\mu(x^2 - 1)\dot{x} \cdot \dot{x} < 0.$$

С аналогичным явлением мы встречаемся в некоторых нелинейных системах с сухим (кулоновским) трением. Такой системой будет, ленточный тормоз, скрипичная струна, совершающая автоколебания при движении по ней смычка, фрикционный маятник Фруда. Автоколебательный характер некоторых простейших систем с одной степенью свободы может быть иногда обнаружен из рассмотрения уравнений движения системы. Существуют многочисленные критерии, позволяющие по некоторым свойствам коэффициентов дифференциального уравнения системы доказать возможность существования в этой системе незатухающих периодических колебаний.

На фазовой плоскости периодические движения автоколебательной системы с одной степенью свободы изображаются замкнутыми траекториями, которые называются предельными циклами.

Критерий Лъенара относится к системам, уравнение движения которых имеет вид *которым должны удовлетворять функции $f(x)$ и $g(x)$:*

1. *Функция $f(x)$ должна быть четной, а $g(x)$ нечетной функцией переменной x вях,*
2. $f(0) < 0$.
3. $xg(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ i x.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) dx \rightarrow +\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) dx \rightarrow +\infty$

5. *Функция $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ имеет один нуль в точке $x = a > 0$ и монотонно возрастает для всех $x \geq a$.*

Нечетность функции $g(x)$ и условие $xg(x) > 0$ означают, что сила $-g(x)$ всегда имеет знак, противоположный знаку x , т.е. действует как восстанавливающая сила в линейной упругой системе.

Четность функции $f(x)$ вместе с условием $f(0) < 0$ означает, что коэффициент сопротивления имеет отрицательный знак для малых отклонений. При больших отклонениях сопротивление становится положительным и вызывает затухание колебаний.

Последние два условия выражают прежде всего то, что система не является диссипативной вблизи нулевого положения, чем подтверждают аналогичный вывод из первых двух условий. Кроме того, они указывают на то, что рассматриваемая система

представляют собой систему с самовозбуждением с графиком функции $F(x) = \int_0^x f(x) dx$,

имеющим в точке $x = 0$ ниспадающую часть.

Такой автоколебательной системой будет система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля. В самом деле, для этого уравнения выполнены все условия критерия Лъенара:

1. $f(x) = -\mu(1 - x^2)$ - функция четная, а $g(x) = x$ - функция нечетная.
2. $f(0) = -\mu < 0$.
3. $xg(x) = x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$.

4. $F(x) = -\mu \int_0^x (1 - x^2) dx = -\mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \rightarrow \infty$.

5. Функция $F(x)$ имеет три корня $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. При $x > \sqrt{3}$ эта функция растет вместе с x монотонно, оставаясь все время положительной.

Второй критерий – критерий Бендиксона представляет собой достаточное условие отсутствия предельных циклов в некоторых областях фазовой плоскости. Предположим, что уравнения движения изображающей систему точки на фазовой плоскости приведены к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Если в некоторой односвязной области S на фазовой плоскости выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

сохраняет знак и не обращается тождественно в нуль, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий.

2.2 Метод Ван-дер-Поля

Этот метод является одним из общих приближенных способов построения предельных циклов автоколебательных систем на фазовой плоскости.

Рассмотрим применение этого метода к уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = \mu k^2 f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Проведем подстановку $\tau = kt$ и получим

$$\ddot{x} + x = \mu f_1(x, k\dot{x}) = \mu f(x, \dot{x}),$$

где производные берутся по τ .

Движение изображающей точки на фазовой плоскости будет происходить согласно уравнениям

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu f(x, y) \end{cases}$$

Когда $\mu = 0$, система превращается в линейный осциллятор, фазовыми траекториями которого будут окружности

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

непрерывно заполняющие некоторую область около нулевой точки. По одной из этих окружностей движется изображающая точка с угловой скоростью $\omega = 1$ в направлении часовой стрелки.

Это движение можно описать следующими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos \tau + b \sin \tau, \\ y = -a \sin \tau + b \cos \tau, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = K \cos(\tau + \vartheta) \\ y = -K \sin(\tau + \vartheta) \end{cases}$$

в которых a и b , K и ϑ – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Когда $\mu \neq 0$, но достаточно мало, то решение можно искать в том же виде, но считая a и b (или K и \mathcal{G}) не константами, а некоторыми, пока неизвестными функциями времени. Эта замена переменных x, y на a, b (или K, \mathcal{G}) – на переменные Ван – дер – Поля – геометрически можно интерпретировать как переход с фазовой плоскости Oxy на другую плоскость (на плоскость переменных Ван-дер-Поля), которая вращается по часовой стрелке вокруг начала координат относительно плоскости Oxy с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$. В этой вращающейся плоскости a и b являются прямоугольными координатами, а K и \mathcal{G} – полярными. Эти новые координаты связаны между собой следующими соотношениями

$$a = K \cos \mathcal{G}, \quad b = -K \sin \mathcal{G}.$$

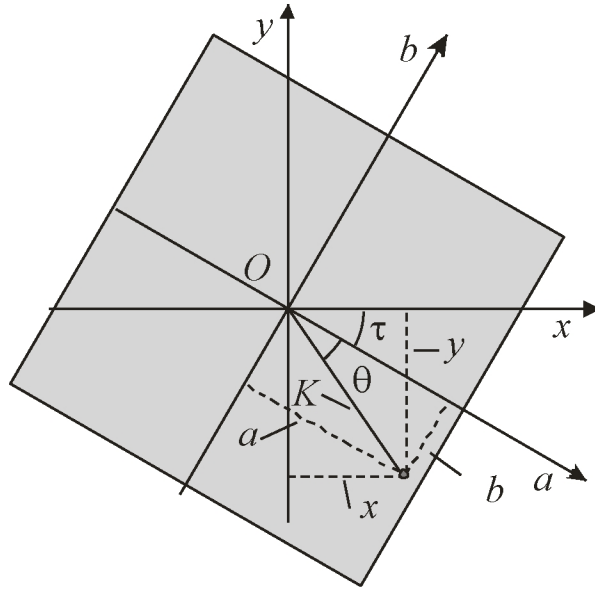


Рисунок 2.1 Фазовая плоскость Ван-дер-Поля

Уравнения интегральных кривых во вращающейся плоскости

$$\dot{x} = y \rightarrow \frac{da}{d\tau} \cos \tau + \frac{db}{d\tau} \sin \tau = 0,$$

$$\dot{y} = -x + \mu f(x, y) \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{da}{d\tau} \sin \tau + \frac{db}{d\tau} \cos \tau = \mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau)$$

$$\frac{da}{d\tau} = -\mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \sin \tau,$$

$$\frac{db}{d\tau} = -\mu f(a \cos \tau + b \sin \tau, -a \sin \tau + b \cos \tau) \cos \tau$$

При малом μ функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ изменяются медленно

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \sin \xi d\xi, \\ \frac{db}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \xi + b \sin \xi, -a \sin \xi + b \cos \xi) \cos \xi d\xi \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам

$$a = K \cos \vartheta, \quad b = -K \sin \vartheta$$

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos(\xi + \vartheta), -K \sin(\xi + \vartheta)) \sin(\xi + \vartheta) d\xi, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\mu}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos(\xi + \vartheta), -K \sin(\xi + \vartheta)) \cos(\xi + \vartheta) d\xi \end{cases}$$

В записанных интегралах ϑ - параметр

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u du, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{\mu}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u du \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} F(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u du, \\ \Phi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u du \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\tau} = \mu F(K), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu \Phi(K) \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями установления. Первое из них не зависит от ϑ .
Запишем ДУ фазовых траекторий

$$\frac{dK}{d\vartheta} = \frac{F(K)}{\Phi(K)}$$

Особые точки могут быть найдены из уравнений

$$F(K) = 0, \quad \Phi(K) = 0$$

2.3 Основные случаи поведения автоколебательных систем

Для малых значений параметра μ ($0 < \mu \ll 1$) уравнение фазовых траекторий автоколебательных систем с одной степенью свободы в плоскости Oab можно записать в следующем виде:

$$\frac{dR}{d\vartheta} = \frac{F(R)}{\Phi(R)}$$

Тогда особые точки фазовой плоскости могут быть найдены из уравнений

$$F(R) = 0, \quad \Phi(R) = 0.$$

Рассмотрим два наиболее типичных случая.

Первый случай. Пусть $\Phi(R) \equiv 0$. Тогда из второго из уравнений установления находим

$$\mathcal{G} = \text{const} = \mathcal{G}_0.$$

Это означает, что особые точки лежат на радиальных прямых, проходящих через начало координат O под углом \mathcal{G}_0 к оси a . Величина этого угла определяется начальными условиями. Положение самих особых точек на этих радиальных лучах определяется корнями первого из уравнений установления:

$$F(R) = 0.$$

Обозначим корни через R_0, R_1, R_2, \dots , причем из формулы для определения $F(R)$ видно, что $R_0 = 0$, следовательно, к особым точкам будет относиться и начало координат. Можно сказать, что особые точки на фазовой плоскости Oab являются точками пересечения радиальных лучей с окружностями радиусов R_i . Чтобы выяснить вопрос о том, как по этим радиальным лучам движется изображающая точка, надо решить уравнение

$$\frac{dR}{d\tau} = \mu F(R).$$

В этом уравнении переменные разделяются, и его решение можно представить следующим образом:

$$\mu(\tau - \tau_0) = \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{dR}{F(R)}.$$

Это уравнение имеет смысл только в промежутке между двумя окружностями, описанными из точки O радиусами, равными двум последовательным корням уравнения

$$F(R) = 0.$$

Фазовые траектории представляют собой, таким образом, отрезки радиальных лучей между двумя окружностями радиусов R_i и R_{i+1} , $i = 0, 1, 2, \dots$. Попадая в соответствии с начальными условиями на один из этих отрезков, например, в точку M , изображающая точка будет двигаться по нему в ту или иную сторону, асимптотически приближаясь или к окружности радиуса R_i или к окружности радиуса R_{i+1} , на которых подынтегральная функция, как и сам интеграл, обращается в бесконечность. Направление движения изображающей точки определяется характером устойчивости равновесных состояний в особых точках на окружностях радиусов $R = R_i$. По отрезкам радиальных лучей изображающая точка движется от неустойчивых равновесных положений к устойчивым, совершая эти свои движения в каждую сторону за бесконечный промежуток времени. Особая точка в начале координат – узел. Этот узел может быть как устойчивым, так и неустойчивым, что определит направления движения изображающей точки по соответствующим отрезкам.

Чтобы определить расположение фазовых траекторий на неподвижной фазовой плоскости Oxy , следует вернуться к формулам преобразования фазовых координат:

$$\begin{cases} x = a \cos \tau + b \sin \tau, \\ y = -a \sin \tau + b \cos \tau, \end{cases}$$

Это преобразование является ортогональным, поэтому

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, окружности радиусов $R = R_i$ при переходе на плоскость Oxy сохранят свои радиусы и свое расположение вокруг точки O . Но в новой плоскости эти окружности уже не будут изображать равновесные положения системы. Изображающая точка, неподвижная на этой окружности в плоскости Oab , в плоскости Oxy будет двигаться по этой окружности по часовой стрелке. Траектория изображающей точки, попавшей с самого начала на такую окружность, будет замкнутой круговой траекторией, изображающей периодическое колебательное движение рассматриваемой нелинейной системы.

В то время как линейный осциллятор, получающийся из заданной нелинейной системы при $\mu = 0$, обладает целым континуумом замкнутых круговых траекторий, изображающих множество возможных в ней периодических движений, нелинейная система только некоторые из этих окружностей будет иметь в качестве фазовых траекторий, изображающих ее периодические движения, а именно окружности радиусов R_i , равных корням уравнения

$$F(R) = 0.$$

Уравнения движения изображающей точки по фазовым траекториям получаются из формул

$$\begin{cases} x = a \cos \tau + b \sin \tau, \\ y = -a \sin \tau + b \cos \tau, \end{cases}'$$

если в них подставить

$$a = R_i \cos \vartheta_0, \quad b = R_i \sin \vartheta_0.$$

Этими уравнениями будут

$$\begin{cases} x = R_i \cos(\tau - \vartheta_0), \\ y = -R_i \sin(\tau - \vartheta_0). \end{cases}$$

Период обращения изображающей точки по окружности R_i будет равен 2π , как и у линейного осциллятора. Нелинейность системы в первом приближении не влияет на частоту или период колебаний.

Рассмотрим, во что обращаются на плоскости Oxy отрезки радиальных лучей, представляющих на плоскости Oab фазовые траектории системы. Уравнения движения изображающей точки в координатах x и y будут иметь ту же форму

$$\begin{cases} x = R \cos(\tau - \vartheta_0), \\ y = -R \sin(\tau - \vartheta_0), \end{cases}$$

но в них уже R не постоянная величина. В промежутке между R_i и R_{i+1} значение R монотонно растет или убывает с течением времени. Изображающая точка, оказавшись в силу начальных условий между окружностями с радиусами R_i и R_{i+1} , будет описывать безграничную (в обе стороны) спираль. Между R_i и R_{i+1} значение R растет, если равновесные положения окружности радиуса R_i неустойчивы, а на окружности R_{i+1} - устойчивы, и наоборот. При этом спирали наворачиваются на окружности, соответствующие окружностям устойчивых равновесных положений, и раскручиваются с окружностей неустойчивых. В каком бы положении изображающая точка ни оказалась в начальный момент, она будет стремиться к некоторому устойчивому периодическому движению, изображаемому окружностью радиуса, равного соответствующему корню

уравнения $F(K) = 0$. Именно в связи с этими свойствами окружности, изображающие периодические движения нелинейной системы, носят название предельных циклов.

Второй случай. Предположим теперь, что функция $\Phi(K)$ не равна тождественно нулю и, в частности, не равна нулю для корней K_i уравнения

$$F(R) = 0.$$

В этом случае из уравнения

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu\Phi(K_i)$$

будем иметь

$$\vartheta = \mu\Phi(K_i)\tau + \vartheta_0.$$

Изображающая точка, попав на окружность радиуса K_i , где $\Phi(K_i) \neq 0$, уже на плоскости Oab будет двигаться по этой окружности со скоростью $\mu\Phi(K_i)$.

Прежние окружности равновесных положений становятся уже на плоскости Oab предельными циклами, по которым изображающая точка движется согласно уравнениям

$$a = K_i \cos[\mu\Phi(K_i)\tau + \vartheta_0],$$

$$b = K_i \sin[\mu\Phi(K_i)\tau + \vartheta_0].$$

Другие фазовые траектории в плоскости Oab являются сложными кривыми, которые около циклов ведут себя как спирали, наворачивающиеся на устойчивые и раскручивающиеся с неустойчивых. В областях между двумя последовательными циклами эти кривые могут менять направления на противоположные в точках, где $\Phi(K)$ обращается в нуль.

При переходе на неподвижную плоскость Oxy предельные циклы радиусов K_i на плоскости Oab остаются предельными циклами и на плоскости Oxy . По этим циклам изображающая точка будет двигаться согласно уравнениям

$$x = a \cos \tau + b \sin \tau = K_i \cos \{ [1 - \mu\Phi(K_i)]\tau - \vartheta_0 \},$$

$$y = -a \sin \tau + b \cos \tau = -K_i \sin \{ [1 - \mu\Phi(K_i)]\tau - \vartheta_0 \}.$$

Остальные траектории, как и в первом случае, растягиваются при переходе на плоскость Oxy в спирали, наворачивающиеся на устойчивые циклы.

Таким образом, нелинейность системы во втором случае, помимо отбора радиусов предельных циклов, влияет также и на частоту колебаний, которая теперь уже не совпадает с частотой порождающего линейного осциллятора, а отличается от нее на величину $\mu\Phi(K_i)$, зависящую от малого параметра μ .

2.4 Устойчивость предельных циклов

Метод Ван-дер-Поля устанавливает закон движения изображающей точки не только по предельному циклу, но и в областях между предельными циклами. Этот закон выражается уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dK}{d\tau} = \mu F(K), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} = \mu \Phi(K), \end{cases}$$

которые определяют поведение изображающей точки в неустановившемся режиме, когда она еще не находится на устойчивом предельном цикле, но приближается к нему. Именно это обстоятельство подчеркнуто в наименовании, присвоенном этим уравнениям, - уравнения установления.

С помощью уравнений установления легко решается вопрос об орбитальной устойчивости предельных циклов. Предположим, что изображающая точка движется по некоторому циклу радиуса K_i . Чтобы установить характер устойчивости этого цикла, дадим радиусу K_i малое возмущение δK . Тем самым переведем изображающую точку в область между циклами, где ее движение будет определяться уравнениями установления. В частности, в этом движении радиус $K_i + \delta K$ будет изменяться согласно уравнению

$$\frac{d(K_i + \delta K)}{d\tau} = \mu F(K_i + \delta K).$$

Раскладывая функцию F в ряд по степеням δK и оставляя члены только первого порядка малости, получим для отклонений δK уравнение

$$\frac{d(\delta K)}{d\tau} = \mu F'(K_i) \delta K$$

с очевидным решением

$$\delta K = a \exp(\mu F'(K_i) \tau).$$

Следовательно, рассматриваемый предельный цикл будет асимптотически устойчив, если $F'(K_i) < 0$, и неустойчив, если $F'(K_i) > 0$.

2.5 Метод Пуанкаре

Для решений уравнений вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$$

с достаточно малыми μ существует целый ряд асимптотических (приближенных) методов, из которых чаще всего применяются два: рассмотренный метод Ван-дер-Поля и метод Пуанкаре. Первый из них, как мы уже видели, дает возможность найти асимптотические решения нелинейного уравнения, как для периодических движений, так и для процессов установления периодических движений или состояний равновесия. Эти решения будут тем точнее, чем меньше параметр μ . Метод Пуанкаре позволяет найти периодические решения уравнения в виде рядов по степеням параметра μ , т.е. принципиально с любой степенью точности, если только эти ряды сходятся. Этот метод,

несмотря на существенные ограничения, накладываемые и на выбор уравнения, и на поставленные задачи, охватывает очень многие важные случаи и дает ответы на ряд существенных для практики вопросов.

Будем предполагать, что наше нелинейное уравнение (или система уравнений) зависит от некоторого параметра μ и при определенном значении $\mu = \mu_0$ (например, при $\mu = 0$) обращается в уравнение или систему уравнений, решение которых нам хорошо известно, например, в линейное уравнение или систему линейных уравнений.

Изучим нелинейное уравнение для значений μ , мало отличающихся от μ_0 . Далее будем рассматривать только периодические решения нелинейного уравнения (это ограничение лежит в существе метода). Для определенности предположим, что наша система при $\mu = 0$ обращается в линейную с постоянными коэффициентами.

Итак, мы будем рассматривать систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + \mu f_1(x, y, \mu), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu f_2(x, y, \mu), \end{cases}$$

где a, b, c, d и μ есть некоторые константы, причем мы считаем, что μ достаточно мало. Кроме того, будем считать, что f_1 и f_2 являются голоморфными функциями x, y и μ , т.е. их можно разложить в сходящиеся степенные ряды по x, y и μ (по крайней мере при малых значениях переменных).

Рассматривая нелинейные члены, как результат малого искажения линейной системы (получающейся при $\mu = 0$), мы поставим своей задачей изучить, для каких исходных периодических решений линейной системы существуют периодические же (хотя бы с другим периодом) решения нелинейной системы, обращающиеся в исходные при $\mu = 0$, и при каких условиях (т.е. при каких f_1 и f_2) эти периодические решения нелинейной системы будут устойчивыми.

Рассмотрим сначала случай $\mu = 0$. Уравнения переходят в

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

Исключим y из уравнений

$$\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0.$$

Необходимая предпосылка дальнейших рассмотрений состоит в том, что полученная линейная система или уравнение должна сама иметь периодические решения.

Это значит, что характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

должно иметь чисто мнимые корни, т.е. должны выполняться условия

$$(a + d) = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad - bc} = \pm \omega_1.$$

Можно сказать, что решение рассматриваемого уравнения имеет вполне определенную частоту ω_1 , определяемую самим уравнением. Фаза же и амплитуда периодического решения не задаются системой и определяются начальными условиями. Произвольность фазы очевидна: время не входит явно в уравнения движения, и поэтому начинать отсчет можно с любого момента t_0 (но разность фаз между x и y и отношение амплитуд x и y вполне определены системой: достаточно подставить значение для x во второе из уравнений системы).

Итак, мы убедились, что при выполнении некоторых условий наша система имеет бесчисленное множество периодических решений, отличающихся одно от другого амплитудой и фазой. Эти решения имеют вид:

$$x = K \cos(\omega_1 t + \varepsilon), \quad y = kK \sin(\omega_1 t + \varepsilon + \varepsilon'),$$

Где k и ε' определяется через коэффициенты уравнений движения, а числа K и ε произвольны и могут быть найдены из начальных условий. В общем виде

$$x = \varphi_0(t, \varepsilon, K), \quad y = \psi_0(t, \varepsilon, K),$$

где φ_0 и ψ_0 - периодические функции времени с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$, K и ε -

произвольные постоянные. Такой общий вид будут иметь решения, если при $\mu \neq 0$ наша система становится нелинейной, но консервативной, соответствующей случаю центра.

Так как отсчет времени можно начинать с произвольного момента, то без всякого ограничения общности можно считать $\varepsilon = 0$, и тогда решение нашей линейной системы может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x = x_0(t, K) = K \cos \omega_1 t, \\ y = y_0(t, K) = kK \cos(\omega_1 t + \varepsilon'). \end{cases}$$

При $t = 0$ получим $x = x_0(0, K)$ и $y = y_0(0, K)$, где K - амплитуда. Рассмотрим теперь решение уравнений при $\mu \neq 0$. Пусть это будут: $x = x(t, \mu, K)$, $y = y(t, \mu, K)$, принимающие значения $x = x_0(0, K) + \beta_1$ и $y = y_0(0, K) + \beta_2$ при $t = 0$, причем β_1 и β_2 - некоторые достаточно малые величины. Пуанкаре предложил искать эти решения в виде степенных рядов по β_1 , β_2 и μ и доказал их сходимость при достаточно малых значениях β_1 , β_2 и μ , равномерную внутри любого заданного конечного интервала времени $0 < t < t_1$. Коэффициенты этих степенных рядов есть функции времени. Эти функции можно вычислить, приравняв коэффициенты при равных степенях β_1 , β_2 и μ , в выражениях, получившихся после подстановки в решаемые уравнения степенных рядов. Для определения этих функций получатся линейные уравнения с определенными начальными значениями. Итак, для x и y получим некоторые выражения: $x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$, $y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K)$. Посмотрим, при каких условиях эти решения будут периодическими. Пусть период решений уравнений нулевого приближения (эти уравнения линейны) будет равен T . Период решений нелинейных уравнений в общем случае будет другим, но так как мы ищем решения, мало отличающиеся от решений линейных уравнений, то и период искомых решений должен быть близок к T . Поэтому можно предположить, что новый период есть $T + \tau$, где τ - небольшая поправка на период. Очевидно, что для того,

чтобы решения были периодическими с периодом $T + \tau$, нужно, чтобы x и y при $t = 0$ и при $t = T + \tau$ имели одинаковые значения. Итак, условия периодичности сводятся к следующим соотношениям:

$$x(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0,$$

$$y(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0,$$

которые, ввиду того, что T есть заданная величина, можно переписать так:

$$\Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \quad \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0.$$

Мы получили таким образом два уравнения с тремя неизвестными τ, β_1, β_2 , но в виду того, что уравнения автономны и фаза произвольна, мы можем одно из β зафиксировать, например, положить β_2 равным нулю. Тогда мы получим одно вполне определенное периодическое решение. После того как это периодическое решение будет найдено, прибавляя к нему произвольную фазу, мы снова восстановим потерянную произвольность.

