

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

И.В.Белоконов

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(анализ движения летательных аппаратов в условиях
статистической неопределенности)

Учебное пособие

Самара
2001

УДК 681.51(075.8):629.7.015.3

Статистический анализ динамических систем (анализ движения летательных аппаратов в условиях статистической неопределенности): Учебное пособие / И.В. Белоконов. Самарский госуд. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001.

В краткой форме изложены необходимые сведения, позволяющие выполнить анализ поведения динамической системы в условиях статистической неопределенности: методы моделирования случайных факторов и возмущений, рекомендации по математической формулировке и преобразованиям задачи статистического анализа применительно к анализу движения летательных аппаратов в условиях статистической неопределенности, наиболее распространенные методы статистического анализа.

Большой набор методов статистического анализа представляет возможность выбора из них наиболее эффективного для решения конкретной задачи.

Учебное пособие освещает часть разделов лекционного курса «Статистический анализ и идентификация динамических систем», рекомендуется студентам специальностей 010500, 130600, 130700 для использования в курсовом проектировании, а также в дипломном проектировании.

Предполагается, что читателю известны основные сведения из теории вероятностей и математической статистики, поэтому соответствующий материал первого раздела пособия дается в конспективной форме.

Выполнено на кафедре динамики полета и систем управления.

Табл. 3 Илл. 2 Библиогр. 11

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензенты: д.т.н., проф. В.М. Дуплякин,
д.т.н. Я.А. Мостовой.

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ И МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	6
1.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	6
1.1.1. Основные способы математического описания случайных величин.....	6
1.1.2. Функциональные преобразования случайных величин.....	10
1.1.3. Моделирование случайных величин.....	11
1.2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.....	17
1.2.1. Основные способы математического описания случайных процессов.....	17
1.2.2. Интегрирование и дифференцирование случайных процессов.....	22
1.2.3. Моделирование стационарных случайных процессов.....	24
2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА	26
2.1. Общая форма записи стохастической математической модели и способы её преобразования.....	26
2.2. Классификация случайных факторов, действующих на летательный аппарат в полете, и их типовые модели.....	28
2.3. Модель случайных атмосферных возмущений.....	32
3. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА	34
3.1. Надежность выполнения целевой задачи полета как задача статистического анализа динамической системы.....	34
3.2. Классификация и области применения методов статистического анализа динамических систем.....	35
4. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	37
4.1. Особенности математического описания линейных систем.....	37
4.2. Метод весовых функций.....	38
4.3. Метод корреляционных преобразований.....	40
4.4. Частотный метод анализа точности стационарных линейных систем.....	41
5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	43
5.1. Метод статистического анализа, использующий принцип статистической линеаризации.....	43

5.2. Метод статистического анализа, использующий линеаризацию системы относительно среднего движения.....	46
6. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	48
6.1. Метод эквивалентных возмущений.....	48
6.2. Метод интерполяционных полиномов.....	52
6.3. Метод статистических испытаний и его модификация.....	59
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	63
ПРИЛОЖЕНИЕ: Этапы и содержание курсовой работы.....	64

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии кратко изложены основные положения постановки задачи статистического анализа и методы ее решения, а также связанные с ними вспомогательные вопросы, посвященные моделированию случайных величин и случайных процессов.

Основная часть методического материала имеет универсальный характер применения, но для лучшего понимания сложных вопросов разделы, связанные с постановкой задачи, адаптированы к конкретной предметной области – анализу движения летательных аппаратов (ЛА) в условиях действия случайных факторов и возмущений. В настоящее время программа обучения по специальностям 130100, 130600, 130700 предполагает использование математического аппарата, базирующегося на исследованиях детерминированных моделей, и не уделяет должного внимания особенностям построения и использования вероятностных моделей. В то же самое время использование современных методов проектирования ЛА и других сложных технических объектов требует хорошего знания и навыка применения вероятностных методов анализа и синтеза динамических систем. Статистический анализ динамической системы можно рассматривать как элементарную (типовую) математическую операцию, которая может повторяться многократно в задаче проектировании, использующей вероятностные критерии и учитывающей статистическую неопределенность в знании характеристик среды и условий, при которых происходит функционирование ЛА.

В первую часть пособия включен материал справочного характера об основах математического описания и моделирования случайных величин и случайных процессов, знание которых необходимо при решении любых задач статистического анализа. Ко второй части пособия можно отнести главы 2 и 3, в которых излагаются основные принципы построения стохастических математических моделей применительно к описанию движения ЛА, а также формулируется задача статистического анализа и определяется ее место в задаче проектирования ЛА. В третьей части пособия (главы 4-6) излагаются в сжатой форме основные методы решения задач статистического анализа. Описывается достаточно представительная группа современных, хорошо зарекомендовавших себя на практике методов, которая позволяет в зависимости от сложности математической формулировки конкретной задачи (вида используемой математической модели, априорной информации об исследуемом процессе) выбрать наиболее эффективный метод решения, обеспечивающий требуемый компромисс между трудоемкостью получения и точностью решения.

В приложении приводится краткое содержание курсовой работы, которая ориентирована на закрепление изучаемого теоретического материала.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ И МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1.1.1. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Величина x , принимающая в каждом новом опыте при одинаковых условиях его проведения новое значение, называется случайной величиной (СВ), а конкретное значение ξ_x , которое она принимает в результате опыта – реализацией случайной величины. Совокупность реализаций СВ $\xi_{x(1)}, \dots, \xi_{x(N)}$, которая получается в результате проведения N опытов, называется выборкой реализации СВ x объема N [1].

Под вероятностью появления в результате опыта значения X случайной величины x будем понимать относительную частоту попадания реализаций ξ_x в бесконечно малый интервал $(X, X+dX)$ для выборки реализаций бесконечно большого объема.

Полной характеристикой скалярной СВ x является плотность распределения вероятности СВ $p_x(X)$, характеризующая относительную вероятность попадания реализации ξ_x СВ в бесконечно малый интервал $(X, X+dX)$:

$$p_x(X) = \lim_{dX \rightarrow 0} \frac{P(X \leq \xi_x \leq X + dX)}{dX}, \quad (1.1)$$

где X – фиксированное значение СВ x ,

а также функция распределения вероятности СВ $F_x(X) = P(\xi_x \leq X)$, связанная с $p_x(X)$ соотношением

$$F(X) = \int_{-\infty}^X p_x(X) dX. \quad (1.2)$$

Свойства плотности распределения вероятности $p_x(X)$ скалярной СВ x :

- $p_x(X) \geq 0$;
- $p_x(X) = 0$ при $X = \pm\infty$;
- знание $p_x(X)$ позволяет вычислить вероятность события $P(a \leq x \leq b)$:

$$P(a \leq \xi_x \leq b) = \int_a^b p_x(X) dX; \quad (1.3)$$

- $p_x(X)$ удовлетворяет условию нормировки – $\int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) dX = 1$. (1.4)

Для векторных случайных величин $x = (x_1, \dots, x_n)$, где x_1, \dots, x_n – скалярные СВ (компоненты векторной СВ), вводятся аналогичные понятия [2].

Полной характеристикой векторной СВ $x = (x_1, \dots, x_n)$ является n -мерная

совместная плотность распределения вероятности $p_x(\mathbf{X}) = p_x(X_1, \dots, X_n)$, имеющая интерпретацию и свойства аналогичные скалярной СВ:

- $p_x(X_1, \dots, X_n) \geq 0$ (неотрицательная функция \mathbf{n} аргументов);
- $p_x(X_1, \dots, X_n) = 0$ при $X_j = \pm\infty$, где j изменяется от 1 до \mathbf{n} ;
- знание $p_x(X_1, \dots, X_n)$ позволяет вычислить вероятность события

$$P(\xi_x \in D) = \int_D p_x(X_1, \dots, X_n) dX_1, \dots, dX_n, \quad (1.5)$$

где D – заданная область в \mathbf{n} -мерном пространстве переменной \mathbf{X} ;

- $p_x(X_1, \dots, X_n)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X_1, \dots, X_n) dX_1, \dots, dX_n = 1. \quad (1.6)$$

В дальнейшем, если это не оговаривается отдельно, для функции плотности распределения вероятности и функции распределения вероятности будут использоваться следующие упрощенные обозначения - $p(\mathbf{x})$ вместо $p_x(\mathbf{X})$, $F(\mathbf{x})$ вместо $F_x(\mathbf{X})$

Для векторных СВ вводится дополнительная система понятий, отображающая взаимосвязь между отдельными ее компонентами. Если в векторной СВ \mathbf{x} размерности \mathbf{n} выделить две векторные СВ меньшей размерности $\mathbf{y}=(x_1, \dots, x_k)$ и $\mathbf{z}=(x_{k+1}, \dots, x_n)$, то для отображения свойств этих отдельных векторных СВ рассматриваются соответствующие совместные плотности распределения вероятности меньших размерностей :

$$p(\mathbf{y}) = p(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1}, \dots, dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) dz, \quad (1.7)$$

$$p(\mathbf{z}) = p(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_k = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) dy. \quad (1.8)$$

Вводится понятие **условной плотности распределения вероятности** $p(\mathbf{y}/Z)$ СВ \mathbf{y} в предположении, что СВ \mathbf{z} приняла значение Z , которая связана с совместной плотностью распределения $p(\mathbf{x})=p(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ соотношением

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}/Z)p(\mathbf{z}). \quad (1.9)$$

Аналогично можно ввести понятие условной плотности распределения вероятности $p(\mathbf{z}/Y)$ для СВ \mathbf{z} в предположении, что СВ \mathbf{y} приняла значение Y :

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{z}/Y)p(\mathbf{y}). \quad (1.10)$$

На основании соотношений (1.7)–(1.10) можно выразить одну условную плотность распределения вероятности через другую (формулы Байеса) :

$$p(\mathbf{y}/Z) = \frac{p(\mathbf{z}/Y)p(\mathbf{y})}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{z}/Y)p(\mathbf{y}) dy}, \quad p(\mathbf{z}/Y) = \frac{p(\mathbf{y}/Z)p(\mathbf{z})}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}/Z)p(\mathbf{z}) dz}. \quad (1.11)$$

Случайные величины \mathbf{y} и \mathbf{z} называются **независимыми**, если выполняется

условие

$$p(y/Z)=p(y); \quad p(z/Y)=p(z). \quad (1.12)$$

Отсюда для независимых СВ y и z совместная плотность распределения вероятности $p(x)$ может быть найдена по соотношению

$$p(x) = p(y,z) = p(y)p(z), \quad (1.13)$$

а если все компоненты векторной СВ $x = (x_1, \dots, x_n)$ являются независимыми скалярными СВ, то можно записать

$$p(x) = \prod_{i=1}^n p(x_i), \quad (1.14)$$

где $p(x_i)$ – плотность распределения вероятности соответствующей скалярной СВ x_i .

Описания свойств и действия с СВ удобнее производить, используя их моментные характеристики, которые являются детерминированными величинами, вместо плотности распределения вероятности. Однако при этом снижается полнота информации о СВ. Чем выше порядок моментных характеристик, которыми характеризуется СВ, тем больше имеется о ней информации.

Общее выражение для определения моментной характеристики СВ x , которую можно представить в виде функции $f(x)$, имеет вид

$$M[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (1.15)$$

Для скалярных СВ наиболее часто используются следующие моментные характеристики.

Математическое ожидание СВ M_x – определяет наиболее вероятное значение реализации СВ x , т.е. в выражении (1.15) положено $f(x)=x$:

$$M_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (1.16)$$

Элементарные свойства математических ожиданий СВ:

$$\left. \begin{aligned} & - \text{если } C - \text{константа, то } M[C] = C, \\ & - \text{если } y = Cx \text{ и } C - \text{константа, то } M_y = CM_x, \\ & - \text{если } Y = \sum_{i=1}^k X_i, \text{ то } M_y = \sum_{i=1}^k M_{x_i}, \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Дисперсия СВ D_x – характеризует наиболее вероятный разброс реализаций СВ x относительно её математического ожидания, т.е. в выражении (1.15) положено $f(x) = (x - M_x)^2$:

$$D_x = M[(x - M_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 p(x)dx. \quad (1.18)$$

Для сохранения размерности исходной СВ удобно рассматривать в качестве

меры разброса реализаций **среднеквадратическое отклонение СВ** :

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} . \quad (1.18')$$

Для двух скалярных СВ, например x и y , вводится понятие **взаимный ковариационный момент** K_{xy} , отражающий статистическую взаимосвязь между ними :

$$K_{xy} = M[(x - M_x)(y - M_y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)(y - M_y)p(x, y)dx dy . \quad (1.19)$$

Если $K_{xy}=0$ для скалярных СВ x и y , то такие СВ называются **некоррелированными**.