Так как при $\mu = 0$ мы должны получить периодические решения с периодом T , т.е. без поправки на период, то очевидно, что при $\mu = 0$ и $\tau = 0$ условие периодичности выполняется и функции Φ и Ψ обращаются в нуль. Следовательно, μ есть общий множитель, и уравнения можно переписать так:

$$\mu \Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \mu \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0$$

и условия существования периодических решений исходной системы будут иметь вид

$$\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0, \quad \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu, \beta_1, \beta_2, K\right) = 0.$$

Для того чтобы при $\mu = 0$ получить $\beta_1 = \tau = 0$, нужно, чтобы эти уравнения не содержали свободных членов. Приравнявая нулю эти свободные члены, мы получим вполне определенные значения для амплитуды K первого приближения и поправки на частоту $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0}$. Следовательно, в рассматриваемом случае могут существовать

периодические решения, но не со всякими значениями K , а только с вполне определенными. В соответствии с этим одна из основных задач может быть сформулирована следующим образом: при $\mu = 0$ мы имеем бесчисленное множество периодических решений с произвольными амплитудами, но при $\mu \neq 0$ только вблизи некоторых, вполне определенных амплитуд сохраняются периодические решения. Требуется найти значения этих амплитуд. При этом в решении вопроса о форме автоколебаний мы часто можем ограничиться линейным приближением, а знание нелинейности нам нужно только для того, чтобы определить величину амплитуды этих колебаний. Из условий для амплитуд, в случае, если в уравнение движения входят какие-либо параметры, можно установить условия бифуркации между периодическими решениями, а также периодическими решениями и положениями равновесия. Вторая часть задачи состоит в определении поправки на период τ . Во многих практически интересных случаях оказывается, что она в первом приближении равна нулю, т.е.

$\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow 0$. Тогда, если все-таки оказывается нужным определить поправку на период, необходимо обратиться к следующим приближениям.

2.6 Метод Пуанкаре для систем, близких к линейным

Рассмотрим одно дифференциальное уравнение второго порядка специального вида, особенно интересное с точки зрения теории колебаний и ее практических применений, а именно, уравнение системы, близкой к гармоническому осциллятору

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}),$$

где μ - произвольный положительный параметр, который можно выбрать достаточно малым, а $f(x, \dot{x})$ - функция, разлагаемая в ряд по степеням x и \dot{x} . К таким системам относятся системы, описываемые уравнениями Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}, \quad f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x},$$

и Рэлея

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x}, \quad f(x, \dot{x}) = (1 - \dot{x}^2)\dot{x}.$$

Уравнение можно записать в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu f(x, y) \end{cases}$$

При $\mu = 0$ рассматриваемое уравнение имеет очевидное решение

$$\begin{cases} x = K \cos t = x_0(t), \\ y = -K \sin t = y_0(t). \end{cases}$$

Если мы затем найдем близкое к нему решение при $\mu \neq 0$, то в этом решении можно затем снова положить фазу произвольной. Наша задача заключается в том, чтобы найти, при каких значениях K существуют такие периодические решения уравнения.

Так как рассматриваемое уравнение не зависит явно от времени, то фазовые траектории образуют систему непересекающихся кривых на фазовой плоскости x, y . Назовем решение при $\mu = 0$ порождающим решением. Для $\mu \neq 0$ мы будем искать такие периодические решения, которые при $\mu \rightarrow 0$ стремились бы к порождающим решениям $x = x_0(t, K)$. Мы увидим, что не для всех значений K такие периодические решения существуют. Наша задача будет заключаться в том, чтобы найти K тех порождающих решений $x_0(t, K)$, в области которых возникают периодические решения уравнения при $\mu \neq 0$, а также определить изменение периода по сравнению с порождающим решением. Таким образом, с точки зрения фазовой плоскости x, y , мы можем первую часть нашей задачи сформулировать так: при $\mu = 0$ интегральные кривые представляют собой семейство окружностей, при $\mu \neq 0$ окружности превращаются в спирали, и только некоторые из них остаются замкнутыми, т.е. превращаются в предельные циклы. Требуется определить значение K для тех окружностей, вблизи которых возникают предельные циклы.

Решения уравнения можно представить в виде степенных рядов, составленных по степеням μ , и разностей $\beta_1 = x(0, K) - x_0(0, K)$ и $\beta_2 = y(0, K) - y_0(0, K)$, абсолютно и равномерно сходящихся для достаточно малых значений μ , β_1 и β_2 на любом заданном конечном промежутке времени $[0, t_1]$. Следовательно, можно написать:

$$x = x_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \dots,$$

где A, B, C, D, E, F, \dots - некоторые, пока неизвестные, функции времени. Для определения этих функций поступим следующим образом. Продифференцируем записанные ряды

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{x}_0(t) + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{F}\mu^2 + \dots$$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{y}(t) + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \ddot{D}\beta_1\mu + \ddot{E}\beta_2\mu + \ddot{F}\mu^2 + \dots$$

Так как мы рассматриваем значения x и y , близкие соответственно к значениям $x_0(t, K)$ и $y_0(t, K)$, то функцию $f(x, y)$ мы можем разложить в ряд Тейлора вблизи значений $x_0(t, K)$ и $y_0(t, K)$. Применяя для аргументов x и y выражения в виде рядов, получим ряд Тейлора для функции $f(x, y)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y + \\ &+ \frac{1}{2}f''_{xx}(x_0, y_0)x^2 + f''_{xy}(x_0, y_0)xy + \frac{1}{2}f''_{yy}(x_0, y_0)y^2 + \dots = \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)[A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Подставим полученные разложения для \dot{x} , \dot{y} и $f(x, y)$ в исходное уравнение и приравняем нулю сумму коэффициентов при членах подобных относительно β_1 , β_2 и μ . В результате мы получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с периодической правой частью. Число этих уравнений зависит от того, до какого порядка малости мы будем вести разложение рядов. Если при разложении и подстановке ограничимся только членами не выше второго порядка малости, то получим шесть уравнений, определяющих шесть функций A, B, C, D, E, F

$$\begin{aligned} \ddot{A} + A &= 0, & \ddot{D} + D &= f'_x(x_0, y_0)A + f'_y(x_0, y_0)\dot{A}, \\ \ddot{B} + B &= 0, & \ddot{E} + E &= f'_x(x_0, y_0)B + f'_y(x_0, y_0)\dot{B}, \\ \ddot{C} + C &= f(x_0, y_0), & \ddot{F} + F &= f'_x(x_0, y_0)C + f'_y(x_0, y_0)\dot{C}. \end{aligned}$$

Кроме дифференциальных уравнений мы еще должны знать начальные условия, которым подчиняются функции A, B, C, D, E, F . Сопоставляя выражения $\beta_1 = x(0, K) - x_0(0, K)$ и $\beta_2 = y(0, K) - y_0(0, K)$ с выражениями для x и y , мы можем найти значения A, B, C, D, E, F и $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{D}, \dot{E}, \dot{F}$ при $t = 0$. Мы получим

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, & B(0) &= 0, & C(0) &= 0, & D(0) &= 0, & E(0) &= 0, & F(0) &= 0, \\ \dot{A}(0) &= 0, & \dot{B}(0) &= 1, & \dot{C}(0) &= 0, & \dot{D}(0) &= 0, & \dot{E}(0) &= 0, & \dot{F}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения для A и B при записанных начальных условиях дают решения:

$$A(t) = \cos t, \quad B(t) = \sin t$$

$$\dot{A}(t) = -\sin t, \quad \dot{B}(t) = \cos t.$$

Остальные функции можно найти с помощью интеграла свертки (интеграла Дюамеля)

$$C(t) = \int_0^t [f] \sin(t-u) du, \quad \dot{C}(t) = \int_0^t [f] \cos(t-u) du,$$

$$D(t) = \int_0^t \left\{ \left[\frac{df}{dx} \right] \cos u - \left[\frac{df}{dy} \right] \sin u \right\} \sin(t-u) du \text{ и т.д.}$$

Выражения $f, \frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$, взятые в квадратные скобки, означают, что в эти выражения вместо x и y подставлены соответственно

$$x_0(u) = K \cos u \text{ и } y_0(u) = -K \sin u.$$

Для полученных решений нетрудно найти их значения при $t = 2\pi$. В частности

$$A(2\pi) = 1, \quad B(2\pi) = 0,$$

$$\dot{A}(2\pi) = 0, \quad \dot{B}(2\pi) = 1,$$

$$C(2\pi, K) = - \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u du,$$

$$\dot{C}(2\pi, K) = \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u du$$

и т.д.

Перейдем теперь к отысканию периодических решений среди решений уравнения при $\mu \neq 0$. Пусть период некоторого периодического решения равен $2\pi + \tau$, где τ - малая поправка на период (при $\mu \rightarrow 0$ $\tau \rightarrow 0$). Тогда, приравнявая выражения для функций x и y , аргументы которых отличаются на период, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x(2\pi + \tau, K) - x(0, K) \equiv \Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \\ y(2\pi + \tau, K) - y(0, K) \equiv \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \end{cases}$$

определяющую периодические решения. Одно из β можно положить равным нулю (если это не позволит получить решение, можно приравнять нулю другое β). Пусть $\beta_2 = 0$ (если бы решение было бы задано в виде $x_0(t, K) = K \sin t$, потребовалось бы $\beta_1 = 0$).

Составим сначала уравнения в общем виде и разложим x и y в ряды по степеням τ вблизи значения 2π . Ограничиваясь членами первого и второго порядка малости, получим

$$\begin{cases} x(2\pi + \tau, K) = x(2\pi, K) + \dot{x}(2\pi, K)\tau + \frac{\ddot{x}(2\pi, K)}{2}\tau^2 + \dots, \\ y(2\pi + \tau, K) = y(2\pi, K) + \dot{y}(2\pi, K)\tau + \frac{\ddot{y}(2\pi, K)}{2}\tau^2 + \dots \end{cases}$$

Воспользуемся разложениями x и ее производных в ряды и значениями функций A, B, C, D, E, F и производных от этих функций при $t = 2\pi$:

$$\begin{cases} x(2\pi + \tau, K) = x_0(2\pi, K) + A(2\pi, K)\beta_1 + \dots, \\ y(2\pi + \tau, K) = y_0(2\pi, K) + \dot{A}(2\pi, K)\beta_1 + \dots \end{cases}$$

и после подстановки получим

$$\begin{cases} x(2\pi + \tau, K) - x(0, K) = \\ = -K\frac{\tau^2}{2} + \beta_2\tau + C(2\pi, K)\mu + \dot{C}(2\pi, K)\tau\mu + \dots = 0, \\ y(2\pi + \tau, K) - y(0, K) = \\ = -K\tau + \beta_1\tau + \dot{C}(2\pi, K)\mu + \ddot{C}(2\pi, K)\tau\mu + \dots = 0, \end{cases}$$

Из этих уравнений можно определить как функции параметра μ поправку на период τ и одно из двух β . Подставим разложения этих величин в степенные ряды

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1\mu + \tau_2\mu^2 + \dots, \\ \beta_1 &= \beta_{11}\mu + \beta_{12}\mu^2 + \dots \end{aligned}$$

в систему уравнений и приравняем нулю суммы членов порядка μ . Тогда

$$\begin{aligned} C(2\pi, K) &= 0 \\ -K\tau_1 + \dot{C}(2\pi, K) &= 0 \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений

$$C(2\pi, K) = -\int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u \, du = 0,$$

или $\Phi(K) = 0$ определяет радиусы K_i тех окружностей, вблизи которых при малых μ имеются предельные циклы. Второе уравнение определяет поправку на период первого приближения:

$$\tau_1 = \frac{\dot{C}(2\pi, K_i)}{K_i} = \frac{1}{K_i} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u \, du,$$

или же $\tau_1 = -2\pi\Psi(K_i)$. Для уточнения решения следует приравнять нулю суммы членов порядка μ^2 и т.д.

Рассмотрим применение метода Пуанкаре к уравнению Рэля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x}$$

или в фазовых координатах

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu(1 - y^2)y. \end{cases}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} x = K \sin t = x_0(t, K), \\ y = K \cos t = y_0(t, K). \end{cases}$$

Составим уравнение порождающей амплитуды, для чего сначала найдем выражение для коэффициентов разложения решения в ряд по степеням μ , β_1 и β_2 .

Коэффициенты A и B не зависят от вида нелинейности

$$A = A(t) = \cos t;$$

$$B = B(t) = \sin t.$$

Для определения коэффициента C имеем следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{C} + C = f(x_0, y_0) = (1 - K^2 \sin^2 t)(-K \sin t).$$

Решение можно найти с помощью интеграла Дюамеля (интеграла свертки)

$$\begin{aligned} C(t, K) &= -\int_0^t f(K \cos u, -K \sin u) \sin(t-u) du = \\ &= -\frac{K}{2} \sin t + \frac{9}{32} K^3 \sin t + \frac{K}{2} \left(1 - \frac{3K^2}{4}\right) \cos t \cdot t + \frac{K^3}{32} \sin 3t \end{aligned}$$

$$\text{Но } C(2\pi, K) = 0. \text{ Это возможно, если } \frac{K}{2} \left(1 - \frac{3K^2}{4}\right) = 0.$$

Таким образом, для рассматриваемого уравнения есть два предельных цикла

$$K_0 = 0, \quad K_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Оценим устойчивость найденных предельных циклов.

$$\Phi(K) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \sin u du = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{3K^2}{4}\right).$$

$$\frac{d\Phi}{dK} = \frac{1}{2} - \frac{9K^2}{8}.$$

Тогда для нулевого значения $\frac{d\Phi}{dK} = \frac{1}{2} > 0$ - это неустойчивый предельный цикл.

Для второго значения $\frac{d\Phi}{dK} = \frac{1}{2} - \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3} = -1 < 0$. Следовательно, второй предельный цикл устойчив.

Найдем поправку на период.

$$\tau_1 = \frac{\dot{C}(2\pi, K_1)}{K_1} = \frac{1}{K_1} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u du = -2\pi \Psi(K).$$

Для этого нам понадобится такой интеграл

$$\begin{aligned}
\Psi(K) &= -\frac{I}{2\pi K} \int_0^{2\pi} f(K \cos u, -K \sin u) \cos u du = \\
&= \frac{I}{2\pi K} \int_0^{2\pi} [(1 - K^2 \sin^2 u) K \sin u] \cos u du = \\
&= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin u - K^2 \sin^3 u) d \sin u \equiv 0
\end{aligned}$$

Мы видим, что поправка на период в первом приближении равна нулю

$$\tau_1 = -2\pi\Psi(K_1) = 0.$$

3 Линейные системы с периодическими коэффициентами

Существуют системы, в которых некоторые параметры (коэффициент жесткости, коэффициент инерции или коэффициент сопротивления) изменяются в зависимости от времени. В том случае, когда такое изменение происходит по периодическому закону, имеет место параметрическое возбуждение колебаний, а линейные системы, в которых происходит это явление, называются реолинейными системами. Колебания, происходящие в таких системах, получили название квазигармонических колебаний.

Математически реолинейные системы описываются дифференциальными уравнениями в переменными периодически изменяющимися коэффициентами. Типичным уравнением такого рода является уравнение Хилла, которое в общем виде записывается следующим образом:

$$\ddot{x} + \psi(t)x = 0,$$

где $\psi(t)$ - периодическая функция времени с периодом T .

Не теряя общности, мы можем положить $T = 2\pi$.

3.1 Решение уравнения Хилла

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет два линейно независимых решения. Пусть это $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Т.к. при увеличении t на 2π уравнение Хилла, вследствие периодичности $\psi(t)$, сохраняет свою силу, то функции $x_1(t + 2\pi)$ и $x_2(t + 2\pi)$ также являются решением этого уравнения, но в общем случае это уже другие функции. Они должны выражаться линейно через $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\begin{cases} X_1(t) = x_1(t + 2\pi) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ X_2(t) = x_2(t + 2\pi) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \end{cases}$$

где a_{ij} - некоторые постоянные коэффициенты.

Возможен и обратный переход, поэтому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Существуют нормальные решения этого уравнения, которые обладают следующим свойством

$$X_n(t) = x_n(t + 2\pi) = \rho x_n(t).$$

Так как нормальное решение есть решение рассматриваемой системы, то оно должно являться линейной комбинацией решений первоначальной фундаментальной системы

$$x_n(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t).$$

Аналогичные соотношения можно записать и для второй системы решений

$$X_n(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t).$$

Подставляя эти соотношения в формулу, определяющую свойства нормального решения, и перенося все члены в одну сторону, получим:

$$[\lambda_1(a_{11} - \rho) + \lambda_2 a_{21}]x_1(t) + [\lambda_1 a_{12} + \lambda_2(a_{22} - \rho)]x_2(t) = 0$$

Полученное соотношение должно удовлетворяться при любом t . Т.к. $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимы, то выражение в каждой квадратной скобке должно равняться нулю:

$$(a_{11} - \rho)\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 = 0$$

$$a_{12}\lambda_1 + (a_{22} - \rho)\lambda_2 = 0$$

Эта система имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.$$

Свободный член в характеристическом уравнении для системы

Но свободный член этого уравнения может быть определен следующим образом

$$a_2 = (-1)^n \exp\left(\int_0^T (p_{11} + \dots + p_{mm}) dt\right) = (-1)^2 \exp 0 = 1.$$

Поэтому определяющее уравнение можно записать в следующем виде

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0.$$

Нормальное решение может быть представлено следующим образом

$$x_n(t) = e^{ht} \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ - периодическая функция с периодом 2π . Числа h связаны с ρ следующим образом

$$h_i = \frac{1}{2\pi} \ln \rho_i.$$

Поведение системы зависит от корней ρ_i . При нашей форме записи уравнения вид корней полностью определяется коэффициентом A .

1. $|A| > 1$. Корни вещественные, поэтому один из них больше единицы ($\rho_1 \rho_2 = 1$), поэтому соответствующее решение будет расходящимся.

2. $|A| < 1$. Корни комплексные сопряженные, но их модули равны по определению. Следовательно, оба соответствующие им решения ограничены и система устойчива.

3. $|A| = 1$. В этом случае имеем два одинаковых вещественных корня, по модулю равных единице. Одному из них будут соответствовать периодические решения: $A = 1$ - с периодом 2π , $A = -1$ - с периодом 4π .

Эти периодические решения будут определять границы областей устойчивости.

3.2 Уравнение Мейснера

Это уравнение описывает движение системы с переменными коэффициентами жесткости, причем эта жесткость аппроксимируется ступенчатой характеристикой. Согласно этой характеристике функция $\Psi(t)$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Psi(t) = \delta + \varepsilon, & 0 < t < \pi, \\ \Psi(t) = \delta - \varepsilon, & \pi < t < 2\pi, \end{cases}$$

где δ и ε - некоторые положительные величины. Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x} + (\delta \pm \varepsilon)x = 0.$$

Соотношение величин δ и ε характеризует собой глубину пульсации. Введем обозначения $k_1 = \sqrt{\delta + \varepsilon}$, $k_2 = \sqrt{\delta - \varepsilon}$. Тогда за первую половину периода ($0 < t < \pi$) движение будет описываться уравнением

$$\ddot{x} + k_1^2 x = 0,$$

а за вторую

$$\ddot{x} + k_2^2 x = 0.$$

Соответствующие им решения имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t, \\ x_2 = C_3 \sin k_2 t + C_4 \cos k_2 t. \end{cases}$$

Условия на границе двух полупериодов и в конце всего периода могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} x_1|_{t=\pi} &= x_2|_{t=\pi}, & \dot{x}_1|_{t=\pi} &= \dot{x}_2|_{t=\pi}, \\ x_2|_{t=2\pi} &= \rho x_1|_{t=0}, & \dot{x}_2|_{t=2\pi} &= \rho \dot{x}_1|_{t=0} \end{aligned}$$

Подставляя в эти условия решения на полупериодах и перенося все члены в одну сторону, получим для определения постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 четыре линейных однородных уравнения:

$$\begin{cases} C_1 \sin \pi k_1 + C_2 \cos \pi k_1 - C_3 \sin \pi k_2 - C_4 \cos \pi k_2 = 0; \\ C_1 k_1 \cos \pi k_1 - C_2 k_1 \sin \pi k_1 - C_3 k_2 \cos \pi k_2 + C_4 k_2 \sin \pi k_2 = 0; \\ C_2 \rho - C_3 \sin 2\pi k_2 - C_4 \cos 2\pi k_2 = 0; \\ C_1 k_1 \rho - C_3 k_2 \cos 2\pi k_2 + C_4 k_2 \cos 2\pi k_2 = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения будут иметь нетривиальные решения только в том случае, если определитель системы будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin \pi k_1 & \cos \pi k_1 & -\sin \pi k_2 & -\cos \pi k_2 \\ k_1 \cos \pi k_1 & -k_1 \sin \pi k_1 & -k_2 \cos \pi k_2 & k_2 \sin \pi k_2 \\ 0 & \rho & -\sin 2\pi k_2 & -\cos 2\pi k_2 \\ k_1 \rho & 0 & -k_2 \cos 2\pi k_2 & k_2 \cos 2\pi k_2 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, после преобразований получим определяющее уравнение $k_1 k_2 \rho^2 - (2k_1 k_2 \cos \pi k_1 \cos \pi k_2 - (k_1^2 + k_2^2) \sin \pi k_1 \sin \pi k_2) \rho + k_1 k_2 = 0$ или

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

где

$$A = \cos \pi k_1 \cos \pi k_2 - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin \pi k_1 \sin \pi k_2.$$

Переходя от k_1 и k_2 к δ и ε , можно построить граничные кривые

$$A(\delta, \varepsilon) = \pm 1.$$

Полученная диаграмма иногда называется картой устойчивости.

Точки на оси абсцисс ($\varepsilon = 0$ $k_1 = k_2 = \delta$) получаются из решений следующих уравнений

$$A = 1 \Rightarrow \cos^2 \pi \sqrt{\delta} = 1 \Rightarrow \delta = n^2$$

$$A = -1 \Rightarrow \sin^2 \pi \sqrt{\delta} = 1 \Rightarrow \delta = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

3.3 Уравнение Матье

При безразмерном времени это уравнение имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x = 0.$$

Как и в предыдущем случае, соотношение величин δ и ε характеризует собой глубину пульсации. Исследование этого уравнения сложнее, чем уравнения Мейснера. Построение граничных кривых основано на том, что на этих кривых существуют периодические решения с периодом 2π и 4π . Если представить решение в виде ряда Фурье, подставить его в уравнение Матье, а затем сравнить коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях и выписать условия совместности получающихся алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье, можно получить некоторые определяющие уравнения, связывающие δ и ε для граничных кривых.

В случае малого ε , что на практике встречается чаще, эти кривые могут быть определены более простым способом. Для этого представим x и δ в виде степенных рядов по степеням ε

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots$$

В этих рядах постоянные δ_k и функции $x_k(t)$ должны быть определены так, чтобы функция $x(t)$ была решением уравнения Матье с периодом 2π и 4π , притом

таким, которое бы сводилось при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\cos \frac{nt}{2}$ или $\sin \frac{nt}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Подставляя разложения в уравнение Матье и сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \delta_0 x_0 = 0, \\ \ddot{x}_1 + \delta_0 x_1 = -\delta_1 x_0 - x_0 \cos t, \\ \ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 = -\delta_2 x_0 - \delta_1 x_1 - y_1 \cos t, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

При этом каждая функция $x_k(t)$ должна иметь период 2π или 4π . Тогда первое уравнение даст для δ_0 следующее значение:

$$\delta_0 = \frac{1}{4}n^2,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Из того же уравнения для x_0 получим

$$x_0 = \cos \frac{nt}{2} \text{ или } x_0 = \sin \frac{nt}{2}.$$

При $n = 1, \delta_0 = 0, x_0 = 1$ второе уравнение принимает следующий вид

$$\ddot{x}_1 = -\delta_1 - \cos t.$$

Для того, чтобы функция x_1 была периодической, параметр δ_1 должен быть равен нулю, тогда

$$x_1 = \cos t + C.$$

Третье уравнение с найденными значениями и функциями получит вид:

$$\ddot{x}_2 = -\delta_2 - C \cos t - \frac{1}{2}(1 + \cos 2t).$$

Из условий периодичности должно быть $\delta_2 = -\frac{1}{2}$. Тогда получим приближенное уравнение первой граничной кривой

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$$

Аналогичным образом можно поступить для $n = 1, 2$ и т.д. Избавляясь каждый раз от неперiodических членов и ограничиваясь малыми второго порядка малости, получим приближенные уравнения граничных кривых:

$$1) \quad \delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

$$2) \quad \delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$3) \quad \delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$4) \quad \delta = 1 + \frac{5}{12}\varepsilon^2,$$

$$5) \quad \delta = 1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2,$$

и т.д.

При малых значениях ε границы областей неустойчивости, определяемые по записанным уравнениям, хорошо совпадают с точными границами, вычисленными с помощью разложения в тригонометрические ряды. Вообще уравнения этих границ выражаются посредством так называемых функций Матье.

4 Асимптотические методы разделения движений

4.1 Стандартная система

Рассмотрим методы, использующие осреднение правых частей дифференциальных уравнений по некоторым из переменных. Эти методы часто называют методами осреднения или методами разделения движений. Они играют большую роль при изучении уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = Y_0(x, y) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где x и y - некоторые векторы, а ε - малый параметр. Подобные уравнения часто встречаются в различных разделах физики и механики. Мы с подобными уравнениями знакомимся в теории колебаний. Их особенность состоит в том, что часть переменных (компоненты вектора x) меняется быстро, а другая часть переменных (компоненты вектора y) – медленно. Эти переменные мы будем называть соответственно медленными и быстрыми.

В основе тех методов, которые мы будем рассматривать, лежит метод Ван-дер-Поля, с которым мы знакомимся в теории колебаний. Этот метод является достаточно эффективным для исследования нелинейных систем с одной степенью свободы. При его использовании система заменяется упрощенной, получаемой усреднением правых частей по «быстрому» переменному. Для применения метода Ван-дер-Поля не требуется никаких предположений о природе сил, под действием которых происходят колебания. Как мы помним, он в равной степени мог быть использован для исследования как установившихся движений, так и переходных процессов.

Как ни странно, но этот метод сначала носил чисто интуитивный характер. Только в тридцатых годах двадцатого века был предложен некоторый общий подход для исследования рассматриваемых систем. Этот подход связан с именами Н.М.Крылова и Н.Н.Боголюбова. Его основное содержание сводится к построению такой замены переменных, которая позволяет отделить «быстрые» переменные от «медленных». Эта замена позволяет представить решение в виде асимптотического ряда, первый член которого совпадает с решением, полученным по методу Ван-дер-Поля. В дальнейшем этот метод получил очень широкое распространение в различных областях инженерной практики и физики. Начнем изучение методов усреднения с повторения.

4.2 Приведение квазилинейной системы к стандартному виду

Рассмотрим колебательные движения, которые описываются одним уравнением второго порядка

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon \varphi(z, \dot{z}).$$

В этом уравнении ω - некоторая действительная постоянная, а ε - малый параметр. Будем называть такое уравнение квазилинейным, а колебания, которые оно описывает – квазилинейными колебаниями.

Уравнение

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0,$$

которое описывает гармонические колебания, как и раньше, будем называть порождающим. Функция φ может иметь самый различный вид и, в частности, даже разрывной. Единственное ограничение – она должна быть ограниченной.

Общее решение порождающего уравнения имеет следующий вид

$$z = x \cos y,$$

где $y = \omega(t + t_0)$, а x и t_0 - некоторые произвольные постоянные. При таком представлении колебаний x есть амплитуда, а функция $y(t) = \omega(t + t_0)$ - фаза колебаний.

Далее исходят из вполне естественного предположения, что в случае малых значений ε решение квазилинейного уравнения также будет описывать некоторый колебательный процесс. Но в этом случае амплитуда процесса x в общем случае уже не будет постоянным числом, а будет изменяться, причем тем медленнее, чем меньше число ε . Скорость изменения фазы также может изменяться со временем. Таким образом, если в каждый момент времени исследуемый процесс носит колебательный характер, то его полностью определяют мгновенные значения амплитуды x и фазы y . Поэтому в качестве переменных, описывающих процесс, можно принять амплитуду и фазу. Тогда одно из переменных - амплитуда - будет изменяться медленно.

Так как мы перешли от одного переменного $z(t)$ к двум новым функциям $x(t)$ и $y(t)$, то для однозначного их определения нам понадобится кроме выражения для $z(t)$ еще одно соотношение. Используя идею вариации произвольных постоянных, потребуем, чтобы $x(t)$ и $y(t)$ были связаны еще таким соотношением:

$$\dot{z} = -\omega x \sin y,$$

которое всегда имеет место для постоянной амплитуды.

Теперь составим уравнения, которым должны удовлетворять искомые функции $x(t)$ и $y(t)$. Для этого найдем производную от $z(t)$, учитывая, что $x(t)$ и $y(t)$ есть функции времени

$$\dot{z} = \dot{x} \cos y - x \dot{y} \sin y$$

или после исключения \dot{z}

$$\dot{x} \cos y - x \dot{y} \sin y + \omega x \sin y = 0.$$

Далее найдем вторую производную для $z(t)$ и подставим ее в исходное уравнение, переходя одновременно к новым переменным

$$-\dot{x} \omega \sin y - \omega x \dot{y} \cos y + x \omega^2 \cos y = \varepsilon \varphi(x \cos y, -\omega x \sin y).$$

Если разрешить полученную систему относительно $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$, то получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \varphi(x \cos y, -x \omega \sin y) \sin y \equiv \frac{\varepsilon}{\omega} \varphi_1(x, y), \\ \dot{y} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x} \varphi(x \cos y, -x \omega \sin y) \cos y \equiv \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x} \varphi_2(x, y). \end{cases}$$

Последняя система полностью эквивалентна исходному уравнению. Она является частным случаем стандартной системы. Роль медленного переменного играет амплитуда x , а роль быстрого - фаза y . В полученной системе правые части являются периодическими функциями фазы y , какова бы ни были функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$.

Введя переменные Ван-дер-Поля - амплитуду x и фазу y - мы свели задачу исследования одного уравнения второго порядка к изучению системы двух уравнений первого порядка. При этом мы следовали классической схеме метода вариации произвольных постоянных. Существуют и другие способы перехода к новым переменным.

В.М.Волосов предложил способ, аналогичный выводу уравнений для оскулирующих элементов в небесной механике. Переменные Ван-дер-Поля можно выразить через исходную функцию $z(t)$ и ее первую производную

$$x = \sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}, \quad y = -\operatorname{arctg} \frac{\dot{z}}{\omega z}.$$

Благодаря выбранной вариации произвольных постоянных, эти соотношения справедливы как для порождающего, так и исходного уравнений.

Рассмотрим другой способ получения уравнений в новых переменных. Для этого продифференцируем уравнение для x

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{z\dot{z}}{\sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}} + \frac{\dot{z}\ddot{z}}{\omega^2 \sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}} = \frac{z\dot{z}}{x} + \frac{\dot{z}(-\omega^2 z + \varepsilon\varphi)}{\omega^2 x} = \\ &= \frac{\varepsilon\varphi\dot{z}}{\omega^2 x} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \varphi \sin y, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \dot{x} = \frac{\varepsilon}{\omega} \varphi_1(x, y).$$

Первое из уравнений (для \dot{x}) показывает, что переменная x меняется медленно, т.к. ее производная имеет порядок ε . Следовательно, за одно колебание (за время, в течение которого фаза y изменится на 2π) амплитуда и характер колебаний изменятся мало. Поэтому можно ожидать, что мы не сделаем большой ошибки, если заменим правые части уравнений для \dot{x} и \dot{y} их средними значениями за период, т.е. вместо полной системы станем рассматривать такую

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \bar{\varphi}_1(x), \\ \dot{y} = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x} \bar{\varphi}_2(x), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x \cos y, -x\omega \sin y) \sin y dy, \\ \bar{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x \cos y, -x\omega \sin y) \cos y dy. \end{cases}$$

Мы получили укороченные уравнения или уравнения Ван-дер-Поля. Они значительно проще исходной системы, поскольку первое уравнение может быть проинтегрировано независимо от второго. В полученной системе медленные и быстрые движения разделены. Интегрируя первое из этих уравнений, мы находим закон изменения амплитуды. Определение фазы сводится к квадратурам. Наибольший интерес обычно представляет не сама фаза, а скорость ее изменения в зависимости от времени.

Итак, метод Ван-дер-Поля решения квазилинейного уравнения состоит в переходе от переменной z к переменным Ван-дер-Поля x и y и к замене точных уравнений укороченной системой. Аналогичным образом можно получить укороченные уравнения для нелинейного уравнения.

4.3 Метод Ван-дер-Поля для нелинейной консервативной системы

Рассмотрим следующее уравнение

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon \varphi(z, \dot{z}),$$

где ε - малый параметр. Порождающим уравнением является

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon \varphi(z, \dot{z}).$$

Будем предполагать, что общий интеграл порождающего уравнения известен и может быть записан в явном виде

$$z = Q^*(x, t + t_0),$$

где x и t_0 - некоторые произвольные постоянные. Будем считать, что $f(0) = 0$, и рассматривать только ту часть фазового пространства, в которой все решения порождающего уравнения есть периодические функции времени.

Итак, функция Q^* будет периодической функцией t периода T . Период в общем случае будет зависеть от постоянной x , которую условимся называть амплитудой. Для того чтобы иметь дело с функцией только периода, введем новую переменную

$$y = \omega(x)(t + t_0).$$

В новой переменной множитель $\omega(x)$ выбран таким образом, чтобы функция $Q(x, y) = Q^*(x, t + t_0)$ была периодической периода 2π . Этим условием величина $\omega(x)$ определяется однозначно. По сути дела она является нормирующим множителем. По аналогии с линейными системами условимся называть ее частотой, а y - фазой.

В качестве новых переменных для квазилинейных систем мы использовали амплитуду и фазу. Точно также мы можем поступить и для нелинейных систем.

Первое, что мы получили – выражение исходной переменной через две новые

$$z = Q(x, y).$$

Функция $Q(x, y)$ тождественно удовлетворяет порождающему уравнению, т.е. при любых x и t_0 существует соотношение

$$\ddot{z} + f(z) = \omega^2 Q_{yy} + f(Q) \equiv 0.$$

Введем дополнительное соотношение

$$\dot{z} = \omega Q_y(x, y).$$

Как и раньше, два записанных равенства определяют замену переменных. Составим теперь уравнения, которым удовлетворяют новые переменные. Для этого продифференцируем первое равенство и приравняем его второму

$$Q_x \dot{x} + Q_y \dot{y} - \omega Q_y = 0.$$

Второе уравнение получим из полного уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \frac{d}{dt} \omega(x) Q_y(x, y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (Q_y \omega_x + \omega Q_{xy}) \dot{x} + \omega \dot{y} Q_{yy} + f(Q) = \varepsilon \varphi(Q, \omega Q_y). \end{aligned}$$

В результате мы получили систему двух дифференциальных уравнений относительно функций относительно функций x и y . Для проведения дальнейшего

исследования нам надо разрешить полученную систему линейных уравнений относительно производных \dot{x} и \dot{y} . Воспользуемся методом Крамера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\{\omega^2 Q_{yy} + f(Q)\}Q_y + \varepsilon\varphi(Q, \omega Q_y)Q_y}{\Delta}, \\ \dot{y} = -\frac{(Q_y \omega_x + \omega Q_{xy})\omega Q_y + f(Q)Q_x + \varepsilon\varphi(Q, \omega Q_y)Q_x}{\Delta}. \end{cases}$$

Определитель этой системы находится так

$$\Delta = [Q_x Q_{yy} - Q_y Q_{xy}] \omega - \omega_x Q_y^2 = 0.$$

В силу свойств введенной функции $Q(x, y)$ в первом уравнении выражение в фигурной скобке равно нулю. Во втором уравнении проведем замену

$$f(Q) = -\omega^2 Q_{yy},$$

в результате которой получим

$$\begin{aligned} (Q_y \omega_x + \omega Q_{xy})\omega Q_y + f(Q)Q_x &= \\ &= \omega [\omega_x Q_y^2 + \omega (Q_{xy} Q_y - Q_x Q_{yy})] = -\omega \Delta. \end{aligned}$$

Теперь система может быть записана в таком виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{\Delta} \varphi Q_y, \\ \dot{y} = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{\Delta} \varphi Q_x. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна исходному уравнению второго порядка.

Полученная система уравнений представляет собой систему с вращающейся фазой. Ее правые части являются периодическими функциями y периода 2π , т.к. именно такими являются функция $Q(x, y)$ и ее частные производные. Следовательно, для исследования этой системы мы можем применить рассуждения Ван-дер-Поля и заменить систему укороченными уравнениями, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} \varphi Q_y dy, \\ \dot{y} = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} \varphi Q_x dy. \end{cases}$$

Так можно поступить потому, что функция Δ не зависит от переменной y . При тех допущениях, которые были сделаны относительно структуры уравнения и новых переменных полная энергия системы зависит только от переменной x .

Для доказательства выпишем выражение полной энергии порождающей системы

$$E(\dot{z}, z) = \frac{\dot{z}^2}{2} + \int_0^z f(u) du.$$

Воспользуемся общим интегралом порождающего уравнения – функцией $Q(x, y)$ и получим

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 Q_y^2 + \int_0^Q f(u) du.$$

Но функция $Q(x, y)$ по определению удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z} + f(z) = \omega^2 Q_{yy} + f(Q) \equiv 0.$$

Найдем производную от полной энергии по быстрой фазе

$$E_y = \omega^2 Q_y Q_{yy} + \frac{d}{dQ} \left[\int_0^Q f(u) du \right] Q_y = Q_y (\omega^2 Q_{yy} + f(Q)) = 0.$$

Следовательно, функция E не зависит от фазы, а зависит только от амплитуды x . Найдем производную от этой функции по x :

$$\begin{aligned} E_x &= \omega \omega_x Q_y^2 + \omega^2 Q_y Q_{yx} + f(Q) Q_x = \\ &= -\omega \left[(Q_x Q_{yy} - Q_y Q_{yx}) \omega - \omega_x Q_y^2 \right] = -\omega(x) \Delta. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что величина Δ является функцией только амплитуды x .

Рассмотрим задачу о линейном демпфировании нелинейных колебаний. Пусть движение описывается уравнением

$$\ddot{z} + f(z) = -\varepsilon c \dot{z},$$

где c - некоторая положительная постоянная. Это уравнение является частным случаем только что рассмотренного уравнения, когда функция $\varphi(z, \dot{z}) = -c\dot{z} = -\omega Q_y$. Составим для этой задачи первое из укороченных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon c \omega}{2\pi \Delta} \int_0^{2\pi} Q_y^2 dy$$

В явном виде получить записанный интеграл в общем случае нельзя, но можно сделать некоторые общие заключения. Первое - этот интеграл всегда положительное число

$$\int_0^{2\pi} Q_y^2 dy = \Phi(x) > 0.$$

По определению $\omega(x) > 0$. Второе - x - это некоторая новая переменная, которая при $\varepsilon = 0$ превращается в постоянную интегрирования порождающего уравнения. Мы назвали ее условно амплитудой по аналогии с теорией линейных колебаний. В этом есть определенный смысл. Так, мы только что установили, что полная энергия порождающего уравнения зависит только от этой постоянной. Следовательно, точно также, как амплитуда в линейных колебаниях, именно эта постоянная или ее любая однозначная функция определяют энергию системы. Значит, она играет ту же роль, что и амплитуда.

Предположим, что в начальный момент времени энергия системы была равна некоторому значению E_0 , и пусть в течение некоторого времени она находилась под действием диссипативной силы $\varphi = -\varepsilon c \dot{z}$. Вычислим производную от нее по времени в силу укороченных уравнений, принимая во внимание выражение $E_x = -\omega(x) \Delta$:

$$\frac{dE}{dt} = E_x \dot{x} = -\omega(x) \Delta \dot{x} = -\frac{\varepsilon c \omega^2}{2\pi} \Phi(x) < 0.$$

Следовательно, под действием силы $\varphi = -\varepsilon c \dot{z}$ энергия системы непрерывно убывает.

Эта формула позволяет для каждого фиксированного значения «амплитуды» x определить скорость убывания полной энергии. Что касается величины «амплитуды» x , то она в этом случае может и не убывать. Характер изменения этой величины определяется только знаком $\Delta(x)$. Следовательно, в нелинейных системах физический смысл амплитуды может не иметь никакого отношения к максимальному отклонению от положения равновесия, которое всегда уменьшается под действием диссипативной силы.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} \varphi Q_y dy, \\ \dot{y} = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} \varphi Q_x dy. \end{cases}$$

4.4 Системы с медленным временем

Для систем с переменными параметрами Ю.А.Митропольским на основе метода усреднения, разработана теория колебаний систем, параметры которых медленно изменяются.

Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\ddot{z} + f(z, \tau) = -\varepsilon \varphi(z, \dot{z}, \tau),$$

где τ - медленное время: $\tau = \varepsilon t + const$. Это означает, что такое уравнение описывает колебательные процессы в системе с медленно меняющимися параметрами. При $\varepsilon = 0$ уравнение превращается в порождающее

$$\ddot{z} + f(z, \tau) = 0,$$

в котором τ уже некоторая постоянная.

Общий интеграл порождающего уравнения будем считать известным, но теперь он будет зависеть не только от x и y , но и от параметра τ :

$$z = Q(x, y, \tau),$$

где, как и раньше, $y = \omega(x, \tau)(t + t_0)$. Мы видим, что в этом случае частота ω будет функцией не только амплитуды x , но и медленного времени τ : $\omega(x, \tau)$.

Как и в предыдущем случае, функция Q будет удовлетворять уравнению

$$\omega^2 Q_{yy} + f(Q) = 0$$

тождественно по x и τ .

Так же как и раньше, решение полного уравнения будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned} z &= Q(x, y, \tau), \\ \dot{z} &= \omega(x, \tau) Q_y(x, y, \tau). \end{aligned}$$

С помощью этих равенств вместо переменной z вводятся новые переменные x и y . Теперь продифференцируем первое из равенств и подставим во второе, а второе после дифференцирования подставим в полное уравнение. В результате получим:

$$Q_x \dot{x} + Q_y \dot{y} - \omega Q_y + \varepsilon Q_\tau = 0,$$

$$(\omega_x Q_y + \omega Q_{xy}) \dot{x} + \omega \dot{y} Q_{yy} + f(Q, \tau) + \varepsilon (\omega_\tau Q_y + \omega Q_{y\tau}) = \varepsilon \varphi.$$

Разрешая эти уравнения относительно \dot{x} и \dot{y} , получим

$$\begin{aligned} \dot{x}\Delta + \varepsilon \left[\omega(Q_\tau Q_{yy} - Q_y Q_{y\tau}) - \omega_\tau Q_y^2 \right] &= -\varepsilon \varphi Q_y, \\ -\dot{y}\Delta + \omega\Delta + \varepsilon \left[\omega(Q_\tau Q_{xy} - Q_x Q_{y\tau}) + \omega_y Q_y Q_\tau - \omega_\tau Q_x Q_{xy} \right] &= -\varepsilon \varphi Q_x. \end{aligned}$$

Если кроме

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_x & Q_y \\ \omega_x Q_y + \omega Q_{xy} & \omega Q_{yy} \end{vmatrix}$$

ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \omega(Q_\tau Q_{yy} - Q_y Q_{y\tau}) - \omega_\tau Q_y^2, \\ \xi_2 &= \omega(Q_\tau Q_{xy} - Q_x Q_{y\tau}) + \omega_y Q_y Q_\tau - \omega_\tau Q_x Q_{xy}, \end{aligned}$$

то окончательно получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{\Delta} [\varphi Q_y + \xi_1(x, y, \tau)], \\ \dot{y} = \omega(x, \tau) + \frac{\varepsilon}{\Delta} [\varphi Q_x + \xi_2(x, y, \tau)]. \end{cases}$$

За время, в течение которого фаза изменяется на 2π , и амплитуда x , и величина τ изменяется мало, что позволяет провести усреднение правых частей по периоду изменения быстрой переменной. В результате мы можем составить систему укороченных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} (\varphi Q_y + \xi_1) dy, \\ \dot{y} = \omega(x, \tau) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta} \int_0^{2\pi} (\varphi Q_x + \xi_2) dy. \end{cases}$$

В системах с медленно меняющимся временем можно найти величины, которые называются адиабатическими инвариантами.

Предположим, что некоторая величина $I(x, y)$ является интегралом порождающего уравнения. Это означает, производная $\frac{dI(x, y)}{dt}$, вычисленная в силу порождающего уравнения, равна нулю. Пусть, система не подвержена действию внешних сил, т.е. $\varphi = 0$, и вычислим в этом случае производную $\frac{dI(x, y)}{dt}$ в силу укороченных уравнений Ван-дер-Поля. В общем случае эта величина будет зависеть от переменных x и τ и, следовательно, будет отлична от нуля при $\varepsilon \neq 0$.

Функция $I(x, y)$ называется адиабатическим инвариантом системы относительно укороченных уравнений Ван-дер-Поля, если ее полная производная по времени, вычисленная в силу этих уравнений, равна нулю.

При этом надо учесть, что уравнения Ван-дер-Поля являются приближенными и определяют решение с точностью до величин $O(\varepsilon)$. Следовательно, величину $I(x, y, \tau)$ можно назвать адиабатическим инвариантом, если

$$\frac{dI(x, y, \tau)}{dt} = O(\varepsilon^k), \quad k > 1.$$

Иными словами, адиабатический вариант – это некоторая функция амплитуды и фазы, которая изменяется медленнее, чем параметры системы.

Запишем для системы с медленным временем следующую функцию

$$I(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(x, \tau) Q_y^2(x, y, \tau) dy.$$

Она является интегралом порождающего уравнения, т.к. при $\tau = \text{const}$ амплитуда остается постоянной, а вместе с ней и функция $I(x, \tau)$. В механике этот интеграл называется интегралом действия.