Если скалярные СВ x и y являются независимыми, т.е. $p(x, y) = p(x)p(y)$, то из (1.19) следует, что $K_{xy} = 0$, т.е. они являются также некоррелированными.

Часто вместо K_{xy} рассматривают **нормированный ковариационный момент** (или коэффициент корреляции) :

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad |r_{xy}| \leq 1 . \quad (1.20)$$

Элементарные свойства дисперсий СВ :

- если C – константа, то $D[C] = 0$,

- если $y = Cx$ и C – константа, то $D_y = C^2 D_x$,

- если $y = \sum_{i=1}^n x_i$, то $D_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{x_i x_j}$

(если $y = x_1 + x_2$, то $D_y = D_x + D_y + 2K_{x_1 x_2}$),

- если $y = \sum_{i=1}^n x_i$ и x_1, \dots, x_n – некоррелированные СВ, то $D_y = \sum_{i=1}^n D_{x_i}$.

Аналогично вводятся моментные характеристики для векторных СВ $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Математическое ожидание векторной СВ $x=(x_1, \dots, x_n)$ есть вектор-столбец математических ожиданий ее компонент, т.е. $M[x] = \|M_{x_1} \dots M_{x_n}\|^T$.

Ковариационная матрица векторной СВ $x=(x_1, \dots, x_n)$ (аналог дисперсии для скалярной СВ) есть симметричная относительно главной диагонали квадратная матрица размера $n \times n$ вида

$$K_x = \left\| \begin{array}{cccc} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_n} \\ \vdots & D_{x_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ K_{x_n x_1} & \dots & \dots & D_{x_n} \end{array} \right\|_{n \times n} = M[(x - M_x)(x - M_x)^T] = \left\| K_{x_i x_j} \right\|_{i, j=1, n} . \quad (1.22)$$

Также часто используется **нормированная ковариационная матрица** R_x (матрица коэффициентов корреляций) :

$$R_x = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_n} \\ \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ r_{x_nx_1} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} r_{x_i x_j} \\ i, j = \overline{1, n} \end{vmatrix}, \quad (1.23)$$

(если векторная СВ x имеет некоррелированные компоненты, то $R_x = E$ – единичная матрица).

1.1.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В практических задачах случайные величины часто подвергаются функциональным преобразованиям вида $y=f(x)$. При этом, если x является СВ с заданной плотностью распределения вероятности $p(x)$, то в результате функционального преобразования y будет также СВ, плотность распределения вероятности которой $p(y)$ необходимо найти. Эта задача может быть аналитически решена только для случая взаимно- однозначного соответствия между x и y .

Пусть x и y скалярные СВ и существует зависимость $x=\phi(y)$, где $\phi(y)=f^{-1}(y)$ – функция обратная $f(x)$. Тогда легко показать, что

$$p(y) = p_x(\phi(y)) \left| \frac{d\phi(y)}{dy} \right|, \quad (1.24)$$

где $p_x(\phi(y))$ – функция плотности распределения вероятности $p(x)$, в которой вместо x подставляется $\phi(y)$.

Докажем результат (1.24), для чего вернемся к ранее введенным обозначениям в функции плотности распределения вероятности $p_x(X)$ и функции распределения вероятности $F_x(X)$.

Пусть $y=f(x)$ является монотонно возрастающей функцией. Тогда выполняется равенство $P(\xi_x \leq X) = P(\xi_y \leq Y)$, если $Y=f(X)$.

Так как $P(\xi_x \leq X) = \int_{-\infty}^X p_x(X) dX = \int_{-\infty}^{\phi(Y)} p_x(X) dX$, то

$$p_y(Y) = \frac{dF_y(Y)}{dY} = \frac{d(P(\xi_y \leq Y))}{dY} = \frac{d}{dY} \left[\int_{-\infty}^{\phi(Y)} p_x(X) dX \right]$$

и из правил дифференцирования интеграла следует выражение (1.24).

Аналогично доказывается соотношение (1.24) для случая монотонно убывающей функции $y=f(x)$.

В случае, если x и y векторные СВ одинаковой размерности n , связанные взаимно-однозначным функциональным преобразованием $y=f(x)$, то выражение (1.24) принимает вид

$$p_y(Y) = p_x(\phi(Y))|J|, \quad (1.25)$$

где $|J|$ - определитель матрицы Якоби, $J = \left\| \frac{\partial \phi(Y)}{\partial Y} \right\|_{n \times n}$.

При отсутствии взаимно однозначного соответствия между x и y функцию $p_y(Y)$ найти аналитически не удастся и ограничиваются отысканием только главных моментных характеристик.

Так, например, в скалярном случае

$$M_y = M[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx, \quad (1.26)$$

$$D_y = M[(y - M_y)^2] = M[f^2(x)] - M_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)p(x)dx - M_y^2. \quad (1.27)$$

Для линейных функциональных преобразований вышеприведенное соотношение (1.24) существенно упрощается. Если x и y векторные СВ одинаковой размерности n связаны линейным преобразованием $y=Ax+B$, где A матрица размера $n \times n$, B - вектор столбец размера $n \times 1$, то соотношение (1.25) примет вид

$$p_y(Y) = p_x(A^{-1}(Y - B)) * |A^{-1}|. \quad (1.24')$$

Для скалярного случая - $y=ax+b$, $p_y(Y) = p_x\left(\frac{Y-b}{a}\right)\frac{1}{a}$. (1/24'')

Если линейные преобразования не являются взаимно однозначными, то есть $x \in E^n$, $y \in E^m$ ($m \neq n$), и матрица A размера $m \times n$, а вектор-столбец B размера $m \times 1$, то ограничиваются определением главных моментных характеристик по соотношениям

$$M_y = AM_x + B \quad (1.28)$$

$$K_y = M[(y - M_y)(y - M_y)^T] = AK_x A^T \quad (1.29)$$

1.1.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Получение реализации СВ необходимо при выполнении моделирования на ЭВМ поведения динамической системы (например, движения летательного аппарата) под действием случайных факторов и возмущений, что является элементарной операцией для ряда численных методов статистического анализа.

Среди большого числа функций плотности распределения вероятности, наиболее часто используемых в технических приложениях, являются равномерное (или равновероятное), нормальное (или гауссово), экспоненциальное (или показательное) распределения [1], [5].

Закон равномерного распределения СВ $p_p(x)$ на практике используется, когда отсутствует какая-либо дополнительная информация о СВ кроме интервала значений, в который попадают её реализации. Это наиболее «грубое» описание СВ, которое позволяет получить "гарантированные" оценки и избежать принятия ошибочных технических решений. Для СВ x , равномерно распределенной на интервале $[a, b]$, функция плотности распределения вероятности имеет вид

$$p_p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}, \quad (1.30)$$

при этом главные вероятностные характеристики определяются по соотношениям $M_x = \frac{a+b}{2}$, $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Для получения реализаций ξ_x СВ x применяются датчики псевдослучайных чисел, которые реализованы в виде стандартных программ для ЭВМ. Эти датчики позволяют получать реализации ξ_α СВ α , в дальнейшем обозначаемой α , имеющей равномерное распределение на интервале $[0, 1]$ (стандартное равномерное распределение). Как правило, эти датчики псевдослучайных чисел также применяются для получения реализаций СВ, имеющих другие сложные законы распределения. При этом решается задача отыскания функционального преобразования, позволяющего получить из стандартного равномерного закона распределения требуемый закон распределения. Если такая задача решается для класса взаимно однозначных функциональных преобразований, то можно воспользоваться результатами подраздела 1.1.2.

Например, если необходимо получить реализации ξ_x СВ x , равномерно распределенный на интервале $[a, b]$, то реализации ξ_α СВ α необходимо подвергнуть линейному преобразованию вида

$$\xi_x = a + (b-a) \xi_\alpha. \quad (1.31)$$

Закон нормального распределения СВ $p_r(x)$ является наиболее распространенным в практической деятельности в силу своих свойств [1].

Функция плотности распределения вероятности $p_r(x)$ для нормально распределенной скалярной СВ x имеет вид

$$P_{\Gamma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp\left[-\frac{(x - M_x)^2}{2D_x}\right], \quad (1.32)$$

где $-\infty < x < +\infty$, M_x и D_x – соответственно математическое ожидание и дисперсия СВ.

С помощью специально введенной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (1.33)$$

имеющей следующие свойства: $\Phi(0)=0$; $\Phi(+\infty)=1$; $\Phi(-\infty)=-1$; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, можно вычислить вероятность попадания реализации ξ_x СВ x в заданный интервал $[a, b]$

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{2} [\Phi(B) - \Phi(A)], \quad (1.34)$$

где $B = \frac{b - M_x}{\sqrt{2D_x}}$, $A = \frac{a - M_x}{\sqrt{2D_x}}$.

Для практического применения полезно знание величин вероятностей P_k , с которыми реализация СВ попадает в симметричный относительно M_x интервал размера $\pm k\sigma_x$,

$$P(|x - M_x| \leq k\sigma_x) = P_k.$$

При $k=1$ - $P_1=0,863$; $k=2$ - $P_2=0,954$; $k=3$ - $P_3=0,943$ (правило «трех сигм»).

Сумма $x = \sum_{i=1}^n x_i$ нормально распределенных независимых скалярных СВ x_i , $i=1, \dots, n$ также является нормально распределенной СВ (свойство устойчивости нормального закона распределения), при этом главные моментные характеристики удовлетворяют соотношениям

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{x_i}, \quad D_x = \sum_{i=1}^n D_{x_i}, \quad \text{где } M_{x_i}, D_{x_i} - \text{ моментные характеристики СВ } x_i.$$

Кроме того, сумма большого числа независимых СВ, имеющих произвольные законы распределения и вносящих примерно равный вклад в формирование суммы, имеет закон распределения, близкий к нормальному, причем степень близости увеличивается с увеличением числа слагаемых суммы (свойство предельности нормального закона распределения).

Только для нормально распределенных СВ из условия их некоррелированности следует утверждение их независимости.

Для получения реализации ξ_{β} нормально распределенной СВ β с вероятностными характеристиками $M_{\beta} = 0, D_{\beta} = 1$ (стандартное нормальное распределение) можно воспользоваться набором из k реализаций $\xi_{\alpha(1)} \dots \xi_{\alpha(k)}$ СВ, имеющей стандартное равномерное распределение (для многих практических целей достаточно принять $k=12$) [5]

$$\xi_\beta \approx \sum_{i=1}^{12} \xi_{\alpha(i)} - 6. \quad (1.36)$$

Если необходимо получить реализации ξ_x СВ x , имеющей нормальное распределение с характеристиками M_x, D_x , необходимо реализовать ξ_β , соответствующую стандартному нормальному распределению, подвергнуть линейному преобразованию вида

$$\xi_x = M_x + \xi_\beta \sqrt{D_x}. \quad (1.37)$$

Часто на практике возникает необходимость моделировать векторную нормально распределенную СВ $x = (x_1, \dots, x_n)$, закон распределения которой имеет вид

$$p_\Gamma(x_1, \dots, x_n) = [(2\pi)^n |K_x|]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - M_x)^T K_x^{-1} (x - M_x)}{2}\right], \quad (1.38)$$

где M_x и K_x - математическое ожидание и ковариационная матрица векторной СВ x .

Если компоненты векторной СВ независимы, то реализации каждой из них получаются отдельно с использованием (1.37). Если компоненты векторной СВ x зависимы (т.е. K_x - недиагональная матрица), то её реализация ξ_x получается линейным преобразованием реализаций ξ_α векторной СВ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ той же размерности с независимыми компонентами, имеющими стандартное нормальное распределение [2]:

$$\xi_x = A \xi_\alpha + B, \quad (1.39)$$

где $B=M_x$ – вектор-столбец размера $n \times 1$, A – матрица размера $n \times n$, найденная из уравнения $AA^T=K_x$.

Однозначное решение для матрицы A может быть найдено в предположении, что она имеет вид [2]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

где

$$a_{11} = \sqrt{D_{x_1}}, \quad a_{i1} = \frac{K_{x_j x_1}}{a_{11}}, \quad a_{ij} = \frac{K_{x_i x_j} - a_{j1} a_{i1} - a_{j2} a_{i2} - \dots - a_{j(j-1)} a_{i(j-1)}}{a_{jj}},$$

$$a_{ii} = \sqrt{D_{x_i} - a_{i1}^2 - a_{i2}^2 - \dots - a_{i(i-1)}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Закон экспоненциального распределения СВ $p_{\Xi}(x)$ также часто встречается в технических приложениях [1], [5] :

$$P_{\Xi}(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), \quad (1.41)$$

где $0 \leq x < +\infty$, b - параметр закона.

Легко доказать, что для этого закона распределения главные вероятностные характеристики находятся по соотношениям $M_x=b$, $D_x=b^2$.

Реализации ξ_x экспоненциально распределенной СВ x можно получить из реализации ξ_{α} СВ α , имеющей стандартное равномерное распределение, с использованием функционального преобразования [5]

$$\xi_x = -b \ln \xi_{\alpha} . \quad (1.42)$$

Рекомендации по получению реализаций других законов распределения приведены в [5].

Для произвольного вида закона распределения $p(x)$ СВ x функциональное преобразование, позволяющее получить ее реализацию ξ_x из реализации ξ_{α} СВ α , отвечающей стандартному равномерному закону распределения, находится в результате решения интегрального уравнения [4] :

$$\xi_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\xi_x} p(x) dx , \quad (1.43)$$

что легко доказывается с помощью соотношения (1.24).

В ряде задач закон распределения СВ может быть задан графическим образом (рис.1). Тогда выполняется кусочно-постоянная аппроксимация графической зависимости с обязательным удовлетворением условий нормировки [2]

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) dx = \sum_{j=1}^n P_j = 1 ,$$

где P_j – вероятность попадания реализаций СВ x в j -й подынтервал.

Получение одной реализации ξ_x СВ x осуществляется путем двукратного обращения к датчику псевдослучайных чисел, реализующих скалярный равномерный закон распределения $p_p(\alpha)$. Вначале интервал $[0,1]$ разбивается на подынтервалы равные P_1, P_2, \dots, P_n . После получения первой реализации $\xi_{\alpha}^{(1)}$ СВ α выделяется для дальнейшего использования тот подынтервал, в который эта реализация попала, например k -й подынтервал протяженности P_k .

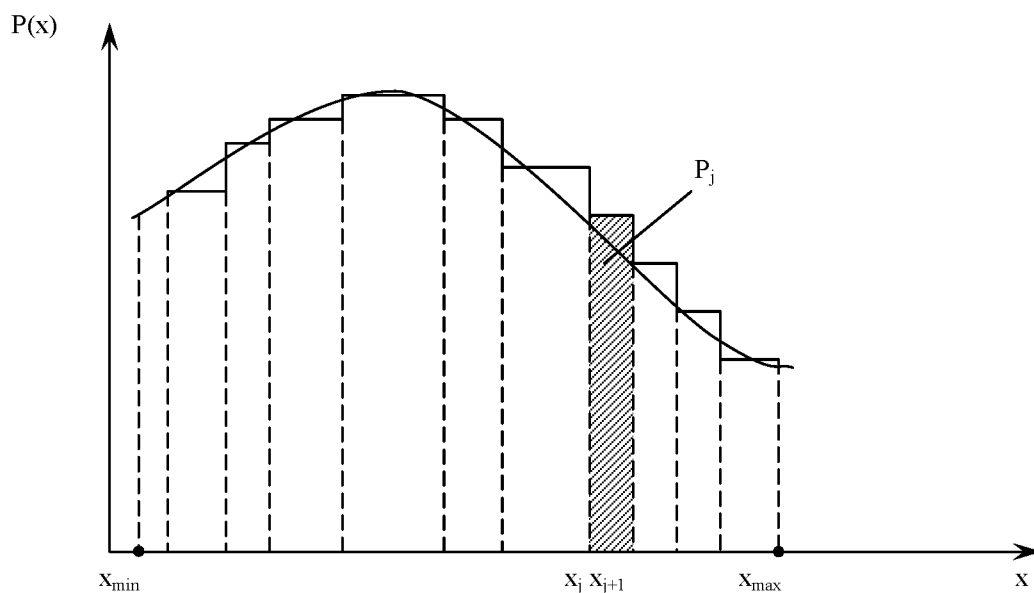


Рис.1

Так как k -й подынтервал соответствует интервалу значений $[x_k, x_{k+1}]$ СВ x , то для получения реализации ξ_x СВ x на втором этапе рассматривается этот отрезок, которому вновь ставится в соответствие отрезок $[0, 1]$ СВ α , имеющей закон распределения $p_p(\alpha)$. После вторичного обращения к датчику псевдослучайных чисел получается реализация $\xi_\alpha^{(2)}$, а далее с помощью линейного преобразования (1.31) находится искомая реализация ξ_x СВ x

$$\xi_x = x_k + (x_{k+1} - x_k)\xi_\alpha^{(2)}. \quad (1.44)$$

Этот алгоритм получения реализаций СВ x может быть применен и для случая аналитического задания функции плотности распределения вероятности $p(x)$.

1.2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1.2.1. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Если переменная x зависит от скалярного аргумента $t \in T$ и является случайной величиной для каждого значения t из области возможных значений аргумента T , то x называется случайной функцией (СФ) [3].

Если аргумент t изменяется непрерывно, то СФ является непрерывной, если аргумент t изменяется дискретно, то СФ является дискретной (или называется случайной последовательностью). Таким образом, любая СФ может быть представлена в виде бесконечномерной или конечномерной совокупности СВ.

Значения СФ, наблюдаемые в результате опыта, называются реализацией СФ. Если аргументом СФ является время, то такая СФ называется случайным процессом (СП). В дальнейшем, если не оговаривается особо, будут рассматриваться СП.

Случайный процесс полностью описывается бесконечным набором плотностей распределения вероятностей вида:

$p(x, t)$ – одномерная плотность распределения вероятности СП, характеризующая распределение СВ x в произвольно выбранном временном сечении t ;

$p(x_1, t_1; x_2, t_2)$ – двумерная плотность распределения вероятности СП, характеризующая совместную плотность распределения вероятности двух СВ x_1 и x_2 в произвольно выбранных временных сечениях t_1 и t_2 ;

$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ – n -мерная совместная плотность распределения вероятности СП, характеризующая совместную плотность n СВ x_1, \dots, x_n в произвольно выбранных n временных сечениях t_1, \dots, t_n ;

и т.д. $n \rightarrow \infty$.

Кроме этого для СП введены переходные плотности распределения вероятности вида:

$p(x_2, t_2 | X_1, t_1)$ – это плотность вероятности СВ x_2 , наблюдающаяся во временном сечении t_2 при условии, что в предыдущий момент времени t_1 СВ x_1 приняла значение X_1 ;

$p(x_3, t_3 | X_1, t_1; X_2, t_2)$ – это плотность вероятности СВ x_3 , наблюдающаяся во временном сечении t_3 при условии, что в предыдущие моменты времени t_1 и t_2 соответствующие СВ x_1 и x_2 приняли значение X_1 и X_2 ;

и т.д.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только плотностей распределения вероятностей вида $p(x, t)$, $p(x_1, t_1; x_2, t_2)$, $p(x_2, t_2 | X_1, t_1)$, которые связаны между собой соотношением:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x, t) p(x_2, t_2 | X_1, t_1) \quad (1.45)$$

и обладают следующими очевидными свойствами[3] :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t_2-t_1 \rightarrow 0} p(x_1, t_1; x_2, t_2) &= p(x_1, t_1), \\ \lim_{t_2-t_1 \rightarrow \infty} p(x_1, t_1; x_2, t_2) &= p(x_1, t_1)p(x_2, t_2), \\ \lim_{t_2-t_1 \rightarrow 0} p(x_2, t_2|X_1, t_1) &= \delta(x_2 - X_1), \\ \lim_{t_2-t_1 \rightarrow \infty} p(x_2, t_2|X_1, t_1) &= p(x_2, t_2), \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где $\delta(x_2 - X_1)$ – дельта-функция.

Так же, как для СВ, на практике широко используют описания СП через их моментные характеристики (выигрывая в простоте описания, но проигрывая в информативности), которые являются неслучайными функциями времени.

Обычно ограничиваются рассмотрением главных моментных характеристик СП (моментные характеристики первого и второго порядков) :

математического ожидания СП $M_X(t)$, определяющего среднее протекание во времени СП

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx, \quad (1.47)$$

корреляционной функции СП $R_X(t_1, t_2)$, определяющей как статистическую взаимосвязь между СВ x_1 и x_2 , наблюдающимися в двух временных сечениях t_1, t_2 , так и средний разброс реализаций СП относительно математического ожидания $M_X(t)$:

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= M[(x_1 - M_X(t_1))(x_2 - M_X(t_2))] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - M_X(t_1))(x_2 - M_X(t_2))p(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Корреляционная функция СП для совпадающих значений аргументов t_1, t_2 называется дисперсией СП $D_X(t)$ и характеризует разброс реализаций СВ x , наблюдающийся в сечении t :

$$D_X(t) = R_X(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_X(t))^2 p(x, t)dx. \quad (1.49)$$

Так же, как и для СВ, вводятся понятия среднеквадратического отклонения СП $\sigma_X = \sqrt{D_X(t)}$ и нормированной корреляционной функции (аналог коэффициента корреляции)

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}}. \quad (1.50)$$

Математическое ожидание СП $M_X(t)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам моментных характеристик СВ :

$$\left. \begin{aligned} M[g(t)] &= g(t), \\ M[g(t)x(t)] &= g(t)M_X(t), \\ M\left(\sum_{i=1}^n x_i(t)\right) &= \sum_{i=1}^n M_{X_i}(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

где $g(t)$ – неслучайная функция.

Свойства корреляционной функции $R_X(t_1, t_2)$ СП:

$$\left. \begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_2, t_1), \\ R_Y(t_1, t_2) &= R_X(t_2, t_1), \text{ если } y(t) = g(t) + x(t) \\ R_Y(t_1, t_2) &= g(t_1)g(t_2)R_X(t_1, t_2), \text{ если } y(t) = g(t)x(t) \\ |R_X(t_1, t_2)| &\leq \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

где $g(t)$ – неслучайная функция.

Для векторного СП $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где компоненты $x_1(t), \dots, x_n(t)$ являются скалярными СП, главные моментные характеристики вводятся аналогичным образом, как для векторных СВ:

- вектор-столбец математических ожиданий векторного СП $x(t)$

$$M_X(t) = \|M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)\|^T;$$

- матричная корреляционная функция (или матрица корреляционных функций) векторного СП $x(t)$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= M[(x(t_1) - M_X(t_1))(x(t_2) - M_X(t_2))^T] = \\ &= \|R_{X_i X_j}(t_1, t_2) : i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}\|^T \end{aligned}$$

(несимметричная квадратная матрица размера $n \times n$);

- матричная ковариационная функция (или матрица ковариационных функций) векторного СП $x(t)$

$$K_X(t) = R_X(t, t) = \left\| \begin{array}{cccc} D_{X_1}(t) & K_{X_1 X_2}(t) & \dots & K_{X_1 X_n}(t) \\ \vdots & D_{X_2}(t) & \dots & K_{X_2 X_n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & D_{X_n}(t) & \dots \end{array} \right\|$$

(симметричная квадратная матрица размера $n \times n$, являющаяся аналогом дисперсии для скалярного СП).

Из большого числа видов СП, которые можно выделить при классификации СП, рассмотрим наиболее часто встречающиеся в технических применениях [2], [3].

Стационарные СП в широком смысле – это СП, у которых совместные плотности распределения вероятностей остаются неизменными при одинаковом изменении значений всех аргументов

$$p(x_1 t_1; x_2 t_2; \dots; x_n t_n) = p(x_1 t_1 + \tau; x_2 t_2 + \tau; \dots; x_n t_n + \tau).$$

Стационарные СП в узком смысле (ССП) – это СП, у которых главные моментные характеристики обладают свойствами

$$\left. \begin{aligned} M_X &= \text{const}, \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau), \\ D_X &= R_X(0) = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Стационарный СП называется **эргодическим**, если любая его реализация бесконечной продолжительности содержит всю информацию о моментных характеристиках СП, т.е.

$$\left. \begin{aligned} M_X &= \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) dt, \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (x(t) - M_X)(x(t + \tau) - M_X) dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Достаточное условие эргодичности $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0$.