Покажем, что интеграл действия является адиабатическим интегралом. Для этого найдем полную производную по времени

$$\frac{dI}{dt} = I_x \dot{x} + I_\tau \varepsilon.$$

Найдем частные производные и подставим их в это выражение

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_x Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{xy}) dy + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_\tau Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{\tau y}) dy.$$

Воспользуемся следующим соотношением

$$\int_0^{2\pi} Q_y Q_{xy} dy = Q_y Q_x \Big|_{y=0}^{y=2\pi} - \int_0^{2\pi} Q_{yy} Q_x dy.$$

Но Q - функция периодическая по y , поэтому первое слагаемое равно нулю и

$$\int_0^{2\pi} Q_y Q_{xy} dy = - \int_0^{2\pi} Q_{yy} Q_x dy.$$

Теперь первую часть производной можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_x Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{xy}) dy = \\ &= \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\omega_x Q_y^2 - \omega (Q_{yy} Q_x - Q_y Q_{xy})] dy. \end{aligned}$$

Но выражение в скобках есть не что иное, как все тот же определитель со знаком минус. Учтем, что этот определитель не зависит от быстрой фазы, и получим

$$I_1 = - \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta dy = -\dot{x} \Delta.$$

Аналогично преобразуем второе слагаемое

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_\tau Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{\tau y}) dy = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_\tau Q_y^2 - \omega Q_{yy} Q_\tau + \omega Q_y Q_{\tau y}) dy = - \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_1(x, y, \tau) dy. \end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся тем, что

$$\dot{x} = - \frac{\varepsilon}{2\pi \Delta} \int_0^{2\pi} \varphi Q_y dy - \frac{\varepsilon}{2\pi \Delta} \int_0^{2\pi} \xi_1 dy.$$

Тогда получим

$$\frac{dI}{dt} = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x, y, \tau) Q_y dy.$$

Отсюда сразу следует, что если $\varphi \equiv 0$, то величина интеграла действия сохраняет свое значение. Следовательно, интеграл действия является адиабатическим интегралом порождающего уравнения.

Использование адиабатических инвариантов позволяет в некоторых случаях получать ответы на интересующие нас вопросы, минуя интегрирование системы.

Рассмотрим малые колебания маятника с медленно меняющейся длиной $l = l_0 + l(\tau) = l_0 + l(\varepsilon t)$. Его движение будет описываться следующим уравнением.

В этом случае

$$\varphi = x \cos y, \quad \dot{\varphi} = -\omega x \sin y.$$

Таким образом,

$$Q(x, y) = x \cos y, \quad Q_y = -x \sin y.$$

Составим выражение для адиабатического инварианта

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega Q_y^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\tau) x^2 \sin^2 y dy = \frac{\omega(\tau) x^2}{2} = const.$$

В этой задаче для адиабатического инварианта существует простая геометрическая интерпретация. Если $\omega(\tau)$ меняется с течением времени медленно, то на каждом отдельном периоде колебаний ω и x можно считать постоянными. Фазовой траекторией в этом случае будет эллипс с полуосями x и ωx . Площадь этого эллипса равна $S = \pi ab = \pi x \cdot \omega x = 2\pi I$. Следовательно, при медленном изменении длины маятника площадь, охватываемая фазовой траекторией за один период колебаний, остается неизменной.

Если ставится вопрос об исследовании амплитуды от времени или длины маятника, то можно сразу найти

$$x = \frac{const}{\sqrt{\omega(\tau)}} = C \cdot \sqrt{l(\tau)}.$$

Из этой формулы легко найти зависимость периода колебаний от длины

$$T = C \cdot x^2.$$

Этот результат может быть получен разными методами, но теория адиабатических инвариантов позволяет получить его наиболее простым способом.

Идея Ван-дер-Поля об осреднении в задачах нелинейных колебаний позволяет исследовать широкий круг вопросов при помощи укороченных уравнений. Эта теория дает возможность получить только некоторые приближенные решения, причем она не содержит никаких методов, позволяющих оценить степень точности полученных решений. Точно также в рамках теории Ван-дер-Поля мы не можем уточнять полученные решения. Еще одним существенным недостатком изложенного подхода является то, что он приспособлен для исследования только одномерных задач и не допускает непосредственного обобщения на многомерные задачи в системах с несколькими степенями свободы.

Эти недостатки были устранены в более общей теории, содержащей новый взгляд на проблему усреднения.

4.5 Асимптотическое интегрирование для случая одной быстрой переменной

Рассмотрим частный случай системы с вращающейся фазой

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = Y_0(x, y) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

а именно

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где x - по-прежнему вектор размерности n , а y - скаляр. Функции X и Y будем полагать периодическими по переменной y с периодом T . Не ограничивая общности, можно принять $T = 2\pi$.

Рассмотрим, как можно найти такую замену переменных, которая позволила бы отделить быстрые движения от медленных. Для этого вместо x и y введем новые переменные

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon u_1(x_0, y_0) + \varepsilon^2 u_2(x_0, y_0) + \dots, \\ y = y_0 + \varepsilon v_1(x_0, y_0) + \varepsilon^2 v_2(x_0, y_0) + \dots \end{cases}$$

Функции $u_i(x_0, y_0)$ и $v_i(x_0, y_0)$ пока еще неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи.

Введем следующие ограничения на вновь вводимые функции. Потребуем, чтобы в результате замены переменных, определяемой нашими формулами, векторная функция $x_0(t)$ удовлетворяла системе уравнений, не содержащей быстрой переменной $y_0(t)$. Кроме того, потребуем, чтобы и скалярная функция $y_0(t)$ удовлетворяла уравнению, правая часть которого не содержит $y_0(t)$, т.е. чтобы новые переменные удовлетворяли системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \varepsilon A(x_0, \varepsilon) = \varepsilon A_1(x_0) + \varepsilon^2 A_2(x_0) + \dots, \\ \dot{y}_0 = \omega^*(x_0, \varepsilon) = \omega(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \varepsilon^2 B_2(x_0) + \dots \end{cases}$$

Функции A и ω , входящие в эти уравнения, а следовательно, и коэффициенты разложений их по степеням ε также заранее неизвестны.

Если замена переменных будет найдена, мы получим систему уравнений, которая значительно проще исходной. В такой системе медленное движение, скорость которого имеет порядок $O(\varepsilon)$, полностью отделено от быстрого, скорость которого имеет первый порядок. Поэтому система уравнений, определяющая вектор x_0 , интегрируется независимо от уравнения, определяющего скаляр y_0 . Поскольку производная \dot{x}_0 мала, а правые части этого векторного уравнения не зависят от y_0 , то оно может интегрироваться с большим шагом по времени. После определения $x_0(t)$ переменная $y_0(t)$ находится квадратурой.

Для того, чтобы сделать задачу определенной, наложим на функции u_i и v_i дополнительное ограничение: будем считать их при $y_0 \rightarrow \infty$ ограниченными функциями

y_0 . Такое ограничение на класс допустимых функций естественно, т.к. оно позволяет для любых y_0 считать величины $\varepsilon^k u_k$ и $\varepsilon^k v_k$ малыми того же порядка $O(\varepsilon^k)$.

Будем считать X, Y и ω дифференцируемыми функциями своих переменных столько раз, сколько членов рядов мы собираемся вычислить.

Для определения неизвестных функций, подставим ряды в исходную систему уравнений. При этом учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial u_i}{\partial y_0} \dot{y}_0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_0} (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) + \\ &+ \frac{\partial u_i}{\partial y} (\omega(x_0) + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} &\underbrace{\varepsilon A_1(x_0) + \varepsilon^2 A_2(x_0) + \dots}_{\dot{x}_0} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x_0} (\varepsilon A_1(x_0) + \dots) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \left(\underbrace{\omega(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \varepsilon^2 B_2(x_0) + \dots}_{\dot{y}_0} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_0} (\varepsilon A_1(x_0) + \dots) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \left(\underbrace{\omega(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \dots}_{\dot{y}_0} \right) = \\ &= \varepsilon X(x_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, y_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\omega(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \varepsilon^2 B_2(x_0) + \dots + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial x_0} (\varepsilon A_1(x_0) + \dots) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial y_0} (\omega(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \varepsilon^2 B_2(x_0) + \dots) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x_0} (\varepsilon A_1(x_0) + \dots) + \varepsilon \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \left(\underbrace{\omega(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \dots}_{\dot{y}_0} \right) = \\ &= \omega(x_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \varepsilon Y(x_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, y_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \varepsilon) \end{aligned}$$

Разложим правые части уравнений по степеням параметра ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях этого параметра. В результате получим систему дифференциальных уравнений для определения искомых функций:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_0} \omega(x_0) = X(x_0, y_0, 0) - A_1(x_0) \equiv g_1(x_0, y_0) - A_1(x_0),$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_0} \omega(x_0) = Y(x_0, y_0, 0) + D_1(u_1) - B_1(x_0) \equiv h_1(x_0, y_0) - B_1(x_0),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial y_0} \omega(x_0) &= \frac{\partial X}{\partial x_0} u_1 + \frac{\partial X}{\partial y_0} v_1 + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial u_1}{\partial x_0} A_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y_0} B_1 - A_2(x_0) = \\ &= g_2(x_0, y_0) - A_2(x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial y_0} \omega(x_0) &= \frac{\partial Y}{\partial x_0} u_1 + \frac{\partial Y}{\partial y_0} v_1 + \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial v_1}{\partial y_0} B_1 + D_1(u_2) + D_2(u_1) - \\ &- B_2(x_0) = \\ &= g_2(x_0, y_0) - A_2(x_0), \end{aligned}$$

...

Все производные в этих уравнениях вычислены при $\varepsilon = 0$.

Общий вид системы уравнений для определения u_k, v_k, A_k и B_k будет таким

$$\begin{cases} \omega(x_0) \frac{\partial u_k}{\partial y_0} = g_k(x_0, y_0) - A_k(x_0), \\ \omega(x_0) \frac{\partial v_k}{\partial y_0} = h_k(x_0, y_0) - B_k(x_0). \end{cases}$$

Так как функции g_k и h_k определяются предыдущими приближениями, то они должны считаться заданными функциями своих переменных.

$$D_1(u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_0^{(j)}} u^{(j)}, \quad D_2(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_0^{(i)} \partial x_0^{(j)}} u^{(i)} u^{(j)}$$

Рассмотрим первое из уравнений. Это уравнение в частных производных первого порядка, разрешенное относительно производной неизвестной функции $\frac{\partial u_k}{\partial y_0}$, причем это

уравнение содержит еще одну неизвестную функцию $A_1(x_0)$. Интегрируя это уравнение, получим

$$u_1(x_0, y_0) = \frac{1}{\omega(x_0)} \int_{y_{0\text{нач}}}^{y_0} \{g_1(x_0, y_0) - A_1(x_0)\} dy_0 + \varphi(x_0),$$

где $\varphi(x_0)$ - произвольная функция x_0 .

Определить вид одной из неизвестных функций $A_1(x_0)$ можно из условий, наложенных на функции $u_k(x_0, y_0)$. Мы условились искать эти функции, удовлетворяющими условию ограниченности

$$\lim_{y_0 \rightarrow \infty} |u_k(x_0, y_0)| < M.$$

Под знаком интеграла в выражении для $u_1(x_0, y_0)$ стоит некоторая периодическая функция y_0 , т.к. $g_1(x_0, y_0)$ - периодическая функция y_0 , а функция $A_1(x_0)$ не зависит от y_0 . Период этой функции по y_0 равен 2π . Предположим теперь, что среднее значение подынтегральной функции за один период не равно нулю

$$\overline{g_1 - A_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_{0нач}}^{y_0} \{g_1(x_0, y_0) - A_1(x_0)\} dy_0 = c(x_0) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k(x_0, y_0 + 2\pi k)| = \frac{1}{\omega(x_0)} \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi c(x_0) k = \pm \infty.$$

Таким образом, для ограниченности $u_1(x_0, y_0)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого x_0 выполнялось соотношение

$$c(x_0) = 0.$$

Этого можно добиться, если учесть, что интеграл в равенстве для определения $u_1(x_0, y_0)$ содержит неизвестную функцию $A_1(x_0)$. Теперь она может быть однозначно определена из условия

$$\begin{aligned} A_1(x_0) &= \overline{g_1(x_0, y_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(x_0, y_0) dy_0 = \\ &= \overline{X(x_0, y_0, 0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(x_0, y_0, 0) dy_0. \end{aligned}$$

Теперь можно, интегрируя первое из уравнений, получить выражение для $u_1(x_0, y_0)$ в виде квадратур от уже известных функций

$$u_1(x_0, y_0) = \frac{1}{\omega(x_0)} \left[\int_{y_{0нач}}^{y_0} X(x_0, \xi) d\xi - \overline{X} y_0 \right] + \varphi_1(x_0).$$

В последнее выражение входит функция $\varphi_1(x_0)$, являющаяся постоянной интегрирования и выбираемая произвольным образом.

Перейдем к исследованию остальных уравнений для отыскания неизвестных функций. По аналогии с первым уравнением проведем следующие действия:

$$\begin{aligned} B_1(x_0) &= \overline{h_1(x_0, y_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1(x_0, y_0) dy_0 = \\ &= \overline{Y(x_0, y_0, 0)} + D_1 \overline{u_1}, \end{aligned}$$

$$v_1(x_0, y_0) = \frac{1}{\omega(x_0)} \left[\int_{y_{0нач}}^{y_0} h(x_0, \xi) d\xi - \overline{h_1(x_0)} y_0 \right] + \psi_1(x_0),$$

где $\psi_1(x_0)$ - также произвольная функция своего аргумента. Если процедуру решения продолжить, то получим

$$A_k = \overline{g_k}, \quad B_k = \overline{h_k},$$

$$u_k(x_0, y_0) = \frac{1}{\omega(x_0)} \left[\int_{y_{0нач}}^{y_0} g_k(x_0, \xi) d\xi - \overline{g}_k y_0 \right] + \varphi_k(x_0),$$

$$v_k(x_0, y_0) = \frac{1}{\omega(x_0)} \left[\int_{y_{0нач}}^{y_0} h_k(x_0, \xi) d\xi - \overline{h}_k y_0 \right] + \psi_k(x_0).$$

В итоге будут получены все функции, необходимые для определения искомого решения.

Теперь для построения приближенного решения следует поступить таким образом. Выбираем первые n членов и составляем уравнение для новых переменных

$$\dot{x}_{0n} = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k A_k(x_{0n}).$$

Если это уравнение проинтегрировать (обычно численно), то после этого функцию $y_{0n}(t)$ можно определить квадратурой

$$y_{0n}(t) = y_0 + \int_0^t [\omega(x_{0n}) + \varepsilon B_1(x_{0n}) + \dots] dt.$$

Определив все эти функции, их можно подставить в ряды, в которых также удержать конечное число членов. В результате получим приближенное решение исходной системы

$$\begin{cases} x(t) = x_{0n}(t) + \sum_{k=1}^{N_1} \varepsilon^k u_k(x_{0n}, y_{0n}), \\ y(t) = y_{0n}(t) + \sum_{k=1}^{N_2} \varepsilon^k v_k(x_{0n}, y_{0n}). \end{cases}$$

4.6 Алгоритм асимптотического интегрирования в случае нескольких быстрых переменных

Рассмотрим способы, позволяющие построить асимптотическое решение для системы, в которой переменная y является вектором (т.е. ее размерность больше единицы). Такие решения в отличие от систем с одной быстрой переменной могут быть найдены только в отдельных случаях.

Для определенности рассмотрим систему с двумя быстрыми фазами. Пусть она имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{y} = \omega_1(x) + \varepsilon Y(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{z} = \omega_2(x) + \varepsilon Z(x, y, z, \varepsilon). \end{cases}$$

В этих формулах x по-прежнему векторная функция произвольной размерности, а $y(t)$ и $z(t)$ - скалярные функции.

Будем считать X, Y и Z периодическими функциями переменных y и z периодов $T_y = \frac{2\pi}{l}$ и $T_z = \frac{2\pi}{m}$.

Рассмотрим сначала нерезонансный случай. Проведем замену переменных:

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon u_1(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon^2 u_2(x_0, y_0, z_0) + \dots, \\ y = y_0 + \varepsilon v_1(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon^2 v_2(x_0, y_0, z_0) + \dots, \\ z = z_0 + \varepsilon w_1(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon^2 w_2(x_0, y_0, z_0) + \dots, \end{cases}$$

которая позволяет отделить уравнения для медленных движений от уравнений для быстрых движений. В новых переменных система должна иметь такой вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \varepsilon A_1(x_0) + \varepsilon^2 A_2(x_0) + \dots, \\ \dot{y}_0 = \omega_1(x_0) + \varepsilon B_1(x_0) + \varepsilon^2 B_2(x_0) + \dots, \\ \dot{z}_0 = \omega_2(x_0) + \varepsilon C_1(x_0) + \varepsilon^2 C_2(x_0) + \dots \end{cases}$$

Как и раньше, для того чтобы слагаемые в формулах имели порядок малости ε^k , будем считать функции $u_k(x_0, y_0, z_0)$, $v_k(x_0, y_0, z_0)$ и $w_k(x_0, y_0, z_0)$ ограниченными функциями y_0 и z_0 при $y_0 \rightarrow \pm\infty$ и $z_0 \rightarrow \pm\infty$.

Подставляя записанные ряды в исходные уравнения и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε в левых и правых частях уравнений, получим уравнения для определения неизвестных функций. Выпишем уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y_0} \omega_1(x_0) + \frac{\partial u_1}{\partial z_0} \omega_2(x_0) &= X(x_0, y_0, z_0, 0) - A_1(x_0), \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_0} \omega_1(x_0) + \frac{\partial v_1}{\partial z_0} \omega_2(x_0) &= Y(x_0, y_0, z_0, 0) + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_0} u_1(x_0, y_0, z_0) - B_1(x_0), \\ \frac{\partial w_1}{\partial y_0} \omega_1(x_0) + \frac{\partial w_1}{\partial z_0} \omega_2(x_0) &= Z(x_0, y_0, z_0, 0) + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_0} u_1(x_0, y_0, z_0) - C_1(x_0). \end{aligned}$$

Уравнения последующих приближений имеют такой же вид. Таким образом, вычисление каждого из членов ряда сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \omega_1(x) + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} \omega_2(x) = U(x, y, z) - D(x),$$

где U - периодическая по y и z функция с периодами $T_y = \frac{2\pi}{l}$ и $T_z = \frac{2\pi}{m}$.

Рассмотрим первое из уравнений системы. Функция X по определению является периодической по переменным y_0 и z_0 . Следовательно, ее можно представить в виде двойного ряда Фурье

$$X(x_0, y_0, z_0) = \sum_{r, s = -\infty}^{\infty} a_{rs}^{(X)}(x_0) e^{i(rly_0 + smz_0)}.$$

Для отыскания ограниченного решения для функций u_k, v_k и w_k воспользуемся методом Фурье. Для этого заметим, что функция $u_1(x_0, y_0, z_0)$ представима в виде

$$u_1(x_0, y_0, z_0) = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} b_{rs}(x_0) e^{i(rly_0 + smz_0)} + c(x_0)y_0 + d(x_0)z_0.$$

Подставляя разложения для X и u_1 в первое уравнение системы и приравнявая коэффициенты при показательных функциях с одинаковыми показателями, получим

$$\begin{cases} b_{rs}(x_0) = \frac{a_{rs}^{(X)}(x_0)}{i(r\omega_1 + sm\omega_2)}, \\ c(x_0)\omega_1(x_0) + d(x_0)\omega_2(x_0) = a_{00}(x_0) - A_1(x_0). \end{cases}$$

Величина $b_{00}(x_0)$ остается неопределенной.

Для ограниченности u_1 необходимо принять $c = 0$ и $d = 0$. Но это можно сделать только в том случае, когда

$$A_1 = a_{00}^{(X)} = \bar{X}(x_0) = \frac{1}{T_y T_z} \int_0^{T_y} \int_0^{T_z} X(x_0, y_0, z_0) dy_0 dz_0.$$

Аналогично можно решить и остальные уравнения системы. В результате из рассмотрения уравнений первого приближения мы получаем следующие выражения:

$$\begin{cases} A_1 = \bar{X}, \\ B_1 = \bar{Y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_0} \overline{u_1(x_0, y_0, z_0)}, \\ C_1 = \bar{Z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_0} \overline{v_1(x_0, y_0, z_0)}, \\ u_1 = \sum_{r,s \neq 0} \frac{a_{rs}^{(X)}(x_0)}{i(r\omega_1 + sm\omega_2)} \exp i(rly_0 + smz_0) + a_0^{(X)}(x_0), \\ v_1 = \sum_{r,s \neq 0} \frac{a_{rs}^{(Y)}(x_0)}{i(r\omega_1 + sm\omega_2)} \exp i(rly_0 + smz_0) + a_0^{(Y)}(x_0), \\ w_1 = \sum_{r,s \neq 0} \frac{a_{rs}^{(Z)}(x_0)}{i(r\omega_1 + sm\omega_2)} \exp i(rly_0 + smz_0) + a_0^{(Z)}(x_0). \end{cases}$$

В этих формулах $a_{rs}^{(Y)}$ и $a_{rs}^{(Z)}$ - коэффициенты разложений в ряд Фурье функций $Y - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_0} u_1$ и $Z - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_0} u_1$, а $a_0^{(X)}$, $a_0^{(Y)}$ и $a_0^{(Z)}$ - произвольные функции. Эти функции

могут быть выбраны любыми, причем их выбор не отражается на точности решения. Аналогичным образом можно провести вычисления для следующих приближений.

Для того чтобы выписанные формулы имели смысл, необходимо, чтобы ни один из знаменателей не обращался в нуль, т.е. чтобы не существовало целых чисел r и s таких, что

$$r\omega_1 + sm\omega_2 = 0.$$

Такой случай называется нерезонансным.

4.7 Резонансы в нелинейных колебательных системах

Основным объектом исследования в математической теории многочастотных систем является стандартная система с несколькими фазами следующего вида

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= \mu \bar{X}(\bar{x}, \varphi); \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= \omega(x) + \mu \Phi(x, \varphi)\end{aligned}$$

В этих формулах $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор медленных переменных, $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ - вектор быстрых фаз, $\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_m(x))$ - вектор собственных частот, зависящих от медленных переменных, $X(x, \varphi)$ и $\Phi(x, \varphi)$ - периодические функции фаз $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ с периодом 2π , μ - малый параметр.

Рассмотрим пример приведения к стандартному виду уравнений движения системы с двумя степенями свободы.

Допустим, что в этой системе действуют обобщенные силы, зависящие не только от обобщенных координат, но периодически зависящие от времени:

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2, pt), \quad Q_2 = Q_2(q_1, q_2, pt),$$

где p - частота периодического воздействия.

Для приведения этой системы перейдем к переменным амплитуды – фазы:

$$\begin{aligned}\frac{dK_1}{dt} &= \Phi_1(K, \vartheta, t), \\ \frac{dK_2}{dt} &= \Phi_2(K, \vartheta, t), \\ \frac{d\vartheta_1}{dt} &= \omega_1 + \Psi_1(K, \vartheta, t), \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} &= \omega_2 + \Psi_2(K, \vartheta, t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= p\end{aligned}$$

Здесь K_1, K_2 - амплитуды и $\vartheta_1, \vartheta_2, \psi = pt$ - фазы в рассматриваемой системе.

Следовательно, данная система сводится к трехчастотной системе: ω_1 и ω_2 - собственные частоты системы, p - частота внешнего воздействия.

В стандартной системе возникает резонанс, если целочисленная комбинация частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ близка к нулю:

$$a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \dots + a_m\omega_m(x) = 0,$$

где a_1, a_2, \dots, a_m - обычно малые целые числа. Порядком резонанса системы называют число

$$n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|.$$

Чем меньше порядок резонанса, тем сильнее воздействие резонанса на движение системы. Поэтому на практике обычно изучают резонансы только низших порядков.

Основным методом исследования многочастотной системы является метод усреднения. Сделаем замену переменных, соответствующую этому методу: разложим исходные переменные в ряд по степеням малого параметра

$$x = x_0 + \mu u_1(x, \varphi) + \mu^2 u_2(x, \varphi) + \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \mu v_1(x, \varphi) + \mu^2 v_2(x, \varphi) + \dots$$

Новые переменные x и φ должны удовлетворять усредненным уравнениям, правые части которых не содержат фазы φ_0 :

$$\frac{dx_0}{dt} = \mu A_1(x_0) + \mu^2 A_2(x_0) + \dots,$$

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \omega(x_0) + \mu B_1(x_0) + \mu^2 B_2(x_0) + \dots$$

Неизвестные функции u, v, A и B следует найти в процессе построения решения. Рассмотрим построение асимптотических решений для медленных переменных.

Для этого заменим переменные в исходных уравнениях, разложим правые части в ряд по малому параметру и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ . Получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi_0} \omega(x_0) = X(x_0, \varphi_0) - A_1(x_0);$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \varphi_0} \omega(x_0) = \frac{\partial X}{\partial x} u_1 + \frac{\partial X}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_1}{\partial x_0} A_1(x_0) - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_0} B_1(x_0) - A_2(x_0);$$

.....

$$\frac{\partial u_k}{\partial \varphi_0} \omega(x_0) = Y(x_0, \varphi_0) - A_k(x_0);$$

.....

Аналогичный вид будут иметь уравнения для быстрых фаз. Полученные уравнения есть линейные дифференциальные уравнения с периодической правой частью. Будем искать решение в виде ряда Фурье.

$$u_1(x_0, \varphi_0) = \sum_{a_1 \dots a_m} a_{a_1 \dots a_m}(x_0) \exp(i(a_1 \varphi_1 + a_1 \varphi_2 + \dots + a_m \varphi_m))$$

Разложим в ряд Фурье правые части ДУ

$$X(x_0, \varphi_0) = \sum_{a_1 \dots a_m} b_{a_1 \dots a_m}(x_0) \exp(i(a_1 \varphi_1 + a_1 \varphi_2 + \dots + a_m \varphi_m)).$$

После подстановки и приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках получим

$$a_{a_1 \dots a_m}(x_0) = \frac{b_{a_1 \dots a_m}(x_0)}{i(a_1 \omega_1(x_0) + a_2 \omega_2(x_0) + \dots + a_m \omega_m(x_0))}.$$

Для того, чтобы среднее значение функции u_1 было равно нулю, необходимо выполнение условия

$$A_1(x_0) = b_{0 \dots 0}(x_0),$$

т.е. функция A_1 определяется как среднее значение от функции по переменным $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \dots, \varphi_{0m}$

$$A_1(x_0) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x_0, \varphi_{01}, \dots, \varphi_{0m}) d\varphi_{01} \dots d\varphi_{0m}.$$

Аналогично могут быть решены все остальные уравнения. Найденные решения могут быть использованы при условии, что $a_1\omega_1(x_0) + a_2\omega_2(x_0) + \dots + a_m\omega_m(x_0) \neq 0$. Но полученные разложения можно применить для исследования резонансов. Для наиболее существенных резонансов обычно бывает достаточно проанализировать улучшенное первое приближение

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \mu u_1(x_0, \varphi_0), \\ \varphi &= \varphi_0 + \mu v_1(x_0, \varphi_0) \end{aligned}$$

в котором переменные определяются усредненными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \mu A_1(x_0), \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= \omega(x_0) + \mu B_1(x_0). \end{aligned}$$

Резонанс в системе возникает, если одновременно выполняются два условия:

1. Обращаются в нуль или близки к нулю знаменатели $a_1\omega_1(x_0) + a_2\omega_2(x_0) + \dots + a_m\omega_m(x_0)$.
2. Отличны от нуля соответствующие коэффициенты ряда Фурье для функции $X(x_0, \varphi_0)$.

4.8 Метод усреднения при исследовании резонансного движения системы

До этого мы предполагали, что выполняются условия

$$a_1\omega_1(x) + \dots + a_m\omega_m(x) \neq 0,$$

что соответствует отсутствию резонансов в системе. Если одно из подобных соотношений будет обращаться в нуль, процедура усреднения системы изменяется.

Обычно резонансная область характеризуется тем, что комбинация частот $a_1\omega_1(x) + \dots + a_m\omega_m(x)$ есть малая величина порядка $\varepsilon^{1/2}$, т.е.

$$a_1\omega_1(x) + \dots + a_m\omega_m(x) = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Для того чтобы можно было учесть возникающий резонанс, следует получить частично усредненную систему. Введем в рассмотрение резонансную фазу

$$\mathcal{G} = a_1\varphi_1 + \dots + a_m\varphi_m$$

и резонансную расстройку частот

$$h = a_1\omega_1 + \dots + a_m\omega_m.$$

Заменим одну из фаз резонансной фазой

$$\varphi_m = \frac{(\mathcal{G} - a_1\varphi_1 + \dots + a_{m-1}\varphi_{m-1})}{a_m}, \quad a_m \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon X(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \mathcal{G}), \\ \dot{\mathcal{G}} &= h(x) + \varepsilon \Theta(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \mathcal{G}), \\ \dot{\varphi}_k &= \omega_k(x) + \varepsilon \Phi(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \mathcal{G}), \quad k = 1, \dots, m-1\end{aligned}$$

Здесь $\Theta(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, \mathcal{G}) = a_1 \Phi_1 + \dots + a_m \Phi_m$.

В резонансной области переменная \mathcal{G} становится медленной, т.к. $h(x) = O(\varepsilon^{1/2})$.

Частично усредненная система получается из записанной формальным усреднением первых двух уравнений по быстрым фазам $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= \varepsilon A_1(x_0, \mathcal{G}_0), \\ \dot{\varphi}_0 &= h(x_0) + \varepsilon B_1(x_0, \mathcal{G}_0),\end{aligned}$$

где x_0, φ_0 - усредненные значения медленных переменных, а функции в правых частях определяются усреднением по быстрым переменным:

$$\begin{aligned}A_1(x_0, \mathcal{G}_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x_0, \varphi_{10}, \dots, \varphi_{m-1,0}, \mathcal{G}_0) d\varphi_{10} \dots d\varphi_{v-1,0}, \\ B_1(x_0, \mathcal{G}_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Theta(x_0, \varphi_{10}, \dots, \varphi_{m-1,0}, \mathcal{G}_0) d\varphi_{10} \dots d\varphi_{v-1,0}.\end{aligned}$$

Следовательно, при усреднении системы с учетом возникающего в ней резонанса число медленных переменных усредненной системы увеличивается на единицу, что в общем случае усложняет дальнейшее исследование усредненной системы.

При изучении резонансного движения системы обычно выделяют два случая:

1. Частоты постоянны $\omega_k = const$, $k = 1, \dots, m$ и не зависят от медленных переменных x .
2. Частоты являются функциями медленных переменных x и изменяются вместе с ними в процессе движения системы.

В первом случае можно заранее подсчитать расстройку частот и определить, с каким типом движения (резонансным или нерезонансным) мы имеем дело в течении всего времени движения системы. В зависимости от этого производится усреднение системы и ее дальнейшее исследование.

Второй случай является более сложным. В процессе движения системы ее траектория может пересекать резонансные области движения, причем возможно пересечение нескольких резонансов. В этом случае для каждого участка движения строится своя усредненная система и каждый участок движения системы требует отдельного исследования.

Рассмотрим получение частично усредненных уравнений для уравнения Матвея. В стандартном виде это уравнение можно записать в таком виде

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} aK \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega} a \cos^2 \varphi \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= p.\end{aligned}$$

Мы установили, что в рассматриваемой системе возможно возникновение резонансов с резонансной расстройкой $2\omega - p$. Поэтому в случае когда $2\omega - p = 0$, для исследования резонансного движения системы необходимо строить уже частично усредненную систему. Для

этого введем резонансную фазу $\vartheta = 2\varphi - \psi$. Проведем замену переменных, с учетом того, что $\varphi = (\psi + \vartheta)/2$

$$\begin{aligned}\dot{K} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} aK \sin \frac{\psi + \vartheta}{2} \cos \frac{\psi + \vartheta}{2} \cos \psi, \\ \dot{\vartheta} &= 2\omega - p - \frac{2\varepsilon}{\omega} a \cos^2 \frac{\psi + \vartheta}{2} \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= p.\end{aligned}$$

Усредняя первые два уравнения по быстрой фазе ψ , получим

$$\begin{aligned}\dot{K}_0 &= -\frac{\varepsilon a K_0}{4\omega} \sin \vartheta_0, \\ \dot{\vartheta}_0 &= 2\omega - p - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \cos \vartheta_0.\end{aligned}$$

Следует отметить, что усреднение правых частей по быстрой фазе ψ формально означает сохранение в правых частях только членов, непосредственно зависящих от резонансной фазы, и членов, входящих в усредненную систему первого приближения для нерезонансного случая. Остальные гармоники относятся к нерезонансным и в частично усредненной системе не учитываются.

Исследуем устойчивость движения системы в окрестности резонанса. Для этого в частично усредненной системе произведем замену переменных

$$\xi = K \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad \eta = -K \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{K}_0 \cos \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{1}{2} K_0 \dot{\vartheta}_0 \sin \frac{\vartheta}{2} = \\ &= -\frac{\varepsilon a K_0}{4\omega} \sin \vartheta_0 \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2} K_0 \left(h - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \cos \vartheta_0 \right) \sin \frac{\vartheta}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} K_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} h - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \overbrace{\left(\frac{\sin \vartheta_0 \cos \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} \right)}^{\sin \frac{\vartheta}{2}} K_0 = \\ &= \frac{1}{2} \eta \left(h + \frac{\varepsilon a}{2\omega} \right),\end{aligned}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2} \xi \left(h - \frac{\varepsilon a}{2\omega} \right).$$

Полученная система есть линейная система ДУ с постоянными коэффициентами с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2}\left(h + \frac{\varepsilon a}{2\omega}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(h - \frac{\varepsilon a}{2\omega}\right) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{4}\left(h^2 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{4\omega^2}\right) = 0.$$

При малых $|h| = |2\omega - p| < \frac{\varepsilon a}{2\omega}$ корни характеристического уравнения вещественные и имеют разные знаки, что свидетельствует о неустойчивости движения в переменных ξ и η , а, следовательно, и по $K = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Пользуясь полученным неравенством можно определить область неустойчивости движения системы. Для рассматриваемого случая при резонансе $\delta = \frac{\omega}{p} = \frac{1}{2}$. В окрестности резонанса границы области неустойчивости будут такими

$$\frac{2\omega^2}{4\omega^2 + \varepsilon a} < \delta < \frac{2\omega^2}{4\omega^2 - \varepsilon a}.$$

Выражая в явном виде зависимость ε от δ получим две границы области неустойчивости (рисунок 4.1)

$$\varepsilon_1 > \frac{2\omega^2}{a} \left(\frac{1}{\delta} - 2 \right),$$

$$\varepsilon_2 > \frac{2\omega^2}{a} \left(2 - \frac{1}{\delta} \right).$$

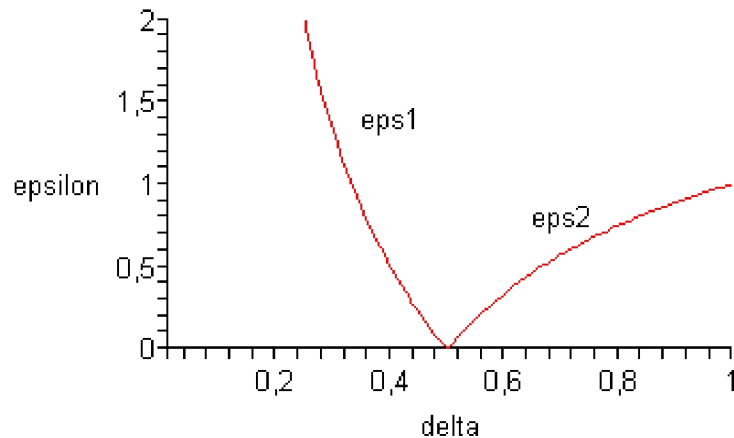


Рисунок 4.1 Диаграмма устойчивости

4.9 Резонансные случаи

Алгоритм построения асимптотического решения, сводящийся к осреднению по обеим быстрым переменным, имеет смысл только в том случае, если в процессе изменения медленной переменной x не будет выполняться равенство

$$rl\omega_1(x) + sm\omega_2(x) = 0.$$

Т.к. заранее нельзя определить область изменения переменной x , то в процессе интегрирования уравнений постоянно требуется проверка, не оказалась ли величина x в окрестности критической области. Только в том случае, когда величины ω_1 и ω_2 не зависят от x , можно до интегрирования системы проверить, будут ли отсутствовать резонансы.

При резонансе выполняется условие

$$rl\omega_1 + sm\omega_2 = 0,$$

где r и s - любые целые числа, положительные или отрицательные.

Если $|r|=|s|$, то резонанс называется главным, в остальных случаях - комбинационным (в частности, дробным или кратным).

Как и в теории колебаний будем называть величину

$$h^* = rl\omega_1(x) + sm\omega_2(x)$$

расстройкой. Соотношение параметров, при котором величина расстройки мала $h^* = \varepsilon h$, будем называть окрестностью резонанса. В окрестности резонанса также может быть построен процесс асимптотического интегрирования, но алгоритм его будет несколько иным.

Будем предполагать, что мы изучаем движение в окрестности точки $x = x^*$, где x^* - корень уравнения

$$\omega_1(x^*) = \frac{sm}{rl}\omega_2(x^*).$$

Изучение резонансных явлений начнем с анализа главного резонанса $r = s = 1$ при дополнительном условии, что частоты ω_1 и ω_2 не зависят от амплитуды. Исключим из рассмотрения одну из частот

$$\omega_2 = \frac{l\omega_1}{m} + \varepsilon \frac{h}{m}$$

и выпишем исходную систему уравнений в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, z), \\ \dot{y} = \omega_1(x) + \varepsilon Y(x, y, z), \\ \dot{z} = \frac{l\omega_1}{m} + \varepsilon \left[Z(x, y, z) + \frac{h}{m} \right], \end{cases}$$

где X и Y являются периодическими функциями y и z периода $\frac{2\pi}{l}$ и $\frac{2\pi}{m}$.

В рассматриваемом случае частоты ω_1 и ω_2 обращают один из знаменателей в нуль тождественно по x , т.е. резонансная ситуация имеет место для любой амплитуды. Прямое использование метода асимптотического интегрирования не возможно, поэтому вместо переменной y введем новую переменную

$$\vartheta = \frac{m}{l}z - y.$$

Она должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{G}} &= -\varepsilon \Theta \left(x, \frac{m}{l} z - \mathcal{G}, z \right) = \\ &= -\varepsilon \left\{ \left[Z \left(x, \frac{m}{l} z - \mathcal{G}, z \right) + \frac{h}{m} \right] \frac{m}{l} - Y \left(x, \frac{m}{l} z - \mathcal{G}, z \right) \right\}.\end{aligned}$$

Остальные уравнения системы примут такой вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X \left(x, \frac{m}{l} z - \mathcal{G}, z \right), \\ \dot{z} = \frac{l\omega_l}{m} + \varepsilon \left[Z \left(x, \frac{m}{l} z - \mathcal{G}, z \right) + \frac{h}{m} \right]. \end{cases}$$

Теперь систему уравнений можно представить в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X^* (x, \mathcal{G}, z), \\ \dot{\mathcal{G}} = \varepsilon \Theta^* (x, \mathcal{G}, z), \\ \dot{z} = \frac{l\omega_l}{m} + \varepsilon \left[Z^* (x, \mathcal{G}, z) + \frac{h}{m} \right]. \end{cases}$$

Функции X^* , Θ^* и Z^* являются периодическими по z . Сама переменная z входит в правые части системы двумя способами: во-первых, самостоятельно, во-вторых, в комбинации $\frac{m}{l} z - \mathcal{G}$. Правые части системы будут периодическими функциями

переменной z с периодом $T_z = \frac{2\pi}{m}$, а также периодическими функциями комбинации

$\frac{m}{l} z - \mathcal{G}$ периода $T_y = \frac{2\pi}{l}$, но относительно переменной z в этой комбинации мы снова

получим $T'_z = \frac{l}{m} T_y = \frac{2\pi}{m}$. Следовательно, функции X^* , Θ^* и Z^* имеют по переменной

z период $T_z = \frac{2\pi}{m}$.

Скалярная величина \mathcal{G} является медленно меняющейся переменной. Поэтому вновь полученная система в отличие от исходной является системой с одной, а не двумя быстрыми переменными, и ее изучение может быть продолжено соответствующими методами. Если мы ограничимся изучением первого приближения, то должны выписать укороченные уравнения Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \varepsilon \bar{X}^* (x_0, \mathcal{G}_0), \\ \dot{\mathcal{G}}_0 = \varepsilon \bar{\Theta}^* (x_0, \mathcal{G}_0). \end{cases}$$

Усреднение в этих формулах производится по периоду T_z

$$\bar{X}^*(x_0, \vartheta_0) = \frac{m}{2\pi} \int_0^{T_z} X^*(x_0, \vartheta_0, \zeta) d\zeta,$$

$$\bar{\Theta}^*(x_0, \vartheta_0) = \frac{m}{2\pi} \int_0^{T_z} \Theta^*(x_0, \vartheta_0, \zeta) d\zeta.$$

Определение быстрой переменной сводится к квадратуре.

Среди резонансных движений особое значение имеют установившиеся. Для их определения достаточно положить $\dot{x} = \dot{\vartheta} = 0$. В результате получаем систему трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} \bar{X}^*(x_0, \vartheta_0) = 0, \\ \bar{\Theta}^*(x_0, \vartheta_0) = 0, \end{cases}$$

левые части которых зависят от параметра расстройки h . Из них можно найти зависимость стационарных значений x и ϑ от значения параметра h .

Рассмотрим случай, когда частоты ω_1 и ω_2 зависят от x . Предположим сначала, что периоды по обоим быстрым переменным совпадают. Тогда условие главного резонанса приобретает следующий вид

$$\omega_2(x) = \omega_1(x) + \varepsilon h(x).$$

Обозначим через x^* корень этого уравнения при $h=0$ и ограничимся рассмотрением только той области изменений амплитуды, которая находится в окрестности точки x^* , т.е. $x - x^*$ есть величина первого порядка малости.

Рассмотрим систему с двумя вращающимися фазами

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{y} = \omega_1(x) + \varepsilon Y(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{z} = \omega_2(x) + \varepsilon Z(x, y, z, \varepsilon), \end{cases}$$

и снова сделаем замену $y = z - \vartheta$. С учетом принятых допущений, а именно, $\omega_1 = \omega_2$ и $\dot{y} = \dot{z} - \dot{\vartheta} \Rightarrow \omega_1(x) = \omega_2(x) + \varepsilon h(x)$, получим такую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X^*(x, \vartheta, z), \\ \dot{\vartheta} = \varepsilon \Theta^*(x, \vartheta, z), \\ \dot{z} = \omega_2(x) + \varepsilon Z^*(x, \vartheta, z). \end{cases}$$

В отличие от предыдущего случая здесь будем иметь

$$\Theta^* = Z(x, z - \vartheta, z) - Y(x, z - \vartheta, z) + h(x).$$

Т.к. исследование будет проводиться только в малой окрестности точки x^* , то можно сделать некоторые упрощения. Проведем усреднение по переменной z и ограничимся уравнениями первого приближения, тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \bar{X}^*(x, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} = \varepsilon \bar{\Theta}^*(x, \vartheta) = \varepsilon [\bar{Z}^*(x, \vartheta) - \bar{Y}^*(x, \vartheta)] + \varepsilon h(x), \\ \dot{z} = \omega_2(x) + \varepsilon \bar{Z}^*(x, \vartheta). \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $x - x^*$ и ε есть величины одного порядка малости, поэтому $\varepsilon h(x) = (x - x^*) [\omega_{2x}(x^*) - \omega_{1x}(x^*)]$. В результате получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \bar{X}^*(x^*, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} = \varepsilon [\bar{Z}^*(x^*, \vartheta) - \bar{Y}^*(x^*, \vartheta)] + (x - x^*) [\omega_{2x}(x^*) - \omega_{1x}(x^*)], \\ \dot{z} = \omega_2(x) + \varepsilon \bar{Z}^*(x, \vartheta). \end{cases}$$

Если в случае главного резонанса, периоды T_z и T_y не равны друг другу, т.е.

$$T_y = \frac{2\pi}{l}, \quad T_z = \frac{2\pi}{m}, \quad l \neq m,$$

то условие главного резонанса будет иметь такой вид

$$\frac{l\omega_1(x)}{m} + \frac{\varepsilon h}{m} = \omega_2(x).$$

Обозначим x^* корень уравнения

$$\frac{m}{l} \omega_2(x^*) - \omega_1(x^*) = 0$$

и вместо переменной y введем сдвиг фаз ϑ

$$\vartheta = \frac{m}{l} z - y.$$

Тогда перед усреднением с точностью до малых первого порядка получим

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} = \varepsilon \left[Z \left(x, \frac{m}{l} z - \vartheta, z \right) \frac{m}{l} - Y \left(x, \frac{m}{l} z - \vartheta, z \right) \right] + \\ + (x - x^*) \left[\frac{m}{l} \omega_{2x}(x^*) - \omega_{1x}(x^*) \right]. \end{aligned}$$

Переменная z входит в правые части уравнений непосредственно и в комбинации с ϑ . Мы уже видели, что в таком случае при переходе к укороченной системе проводится усреднение по одной переменной z , причем по ее периоду $T_z = \frac{2\pi}{m}$.

Во многих приложениях необходимо проведение исследования комбинационных резонансов, для которых условие может быть записано следующим образом

$$\omega_2(x) = \frac{rl}{sm} \omega_1(x) + \varepsilon \frac{h(x)}{m},$$

где r и s - есть некоторые целые положительные или отрицательные числа.

Схема исследования комбинационных резонансов остается прежней. Сначала проводится замена переменных

$$\begin{cases} \vartheta = \frac{sm}{rl} z - y, \\ \frac{\varepsilon h}{sm} = (x - x^*) \left[\frac{sm}{rl} \omega_{2x}(x^*) - \omega_{1x}(x^*) \right]. \end{cases}$$

Уравнение для медленной переменной будет таким

$$\dot{g} = \varepsilon \left[Z \left(x, \frac{sm}{rl} z - g, z \right) \frac{sm}{rl} - Y \left(x, \frac{sm}{rl} z - g, z \right) \right] + \\ + (x - x^*) \left[\frac{sm}{rl} \omega_{2x}(x^*) - \omega_{1x}(x^*) \right] = \varepsilon \Theta(x, z, g).$$

Правая часть является периодической функцией быстрой переменной z , которая входит в нее самостоятельно с периодом $T_z = \frac{2\pi}{m}$ и в комбинации $\frac{sm}{rl} z$, которая имеет такой же период, как и $y - T_y = \frac{2\pi}{l}$. Тогда по переменной z получим

$$T_z^* = T_y \frac{|r|l}{|s|m} = \frac{2\pi|r|}{|s|m}.$$

Период правых частей системы по переменной z будет равен наименьшему общему кратному двух периодов

$$\tilde{T}_z = HOK(T_z, T_z^*) = HOK\left(\frac{2\pi}{m}, \frac{2\pi|r|}{|s|m}\right) = \frac{2\pi|r|}{m}.$$

При переходе к укороченным уравнениям усреднение следует проводить по этому периоду.