Марковский СП – это СП, поведение которого в последующий момент времени определяется только его текущим состоянием и не зависит от предыстории (при анализе движения летательных аппаратов в условиях статистической неопределенности часто рассматриваются марковские СП). Марковские СП полностью описываются одномерной $p(x, t)$ и переходной $p(x_1, t_1 | X_2, t_2)$ плотностями распределения вероятности, так как

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1) \prod_{i=1}^{n-1} p(x_{i+1}, t_{i+1} | X_i, t_i). \quad (1.55)$$

Нормальный СП – это СП, у которого все совместные плотности распределения вероятности имеют нормальные (гауссовы) законы распределения, то есть полностью описываются их главными моментными характеристиками.

Разделение СП на стационарные и нестационарные, марковские и немарковские, нормальные и ненормальные осуществлено по независимым признакам.

Кроме вышеперечисленных важным для технических приложений также является класс абсолютно случайных процессов.

Абсолютно случайный процесс (АСП) – это СП, у которого СВ, наблюдаемые в сколь угодно близких временных сечениях, являются независимыми СВ. АСП полностью описываются одномерной плотностью распределения вероятности, так как

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i, t_i). \quad (1.56)$$

Если у АСП одномерная плотность распределения вероятности имеет нормальный закон распределения, то такой СП называется **белым шумом** (БШ). Корреляционная функция БШ записывается в виде

$$R_X(t_1, t_2) = N(t_1)\delta(t_1 - t_2), \quad (1.57)$$

где $\delta(t_1 - t_2)$ - дельта-функция, $N(t_1)$ - **интенсивность** БШ (отражает дисперсию нормально распределённой СВ, которая наблюдается в фиксированном временном сечении БШ). Для стационарного БШ $R_X(\tau) = N\delta(\tau)$, где N - постоянная величина.

При исследовании СП $x(t)$ часто удобно его представлять в виде [3]

$$x(t) = M_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t), \quad (1.58)$$

где $M_X(t)$ - математическое ожидание СП $x(t)$; V_k - некоррелируемые СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями D_k ; $\varphi_k(t)$ - неслучайные функции времени (называются координатными функциями), удовлетворяющие условию ортонормированности

$$\int_0^{\infty} \varphi_i(t)\varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (1.59)$$

Форма представления СП в виде (1.58) называется **каноническим разложением** СП. Корреляционная функция и дисперсия СП, представленного в виде (1.59), находятся по соотношениям:

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{K=1}^{\infty} D_K \varphi_K(t_1)\varphi_K(t_2), \quad (1.60)$$

$$D_X(t) = \sum_{K=1}^{\infty} D_K \varphi_K^2(t). \quad (1.61)$$

Для стационарных случайных процессов в качестве координатных функций удобно рассматривать функции вида $\varphi_K(t) = e^{i\omega_K t}$, где ω_K - частоты, i - мнимая единица. При этом ССП выражается через тригонометрические функции **sin** и **cos** и представляется в виде бесконечной суммы гармоник различной частоты со случайными амплитудами, имеющими нулевые математические ожидания и заданные дисперсии D_K , а само каноническое разложение называется **спектральным или частотным разложением**.

В этом случае корреляционная функция $R_X(\tau)$ может быть записана в виде

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \text{ - прямое преобразование Фурье,} \quad (1.62)$$

где $S_X(\omega)$ - спектральная плотность ССП, связанная взаимно однозначно с $R_X(\tau)$ соотношением

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau - \text{обратное преобразование Фурье.} \quad (1.63)$$

Из (1.62) следует выражение для дисперсии ССП

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (1.64)$$

Так как $R_X(\tau)$ и $S_X(\omega)$ являются четными функциями своих аргументов, то выражения (1.62) и (1.63) могут быть переписаны в виде

$$R_X(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (1.65)$$

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (1.66)$$

Таким образом спектральная плотность $S_X(\omega)$ позволяет перевести изучение свойств ССП из временной области в частотную область и характеризует распределение дисперсии ССП по частотам непрерывного спектра (то есть по дисперсиям амплитуд гармоник спектрального разложения). Как правило спектральная плотность $S_X(\omega)$ представляется в виде дробно-рациональной функции. Например, для экспоненциально коррелированного ССП с корреляционной функцией

$$R_X(\tau) = D e^{-\lambda|\tau|} \quad (1.67)$$

спектральная плотность ССП имеет вид

$$S_X(\omega) = \frac{D\lambda}{\pi(\omega^2 + \lambda^2)}. \quad (1.68)$$

Использование спектральной плотности вместо корреляционной функции в ряде случаев является более удобным.

Для стационарного БШ интенсивности N из (1.63) следует

$$S(\omega) = \frac{N}{2\pi}, \quad (1.69)$$

то есть дисперсия распределяется по всем частотам непрерывного спектра равномерно.

1.2.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Считается, что последовательность СВ x_1, x_2, \dots, x_n сходится в среднеквадратичном смысле к СВ x

$$l.i.m._{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

если выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} M[(x - x_n)^2] = 0$.

Для выполнения условия сходимости последовательности СВ необходимо и достаточно существование двух пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} M[x_n]$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \{ (x_n - M[x_n])^2 \}.$$

Производная и интеграл от СП $x(t)$ для аргумента $t \in [t_0, t_k]$ являются соответственно СП и СВ и определяются как

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \text{l.i.m.}_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta) - x(t)}{\Delta},$$

$$y = \int_{t_0}^{t_k} x(t) dt = \text{l.i.m.}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x(t_i) \Delta.$$

$n \rightarrow \infty$

Главные вероятностные характеристики СП, получающиеся при дифференцировании и интегрировании СП, находятся по соотношениям [2] :

$$M \left[\frac{dx}{dt} \right] = \frac{dM_X}{dt}, \quad (1.70)$$

$$M \left[\int_{t_0}^{t_k} x(t) dt \right] = \int_{t_0}^{t_k} M_X(t) dt, \quad (1.71)$$

$$R_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad (1.72)$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} R_X(s_1, s_2) ds_1 ds_2. \quad (1.73)$$

Проиллюстрируем применение этих соотношений на примере [2]. Пусть требуется найти математическое ожидание и дисперсию импульса тяги

двигательной установки летательного аппарата $I = \int_0^T F(t) dt$, если тяга $F(t)$

реализуется с ошибкой $F(t) = F_0(1 + \mu(t))$, где $F_0(t)$ – номинальное значение тяги, $\mu(t)$ – стационарный случайный процесс, определяющий разброс тяги относительно номинального значения с вероятностными характеристиками

$$M_\mu(t) = 0, \quad R_\mu(\tau) = D e^{-\lambda|\tau|}.$$

Очевидно, что на основании (1.51), (1.52) $M_F(t) = F_0$, $R_F(\tau) = F_0^2 R_\mu(\tau)$.

Тогда после использования соотношений (1.70), (1.72) можно получить

$$M_I = \int_0^T M_F(t) dt = F_0 T,$$

$$D_I = \int_0^T \int_0^T F_0^2 R_\mu(\xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{2F_0^2 D}{\lambda^2} [\lambda T + e^{-\lambda T} - 1].$$

1.2.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Получение реализаций СП на ЭВМ является достаточно сложной проблемой. Если для СП известно его каноническое разложение, то моделирование СП сводится к получению реализаций совокупности случайных величин.

Моделирование стационарных СП является наиболее часто встречающимся на практике случаем. Для решения этой проблемы используется метод формирующих фильтров [4].

Под формирующим фильтром (ФФ) здесь понимается динамическая система, относящаяся к классу линейных стационарных устойчивых систем, на вход которой подается стационарный БШ заданной интенсивности N , а на выходе наблюдается стационарный СП с требуемой корреляционной функцией $R_x(\tau)$.

Таким образом, в проблеме моделирования стационарных СП выделяются две основные задачи:

- получение реализаций стационарного БШ на ЭВМ,
- отыскание математической модели формирующего фильтра.

Для определенности рассмотрим получение реализаций $\xi_v(t)$ центрированного стандартного стационарного БШ $v(t)$, ($N_v=1$). Аппроксимацией такого БШ является абсолютно случайный ступенчатый процесс (АССП) $\alpha(t)$. Реализацией $\xi_\alpha(t)$ АССП $\alpha(t)$ является кусочно-постоянная функция с интервалом дискретности аргумента Δt , в пределах которых наблюдаются независимые СВ, имеющие нормальный закон распределения с моментными характеристиками $M=0$, $D=1$.

Следовательно, для моделирования АССП достаточно использовать датчик случайных чисел или алгоритм моделирования, реализующий стандартный нормальный закон распределения.

Для того, чтобы реализация $\xi_\alpha(t)$ АССП $\alpha(t)$, имеющего дискретизацию Δt , соответствовала реализации $\xi_v(t)$ стандартного БШ $v(t)$ наилучшим образом, необходимо подвергнуть её линейному преобразованию $\xi_v(t) \approx C \xi_\alpha(t)$, C – коэффициент, определяющийся из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} C^2 R_\alpha(\tau) d\tau. \quad (1.74)$$

Корреляционная функция АССП описывается соотношением

$$R_\alpha(\tau) \begin{cases} 1, \tau \in \Delta t \\ 0, \tau \notin \Delta t \end{cases}. \quad (1.75)$$

Тогда с учетом того, что $R_v(\tau) = \delta(\tau)$, из соотношения (1.74) вытекает следующее условие для нахождения коэффициента C :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (1.76)$$

Для выполнения второго этапа моделирования стационарного СП и получения математической модели ФФ воспользуемся соотношением, связывающим спектральные плотности на входе и выходе динамической системы

$$S_x(\omega) = W_{\text{ФФ}}(i\omega)W_{\text{ФФ}}(-i\omega)S_v(\omega), \quad (1.77)$$

где $W_{\text{ФФ}}(i\omega)$ и $W_{\text{ФФ}}(-i\omega)$ - соответственно частотная и сопряженная частотная функции формулирующего фильтра.

Из соотношения (1.77) следует, что

$$W_{\text{ФФ}}(i\omega)W_{\text{ФФ}}(-i\omega) = \frac{S_x(\omega)}{S_v(\omega)} = 2\pi S_x(\omega). \quad (1.78)$$

Таким образом, отыскание математической модели ФФ сводится к представлению выражения $2\pi S_x(\omega)$ в виде произведения двух комплексно-сопряженных множителей, выделению частотной функции ФФ, получению передаточной функции ФФ и записи соответствующего ей дифференциального уравнения.

В качестве примера рассмотрим процедуру отыскания ФФ для моделирования ССП, имеющего экспоненциально коррелированную функцию $R_x(\tau) = De^{-\lambda|\tau|}$.

С учетом (1.68) можно записать

$$W_{\text{ФФ}}(i\omega)W_{\text{ФФ}}(-i\omega) = \frac{2D\lambda}{\omega^2 t \lambda^2} = \frac{\sqrt{2D\lambda}}{\lambda + i\omega} \cdot \frac{\sqrt{2D\lambda}}{\lambda - i\omega},$$

откуда следует, что $W_{\text{ФФ}}(i\omega) = \frac{\sqrt{2D\lambda}}{\lambda + i\omega}$.

Найденной частотной функции соответствуют передаточная функция

$$W_{\text{ФФ}}(s) = \frac{\sqrt{2D\lambda}}{\lambda + s}$$

и дифференциальное уравнение искомого формирующего фильтра

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = \sqrt{2D\lambda}\xi(t),$$

интегрируя которое находится реализация $\xi_x(t)$ требуемого стационарного СП из реализации $\xi_v(t)$ стандартного БШ $v(t)$.

Следует помнить, что в результате выполнения вышеописанной процедуры получают реализации центрированного стационарного СП $\Delta x(t) = x(t) - M_x$. Если необходимо осуществить моделирование стационарного СП, имеющего ненулевое математическое ожидание M_x , то к полученной по описанному алгоритму реализации $\xi_x(t)$ СП следует прибавить M_x .

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

2.1. ОБЩАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И СПОСОБЫ ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Анализ движения ЛА в условиях действия случайных факторов и возмущений требует построения стохастической математической модели.

Наиболее общей формой описания движения ЛА является система обыкновенных дифференциальных уравнений, записанная относительно вектора состояния в нормальной форме Коши и содержащая в своей структуре случайные функции и величины, моделирующие случайные воздействия $\xi(t)$, проектные параметры v и начальные условия движения x_0 [2]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, \xi, v, t) \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \in \{M_{x_0}, K_{x_0}\}, \\ \xi(t) &\in \{M_\xi(t), R_\xi(t_1, t_2)\} \\ V &\in \{M_v, K_v\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где $x(t) \in E^n$ - n -мерный вектор фазовых переменных (векторный СП);

$u(t) \in E^m$ - m -мерный вектор детерминированных функций;

$\xi(t) \in E^k$ - k -мерный вектор случайных воздействий (векторный СП с заданными моментными характеристиками $M_\xi(t), R_\xi(t_1, t_2)$);

$V \in E^l$ - l -мерный вектор случайных проектных параметров (векторная СВ с заданными моментными характеристиками M_v, K_v),

x_0 - n -мерный вектор случайных начальных условий с заданными моментными характеристиками M_{x_0}, K_{x_0} .

Математическую модель вида (2.1), элементы которой описываются в форме (2.2), будем называть стохастической математической моделью (СММ) движения ЛА [2]. Таким образом, СММ движения ЛА формально отличается от детерминированной модели движения только описанием (2.2) входящих в неё переменных.

Совокупность случайных функций $x(t, u, \xi, V, x_0)$ называется стохастическим решением для системы стохастических дифференциальных уравнений вида (2.1), (2.2), если для любой выборки случайных функций $\xi(t)$ и случайных величин V и x_0 из множества всех возможных выборок реализаций, функции $x(t, u, \xi, V, x_0)$ дают реализации, являющиеся

единственным решением задачи Коши¹ в обычном смысле для заданной системы дифференциальных уравнений.

Решение систем обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений (2.1) будет единственным, если для любой выборки реализаций случайных функций $\xi(t)$, случайных величин V и x_0 соответственно решение получающейся системы обыкновенных детерминированных дифференциальных уравнений будет единственным.

Универсальных методов статистического анализа движения, описывающегося СММ вида (2.1), (2.2), сочетающих высокую точность и низкую трудоемкость получения решения, не существует. Как будет показано ниже, для решения задач статистического анализа динамических систем в зависимости от конкретного вида математической формулировки задачи и требований к результату решения разработаны различные методы.

Поэтому для того, чтобы использовать тот или иной метод статистического анализа, часто необходимо выполнить предварительные преобразования стохастической математической модели к виду, который диктует выбранный метод. Рассмотрим наиболее часто применяемые виды преобразований :

1. Преобразование, направленное на исключение из СММ случайных факторов в виде случайных функций, то есть в правых частях системы дифференциальных уравнений (2.1) должны присутствовать случайные факторы только в виде СВ.

Для решения этой проблемы можно использовать представление случайных функций через их канонические разложения типа (1.58). При этом в правых частях дифференциальных уравнений будут присутствовать дополнительные СВ.

2. Преобразование, направленное на исключение из СММ случайных факторов в виде СВ, то есть в правых частях системы дифференциальных уравнений (2.1) должны присутствовать случайные факторы только в виде случайных функций.

Для достижения этой цели векторную СВ V можно «перевести» в случайные начальные условия, добавив к системе (2.1) дополнительную систему из l дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = 0 \\ V(t_0) = V. \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

В результате получается расширенная система дифференциальных уравнений $(n+l)$ -го порядка.

¹ Задачей Коши называется математическая задача, заключающаяся в определении такой вектор-функции $x(t)$ по заданной системе дифференциальных уравнений, что при ее подстановке дифференциальные уравнения обратились бы в тождества и были бы удовлетворены начальные условия.

3. Преобразование, направленное на исключение статистической неопределенности в начальных условиях (2.2).

Это требование может быть выполнено введением новой переменной

$$\bar{x}(t) = x(t) - x_0. \quad (2.4)$$

Тогда математическая модель (2.1), (2.2) может быть представлена в виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x} + x_0, u, \xi, V, t) \quad (2.5)$$

с неслучайными нулевыми начальными условиями

$$\bar{x}(t_0) = 0. \quad (2.6)$$

4. Преобразование, направленное на достижение требования, чтобы все СВ, присутствующие в СММ, были независимыми.

Этот результат может быть достигнут с помощью линейного преобразования (1.39), (1.40), если СВ удовлетворяют нормальному закону распределения.

Вышеописанные преобразования могут быть применены и в комбинированном варианте.

2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ В ПОЛЕТЕ, И ИХ ТИПОВЫЕ МОДЕЛИ

Случайные факторы (воздействия) вызывают в процессе полета ЛА отклонения параметров движения от их программных значений. По причинам возникновения и изменения во времени случайные факторы удобно разделять [10]

- на воздействия, вызванные внешними по отношению к ЛА причинами;
- воздействия, вызванные внутренними процессами происходящими в ЛА;
- разброс исходных данных.

К внешним причинам, вызывающим возмущающие воздействия, относятся неточные знания внешних сил, действующих на ЛА в полете. В зависимости от рассматриваемой задачи о движении ЛА выбирается свой набор и полнота учета внешних сил. Кроме того, решение о том, что считать возмущающим воздействием, также зависит от требований практического использования результатов расчетов.

Так, например, для низковысотных КА сравнительно небольших размеров, совершающих полет на высотах до 500 км, обязательным является учет влияния атмосферы, которая вызывает аэродинамическое торможение КА. В то же время силы, вызываемые притяжением со стороны Солнца и Луны, ввиду их малости часто не учитываются.

Противоположная картина наблюдается для геостационарных спутников Земли, для которых Солнце и Луна оказывают заметное влияние на движение, а атмосферные возмущения отсутствуют.

На рис.2 показан характер изменения возмущающих ускорений f в зависимости от относительного расстояния до центра Земли r/r_3 , где r_3 – радиус Земли, отнесенных к ускорению притяжения Земли g_0 , найденному для модели центрального поля.

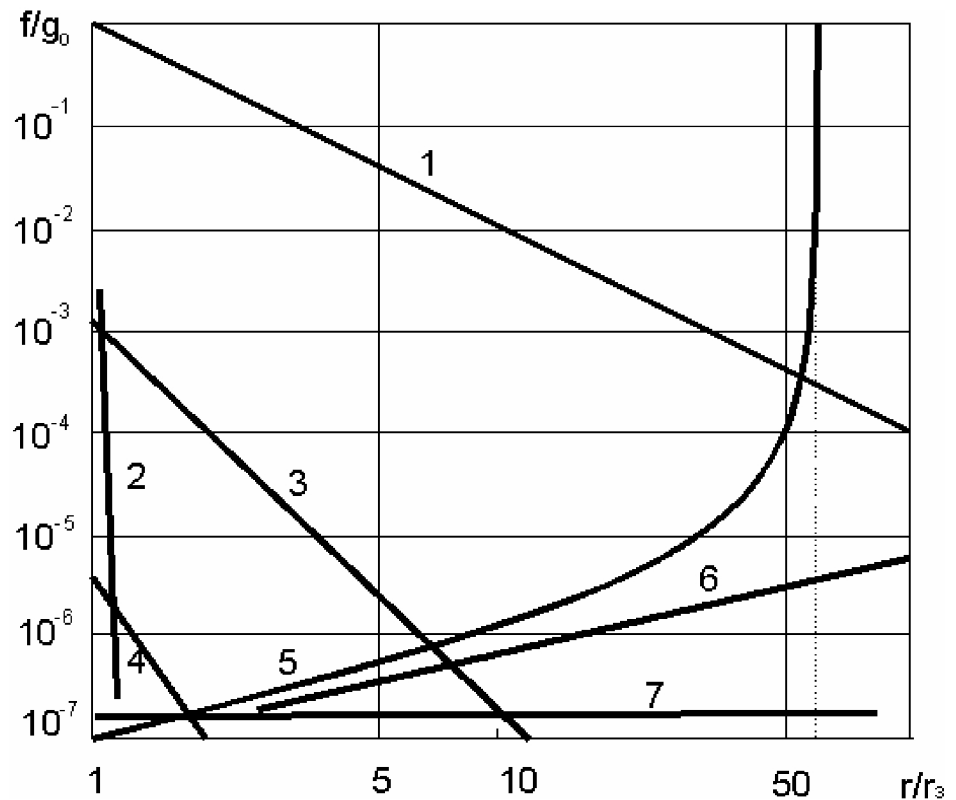


Рис.2. Возмущающие ускорения при движении низковысотного КА: 1- g_0 , 2-аэродинамическое сопротивление, 3-вторая гармоника гравитационного потенциала Земли, 4-четвертая гармоника гравитационного потенциала Земли, 5-притяжение Луны, 6- притяжение Солнца, 7-световое давление Солнца

Внутренние причины, вызывающие возмущающие воздействия, обуславливаются неидеальностью системы управления движением и ее приборной реализации, что приводит к отклонению формируемой управляющей силы от программных значений. К внутренним причинам в первую очередь относятся следующие факторы :

1.Ошибки чувствительных элементов и программирующих устройств. Они зависят от принципа действия системы управления и ее аппаратного состава. Например, при наличии на борту ЛА инерциальной навигационной

системы (ИНС), включающей в свой состав гиросtabilизированную платформу (ГСП) с размещенными на ней акселерометрами, рассматриваемый вид ошибок будет состоять из ошибок начальной выставки ГСП, ошибок акселерометров, ухода ГСП вследствие дрейфа и действующих ускорений, ошибок в выдаче программирующим устройством программных величин параметров ИНС.

2. Ошибки преобразующих устройств, возникающие в процессе преобразования управляющих сигналов при передаче их на исполнительные органы.

3. Ошибки работы исполнительных органов. Если в качестве исполнительного органа используется реактивный двигатель, то ошибки могут возникать из-за отклонения величин и направления приложения тяги двигателя от программных значений. Если в качестве исполнительного органа используются аэродинамические рули, то рассматриваемый тип ошибок может порождаться переходными процессами системы угловой стабилизации ЛА и неточностью знания аэродинамических характеристик как управляющих поверхностей, так и самого ЛА.

4. Утечка газа из корпуса ЛА в случае его разгерметизации, например, при попадании микрометеорита. При этом может создаваться реактивная сила, сравнимая с аэродинамической силой на высоте 160 км.

Разброс исходных данных объединяет группу причин, вызывающих возмущающие воздействия, в число которых входят:

- погрешности задания начальных значений параметров движения при расчете программы управления (в свою очередь они зависят от погрешности измерительных средств определения параметров движения ЛА и погрешностей прогнозирования движения);
- погрешности знания массовых и инерционных характеристик ЛА;
- погрешности задания аэродинамических характеристик ЛА;
- погрешности задания констант, входящих в уравнение движения.

Для большинства возмущающих воздействий статистические характеристики либо неизвестны, либо известны недостаточно полно, поэтому необходимо делать предположения о характере недостающих данных.

Если случайный фактор представляется как случайная величина, то чаще всего принимается предположение о нормальном законе распределения плотности вероятности (это справедливо для физических величин, разброс значений которых обусловлен многими причинами), а также о равномерном законе распределения плотности вероятности, если известен только диапазон принимаемых величиной значений и требуется получить гарантированный результат.

Если случайный фактор представляется в виде случайного процесса (случайной функции), то чаще всего используются предположения о том, что он относится к категории «белый шум» или является стационарным экспоненциально коррелированным случайным процессом.

Иногда случайная функция $x(t)$ выражается через случайную величину следующим образом :

$$x(t) = M_x(t) + \sigma_x(t)\zeta, \quad (2.7)$$

где $M_x(t)$ и $\sigma_x(t)$ - математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайного процесса соответственно; ζ - случайная величина, имеющая стандартный нормальный закон распределения ($M_\zeta = 0, D_\zeta = 1$).

Выбор совокупности учитываемых случайных факторов, а также обоснование принимаемых для них моделей является важным этапом записи стохастической математической модели.

Если рассматривается движение низковысотных КА, то к основным возмущающим воздействиям относятся следующие факторы :

1. Несферичность Земли. В задачах механики полета КА гравитационный потенциал Земли часто задается конечным гармоническим рядом. Можно считать, что отброшенные члены ряда характеризуют дополнительную силу, вызывающую возмущения в движении. Ее можно представить различным образом, например, в виде случайной функции координат движения, или считать случайными величинами набор коэффициентов, стоящих перед гармониками, т.к. они известны с определенной погрешностью.

2. Неточность знания параметров атмосферы Земли. Параметры атмосферы представляются в виде случайных функций координат ЛА и времени (случайных полей). Чаще всего для анализа движения КА ограничиваются рассмотрением только плотности атмосферы как функции высоты движения (более подробно см. параграф 2.3).

Второстепенными внешними случайными факторами, которые учитываются редко при анализе движения низковысотных КА, являются следующие факторы :

- притяжение со стороны Солнца, Луны и других планет;
- давление светового излучения Солнца;
- взаимодействие КА с электромагнитным полем Земли;
- поверхностный электрический эффект, возникающий при движении КА в ионизированных слоях атмосферы.