Если в системе частоты ω_1 и ω_2 не удовлетворяют ни одному из соотношений резонанса, то соответствующая укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \bar{X}(x), \\ \dot{y} = \omega_1(x) + \varepsilon \bar{Y}(x), \\ \dot{z} = \omega_2(x) + \varepsilon \bar{Z}(x), \end{cases}$$

где усреднение проведено по обеим быстрым переменным. На установившемся режиме медленные переменные сохраняют свои значения, поэтому отыскание таких режимов сводится к нахождению соответствующих значений амплитуд, что можно сделать с помощью уравнений

$$\bar{X}(\tilde{x}) = 0.$$

Т.к. x - величина векторная, то это векторное уравнение система эквивалентно системе из n скалярных трансцендентных уравнений. Из двух скалярных уравнений можно определить скорость вращения быстрых фаз как функцию амплитуды

$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1(x) + \varepsilon \bar{Y}(x), \\ \Omega_2 = \omega_2(x) + \varepsilon \bar{Z}(x). \end{cases}$$

В случае резонанса к числу величин, стационарное значение которых требуется определить, будет относиться и сдвиг фазы g . В общем случае комбинационного резонанса

$$\omega_1(x) = \frac{sm}{rl} \omega_2(x)$$

уравнения, определяющие стационарные режимы будут такими

$$\begin{cases} \bar{X}^*(\tilde{x}, \tilde{\vartheta}) = 0, \\ \left[\frac{sm}{rl} \omega_2(\tilde{x}) - \omega_1(\tilde{x}) = \varepsilon \left[\bar{Y}^*(\tilde{x}, \tilde{\vartheta}) - \frac{sm}{rl} \bar{Z}^*(\tilde{x}, \tilde{\vartheta}) \right] \right]. \end{cases}$$

Найдя решение этой системы по тем же формулам, что и в первом случае находим скорости вращения фаз. Следует отметить, что в резонансном случае достаточно вычислить только одну из этих величин, т.к. они связаны соотношением

$$\Omega_1(\tilde{x}) = \frac{sm}{rl} \Omega_2(\tilde{x}),$$

которое вытекает из определения сдвига фаз

$$\dot{\vartheta} = \frac{sm}{rl} \dot{z} - \dot{y}.$$

Таким образом в общем случае задача отыскания стационарных резонансных режимов сводится к решению системы из $n+1$ трансцендентного уравнения.

5 Прикладные задачи теории нелинейных колебаний

5.1 Виды движения маятниковых систем

Условимся называть маятником систему, движение которой описывается уравнением вида

$$\ddot{z} + f(z) = 0,$$

где $f(z)$ - периодическая функция своего аргумента. Не ограничивая общности, можно считать, что период этой функции равен 2π и $f(0) = 0$. Кроме того, условимся, что среднее значение функции $f(z)$ равно нулю

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) dz = 0.$$

Все движения, описываемые уравнением маятниковой системы, условимся считать собственными движениями маятника.

Кроме собственных движений маятника, будем еще рассматривать вынужденные движения, происходящие под действием внешних возмущений. Такие движения описываются уравнением

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon \varphi(z, \dot{z}, t),$$

где ε - малый параметр.

Фазовая плоскость маятниковой системы имеет хорошо знакомый нам вид. Замкнутые ветви сепаратрисы ограничивают области значений z и \dot{z} , соответствующие периодическим или колебательным движениям. Незамкнутые фазовые траектории описывают вращательные движения.

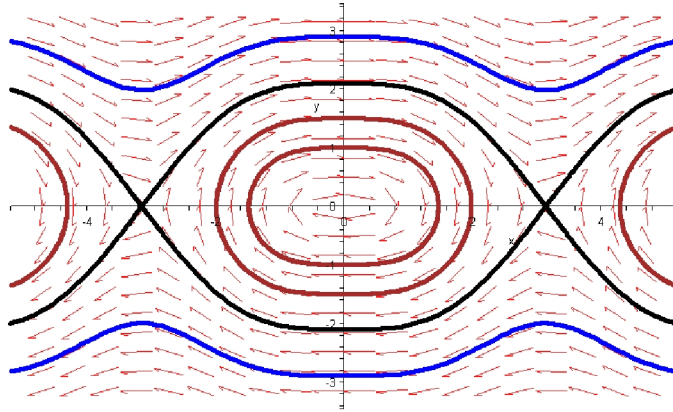


Рисунок 5.1 – Фазовый портрет маятниковой системы

С помощью рассмотренных ранее асимптотических методов можно исследовать следующие задачи:

а) Однопараметрические квазилинейные колебания. В этом случае колебания считаются малыми и уравнение может быть заменено таким:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon \varphi(z, \dot{z}, t).$$

Если $f(z)$ - аналитическая функция, то постоянная ω есть не что иное, как коэффициент при первом члене разложения этой функции в ряд Тейлора. В том случае, когда $f(z)$ не является аналитической функцией, величину ω можно определить методом гармонической линеаризации. В этом случае величины ω зависят от амплитуды x . Разность

$$f(z) - \omega^2 z = \varepsilon \psi(z)$$

относится к возмущающим силам.

В этом случае изучается поведение системы в зависимости от малого параметра ε .

б) Колебания с малой энергией. Предположим, что функция $f(z)$, характеризующая нелинейную восстанавливающую силу, имеет такой вид

$$f(z) = \omega^2 z - \mu \psi(z),$$

где μ - некоторый малый параметр, независимый от ε . Тогда уравнение движения может быть записано в следующем виде

$$\ddot{z} + \omega^2 z - \mu \psi(z) = \varepsilon \varphi(z, \dot{z}, t).$$

Записанное уравнение содержит два параметра. При $\varepsilon = 0$ мы получим следующее порождающее уравнение

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \mu \psi(z).$$

Если энергия системы мала, то для этого уравнения можно построить приближенное решение с любой точностью относительно малого параметра μ

$$z = Q(x, \omega(x), (t + c)).$$

Используя это решение, можно построить решение, асимптотическое уже по ε . В случае малых амплитуд такой подход оказывается удобным при исследовании неавтономных систем.

в) Колебания с предельными амплитудами. Если амплитуды колебательного процесса велики, фазовая траектория приближается к сепаратрисе. В этом случае для

построения асимптотического решения можно использовать общие методы. Но если при увеличении энергии период колебаний будет неограниченно увеличиваться, то точность асимптотических представлений будет уменьшаться. Следовательно, асимптотические методы, которые мы рассмотрели позволяют изучить всю область колебательных движений, за исключением узкой полосы на фазовой плоскости, примыкающей к сепаратрисе.

Оказывается, что методы осреднения позволяют и для больших энергий, соответствующих уже вращательным движениям, построить теорию не более сложную, чем теория нелинейных колебаний.

Рассмотрим одну из фазовых траекторий, описывающих вращательное движение. Она пересекает ось $O\dot{z}$ в точке $\dot{z} = \Omega$, и фазовая траектория, соответствующая этому уровню энергии, представляет собой волнообразную кривую, лежащую в окрестности прямой $\dot{z} = \Omega$. Поэтому в уравнении маятника можно сделать естественную замену переменных

$$\frac{dz}{dt} = \Omega + x.$$

Перейдем к безразмерному времени $t = \varepsilon\tau$, где $\varepsilon = \frac{1}{\Omega}$ есть в нашем случае малая величина. Тогда исходное уравнение можно привести к системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x' = -\varepsilon f(z), \\ z' = 1 + \varepsilon x, \end{cases}$$

где дифференцирование проводится по безразмерному времени τ . Эта система аналогична тем, с которыми мы встречались при изучении нелинейных колебаний: она содержит одну медленную переменную x – угловую скорость вращения (или отклонение угловой скорости от стационарного значения) и одну быстро изменяющуюся переменную z , которая представляет собой угол поворота маятника. Кроме того, правые части являются периодическими функциями быстрой переменной z . Поэтому для изучения нашей системы могут быть использованы обычные асимптотические методы.

Следуя общей схеме, допустим

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon u_1(x_0, z_0) + \varepsilon^2 u_2(x_0, z_0) + \dots, \\ z = z_0 + \varepsilon v_1(x_0, z_0) + \varepsilon^2 v_2(x_0, z_0) + \dots, \end{cases}$$

где функции x_0 и z_0 удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \varepsilon A_1(x_0) + \varepsilon^2 A_2(x_0) + \dots, \\ \dot{z}_0 = 1 + \varepsilon B_1(x_0) + \varepsilon^2 B_2(x_0) + \dots. \end{cases}$$

Как и раньше, будем считать функции u_k и v_k ограниченными. Допустим, что система удовлетворяет нулевым начальным условиям - при $t = 0$: $x = 0, z = 0$. Если будет найдено решение такой задачи Коши

$$z = z(t, \Omega),$$

то общий интеграл запишется в следующем виде

$$z = z(t + t_0, \Omega).$$

Тогда для того, чтобы удовлетворить начальным условиям, надо принять

$$u_k(x_0, 0) = v_k(x_0, 0) = 0.$$

Уравнения для определения неизвестных функций u_k, v_k, A_k и B_k в этой задаче будут такими

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial z_0} = f(z_0) - A_1(x_0), \\ \frac{\partial v_1}{\partial z_0} = x_0 - B_1(x_0), \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_0} = \frac{\partial f}{\partial z_0} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_0} A_1 - \frac{\partial u_1}{\partial z_0} B_1 - A_2(x_0), \\ \frac{\partial v_2}{\partial z_0} = u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x_0} A_1 - \frac{\partial v_1}{\partial z_0} B_1 - B_2(x_0), \end{cases}$$

и т.д.

Рассмотрим первое из уравнений системы. Для ограниченности функций u_k необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1(x_0) = -\bar{f}.$$

Но мы условились, что $\bar{f} = 0$, поэтому $A_1 = 0$. Тогда получаем

$$u_1(x_0, z_0) = -\int_0^{z_0} f(\zeta) d\zeta + C(x_0).$$

В общем случае, $C(x_0)$ - произвольная функция x_0 . Но при выбранных начальных условиях $C(x_0) \equiv 0$.

Введем следующие обозначения

$$\int_0^z f(\zeta) d\zeta = \Psi(z), \quad \int_0^z \Psi(\zeta) d\zeta = \Phi(z).$$

Тогда можно записать следующее решение

$$u_1(z_0) = -\Psi(z_0).$$

Аналогичным образом из второго уравнения получим

$B_1(x_0) = x_0$ и, следовательно, $v_1 \equiv 0$. Используя полученные решения для неизвестных функций с единичным индексом и введенные обозначения, можно так переписать третье уравнение

$$\frac{\partial u_2}{\partial z_0} = \frac{d\Psi(z_0)}{dz_0} x_0 - A_2(x_0),$$

откуда получаем

$$A_2(x_0) = \overline{\frac{d\Psi(z_0)}{dz_0}} x_0 = \bar{f} x_0 = 0.$$

Тогда

$$u_2(x_0, z_0) = x_0 \int_0^{z_0} f(\zeta) d\zeta = x_0 \Psi(z_0).$$

Наконец, можно записать

$$\frac{\partial v_2}{\partial z_0} = -\Psi(z_0) - B_2(x_0),$$

Откуда $B_2(x_0) = -\bar{\Psi}$ и $v_2(x_0, z_0) = -\Phi(z_0) + \bar{\Psi}z_0$. Эту процедуру можно продолжить и далее.

Если ограничиться членами не выше второго порядка малости, то получим

$$\begin{cases} x = x_0 - \varepsilon\Psi(z_0) + \varepsilon^2 x_0\Psi(z_0), \\ z = z_0 - \varepsilon^2(\Phi(z_0) - \Psi z_0), \\ x'_0 = 0, \\ z'_0 = 1 + \varepsilon x_0 - \varepsilon^2\bar{\Psi}. \end{cases}$$

Интегрируя третье уравнение этой системы, с учетом начальных условий получим

$$x_0 \equiv 0.$$

Тогда остальные уравнения системы примут такой вид

$$\begin{cases} x = -\varepsilon\Psi(z_0), \\ z = z_0 - \varepsilon^2(\Phi(z_0) - \Psi z_0), \\ z'_0 = 1 - \varepsilon^2\bar{\Psi}. \end{cases}$$

Вернемся к размерному времени $t = \varepsilon\tau = \frac{\tau}{\Omega}$, тогда из последнего уравнения

$$z_0 = \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\bar{\Psi}\right)t.$$

Подставляя это решение в первые два, получим

$$\begin{aligned} z &= \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\bar{\Psi}\right)t + \frac{1}{\Omega^2} \left[\bar{\Psi} \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\bar{\Psi}\right)t - \Phi \left(\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\bar{\Psi}\right)t \right) \right], \\ x &= -\frac{1}{\Omega} \Psi \left(\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\bar{\Psi}\right)t \right). \end{aligned}$$

Эту процедуру можно продолжить и получить решение с любой степенью точности относительно малой величины $1/\Omega$.

Так как величина $\bar{\Psi}$ является постоянной, не зависящей от Ω , то удобно ввести новую постоянную

$$\lambda = \Omega - \frac{1}{\Omega}\bar{\Psi}.$$

Тогда асимптотическое представление общего интеграла рассматриваемого уравнения для случая больших энергий будет иметь вид

$$z = \lambda(t + t_0) + \lambda^2 \left[\bar{\Psi} \cdot \lambda(t + t_0) - \Phi(\lambda(t + t_0)) \right].$$

Это решение содержит две произвольные постоянные λ и t_0 .

В качестве простейшего примера рассмотрим вращательные движения математического маятника

$$\ddot{z} + \sin z = 0.$$

В этом случае $f(z) = \sin z$. Тогда в наших обозначениях $\Psi(z) = 1 - \cos z$, $\bar{\Psi} = 1$, $\Phi(z) = z - \sin z$.

Используя эти выражения, можно записать следующее асимптотическое решение

$$z = \lambda t + \frac{1}{\lambda^2} \sin \lambda t + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

В этом решении параметр λ определяется начальными условиями. Если положить, что при $t = 0$, $z = 0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$, тогда $\lambda = \left(\dot{z}_0 - \frac{1}{\dot{z}_0}\right)$.

Решение рассматриваемого уравнения может быть получено через эллиптические функции, что может быть использовано для последующего исследования.

Сравним два этих решения.

Для рассматриваемого уравнения существует интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 - \cos z = h.$$

В случае колебательных движений $-1 < h < 1$. Асимптотическим движениям (движениям по сепаратрисам) соответствует значение $h = 1$. Т.к. нас интересуют вращательные движения, то положим $h > 1$. Тогда при наших начальных условиях

$$\dot{z}_0 = \sqrt{2(h + \cos z_0)} > 2.$$

Для этих движений решение имеет следующий вид

$$z = 2am\left(\frac{\dot{z}_0 t}{2}\right).$$

Модуль этой функции

$$k = \frac{2}{\dot{z}_0} < 1.$$

Сравним точное и приближенное решения для нескольких значений \dot{z}_0 .

$$\dot{z}_0 = 2.5 \Rightarrow k = 0.8, \lambda = 2.1$$

$$\dot{z}_0 = 4 \Rightarrow k = 0.5, \lambda = 3.75, \varepsilon = \frac{1}{\dot{z}_0} = 0.25$$

5.2 Возмущения кеплеровских орбит

Рассмотрим плоское движение материальной точки в гравитационном поле Земли. Если движение происходит вне атмосферы, то основной силой, действующей на точку, будет сила притяжения Земли. Поэтому движение рассматриваемой точки будет описываться следующим уравнением

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \varepsilon \vec{f},$$

где \vec{r} - радиус-вектор точки, μ - постоянная Гаусса для Земли, $\varepsilon \vec{f}$ - вектор возмущающих сил, ε - малый параметр. Первое слагаемой, стоящее в правой части этого уравнения, - это напряженность гравитационного поля Земли. В действительности, силы притяжения несколько отличаются от этой величины, т.к. Земля не представляет собой

точечную массу. Разность вектора напряженности реального поля Земли и величины $\frac{\mu}{r^3} \bar{r}$ является одной из составляющих вектора $\varepsilon \bar{f}$. Кроме того, к числу составляющих этого вектора можно отнести притяжение Луны и других планет, сопротивление атмосферы и т.д. Если космический аппарат находится под действием тяги двигателя малой тяги или его поверхность достаточно велика, чтобы могло проявляться световое давление, то ускорение от этих факторов также должно быть отнесено к числу возмущающих сил.

Спроектируем уравнение движения, как это принято в небесной механике, на оси полярной системы координат

$$\begin{cases} w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + \varepsilon f_r, \\ w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = +\varepsilon f_\varphi \end{cases}$$

Если учесть, что $v_r = \dot{r}$, а $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, т.е. $\dot{v}_r = \ddot{r}$ и $\dot{v}_\varphi = \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$, получим следующее уравнение относительно двух составляющих вектора скорости

$$\begin{cases} \dot{v}_r = \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \varepsilon f_r, \\ \dot{v}_\varphi = -\frac{v_r v_\varphi}{r} + \varepsilon f_\varphi. \end{cases}$$

Величина, определяемая равенством $\bar{c} = \bar{r} \times \bar{v}$, называется постоянной площадью. Если учесть, что

$$\bar{v} = v_r \bar{e}_r + v_\varphi \bar{e}_\varphi,$$

то для постоянной площадей можно записать такое выражение

$$\bar{c} = r^2 \dot{\varphi} (\bar{e}_r \times \bar{e}_\varphi).$$

Для удобства дальнейших преобразований введем следующую величину

$$u = \frac{l}{r}.$$

Тогда $\dot{\varphi} = u^2 c$.

Преобразуем первое из уравнений движения в полярных координатах.

$$\dot{v}_r = \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \varepsilon f_r = u^3 c^2 - \mu u^2 + \varepsilon f_r.$$

Для того, чтобы найти уравнение, которому удовлетворяет функция $u(\varphi)$, получим выражение для этой же производной другим способом, а именно:

$$v_r = \dot{r} [\varphi(t)] = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} u^2 c = u^2 c \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{l}{u} \right) = -c \frac{du}{d\varphi}.$$

$$\dot{v}_r = -\frac{d}{d\varphi} \left(c \frac{du}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\left(\frac{dc}{d\varphi} \frac{du}{d\varphi} + c \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) u^2 c.$$

Тогда

$$-\left(\frac{dc}{d\varphi} \frac{du}{d\varphi} + c \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right) u^2 c = u^3 c^2 - \mu u^2 + \varepsilon f_r.$$

Разделив обе части на $u^2 c^2$, получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{1}{c} \frac{du}{d\varphi} \frac{dc}{d\varphi} + u = \frac{\mu}{c^2} - \frac{\varepsilon f_r}{u^2 c^2}.$$

Составим уравнение, которому удовлетворяет величина c . Для этого воспользуемся следующими соотношениями

$$v_r = \dot{r} = -c \frac{du}{d\varphi}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = uc.$$

Тогда из второго уравнения движения в полярных координатах получим

$$\dot{v}_\varphi = \frac{d}{dt} cu = -\frac{v_r v_\varphi}{r} + \varepsilon f_\varphi = c^2 u^2 \frac{du}{d\varphi} + \varepsilon f_\varphi.$$

Но

$$\dot{v}_\varphi = \frac{d}{dt} cu = \left(c \frac{du}{d\varphi} + \frac{dc}{d\varphi} u \right) \frac{d\varphi}{dt} = \left(c \frac{du}{d\varphi} + \frac{dc}{d\varphi} u \right) cu^2.$$

Сравнивая эти два выражения, получим

$$\frac{dc}{d\varphi} = \frac{\varepsilon f_\varphi}{cu^3}.$$

В результате получаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных u и c :

$$\begin{cases} \frac{dc}{d\varphi} = \frac{\varepsilon f_\varphi}{cu^3} \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2} - \varepsilon \left(\frac{f_r}{u^2 c^2} + \frac{du}{d\varphi} \frac{f_\varphi}{c^2 u^3} \right) \end{cases}$$

Интегрируя эту систему можно получить зависимости элементов орбиты от полярного угла. Для перехода к аргументу t необходимо вычислить квадратуру

$$t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{cu^2}.$$

При $\varepsilon = 0$ система уравнений имеет точное решение

$$u(\varphi) = \frac{\mu}{c^2} + x \cos \varphi,$$

$$c = \text{const} = c_0,$$

где x и c_0 - некоторые постоянные.

Будем искать решение системы по общей схеме метода усреднений:

$$u = \frac{\mu}{c^2} + x \cos y,$$

$$\frac{du}{d\varphi} = -x \sin y,$$

где x и y - неизвестные функции угла φ . Выразим их из записанных уравнений

$$x = \sqrt{\left(u - \frac{\mu}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2},$$

$$y = -\operatorname{arctg} \left[\frac{du}{d\varphi} \frac{1}{u - \frac{\mu}{c^2}} \right].$$

Продифференцируем первое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \frac{1}{x} \left[-x \cos y \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\mu}{c^2} \right) - \frac{du}{d\varphi} \varepsilon \left(\frac{f_r}{u^2 c^2} + \frac{du}{d\varphi} \frac{f_\varphi}{u^3 c^2} \right) \right] = \\ &= \varepsilon \left\{ \frac{2\mu f_\varphi \cos y}{u^3 c^4} + \sin y \left[\frac{f_r}{u^2 c^2} - \frac{f_\varphi x \sin y}{u^3 c^3} \right] \right\}, \quad u = \frac{\mu}{c^2} + x \cos y. \end{aligned}$$

Переходя к новым переменным, получим такое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \varepsilon \left[\frac{2\mu f_\varphi c^2 \cos y}{(\mu + xc^2 \cos y)^3} + \frac{f_r c^2 \sin y}{(\mu + xc^2 \cos y)^2} - \frac{xf_\varphi c^4 \sin^2 y}{(\mu + xc^2 \cos y)^3} \right] = \\ &= \varepsilon F_1(x, c, y, \varphi). \end{aligned}$$

Дифференцируя равенство для y

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{1}{x^2} \left\{ x \cos y \left(-x \cos y - \varepsilon \left[\frac{f_r}{u^2 c^2} - \frac{f_\varphi x \sin y}{u^3 c^2} \right] \right) + \right. \\ &\quad \left. + x \sin y \left(-x \sin y - \frac{2\mu \varepsilon f_\varphi}{u^3 c^4} \right) \right\}. \end{aligned}$$

После перехода к переменным x и y , получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\varphi} &= 1 + \varepsilon \left[\frac{f_r c^2 \cos y}{x(\mu + xc^2 \cos y)^2} - \frac{f_\varphi c^4 \sin 2y}{2(\mu + xc^2 \cos y)^3} + \frac{2\mu f_\varphi c^2 \sin y}{x(\mu + xc^2 \cos y)^3} \right] = \\ &= 1 + \varepsilon F_3(x, c, y, \varphi). \end{aligned}$$

В итоге получаем такую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = \varepsilon F_1(x, c, y, \varphi), \\ \frac{dc}{d\varphi} = \varepsilon F_2(x, c, y, \varphi), \\ \frac{dy}{d\varphi} = 1 + \varepsilon F_3(x, c, y, \varphi). \end{cases}$$

В этой системе

$$F_2 = \frac{f_\varphi c^5}{(\mu + xc^2 \cos y)^2}.$$

Если функции f_φ и f_r являются периодическими функциями полярного угла φ , то выведенная система уравнений относится к тому типу, который мы изучаем. Она содержит две медленные переменные x и c и две быстрые - y и φ .

В том случае, когда возмущающие силы не зависят от полярного угла φ , то полученная система – это система с одной вращающейся фазой. Укороченные уравнения Ван-дер-Поля можно записать для нее в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = \varepsilon \bar{F}_1(x, c), \\ \frac{dc}{d\varphi} = \varepsilon \bar{F}_2(x, c), \\ \frac{dy}{d\varphi} = 1 + \varepsilon \bar{F}_3(x, c). \end{cases}$$

Переход от полной системы к укороченной производится усреднением по быстрой переменной y . В общем случае, правые части усредненных уравнений – это некоторые довольно сложные квадратуры.

5.3 Уравнения для оскулирующих элементов

Вернемся к уравнениям движения точки под действием силы притяжения к некоторому центральному телу \bar{F}_0 и добавочной возмущающей силы \bar{F} .

Дифференциальные уравнения движения точки в системе координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центральным телом, а направление осей остается неизменным, имеют следующий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_{0x} + f_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_{0y} + f_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_{0z} + f_z,$$

где проекции силы притяжения определяются так

$$f_{0x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad f_{0y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad f_{0z} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mu = G(m + m_0).$$

В записанных уравнениях G - постоянная всемирного тяготения, m - масса движущейся точки, m_0 - масса центрального тела.

Если возмущающая сила отсутствует, то мы получаем систему уравнений невозмущенного кеплеровского движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

общее решение которой выражается равенствами

$$x = r\alpha, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\alpha e \sin \varphi + \frac{d\alpha}{du} (1 + e \cos \varphi) \right],$$

$$y = r\beta, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\beta e \sin \varphi + \frac{d\beta}{du} (1 + e \cos \varphi) \right],$$

$$z = r\gamma, \quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\gamma e \sin \varphi + \frac{d\gamma}{du} (1 + e \cos \varphi) \right],$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

$$\alpha = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i,$$

$$\beta = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i,$$

$$\gamma = \sin u \sin i, \quad u = \varphi + \omega,$$

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^\varphi \frac{d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^2}$$

Мы видим, что общее решение уравнений невозмущенного движения зависит от шести произвольных постоянных. Для эллиптического движения таковыми выбираются Ω - долгота восходящего узла орбиты, i - наклонение орбиты, ω - аргумент перицентра, a - большая полуось орбиты или p - фокальный параметр, e - эксцентриситет орбиты, τ - момент прохождения через перицентр или M_0 - средняя аномалия в эпоху ($M_0 = n(t_0 - \tau)$, t_0 - начальный момент времени или эпоха).

Решение возмущенных уравнений отыскивается в том же виде, что и решение невозмущенной системы, с той лишь разницей, что $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ рассматриваются не как постоянные, а как функции времени, определяемые таким образом, чтобы удовлетворялись уравнениям возмущенного движения. Тогда решения уравнений невозмущенного движения можно рассматривать как формулы перехода от старых переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ к новым переменным $\Omega(t), i(t), \omega(t), p(t), e(t), \tau(t)$. Если такую замену осуществить, то вместо дифференциальных уравнений возмущенного движения будем иметь новую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{dt} = F_1, & \frac{dp}{dt} = F_4, \\ \frac{di}{dt} = F_2, & \frac{de}{dt} = F_5, \\ \frac{d\omega}{dt} = F_3, & \frac{d\tau}{dt} = F_6, \end{cases}$$

где $F_i = F_i(t, \Omega, i, \omega, p, e, \tau)$, $i = 1, \dots, 6$. Полученная система равносильна исходной.

Траектория возмущенного движения в каждый момент времени соприкасается с траекторией невозмущенного движения для этого же момента и представляет собой огибающую семейства траекторий невозмущенных движений.

Траектории семейства невозмущенных движений называются оскулирующими орбитами, а их элементы - оскулирующими элементами. Последняя система дифференциальных уравнений может быть названа системой уравнений для оскулирующих элементов. Возмущенное движение может рассматриваться как непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а возмущенная орбита – как непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита.

Оскулирующей плоскостью называется плоскость, проходящая через радиус-вектор \vec{r} точки P и ее вектор скорости. Оси в этой плоскости определяются следующим образом:

- ось PS направлена вдоль радиуса-вектора точки;
- ось PT лежит в оскулирующей плоскости, перпендикулярна PS и направлена по отношению к PS также, как ось Oy направлена по отношению к Ox ;
- ось PW направлена перпендикулярно оскулирующей плоскости так, чтобы введенные три оси составляли правую систему.

Направляющие косинусы новой системы координат определяются следующим образом:

Ось PS направлена вдоль радиуса-вектора

$$\begin{aligned}\cos(S, x) &= \alpha = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \cos(S, y) &= \beta = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \cos(S, z) &= \gamma = \sin u \sin i.\end{aligned}$$

Ось PT перпендикулярна PS :

$$\begin{aligned}\cos(T, x) &= \alpha' = -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i, \\ \cos(T, y) &= \beta' = -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i, \\ \cos(T, z) &= \gamma' = \cos u \sin i.\end{aligned}$$

Ось PW перпендикулярна оскулирующей плоскости:

$$\begin{aligned}\cos(W, x) &= \alpha'' = \sin \Omega \sin i, \\ \cos(W, y) &= \beta'' = -\cos \Omega \sin i, \\ \cos(W, z) &= \gamma'' = \cos i.\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{f}_T, \\ \frac{de}{dt} &= \sin \varphi \tilde{f}_S + \left[\cos \varphi + (\cos \varphi + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{f}_T, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{f}_W, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \cdot \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{f}_W, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos \varphi}{e} \tilde{f}_S + \frac{\sin \varphi}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{f}_T - \frac{r}{p} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i \cdot \tilde{f}_W, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{r^2}{e} \sqrt{\frac{1}{p\mu}} \left[(eN \sin \varphi - \cos \varphi) \tilde{f}_S + \frac{p}{r} N \tilde{f}_T \right], \end{aligned}$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения для нормированных проекций ускорения

$$\tilde{f}_T = \sqrt{\frac{p}{\mu}} f_T, \quad \tilde{f}_S = \sqrt{\frac{p}{\mu}} f_S, \quad \tilde{f}_W = \sqrt{\frac{p}{\mu}} f_W$$

и вспомогательной величины

$$N = 2 \frac{p^2}{r^2} \int_0^\varphi \frac{\cos \lambda d\lambda}{(1 + e \cos \lambda)^3}.$$

$u = \varphi + \omega$ - аргумент широты, $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$ - полярный радиус.

5.4 Задача о трансверсальной тяге

Рассмотрим движение космического аппарата с двигателем малой тяги, считая, что реактивная сила направлена по трансверсали, т.е. перпендикулярно радиусу-вектору космического аппарата, который рассматривается как материальная точка. Будем считать, что движение аппарата происходит в поле одного притягивающего центра, т.е. единственной возмущающей силой является сила тяги двигателя. Уравнения движения в полярных координатах будут иметь такой вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v_\varphi}{r}, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} + \varepsilon f, \end{aligned}$$

где εf есть ускорение, которое сообщается космическому аппарату работающим двигателем.

При решении этой задачи нас больше интересует не зависимость параметров от полярного угла, а тенденции в изменении параметров орбиты, поэтому более удобными будут другие переменные. Для простоты положим, что $\mu = 1$ (это всегда можно сделать, выбрав соответствующие масштабы).

Чтобы воспользоваться уже выведенными уравнениями перейдем к аргументу φ

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{rv_r}{v_\varphi}, \\ \frac{dv_r}{d\varphi} = v_\varphi - \frac{1}{rv_\varphi}, \\ \frac{dv_\varphi}{d\varphi} = -v_r + \varepsilon \frac{rf}{v_\varphi}, \\ \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r}{v_\varphi}. \end{cases}$$

Введем вместо r, v_r и v_φ новые переменные

$$\begin{cases} A = \frac{r}{2 - r(v_r^2 + v_\varphi^2)}, \\ \alpha = rv_\varphi(v_\varphi \cos \varphi + v_r \sin \varphi) - \cos \varphi, \\ \beta = rv_\varphi(v_\varphi \sin \varphi - v_r \cos \varphi) - \sin \varphi. \end{cases}$$

Введенные переменные имеет определенный физический смысл:

A - отношение большой полуоси оскулирующего эллипса к его начальному значению;

$$a = -\frac{\mu}{2h}, \quad \text{но } \mu=1, \quad 2h = \frac{rv^2 - 2\mu}{r} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = h \right)$$

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

α и β - это компоненты вектора Лапласа.

$$\bar{L} = \bar{v} \times \bar{c} - \frac{\mu}{r} \bar{r},$$

$$\bar{v} = v_r \bar{e}_r + v_\varphi \bar{e}_\varphi, \quad \bar{c} = rv_\varphi \bar{e}_r \times \bar{e}_\varphi$$

$$\bar{v} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & \bar{e}_\varphi & \bar{e}_z \\ v_r & v_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & rv_\varphi \end{vmatrix} = rv_\varphi^2 \bar{e}_r + rv_\varphi v_r \bar{e}_\varphi$$

Модуль вектора Лапласа связан с величиной эксцентриситета

$$L = \mu e,$$

поэтому при наших допущениях относительно μ для эллиптического движения $\alpha^2 + \beta^2 < 1$. Если новые переменные заданы, радиус-вектор и величины скоростей легко определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi &= rv_\varphi^2 - 1, \\ \alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi &= rv_\varphi v_r, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= r^2 v_\varphi^4 + r^2 v_\varphi^2 v_r^2 - 2rv_\varphi^2 + 1\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + 1} = -rv_\varphi^2 - rv_r^2 + 2 = \frac{r}{A} \quad r = A \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + 1}$$

$$v_\varphi^2 = \frac{1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi}{r} \Rightarrow v_\varphi = \sqrt{\frac{(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + 1)^2}{A(1 - \alpha^2 - \beta^2)}}$$

$$v_r = \frac{\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi}{rv_\varphi} \Rightarrow v_r = \sqrt{\frac{(\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi)^2}{A(1 - \alpha^2 - \beta^2)}}$$

Вычислим производные новых переменных

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\varphi} &= \frac{\frac{dr}{d\varphi} [2 - r(v_r^2 + v_\varphi^2)] + r \left[\frac{dr}{d\varphi} (v_r^2 + v_\varphi^2) + 2r \left(v_r \frac{dv_r}{d\varphi} + v_\varphi \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \right) \right]}{[2 - r(v_r^2 + v_\varphi^2)]^2} \\ &= \frac{2 \frac{dr}{d\varphi} + 2r^2 \left(v_r \frac{dv_r}{d\varphi} + v_\varphi \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \right)}{[2 - r(v_r^2 + v_\varphi^2)]^2}\end{aligned}$$

Если подставить значения производных от составляющих скорости, то получим

$$\frac{dA}{d\varphi} = \varepsilon \frac{2r^3 f}{[2 - r(v_r^2 + v_\varphi^2)]^2}$$

Так как

$$2 - r(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{r}{A},$$

то

$$\frac{dA}{d\varphi} = 2\varepsilon r A^2 f = \varepsilon \frac{2f(1 - \alpha^2 - \beta^2)A^3}{1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi}.$$

Аналогично составляются выражения для двух других производных

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\varphi} &= \varepsilon \frac{f(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 (2 \cos \varphi + \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin \varphi \cos \varphi + \alpha) A^2}{(1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^3}, \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= \varepsilon \frac{f(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 (2 \sin \varphi + \beta \sin^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \beta) A^2}{(1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^3}\end{aligned}$$

Полученная система содержит три медленные переменные A , α и β и одну быструю φ . Составим для этой системы уравнения первого приближения

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\varphi} &= \varepsilon \frac{f(1 - \alpha^2 - \beta^2)A^3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi}, \\ \frac{d\alpha}{d\varphi} &= \varepsilon \frac{fA^2(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos \varphi + \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin \varphi \cos \varphi + \alpha}{(1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^3} d\varphi, \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= \varepsilon \frac{fA^2(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(2 \sin \varphi + \beta \sin^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \cos \varphi + \beta)}{(1 + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)^3} d\varphi.\end{aligned}$$

В таком случае усреднение законно, если функция f – величина постоянная или не зависит от φ . Усреднение можно провести, если f – медленно меняющаяся функция полярного угла. Если же величина тяги задана как медленно меняющаяся функция времени, то для проведения усреднения потребуется еще одно уравнение

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r}{v_\varphi}.$$

В этом случае в рассматриваемой системе уравнений будет уже две быстрые переменные t и φ .

Рассмотрим случай, когда величина тяги f постоянна. Интегралы в правых частях относятся к числу табличных и вычисляются в явном виде. В результате получим:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\varphi} &= 2\varepsilon f A^3 \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \\ \frac{d\alpha}{d\varphi} &= -\frac{3}{2} \varepsilon f A^2 \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \cdot \alpha, \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= -\frac{3}{2} \varepsilon f A^2 \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \cdot \beta.\end{aligned}$$

Численное интегрирование этой системы не представляет никакого труда и может быть выполнено с большим шагом по аргументу φ . Изучим некоторые свойства полученной системы. Следует отметить, что система допускает два первых интеграла. Действительно, переходя к аргументу A , мы получим следующие два уравнения, которые не содержат возмущающей силы f :

$$\frac{d\alpha}{dA} = -\frac{3\alpha}{4A}, \quad \frac{d\beta}{dA} = -\frac{3\beta}{4A}.$$

Эти уравнения легко интегрируются, и мы найдем два первых интеграла

$$\alpha = \alpha_0 A^{-3/4}, \quad \beta = \beta_0 A^{-3/4},$$

где α_0 и β_0 – начальные значения этих величин. Если эти формулы подставить в первое уравнение системы, то получим одно нелинейное уравнение первого порядка

$$\frac{dA}{d\varphi} = 2\varepsilon f A^3 \sqrt{1 - (\alpha_0^2 + \beta_0^2) A^{-3/2}}.$$

Если функция f постоянна или является функцией полярного угла, то в уравнении переменные разделяются и задача сводится к квадратурам.

Выберем такие начальные условия, при которых интегрирование упрощается. Пусть $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Тогда из первых интегралов следует, что для любого φ

$$\alpha \equiv \beta \equiv 0.$$

Это означает, что эксцентриситет $e = 0$, т.е. движение происходит по круговой орбите. Таким образом, если старт происходит с круговой орбиты, т.е. если $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, то в течение всего времени под действием трансверсальной тяги движение аппарата будет происходить по круговой орбите.

Этот вывод сделан на основе исследования уравнений первого приближения. Следовательно, мы можем говорить только о том, что в течение относительно большого промежутка времени (порядка $1/\varepsilon$) оскулирующая орбита аппарата будет близка к круговой.

Уравнение для A примет вид

$$\frac{dA}{d\varphi} = 2\varepsilon f A^3.$$

Если f – величина постоянная, то уравнение интегрируется в явном виде

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon f \varphi}}.$$

В том случае, когда $e = 0$, величина большой полуоси оскулирующей орбиты аппарата есть радиус-вектор аппарата. Следовательно, последняя формула дает закон изменения радиуса-вектора. При

$$\varphi = \varphi^* = \frac{1}{\varepsilon f},$$

радиус-вектор обращается в бесконечность. Это означает, что мы перешли границу допустимого интервала, на котором справедливы асимптотические формулы. Физически же это означает следующее. С увеличением радиуса орбиты время полного оборота непрерывно возрастает, следовательно, те величины, которые за один обород окружности малого радиуса не успели существенно измениться, сильно изменяются при обходе орбиты большого радиуса.

Для выбранных начальных условий можно получить зависимость $A(t)$. Если $\alpha = \beta = 0$, то

$$r = A \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + 1} = A,$$

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi + 1)^2}{A(1 - \alpha^2 - \beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$v_r = \sqrt{\frac{(\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi)^2}{A(1 - \alpha^2 - \beta^2)}} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r}{v_\varphi} = A^{3/2}.$$

Но $\frac{dA}{d\varphi} = 2\varepsilon f A^3$. Следовательно,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = 2\varepsilon f A^{3/2}$$

и при постоянном f получаем

$$A = \frac{1}{(1 - \varepsilon ft)^2}.$$

5.5 Движение спутника на последних оборотах

На последних оборотах, которые проходят на высотах около 100 км над поверхностью Земли, влияние аэродинамического сопротивления перестает играть роль возмущающего фактора и становится одной из сил, определяющих весь характер движения.

В этих условиях космический аппарат уже нельзя рассматривать как материальную точку, так как величина аэродинамической силы, точнее коэффициент аэродинамического сопротивления, будет существенно зависеть от ориентации спутника относительно его скорости.

Если спутник не будет стабилизирован специальным образом, то он будет находиться в состоянии вращательного движения. Рассмотрим этот класс движений, когда вращение происходит с достаточно большой угловой скоростью, т.е. с угловой скоростью, которая во много раз больше угловой скорости вращения спутника вокруг Земли. В этом

случае в задаче появляется малый параметр – отношение времени одного оборота спутника вокруг его центра инерции ко времени одного полного оборота по орбите.

Остановимся на случае плоского движения аппарата под действием гравитационного поля, аэродинамической силы и ее момента относительно центра масс аппарата.

Запишем векторные уравнения движения центра масс аппарата

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v},$$

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \vec{F}.$$

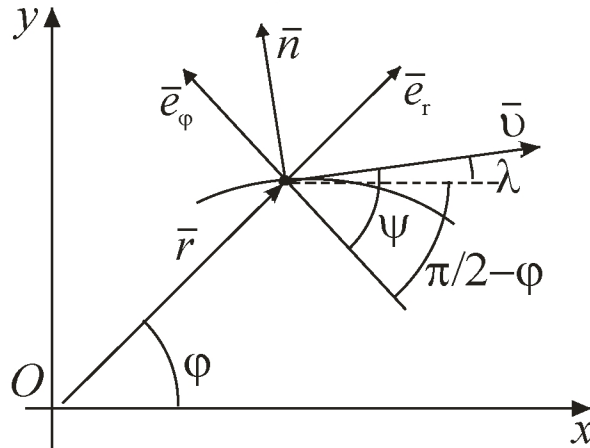


Рисунок 5.2 Ориентация осей

Введенный угол ψ есть угол наклона вектора скорости к местному горизонту, а λ обозначает угол, который образует вектор скорости с некоторым фиксированным в пространстве направлением – осью Ox .

С помощью угла ψ можно определить радиальную и окружную составляющие вектора скорости:

$$v_r = \dot{r} = v \sin \psi, \quad v_\phi = r\dot{\phi} = -v \cos \psi$$

или же

$$\dot{r} = v \sin \psi, \quad \dot{\phi} = -\frac{v}{r} \cos \psi.$$

Запишем развернутое выражение для аэродинамической силы. Для простоты можно считать, что подъемной силой можно пренебречь, для силы лобового сопротивления запишем следующее соотношение

$$\vec{F} = -\frac{\rho(r)v^2}{2m} S c_x(v, r, \alpha) \frac{\vec{v}}{v}.$$

В этой формуле ρ – плотность атмосферы (она зависит от высоты орбиты и, следовательно, от величины r), m – масса аппарата, S – площадь поперечного сечения. Коэффициент c_x зависит, кроме всего прочего, от угла атаки α и является четной функцией этого угла.

Спроектируем векторное уравнение движения на естественные оси координат

$$\begin{cases} w_r = \dot{r} = -\frac{\mu}{r^2} \sin \psi - \frac{\rho v^2}{2m} S c_x = f_1(r, v, \psi, \alpha), \\ w_n = \frac{v^2}{\rho} = v \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \cos \psi. \end{cases}$$

Исключим из полученных уравнений величину λ . Для этого воспользуемся следующим соотношением

$$\psi = \lambda + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \Rightarrow \dot{\psi} = \dot{\lambda} - \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\psi} + \frac{v}{r} \cos \psi.$$

Тогда получаем

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\mu}{r^2 v} - \frac{v}{r} \right) \cos \psi = f_2(r, v, \psi).$$

Составим уравнения вращения аппарата вокруг центра масс

$$J_c \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = M(v, r, \alpha).$$

В этой формуле M - аэродинамический момент, который также зависит от угла атаки. Угол, который образует ось аппарата с осью Ox , - это угол тангажа:

$$\vartheta = \alpha + \lambda.$$

Найдем вторую производную от λ из уравнений движения центра масс

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} &= \left(- \frac{\mu}{r^2 v} \cos \psi \right)' = \\ &= \frac{\mu}{r^2 v} \sin \psi f_2(r, v, \psi) + \frac{\mu}{r^3} \sin 2\psi + \frac{\mu}{r^2 v^2} f_1(r, v, \psi, \alpha). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \\ &= \frac{M(r, v, \alpha)}{J_c} - \left[\frac{\mu}{r^2 v} \sin \psi f_2(r, v, \psi) + \frac{\mu}{r^3} \sin 2\psi + \frac{\mu}{r^2 v^2} f_1(r, v, \psi, \alpha) \right] = \\ &= f_3(r, v, \psi, \alpha) \end{aligned}$$

В результате мы получили систему шестого порядка, описывающую плоское движение аппарата. Т.к. правые части уравнений не содержат переменной φ , достаточно найти решение системы пятого порядка.

Введем обозначение

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0 + z,$$

где ω_0 - угловая скорость вращения аппарата в некоторый фиксированный момент времени t_0 .

Согласно нашему основному предположению время $T = 2\pi / \omega_0$ мало по сравнению со временем полного оборота аппарата вокруг Земли, т.е. ω_0 велико.

Введем малый параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega_0}$$

и сделаем замену независимой переменной

$$\tau = \omega_0 t.$$

В итоге рассматриваемая система примет такой вид

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = \varepsilon v \sin \psi, \\ \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon f_1(r, v, \psi, \alpha), \\ \frac{d\psi}{d\tau} = \varepsilon f_2(r, v, \psi), \\ \frac{dz}{d\tau} = \varepsilon f_3(r, v, \psi, \alpha), \\ \frac{d\alpha}{d\tau} = 1 + \varepsilon z. \end{cases}$$

В таком виде система содержит одну вращающуюся фазу – угол α и четыре медленных переменных. Для ее исследования может быть использована стандартная процедура.

Остановимся только на анализе уравнений первого приближения

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon f_1(r, v, \psi, \alpha), \\ \frac{dz}{d\tau} = \varepsilon f_3(r, v, \psi, \alpha). \end{cases}$$

Остальные уравнения не содержат угла атаки α и после усреднения останутся без изменений. Рассмотрим первое уравнение. После осреднения его правая часть будет иметь такой вид

$$\bar{f}_1(r, v, \psi) = -\frac{\mu}{r^2} \sin \psi - \frac{\rho v^2}{2m} S \bar{c}_x(r, v).$$

Так как c_x - обычно четная функция угла атаки, то величина \bar{c}_x заведомо не равна нулю.

Величина аэродинамического момента $M(r, v, \alpha)$ обычно бывает нечетной функцией угла атаки α , поэтому для функции $f_3(r, v, \psi, \alpha)$ после усреднения получим такое выражение

$$\bar{f}_3(r, v, \psi) = -\left[\frac{\mu}{r^2 v} \sin \psi f_2(r, v, \psi) + \frac{\mu}{r^3} \sin 2\psi + \frac{\mu}{r^2 v^2} \bar{f}_1(r, v, \psi) \right].$$

Таким образом, в первом приближении мы должны проинтегрировать систему трех уравнений. Выпишем эти уравнения, возвращаясь к старому масштабу времени:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \sin \psi, \\ \frac{dv}{dt} = \bar{f}_1(r, v, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} = f_2(r, v, \psi). \end{cases}$$

После определения этих величин оставшиеся можно найти с помощью квадратур

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f_3(r, v, \psi), \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega_0 + z. \end{cases}$$

Итак, в первом приближении уравнения движения центра масс могут быть отделены от уравнений движения относительно центра масс. Поэтому аэродинамическая сила, которая входит в эти уравнения, может быть определена простым усреднением ее по углу атаки.

Определив движение центра масс, затем можно рассчитать характер вращательного движения. Особенность этого приближения состоит еще и в том, что величина угла атаки и угловая скорость вращения аппарата не оказывают никакого влияния на движение центра масс. В свою очередь характер вращательного движения целиком определяется особенностями движения центра масс. Для исследования взаимного влияния этих движений друг на друга необходимо рассмотреть более высокие приближения.

При выводе уравнений первого приближения мы предполагали, что аэродинамическая сила сводится только к силе лобового сопротивления. Учесть влияние подъемной силы не так трудно, но в рамках уравнений первого приближения ее учет приведет к нулевому эффекту, так как подъемная сила является нечетной функцией угла атаки и ее среднее значение будет равно нулю.