2.3. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Под случайными атмосферными возмущениями здесь понимаются возмущения плотности атмосферы, которые непосредственно влияют на движение ЛА.

На плотность атмосферы Земли оказывают влияние:

- солнечная активность (на высоте 200 км амплитуда вариаций достигает 40% и увеличивается с ростом высоты);
- солнечная радиация и приливы (на высоте 200 км отклонения достигают 15%, а на высоте 800 км изменяются на порядок);
- межпланетная плазма (вызывает колебания плотности атмосферы с амплитудой до 25% с полугодовым периодом);
- геомагнитный эффект (вызывает кратковременные изменения плотности в 2 раза на высотах порядка 200 км, а в 10 раз на высотах порядка 650 км);
- несферичность Земли (проявляется в несферичности распределения плотности атмосферы).

Учитывая большую важность знания плотности атмосферы Земли для анализа движения всех ЛА до высот порядка 500 км, разработке моделей расчета плотности атмосферы в функции высоты полета H уделяется особое внимание.

В настоящее время существуют несколько стандартов на расчёт плотности атмосферы Земли, каждый из которых имеет определенную область применения (все они относятся к детерминированным моделям).

Для баллистического обеспечения полета КА и ИСЗ в диапазоне высот от 120 до 600 км используется наиболее точная и сложная динамическая модель атмосферы, описанная в ГОСТ 25645.115-84 «Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов» и имеющая вид

$$\rho(H) = \rho_H K_1 K_2 K_3 K_4, \quad (2.11)$$

где $\rho_H = \rho_0 \exp \left[a_1 - a_2 (H - a_3)^{1/2} \right]$ - плотность ночной атмосферы;

K_1 – коэффициент, учитывающий суточный эффект в распределении плотности;

K_2 – поправка на полугодовой эффект;

K_3 – коэффициент, учитывающий изменения плотности, связанные с отклонением среднесуточного значения индекса солнечной активности от среднего уровня за рассматриваемый период (квартал, год);

K_4 – коэффициент, учитывающий корреляцию между плотностью атмосферы и геомагнитной возмущенностью.

Вариации среднесуточной плотности верхней атмосферы для этой модели определяются по ГОСТ 25645.102-83 Атмосфера Земли верхняя. Методика расчета характеристик вариаций плотности. Для этой модели

среднеквадратическое отклонение плотности, отнесенное к номинальному значению, изменяется от 6% на высоте 160 км до 58% на высоте 600 км.

Для использования при расчетах и проектировании ЛА, приведения результатов испытаний ЛА и их элементов к одинаковым условиям используется ГОСТ 4401-81 Атмосфера стандартная.

На основании обширного статистического материала, собранного за длительное время, в [9] были сделаны выводы о том, что нестационарная случайная функция $\rho(\mathbf{H})$ может быть представлена в виде

$$\rho(\mathbf{H}) = M_{\rho}(\mathbf{H}) + \sigma_{\rho}(\mathbf{H})\zeta(\mathbf{H}), \quad (2.8)$$

где $M_{\rho}(\mathbf{H})$ и $\sigma_{\rho}(\mathbf{H})$ – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение $\rho(\mathbf{H})$ соответственно; $\zeta(\mathbf{H})$ – стационарная случайная функция с моментными характеристиками $M_{\zeta}(\mathbf{H})=0$; $D_{\zeta}(\mathbf{H})=1$.

При этом корреляционная функция $R_{\zeta}(\Delta\mathbf{H})$ для высот $\mathbf{H} \leq 70$ км может быть приближенно представлена в двух вариантах [9] :

$$R_{\zeta}(\Delta\mathbf{H}) = e^{-K\Delta\mathbf{H}}, \quad (2.9)$$

$$R_{\zeta}(\Delta\mathbf{H}) = e^{-K\Delta\mathbf{H}} \cos(\Omega_0\Delta\mathbf{H}). \quad (2.10)$$

Вид выражения $R_{\zeta}(\Delta\mathbf{H})$, а также значения коэффициентов K и Ω_0 зависят от широты местности, времени года и рассматриваемого высотного слоя. Для высот полёта более 70км модели для корреляционной функции $R_{\zeta}(\Delta\mathbf{H})$ отсутствуют. Поэтому можно принять для этого диапазона высот, что $\zeta(\mathbf{H})$ представляет собой стационарный стандартный «белый шум». При этом вышеупомянутые детерминированные модели плотности атмосферы могут быть использованы в качестве математических ожиданий $M_{\rho}(\mathbf{H})$. Данные о погрешностях детерминированных моделей могут быть основой для определения $\sigma_{\rho}(\mathbf{H})$.

3. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

3.1. НАДЕЖНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЕТА КАК ЗАДАЧА СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В общем случае под надежностью динамической системы понимается вероятность безотказной работы системы при определенных условиях функционирования. При этом отказом системы называется событие, заключающееся в выходе фазовых переменных системы из допустимой области значений.

Применительно к ЛА понятие надежности функционирования связывается с вероятностью выполнения целевой задачи полёта. На этапе проектирования ЛА решается задача выбора вектора проектных параметров и законов управления, удовлетворяющих тактико-техническим требованиям (ТТТ). Так как функционирование ЛА осуществляется в условиях статистической неопределённости, то ТТТ часто формулируются как принадлежность значений вектора контролируемых характеристик движения (в общем случае состоит из вектора случайных величин y , являющихся функцией значений вектора фазовых переменных $x(t)$ в характерные моменты времени $F(x(t_1), \dots, x(t_n))$, и векторного случайного процесса $z(t)$, также являющегося функцией фазовых переменных $\Phi(x(t))$, допустимым областям значений соответственно Y^* и $Z^*(t)$ на всем временном интервале функционирования T с вероятностью, не меньшей заданной P^* , то есть

$$\left. \begin{aligned} P(y \in Y^*) &\geq P^* \\ P(z(t) \in Z^*(t)) &\geq P^*, t \in T \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Условия (3.1) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_{y \in Y^*} p(y) dy &\geq P^* \\ \int_{z \in Z^*} p(z, t) dz &\geq P^* \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где $p(y)$ и $p(z, t)$ – соответственно плотность распределения вероятности векторной СВ y и совместная плотность распределения вероятности векторного СП $z(t)$.

Как правило, информация о виде закона распределения отсутствует и часто принимается гипотеза о его близости к нормальному закону

распределения, основываясь на свойстве предельности нормального закона распределения. В силу свойств нормального закона распределения он считается заданным, если известны моментные характеристики первого и второго порядков. Таким образом проверка условия (3.2) может быть осуществлена, если найдены вектор математических ожиданий M_y и ковариационная матрица K_y и $M_z(t)$ и матричная корреляционная функция $R_z(t_1, t_2)$.

Следовательно, центральная проблема проектирования ЛА – оценка надежности выполнения целевых задач полёта – сводится к задаче статистического анализа динамической системы:

найти главные вероятностные характеристики M_y, K_y векторной случайной величины y и $M_z(t), R_z(t_1, t_2)$ векторного случайного процесса $Z(t)$, если известны стохастическая математическая модель динамической системы :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, V, \xi, t), \\ x(t_0) &= x_0, t \in T, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

соотношения, определяющие контролируемые характеристики движения

$$\left. \begin{aligned} y &= F(x(t_1), \dots, x(t_N)); t_1, \dots, t_N \in T, \\ z(t) &= \varphi(x(t)), t \in T, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

главные вероятностные характеристики случайных факторов и возмущений

$$\left. \begin{aligned} V &\in \{M_v, K_v\}, \\ x_0 &\in \{M_{x_0}, K_{x_0}\}, \\ \xi(t) &\in \{M_\xi(t), R_\xi(t_1, t_2)\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

3.2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задача статистического анализа динамической системы, описываемая соотношениями (3.3)–(3.5), достаточно сложна. В зависимости от конкретной постановки разработаны различные методы её решения, отличающиеся трудоёмкостью (или быстродействием), достоверностью (или погрешностью) результатов, универсальностью применения, простотой и наглядностью при алгоритмической реализации, возможностью оценки точности получаемых результатов и т.д. Нет метода,

который по всем перечисленным показателям давал бы наилучшие результаты.

Основными признаками, по которым удобно проводить классификацию методов статистического анализа, являются вид и свойства математической модели динамической системы.

Математические модели динамических систем в первую очередь разделяются на линейные и нелинейные.

Для решения задач статистического анализа линейных динамических систем применяются следующие методы:

- метод весовых (переходных) функций;
- метод корреляционных преобразований;
- частотный метод анализа точности стационарных систем.

В зависимости от свойств нелинейной математической модели и целей исследования целесообразно выделить группу методов, которые применяются в случае, если допускается линеаризация исходной нелинейной модели:

- метод статистической линеаризации, когда в математической модели динамической системы присутствуют локальные существенные нелинейности (обычно безынерционные нелинейности);
- метод линеаризации относительно среднего движения, применяемый, когда в правых частях дифференциальных уравнений присутствуют гладкие нелинейности, допускающие дифференцирование.

Для этой группы методов исходная нелинейная система заменяется линейным аналогом, к которому затем применяются методы статистического анализа линейных систем.

Если в задаче нелинейного статистического анализа присутствует априорная информация о характере связи между входными случайными факторами и выходными контролируемыми характеристиками, то целесообразно использовать методы другой группы:

- метод эквивалентных возмущений,
- метод интерполяционных полиномов.

Наиболее распространенным и универсальным методом нелинейного статистического анализа, не требующим принятия каких-либо допущений и не накладывающим ограничений на сложность рассматриваемой математической модели, является метод статистических испытаний (или метод статистического моделирования).

4. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Будем рассматривать линейные динамические системы вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + B(t)u + D(t)\xi, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где $x \in E^n$ – n -мерный вектор фазовых переменных; $u \in E^m$ – m -мерный вектор управляющих воздействий (детерминированный); $\xi \in E^k$ – k -мерный вектор случайных возмущений с заданными главными вероятностными характеристиками $M_\xi(t)$, $R_\xi(t_1, t_2)$; $x_0 \in E^n$ – n -мерный вектор случайных начальных условий с заданными главными вероятностными характеристиками M_{x_0} , K_{x_0} ; $A(t)$ – матрица размера $n \times n$, $B(t)$ – матрица размера $n \times m$, $D(t)$ – матрица размера $n \times k$.

Если матрицы $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ не изменяются во времени, то система (4.1) называется линейной стационарной системой. В этом случае её удобно описывать с помощью матричных передаточных функций

$$\left. \begin{aligned} W_{xu}(s) &= (sE - A)^{-1}B, \\ W_{x\xi}(s) &= (sE - A)^{-1}D, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где s – аргумент Лапласа; $W_{xu}(s)$ – матрица передаточных функций, связывающих вход u с выходом x ; $W_{x\xi}(s)$ – матрица передаточных функций, связывающих вход ξ с выходом x .

Решение системы (4.1) можно представить в квадратурах с помощью формулы Коши на основании свойства суперпозиции линейных систем [2]

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x + \int_{t_0}^t G_{xu}(t, s)u(s)ds + \int_{t_0}^t G_{x\xi}(t, s)\xi(s)ds, \quad (4.3)$$

где $G_{xu}(t, s) = \Phi(t, s)B(s)$, $G_{x\xi}(t, s) = \Phi(t, s)D(s)$ – матрицы весовых функций, преобразования по Лапласу которых приводят к матрицам передаточных функций $W_{xu}(s)$, $W_{x\xi}(s)$, соответственно; $\Phi(t, t_0)$ – матрица фундаментальных решений, которая описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} &= A(t)\Phi(t, t_0), \\ \Phi(t_0, t_0) &= E, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

где E – единичная матрица размера $n \times n$.

Матрица фундаментальных решений для аргументов t и t_0 может быть выражена через промежуточные моменты времени $t=t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < t_0$:

$$\Phi(t_1, t_0) = \prod_{i=1}^n \Phi(t_i, t_{i-1}) \approx \prod_{i=1}^n (E + A(t_i)\Delta t),$$

где $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ – малый временной интервал разбиения, на котором исходная линейная система может рассматриваться как стационарная.

В выражении (4.3) каждое слагаемое определяет вклад в формирование выходной переменной $x(t)$ соответственно начального состояния системы, управляющих и возмущающих воздействий.

4.2. МЕТОД ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Применяется для отыскания главных вероятностных характеристик выхода линейных динамических систем вида (4.1) [2], [3].