5.6 Движение спутника в конце последнего оборота

Рассмотрим движение осесимметричного спутника, входящего в плотные слои атмосферы. Будем считать, что спутник имеет большой запас статической устойчивости.

Основными силами, действующими на спутник, будут сила тяжести и аэродинамические силы. Но в плотных слоях атмосферы в силах появляется одна дополнительная особенность. Если аппарат, обладающий аэродинамической стабилизацией, входит в плотные слои атмосферы, то хаотическое вращение постепенно замедляется и переходит в колебательное движение. Следовательно, в конце последнего оборота (при подходе к Земле) движение спутника будет носить не вращательный, а колебательный характер. Это необходимо учесть при применении асимптотических методов. Уравнения движения можно записать в таком же виде, как и в предыдущем случае. Но последний участок траектории, проходящий в плотных слоях атмосферы, невелик, что позволяет поле тяготения считать постоянным, поэтому можно использовать декартовы координаты.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v}, \\ \dot{\vec{v}} &= -g\vec{j} + \vec{F}. \end{aligned}$$

Как и прежде, кинематические условия можно получить, проектируя первое уравнение на декартовы оси координат

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \psi, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \psi.$$

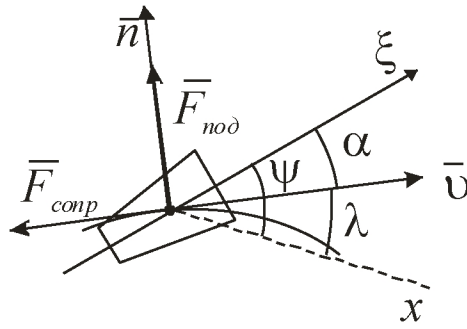


Рисунок 5.3 – Аэродинамические силы, действующие на спутник

Аэродинамическую силу представим в таком виде

$$\bar{F} = -\frac{\rho(y)v^2}{2m} Sc_x(v, y, \alpha) \bar{\tau} + \frac{\rho(y)v^2}{2m} Sc_y(v, y, \alpha) \bar{n}.$$

Первое слагаемое – лобовое сопротивление, второе – подъемная сила. Ось ξ направлена вдоль оси аэродинамической симметрии. Так как линия местного горизонта совпадает с неподвижной осью Ox , то

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + v \frac{d\psi}{dt} \bar{n}$$

и динамические уравнения в проекциях на оси скоростной системы координат можно записать следующим образом

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \sin \psi - \frac{\rho v^2}{2m} Sc_x(v, y, \alpha) = f_1(v, \psi, y, \alpha), \\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{g \cos \psi}{v} - \frac{\rho v^2}{2m} Sc_y(v, y, \alpha) = f_2(v, \psi, y, \alpha). \end{cases}$$

Уравнение моментов запишем таким образом

$$J_c \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = M(v, y, \alpha, \dot{\vartheta}).$$

В этом уравнении приходится учитывать зависимость аэродинамического момента от угловой скорости колебаний, так как сама угловая скорость велика, а атмосфера достаточно плотная.

В аэродинамике величину аэродинамического момента обычно представляют в виде суммы двух слагаемых

$$M(v, y, \alpha, \dot{\vartheta}) = \frac{\rho v^2}{2} Slm_z(v, y, \alpha) + \frac{\rho v}{2} Slm_z^\omega(v, y) \dot{\vartheta}.$$

Первое слагаемое называется статическим моментом, второе – демпфирующим. l – некоторый характерный размер аппарата (например, его длина). Зависимость величины демпфирующего момента от угловой скорости обычно считается линейной.

Между углами существует такая зависимость

$$\vartheta = \alpha + \psi,$$

поэтому

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \varphi(v, \psi, y, \alpha, \dot{\alpha}),$$

где

$$\varphi = \frac{d}{dt} \left[-\frac{g \cos \psi}{v} - \frac{\rho v^2}{2m} S c_y(v, y, \alpha) \right] = \frac{df_2}{dt}.$$

Используя полученные равенства уравнение моментов можно переписать таким образом

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + f_3 \frac{d\alpha}{dt} + f_4^*(v, \psi, y, \alpha) = f_5(v, \psi, y),$$

где

$$f_3 = \frac{\rho v}{2J} S l m_z^{\omega} - \frac{\rho v}{2m} S \frac{\partial c_y}{\partial \alpha},$$

$$f_4^* = \frac{\rho v^2}{2I} S l m_z - S c_y \left[\rho g \sin \psi - \frac{d(\rho v)}{dt} \right],$$

$$f_5 = \frac{g^2 \sin 2\psi}{2v^2}.$$

В результате мы получили систему шестого порядка, которая дает полное описание плоского движения:

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \psi, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \psi,$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \psi - \frac{\rho v^2}{2m} S c_x(v, y, \alpha) = f_1(v, \psi, y, \alpha),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{g \cos \psi}{v} - \frac{\rho v^2}{2m} S c_y(v, y, \alpha) = f_2(v, \psi, y, \alpha),$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + f_3 \frac{d\alpha}{dt} + f_4^*(v, \psi, y, \alpha) = f_5(v, \psi, y).$$

Если аппарат обладает большим запасом статической устойчивости, то величина f_4^* всегда положительна и велика. Поэтому можно считать, что

$$f_4^* = \lambda^2 f_4,$$

где λ^2 - некоторый большой параметр.

Снова проведем замену независимой переменной

$$t = \frac{\tau}{\lambda} = \varepsilon \tau.$$

После этой замены система примет такой вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon v \cos \psi, \quad \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon v \sin \psi,$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \varepsilon f_1(v, \psi, y, \alpha), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \varepsilon f_2(v, \psi, y, \alpha),$$

$$\frac{d^2 \alpha}{d\tau^2} + \varepsilon f_3 \frac{d\alpha}{d\tau} + f_4(v, \psi, y, \alpha) = \varepsilon f_5(v, \psi, y).$$

При $\varepsilon = 0$ из этой системы получаем

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + f_4(v, \psi, y, \alpha) = 0, \quad v = \text{const} = v_0,$$

$$\psi = \text{const} = \psi_0, \quad y = \text{const} = y_0.$$

Будем считать, что решение невозмущенной системы при условии, что v, ψ и y - некоторые постоянные, нам известно и имеет такой вид

$$\alpha = \alpha(C, \gamma, v, \psi, y),$$

где

$$\gamma = \omega(C, v, \psi, y)(\tau + \tau_0),$$

а C - постоянная интегрирования, которую мы будем называть амплитудой, τ_0 - аддитивная постоянная. Так как движение, по предположению, является колебательным, то функция α будет периодической функцией переменной τ некоторого периода $T(C)$. Величина $\omega(C, v, \psi, y)$ служит нормирующим множителем, таким чтобы функция α по переменной γ имела бы период, равный 2π . Знание общего решения системы в предположении, что $v = \text{const}, \psi = \text{const}$ и $y = \text{const}$ позволяет использовать стандартную процедуру метода осреднения.

Рассмотрим подробнее случай, когда колебания малы и функцию f_4 можно представить в следующем виде

$$f_4(v, \psi, y, \alpha) = \omega^2(v, \psi, y)\alpha.$$

В этом случае

$$\alpha = C \cos \gamma, \quad \gamma = \omega(v, \psi, y)(\tau + \tau_0)$$

и уравнение невозмущенного движения будет таким

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} = -\omega^2\alpha.$$

Так как у тела, обладающего аэродинамической симметрией, m_z и c_y - нечетные функции угла атаки, то линеаризация этих функций допустима и в том случае, когда мы рассматриваем квадратичную теорию, поскольку, отбросив в уравнении

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + f_4(v, \psi, y, \alpha) = 0$$

члены третьего порядка малости относительно угла атаки α , мы тем не менее приходим к линейному уравнению.

В возмущенной системе перейдем теперь от переменной α к переменным C и γ . Для этого к предпоследнему равенству добавим еще такое

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -C\omega(v, \psi, y)\sin \gamma.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} C = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\omega^2(v, \psi, y)} \left(\frac{d\alpha}{d\tau} \right)^2}, \\ \gamma = -\text{arctg} \left(\frac{1}{\omega\alpha} \frac{d\alpha}{d\tau} \right). \end{cases}$$

Вычислим производные от новых переменных

$$\frac{dC}{d\tau} = -\varepsilon C \sin^2 \gamma \left[f_3 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} f_1 + \frac{\partial \omega}{\partial \psi} f_2 + \frac{\partial \omega}{\partial y} v \sin \psi \right) \right] -$$

$$- \varepsilon \omega \sin \gamma f_5 = -\varepsilon C \sin^2 \gamma f_6(v, \psi, y, C \cos \gamma)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \omega - \varepsilon \left[f_6(v, \psi, y, C \cos \gamma) \sin 2\gamma + \frac{1}{\omega C} f_5 \cos \gamma \right].$$

В результате вместо исходной возмущенной системы мы пришли к другой системе, в которой последнее уравнение второго порядка заменили двумя уравнениями первого порядка, а в правых частях второго и третьего уравнения вместо α подставлено его выражение $C \cos \gamma$. Преобразованная система вполне эквивалентна исходной, но является системой с вращающейся фазой: она содержит пять медленных переменных x, y, v, ψ, C и одну быструю - γ . Правые части этой системы представляют собой периодические функции γ периода 2π . Первое уравнение интегрируется независимо от других, так как x не входит в правые части остальных уравнений. Исследование полученной системы может быть проведено с использованием стандартной процедуры разделения движений.

Рассмотрим первое приближение, для чего достаточно усреднить правые части по быстрой переменной γ .

Первые два уравнения не содержат угла атаки и останутся без изменения, их удобно записать, возвращаясь к переменной t :

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \psi, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \psi.$$

Рассмотрим третье уравнение этой системы. Используя выражение для f_1 , после усреднения приведем его к следующему виду

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \psi - \frac{\rho v^2 S}{4\pi m} \int_0^{2\pi} c_x(v, y, C \cos \gamma) d\gamma.$$

При малых углах атаки коэффициент подъемной силы можно записать следующим образом

$$c_x = c_{x0} + k\alpha^2, \quad k > 0.$$

Следовательно, после усреднения уравнение можно записать так

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \psi - \frac{\rho v^2 S}{2m} \left(c_{x0} + \frac{kC^2}{2} \right)$$

или, если ограничиться линейной теорией, то

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \psi - \frac{\rho v^2 S}{2m} c_{x0}(v, \psi, y).$$

Рассмотрим теперь четвертое уравнение системы, полагая в нем $c_y = c_y^\alpha \alpha$. После усреднения оно примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{g \cos \psi}{v}.$$

Мы видим, что в случае использования линейной теории, движение центра масс в первом приближении может быть описано независимо от движения центра масс, причем уравнение в проекции на нормаль записывается так, как если бы движение происходило в пустоте и все действие аэродинамических сил сводилось к лобовому сопротивлению, вычисляемого для нулевого угла атаки. В квадратичной теории проекция уравнения на

касательную к траектории содержит квадрат амплитуды. Поэтому в этом случае уже в первом приближении нельзя разделить движение центра масс и движение относительно центра масс.

Уравнение для C после усреднения примет следующий вид

$$\frac{dC}{d\tau} = -\frac{\varepsilon C f_3}{2} - \frac{\varepsilon C}{2\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \bar{f}_1 + \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \bar{f}_2 + \frac{\partial \omega}{\partial y} v \sin \psi \right).$$

При усреднении слагаемого, содержащего f_1 , была принята линейная теория: \bar{f}_1 означает, что в выражении лобового сопротивления мы приняли $c_x = c_{x0}$, $\bar{f}_2 = -\frac{g \cos \psi}{v}$

. Таким образом, величина, стоящая в скобке, равна $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\omega}{dt}$. На этом основании последнее уравнение, если вернуться к аргументу t , может быть переписано так

$$\frac{1}{C} \frac{dC}{dt} = -\frac{f_3}{2} - \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{dt}.$$

В этом уравнении переменные разделены, поэтому после интегрирования получим

$$C = \frac{C_0}{\sqrt{\omega}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t f_3 dt \right),$$

где C_0 - постоянная интегрирования, равная начальному значению амплитуды угла атаки.

Таким образом, в линейной теории первое приближение усредненных уравнений позволяет рассчитать траекторию центра масс независимо от колебательного движения аппарата и найти, следовательно, зависимость $\omega(t)$ и $f_3(t)$. Для расчета амплитуды колебательного движения мы должны вычислить одну квадратуру $\int f_3(t) dt$, после чего для амплитуды колебаний C получим явное выражение.

В квадратичной теории переменные уже не разделяются. Рассмотрим Уравнение для амплитуды с учетом членов второго порядка малости

$$\frac{dC}{d\tau} = -\varepsilon \left(f_3 C \sin^2 \gamma + \frac{C \sin^2 \gamma}{\omega} \frac{d\omega}{dt} - \frac{C \sin^2 \gamma}{\omega} \frac{\rho v^2}{2m} Sk C^2 \cos^2 \gamma \right)$$

После усреднения это уравнение примет такой вид

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{C f_3}{2} - \frac{C}{2\omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{C^3}{8\omega} \frac{\rho v^2 Sk}{2m}.$$

В этом уравнении переменные уже не разделяются. Для определения закона изменения амплитуды потребуются численное интегрирование.

Рассмотрим последнее из уравнений, описывающих движение аппарата – уравнение, которое дает закон изменения фазы. В линейном случае оно выглядит очень просто

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega,$$

откуда

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \lambda \int_0^t \omega(t) dt.$$

В рамках квадратичной теории для $\gamma(t)$ несколько усложнится за счет слагаемого в выражении f_1 , которое содержит множителем величину $C^2 k^2 \cos^2 \gamma$.

Для исследования более точных эффектов, например для изучения влияния подъемной силы на величину дальности в предположении колебательного движения, мы должны уже изучать третье приближение. Первое приближение не может дать никакой информации о рассеивании элементов траектории вследствие колебательного движения, так как среднее значение подъемной силы в этом приближении равно нулю.

5.7 Резонансные задачи в динамике искусственных спутников

Если возмущающая сила, действующая на спутник, зависит от времени, то мы приходим к системе уравнений с двумя быстрыми переменными. Примером такой силы может служить сила притяжения Луны, влиянием которой нельзя пренебречь, если спутник находится на высокой орбите. В этом случае возмущения, вызываемые Луной, будут некоторыми периодическими функциями времени и, следовательно, полная система уравнений будет содержать две быстрые переменные. Если при этом периоды обращения спутника T и Луны T_L будут связаны соотношением

$$T_L = kT,$$

где k - целое число, мы будем иметь резонансный случай.

Резонансные явления могут появиться при изучении относительного движения спутника в центральном поле. Если тело не обладает центральной симметрией, то на него в поле тяготения действует некоторый момент, который называется гравитационным. Под действием этого момента тело, движущееся по орбите вокруг Земли, совершает колебательное движение. Это движение в плоском случае может быть описано следующим уравнением:

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \delta}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\delta}{d\nu} + \omega^2 \sin \delta = 4e \sin \nu.$$

В этом уравнении $\omega^2 = 3 \frac{A-C}{B}$ - параметр, характеризующий асимметрию

распределения масс. B - момент инерции аппарата относительно оси, перпендикулярной плоскости орбиты спутника, A и C - моменты инерции аппарата относительно осей инерции, лежащих в плоскости орбиты, для определенности будем считать, что $B > A > C$ ($a > 0$).

$\delta = 2\psi$, где ψ - угол между радиус-вектором центра масс аппарата и осью инерции, момент инерции относительно которой равен C , т.е. наиболее длинной из осей инерции, лежащих в плоскости орбиты.

ν - истинная аномалия, e - эксцентриситет орбиты спутника. Если движение происходит по круговой орбите, т.е. $e = 0$, то уравнение принимает следующий вид

$$\frac{d^2 \delta}{d\nu^2} + \omega^2 \sin \delta = 0.$$

Последнее уравнение допускает два стационарных режима $\delta = 0$ и $\delta = \pi$. Устойчивым является первый режим $\delta = 0$, соответствующий тому случаю, когда наиболее длинная ось инерции коллинеарна радиус-вектору. Во втором случае $\delta = \pi$ или $\psi = \pi/2$, т.е. наиболее длинная ось инерции перпендикулярна радиус-вектору.

Предположим, что эксцентриситет орбиты e - величина малая, тогда уравнение возмущенного движения можно переписать так

$$\frac{d^2\delta}{dv^2} + \omega^2 \sin \delta = e \left(4 \sin \nu + 2 \sin \nu \frac{d\delta}{dv} + \omega^2 \cos \nu \sin \delta \right) + O(e^2)$$

В этом уравнении считается, что

$$\frac{d^2\delta}{dv^2} = -\omega^2 \sin \delta + O(e).$$

Полученное уравнение может быть исследовано асимптотическими методами. Уравнения невозмущенного движения имеют решение в эллиптических функциях. При малых колебаниях оси с моментом инерции C около своего положения равновесия решение можно записать следующим образом

$$\delta = x \cos y,$$

а само уравнение с учетом членов не выше первого порядка малости

$$\frac{d^2\delta}{dv^2} + \omega^2 \delta = e \left(4 \sin \nu + 2 \sin \nu \frac{d\delta}{dv} + \omega^2 \cos \nu \delta \right).$$

Если ввести обычное дополнительное условие

$$\frac{d\delta}{dv} = -\omega x \sin y$$

то мы можем перейти к стандартной системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dv} = -\frac{e}{\omega} \left(4 \sin \nu - 2 \sin \nu \sin y \omega x + \omega^2 x \cos y \cos \nu \right) \sin y, \\ \frac{dy}{dv} = \omega - \frac{e}{\omega x} \left(4 \sin \nu - 2 \sin \nu \sin y \omega x + \omega^2 x \cos y \cos \nu \right) \cos y, \\ \frac{dv}{dv} = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет две быстрые переменные ν и y . При отсутствии резонанса первое приближение, которое получается усреднением системы по обеим быстрым переменным, дает

$$x = \text{const} = x_0, \quad y = y_0 + \omega \nu,$$

т.е. с точностью до величин первого порядка малости аппарат будет совершать гармонические колебания около положения равновесия.

Если $\frac{A-C}{B} = \frac{1}{3}$, т.е. $\omega = 1$, то мы получим главный резонанс. Сделаем

стандартную для этого случая замену

$$y = \nu + z, \quad \omega = 1 + eh$$

и перепишем систему для этого случая

$$\begin{cases} \frac{dx}{dv} = -\frac{e}{\omega} \left[4 \sin \nu - 2 \sin \nu \sin(\nu + z) \omega x + \omega^2 x \cos(\nu + z) \cos \nu \right] \times \\ \quad \times \sin(\nu + z), \\ \frac{dz}{dv} = -\frac{e}{\omega x} \left[4 \sin \nu - 2 \sin \nu \sin(\nu + z) \omega x + \omega^2 x \cos(\nu + z) \cos \nu \right] \times \\ \quad \times \cos(\nu + z) + \varepsilon h, \\ \frac{dv}{dv} = 1. \end{cases}$$

Система содержит только одну быструю переменную ν , по которой надо провести усреднение.

Если воспользоваться тригонометрическими соотношениями

$$\sin \nu = \sin(\nu + z) \cos z - \cos(\nu + z) \sin z,$$

$$\cos \nu = \cos(\nu + z) \cos z + \sin(\nu + z) \sin z$$

и учесть, что

$$\int_0^{2\pi} f(\nu + z) d\nu = \int_z^{2\pi+z} f(\xi) d\xi,$$

то после усреднения по переменной $y = \nu + z$ получим

$$\begin{cases} \frac{dx}{dv} = -\frac{2e}{\omega} \cos z, \\ \frac{dz}{dv} = -\frac{2e}{\omega x} \sin z + \varepsilon h. \end{cases}$$

В полученной системе есть два стационарных режима

$$1. \quad z = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{2}{\omega h},$$

$$2. \quad z = -\frac{\pi}{2}, \quad x = -\frac{2}{\omega h}.$$

При $h = 0$ эти решения теряют смысл: система не имеет установившихся режимов – в линейных системах нельзя исследовать поведение системы в точке резонанса.

Для того, чтобы исследовать характер колебаний при нулевой расстройке, при упрощении уравнения возмущенного движения надо удерживать члены более высокого порядка относительно δ . Выберем следующую замену

$$\sin \delta = \delta - \frac{\delta^3}{6}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta}{dv^2} + \omega^2 \left(\delta - \frac{\delta^3}{6} \right) &= e \left(4 \sin \nu + 2 \sin \nu \frac{d\delta}{dv} + \omega^2 \cos \nu \left(\delta - \frac{\delta^3}{6} \right) \right) + O(e^4) \text{ или} \\ \frac{d^2 \delta}{dv^2} + \omega^2 \delta &= e \left(4 \sin \nu + 2 \sin \nu \frac{d\delta}{dv} + \omega^2 \delta \cos \nu + \alpha \delta^3 \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{\omega^2}{6e}$.

Тогда система в стандартной форме получит такой вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\nu} = -\frac{e}{\omega} \left[4\sin\nu - 2\sin\nu\sin(\nu+z)\omega x + \omega^2 x \cos(\nu+z)\cos\nu + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \alpha x^3 \cos^3(\nu+z) \right] \sin(\nu+z), \\ \frac{dz}{d\nu} = -\frac{e}{\omega x} \left[4\sin\nu - 2\sin\nu\sin(\nu+z)\omega x + \omega^2 x \cos(\nu+z)\cos\nu + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \alpha x^3 \cos^3(\nu+z) \right] \cos(\nu+z) + eh, \\ \frac{d\nu}{d\nu} = 1. \end{cases}$$

После усреднения получим

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\nu} = -\frac{2e}{\omega} \cos z, \\ \frac{dz}{d\nu} = -\frac{2e}{\omega x} \left(\sin z + \frac{3}{8} x^3 \right) + eh. \end{cases}$$

Новая система допускает стационарные режимы при нулевой расстройке $h=0$

$$\begin{aligned} 1. \quad z = \frac{\pi}{2}, \quad x = -2\sqrt[3]{\frac{1}{3\alpha}}, \\ 2. \quad z = -\frac{\pi}{2}, \quad x = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3\alpha}}. \end{aligned}$$

В случае главного резонанса

$$\alpha = \frac{\omega^2}{6e} = \frac{1}{6e}.$$

Если $e = 0.01$, то

$$x = 2\sqrt[3]{2e} = 2\sqrt[3]{0.02} = 0.543 \text{ рад} = 30^\circ.$$

Рекомендуемая литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний ., М.: Гос. изд. физмат.лит, 1959.
2. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем.- М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 336 стр.
3. Пиппард А. Физика колебаний: Пер. с англ. Д.А.Соболева и В.Ф.Трифоновна/ Под ред. А.Н.Матвеева. – М.: Высш. школа.,1985.-456 с.
4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. – 379 стр.
5. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. –М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 стр.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд. физ.-мат.лит., 1958. – 408 стр.
7. Сборник задач по теории колебаний / Под ред. Постникова Л.В. и Королева И.В. – М.:Наука, Глав.ред.физ.-мат.лит., 1976. – 270 стр.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Москва, Физматлит, 2002. – 292с.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М., Исаева О.Б. Нелинейность: от колебаний к хаосу (задачи и учебные программы). – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 184 с.
10. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний: Учебное пособие для вузов. М.: Физматлит, 1987. – 384с.
11. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Editorial URSS, 2004. – 496 с.
12. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Изд.2, испр. и доп. Editorial URSS, 2010. – 552 с.
13. Заболотнов Ю.М. Теория колебаний: Учеб. пособие. Самара, СГАУ, 1998. – 198 с.
14. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. – 255 с.