Определив математическое ожидание для решения (4.3), записанного в квадратурах, получим

$$M_x(t) = \Phi(t, t_0)M_{x_0} + \int_{t_0}^t G_{xu}(t, s)u(s)ds + \int_{t_0}^t G_{x\xi}(t, s)M_\xi(s)ds. \quad (4.4)$$

Далее легко находится центрированный случайный процесс $\Delta x(t)$:

$$\Delta x(t) = x(t) - M_x(t) = \Phi(t, t_0)\Delta x_0 + \int_{t_0}^t G_{x\xi}(t, s)\Delta \xi(s)ds, \quad (4.5)$$

Так как из определения матричной корреляционной функции следует, что

$$R_x(t_1, t_2) = M[\Delta x(t_1)\Delta x^T(t_2)], \quad (4.6)$$

то с учетом (4.5) для случая независимости начальных условий x_0 от случайных возмущений $\xi(t)$ можно окончательно записать

$$R_x(t_1, t_2) = \Phi(t_1, t_0)K_x\Phi^T(t_2, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} G_{x\xi}(t_2, s_2)R_\xi(s_1, s_2)G_{x\xi}^T(t_2, s_2)ds_1ds_2. \quad (4.7)$$

Для вычисления матричной ковариационной функции $K_x(t)$ в выражении (4.7) необходимо использовать условие $t_1 = t_2 = t$. Выражения (4.4) и (4.7) описывают аналитическое решение задачи статического анализа для линейной нестационарной системы. Запишем решения задачи статического анализа для нескольких частных случаев.

1). Пусть в постановке задачи (4.1) $\xi(t)$ – векторный нестационарный «белый шум», матричная корреляционная функция которого записывается в виде:

$$R_\xi(t_1, t_2) = N(t_1)\delta(t_1 - t_2),$$

где $N(t)$ – матрица интенсивности векторного «белого шума».

Тогда выражение для $\mathbf{K}_x(\mathbf{t})$ можно записать, используя свойство фильтрации

δ -функции $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$, в более простом виде :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x(\mathbf{t}) &= \Phi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) \mathbf{K}_{x_0} \Phi^T(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) + \int_{\mathbf{t}_0}^{\mathbf{t}} \int_{\mathbf{t}_0}^{\mathbf{t}} \mathbf{G}_{x\xi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}_1) \mathbf{N}(\mathbf{s}_1) \delta(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \mathbf{G}_{x\xi}^T(\mathbf{t}, \mathbf{s}_2) d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2 = \\ &= \Phi(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) \mathbf{K}_{x_0} \Phi^T(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) + \int_{\mathbf{t}_0}^{\mathbf{t}} \mathbf{G}_{x\xi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \mathbf{N}(\mathbf{s}) \mathbf{G}_{x\xi}^T(\mathbf{t}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

2). Рассмотрим случай стационарной устойчивой линейной системы (4.1), в которой отсутствуют управляющие воздействия $\mathbf{u} \equiv 0$. Тогда $\mathbf{A} = \text{const}$, $\mathbf{D} = \text{const}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) = 0$ (достаточное условие устойчивости).

Пусть $\xi(\mathbf{t})$ – стационарный векторный случайный процесс, т.е. $\mathbf{M}_\xi = \text{const}$, $\mathbf{R}_\xi(\tau) = \mathbf{N}\delta\tau$.

Будем искать вероятностные характеристики вектора $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ в установившемся режиме (после затухания переходного процесса). Чтобы в текущий момент времени наблюдался установившийся режим, удалим \mathbf{t}_0 в $-\infty$, тогда из соотношения (4.4) следует

$$\mathbf{M}_X(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{t}} \mathbf{G}_{x\xi}(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \mathbf{M}_\xi d\mathbf{s}. \quad (4.9)$$

Переходя к новой переменной $\tau = \mathbf{t} - \mathbf{s}$, получаем

$$\mathbf{M}_X = \int_0^{\infty} \mathbf{G}_{x\xi}(\tau) \mathbf{M}_\xi d\tau = \left[\int_0^{\infty} \mathbf{G}_{x\xi}(\tau) d\tau \right] \mathbf{M}_\xi = \text{const}. \quad (4.10)$$

С учетом взаимосвязи между матрицей передаточных функций $W_{x\xi}(s)$ и матрицей весовых функций $G_{x\xi}(\tau)$, выражающейся с помощью преобразования по Лапласу

$$W_{x\xi}(s) = \int_0^{\infty} G_{x\xi}(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

в окончательном виде получим

$$\mathbf{M}_X = W_{x\xi}(s) \Big|_{s=0} \mathbf{M}_\xi. \quad (4.11)$$

Аналогично найдем выражение для $\mathbf{R}_x(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$:

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \int_0^{\mathbf{t}_1} \int_0^{\mathbf{t}_2} \mathbf{G}_{x\xi}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{s}_1) \mathbf{R}_\xi(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \mathbf{G}_{x\xi}^T(\mathbf{t}_2 - \mathbf{s}_2) d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2. \quad (4.12)$$

Введем новые переменные $\tau_1 = \mathbf{t}_1 - \mathbf{s}_1$, $\tau_2 = \mathbf{t}_2 - \mathbf{s}_2$, $\tau = \mathbf{t} - \mathbf{s}$.

Тогда (4.12) можно записать в виде

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{G}_{x\xi}(\tau_1) \mathbf{R}_\xi(\tau + \tau_1 - \tau_2) \mathbf{G}_{x\xi}^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.13)$$

На основании полученных результатов (4.11) и (4.13) можно сделать вывод, что в рассмотренном частном случае на выходе в установившемся режиме наблюдается стационарный случайный процесс.

Если входной случайный процесс является стационарным «белым шумом», то, подставив в (4.13) $\mathbf{R}_\xi(\tau) = \mathbf{N}\delta\tau$, получим окончательное выражение

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \int_0^{\infty} \mathbf{G}_{x\xi}(\tau_1) \mathbf{N} \mathbf{G}_{x\xi}^T(\tau + \tau_1) d\tau_1. \quad (4.13')$$

4.3 МЕТОД КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Недостатком метода весовых функций является необходимость предварительного определения матриц весовых функций и последующего вычисления сложных интегралов.

В ряде практических задач принимается, что на вход подается векторный случайный процесс $\xi(t)$ в виде нестационарного «белого шума». Тогда можно предложить иной подход к вычислению $\mathbf{M}_x(t)$ и $\mathbf{K}_x(t)$ (корреляционную функцию $\mathbf{R}_x(t_1, t_2)$ в этом случае найти не удастся) [2], [3].

Продифференцируем по времени (4.4) и (4.8). Тогда после преобразований с учетом (4.4) получим

$$\frac{d\mathbf{M}_x}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{M}_x(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{M}_\xi(t), \quad (4.14)$$

$$\frac{d\mathbf{K}_x}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{K}_x(t) + \mathbf{K}_x(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{D}(s)\mathbf{N}(t)\mathbf{D}^T(t), \quad (4.15)$$

где $\mathbf{M}_x(t_0) = \mathbf{M}_{x0}$, $\mathbf{K}_x(t_0) = \mathbf{K}_{x0}$.

Таким образом, исходная задача преобразована к задаче Коши, для решения которой существует много стандартных численных методов.

Для второго частного случая параграфа 4.2 системы дифференциальных уравнений (4.14) и (4.15) преобразуются в системы алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A}\mathbf{M}_x + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{M}_\xi = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_x\mathbf{A}^T + \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{D}^T = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Следует отметить, что определение \mathbf{M}_x и \mathbf{K}_x в обоих случаях осуществляется независимо друг от друга, причем из (4.16) \mathbf{M}_x можно найти аналитически

$$\mathbf{M}_x = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{M}_\xi). \quad (4.18)$$

4.4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Часто в практической деятельности требуется оценить точность выхода D_X стационарной линейной системы, заданной своей передаточной функцией в установившемся режиме, если на вход подается стационарный случайный процесс (второй частный случай параграфа 4.2 в предположении одномерности линейной системы) [3].

Найдем спектральную плотность выхода системы, подставив соотношение (4.13), определяющее $R_X(\tau)$, в выражение для спектральной плотности (1.63) :

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G_{x\xi}(\tau) R_{\xi}(\tau + \tau_1 - \tau_2) G_{x\xi}(\tau_2) e^{-i\omega\tau} d\tau_1 d\tau_2 d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{R_{\xi}(\tau + \tau_1 - \tau_2) e^{-i\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} d(\tau + \tau_1 - \tau_2)}_{S_{\xi}(\omega)} \underbrace{\int_0^{\infty} G_{x\xi}(\tau_1) e^{i\omega\tau_1} d\tau_1}_0 \underbrace{\int_0^{\infty} G_{x\xi}(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2}_0. \end{aligned}$$

С учетом соотношений преобразования Фурье в окончательном виде можно записать

$$S_X(\omega) = W_{x\xi}(i\omega) W_{x\xi}(-i\omega) S_{\xi}(\omega),$$

где $W_{x\xi}(i\omega)$, $W_{x\xi}(-i\omega)$ – частотная функция и сопряженная частотная функция соответственно исходной линейной системы.

Тогда можно найти дисперсию выходной переменной системы по соотношению (1.62) :

$$D_X = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\xi}(i\omega) W_{x\xi}(-i\omega) S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) можно преобразовать к интегралу вида

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_n(i\omega)}{\mu_n(i\omega)\mu_n(-i\omega)} d\omega, \quad (4.17)$$

где $\mu_n(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n$,
 $v_n(i\omega) = b_0(i\omega)^{2n-2} + b_1(i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$.

Интеграл I_n можно вычислить по соотношению

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1} |C_n|}{2a_0 |G_n|}, \quad (4.18)$$

где $|G_n|$ - определитель матрицы Гурвица для многочлена μ_n , вычисляемый на основе матрицы G_n с элементами $g_{m2} = a_{2m-r}$; $m, r = 1, 2, \dots, n$; $|C_n|$ - определитель матрицы, полученной из матрицы G_n заменой её первого столбца на b_0, b_1, \dots, b_{n-1} . В справочнике [8] приведены аналитические выражения для интегралов I_n при $n = 1-16$, например,

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}; \quad I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1}; \quad I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_3a_0 - a_1a_2)}. \quad (4.19)$$

Для иллюстрации применения частотного метода анализа точности найдем дисперсию выхода динамической системы, описывающейся уравнением

$$T \frac{dx}{dt} + x = K\xi$$

при условии подачи на вход экспоненциально коррелированного стационарного случайного процесса $R_\xi(\tau) = De^{-|\lambda|\tau}$.

Ранее для экспоненциально коррелированного случайного процесса было найдено выражение спектральной плотности в виде $S_\xi(\omega) = \frac{D\lambda}{\pi(\omega^2 + \lambda^2)}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } D_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{T i\omega + 1} \cdot \frac{K}{T(-i\omega) + 1} \cdot \frac{D\lambda}{\pi(\omega^2 + \lambda^2)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2K^2 D\lambda}{[(T i\omega + 1)(i\omega + \lambda)][(T(-i\omega) + 1)(-i\omega + \lambda)]} d\omega = I_2, \end{aligned}$$

$$\text{где } \mu_2(i\omega) = (T i\omega + 1)(i\omega + \lambda) = T(i\omega)^2 + (T\lambda + 1)i\omega + \lambda,$$

$$v_2(i\omega) = 2K^2 D\lambda.$$

Таким образом, $a_0 = T$; $a_1 = T\lambda + 1$; $a_2 = \lambda$; $b_0 = 0$; $b_1 = 2K^2 D\lambda$.

Выполнив элементарные преобразования с учетом соотношений (4.19), найдем окончательное выражение для дисперсии выхода системы

$$D_x = \frac{b_1}{2a_1a_2} = \frac{K^2 D}{(T\lambda + 1)}.$$

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Анализ нелинейных систем точными методами (как для линейных систем) затруднен ввиду большой сложности, а зачастую и принципиальной невозможности достижения конечного результата. Поэтому большое распространение получили приближенные методы исследования и в первую очередь те, которые позволяют распространить на нелинейные системы методы анализа линейных систем.

5.1. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ПРИНЦИП СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Этот метод применяется, если нелинейность исследуемой системы локализована и может быть представлена в виде безынерционного элемента вида (существенная нелинейность) [6]

$$v(t) = f(\zeta(t)), \quad (5.1)$$

где $\zeta(t)$ – случайный сигнал, подающийся на вход нелинейного элемента, для которого известна одномерная плотность распределения вероятностей $p(\zeta, t)$.

Заменим нелинейное звено (5.1) эквивалентным в статистическом смысле линейным звеном вида

$$\tilde{v}(t) = K_0 + K_1 \Delta \zeta(t), \quad (5.2)$$

где $\Delta \zeta(t) = \zeta(t) - M_\zeta(t)$ – центрированный входной сигнал, K_0 и K_1 – статистические коэффициенты усиления по средней и случайной составляющим входного сигнала соответственно.

Для того чтобы обеспечить близость входных сигналов исходного $v(t)$ и эквивалентного линейного $\tilde{v}(t)$ звеньев и найти коэффициенты K_0 и K_1 , необходимо записать два условия.

Первое условие отражает совпадение математических ожиданий случайных сигналов $v(t)$ и $\tilde{v}(t)$:

$$M[v] = M[\tilde{v}]. \quad (5.3)$$

Тогда с учетом (5.2) получается, что

$$K_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) p(\zeta) d\zeta. \quad (5.4)$$

Второе условие должно отражать эквивалентность вероятностных характеристик второго порядка (корреляционных функций) для обоих звеньев. Так как точное равенство корреляционных функций обеспечить не удастся, то используется два варианта записи условий, обеспечивающие приближенное равенство корреляционных функций.

Из требования равенства дисперсии $D[v] = D[\tilde{v}]$ находится коэффициент $K_1^{(1)}$ (первый вариант записи статистического коэффициента усиления K_1):

$$K_1^{(1)} = \pm \sqrt{\frac{D_v}{D_\zeta}} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_\zeta}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\zeta) p(\zeta) d\zeta - M_v^2}. \quad (5.5)$$

При использовании этого коэффициента получается эквивалентное линейное звено $\tilde{v}(t)$ с корреляционной функцией $R_{\tilde{v}}(\tau)$, являющейся оценкой сверху для $R_v(\tau)$.

Из требования

$$\min_{K_1} M \left[\left(v(t) - \tilde{v}(t) \right)^2 \right]$$

определяется коэффициент $K_1^{(2)}$ (второй вариант записи статистического коэффициента усиления K_1):

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{D_\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta - M_\zeta) f(\zeta) p(\zeta) d\zeta. \quad (5.6)$$

При использовании этого коэффициента для записи эквивалентного звена корреляционная функция $R_{\tilde{v}}(\tau)$ будет давать оценку снизу для $R_v(\tau)$.

Поэтому рекомендуется принимать окончательно в качестве коэффициента K_1 для эквивалентного линейного звена среднее арифметическое величин $K_1^{(1)}$ и $K_1^{(2)}$:

$$K_1 = 0,5 \left(K_1^{(1)} + K_1^{(2)} \right). \quad (5.7)$$

Аналогично выполняется статистическая линеаризация для многомерных нелинейностей.

На практике для поиска аналитических выражений статистических коэффициентов усиления K_0 и K_1 принимается гипотеза о нормальном законе распределения $p(\xi)$. В этом случае легко видеть, что K_0 и K_1 будут являться функциями параметров нормального закона распределения M_ξ и D_ξ , причем выполняется следующее равенство:

$$K_1^{(2)} = \frac{\partial [K_0(M_\zeta, D_\zeta) M_\zeta]}{\partial M_\zeta}. \quad (5.8)$$

Для большого числа типовых нелинейностей выполнена статистическая линеаризация, результаты которой приводятся в соответствующих справочниках [6], [8].

Например, для безынерционного релейного звена, имеющего математическое описание

$$v = 1 \cdot \text{sign} \zeta, \quad (5.9)$$

коэффициент статистической линеаризации записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} K_0(M_\zeta, D_\zeta) &= \frac{1}{M_\zeta} \Phi \left(\frac{M_\zeta}{\sqrt{2D_\zeta}} \right), \\ K_1^{(1)}(M_\zeta, D_\zeta) &= \pm \frac{1}{\sqrt{D_\zeta}} \sqrt{1 - \Phi^2 \left(\frac{M_\zeta}{\sqrt{2D_\zeta}} \right)}, \\ K_1^{(2)}(M_\zeta, D_\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{D_\zeta}} e^{-\frac{M_\zeta^2}{2D_\zeta}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

После перехода от исходной нелинейной системы к эквивалентной линейной системе могут быть использованы методы статистического анализа линейных систем (глава 4) – частотный метод анализа точности или метод корреляционных преобразований.

Частотный метод анализа точности обычно применяется в случае, если исходная нелинейная система состоит из стационарной линейной части, заданной своей передаточной функцией, и безынерционной одномерной нелинейности. В результате замены последней эквивалентным линейным звеном в дальнейшем необходимо рассматривать две линеаризованные системы: первая описывает прохождение средней составляющей случайного сигнала (в этом случае вместо нелинейного элемента ставится усилительное звено с коэффициентом усиления $K_0(M_\zeta, D_\zeta)$) и используется для определения математического ожидания M_x выхода системы по соотношению вида (4.11); вторая описывает прохождение отклонений случайного сигнала от его математического ожидания (в этом случае вместо нелинейного элемента ставится усилительное звено с коэффициентом усиления $K_1(M_\zeta, D_\zeta)$) и используется для определения дисперсии D_x выхода системы по

соотношению (4.16). Следует отметить, что если вход нелинейного звена не совпадает с входом всей системы, то необходимо найти предварительно M_ζ и D_ζ , используя вышеописанный алгоритм, но рассматривая сигнал ζ в качестве выходного сигнала системы.

Метод корреляционных преобразований обычно применяется для случая описания нелинейной системы в форме Коши (2.1), в правых частях которой наряду с линейными слагаемыми могут присутствовать существенные одномерные (или многомерные) безынерционные нелинейности.

5.2. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДНЕГО ДВИЖЕНИЯ

В задачах анализа движения ЛА под действием случайных возмущений часто используются математические модели вида (2.1), правые части которых представляют гладкие многомерные нелинейности, допускающие отыскание производных до второго порядка включительно. В этом случае выполняется линеаризация правых частей дифференциальных уравнений в окрестности математических ожиданий фазовых переменных $M_x(t)$ и математических ожиданий случайных возмущений $M_\xi(t)$ [2]:

$$\frac{dx}{dt} \approx f(M_x(t), M_\xi(t), t) + A(M_x(t), M_\xi(t), t)\Delta x(t) + D(M_x(t), M_\xi(t), t)\Delta \xi(t), \quad (5.11)$$

где

$$A(M_x, M_\xi, t) = \left[\frac{\partial f(x, \xi, t)}{\partial x} \right]_{M_x, M_\xi} \quad \text{и} \quad D(M_x, M_\xi, t) = \left[\frac{\partial f(x, \xi, t)}{\partial \xi} \right]_{M_x, M_\xi} -$$

матрицы частных производных размеров $n \times n$ и $n \times m$, соответственно, найденные для $x=M_x$, $\xi=M_\xi$; $\Delta x(t)=x(t)-M_x(t)$; $\Delta \xi(t) = \xi(t)-M_\xi(t)$.

Из (5.11) следует, что полное движение может быть разделено на два движения:

- среднее движение, характеризуемое изменением математических ожиданий составляющих фазового вектора и описываемое системой уравнений

$$\frac{d}{dt} M_x \approx f(M_x, M_\xi, t), \quad \text{где } M_x(t_0)=M_{x0}; \quad (5.12)$$

- возмущенное движение, характеризуемое случайными отклонениями $\Delta x(t)$ составляющих фазового вектора от их математических ожиданий

$$\frac{d\Delta x}{dt} \approx A(M_x, M_\xi, t)\Delta x(t) + D(M_x, M_\xi, t)\Delta \xi(t), \quad (5.13)$$

где $\Delta x(t_0) = \Delta x_0$ – случайное отклонение начального условия x_0 от M_{x0} .

Тогда с использованием соотношения метода корреляционных преобразований (в случае, если $\xi(t)$ – нестационарный «белый шум»), исходная задача статистического анализа преобразуется к задаче Коши

$$\frac{dM_x}{dt} \approx f(M_x, M_\xi, t), \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} \approx & A(M_x, M_\xi, t)K_x + K_x A^T(M_x, M_\xi, t) + \\ & + D(M_x, M_\xi, t)N(t)D^T(M_x, M_\xi, t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

с известными начальными условиями

$$M_x(t_0) = M_{x0}, \quad K_x(t_0) = K_{x0}, \quad (5.16)$$

где $N(t)$ – матрица интенсивностей «белого шума».

Системы уравнений (5.14) и (5.15) должны решаться совместно в отличие от линейной постановки (глава 4).

6. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваемая в этой главе группа методов используется в случаях, когда построение линейного приближения невозможно или точность, которая при этом может быть достигнута, является неудовлетворительной. Эти методы отличаются существенной трудоемкостью, так как требуют выполнения многократного моделирования исходной нелинейной системы.

6.1. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Данный метод применяется для статистического анализа нелинейных динамических систем, математическое описание которых может быть представлено в виде [6] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, V, t) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где $x_0 \in E^n$ - n - мерный вектор неслучайных начальных условий;

$V \in E^k$ - k - мерный вектор центрированных некоррелированных между собой случайных величин, для которых известны моментные характеристики до q - порядка включительно,

т.е. $M[V] = 0$, $M[V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_m}] = \mu_{r_1, \dots, r_m}$; $r_1, \dots, r_m = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, q}$.

Требуется найти моментные характеристики выходных величин вида:

$$M[x^p], \quad p = 1, 2, \dots$$

В основе метода лежит гипотеза об известном характере зависимости между входными случайными параметрами и выходными величинами. Для рассматриваемого случая - это возможность ее представления в виде ряда Тейлора по случайным параметрам V_1, \dots, V_m до q - порядка включительно.

Пусть решения системы уравнений (6.1) являются функциями времени t и случайных величин V_1, \dots, V_m :

$$x_i = \varphi_i(t, V_1, \dots, V_m), \quad i = \overline{1, n} \quad (6.2)$$

Тогда p -я степень решения (6.2) может быть представлена в виде:

$$x_i^p = \varphi_i^p(t, V_1, \dots, V_m) = \psi_i(t, V_1, \dots, V_m), \quad (6.3)$$

где $\psi_i(_) = \varphi_i^p(_)$, $p = 1, 2, \dots$

Разложим функцию $\varphi_i(_)$ в ряд Тейлора по случайным параметрам V_1, \dots, V_m в окрестности их нулевых математических ожиданий, ограничиваясь членами q -й степени :

$$x_i^p = \psi_i(t, 0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left(\frac{\partial^k \psi_i}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \dots \partial V_{r_k}} \right) \Big|_0 V_{r_1} V_{r_2} \dots V_{r_k} \quad (6.4)$$

где $\psi_i(t, 0, \dots, 0)$ - значения функции $\psi_i(_)$ при нулевых значениях случайных

величин, $\left(\frac{\partial^k \psi_i}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \dots \partial V_{r_k}} \right) \Big|_0$ - частные производные от функции $\psi_i(_)$ по

случайным величинам, вычисленные при их нулевых значениях. Применив к (6.4) операцию отыскания математического ожидания, получим искомую

вероятностную характеристику $M[x_i^p]$

$$M[x_i^p] = \psi_i(t, 0, \dots, 0) + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left(\frac{\partial^k \psi_i}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \dots \partial V_{r_k}} \right) \Big|_0 \mu_{r_1, r_2, \dots, r_k} \quad (6.5)$$

Однако решение (6.2) обычно неизвестно, поэтому найти частные производные в (6.5) затруднительно. Для устранения этой проблемы выбирается N различных комбинаций значений для входных случайных величин, называемых в дальнейшем эквивалентными возмущениями :

		V_1	V_2	...	V_m
1	комбинация	ξ_{11}	ξ_{21}	...	ξ_{m1}
2	комбинация	ξ_{12}	ξ_{22}	...	ξ_{m2}

N	комбинация	ξ_{1N}	ξ_{2N}	...	ξ_{mN}

Решив N раз систему (6.1), получим N решений $\psi_i^{(1)}(\cdot), \dots, \psi_i^{(N)}(\cdot)$. После подставления эквивалентных возмущений и соответствующих им решений в (6.4), умножения обеих частей полученных N равенств на пока неизвестные коэффициенты $\alpha_s, s = \overline{1, N}$ и суммирования полученных результатов записывается следующее соотношение :

$$Q = \sum_{s=1}^N \alpha_s x_i^P(s) = \psi_i(t, 0, \dots, 0) \sum_{s=1}^N \alpha_s + \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^m \sum_{r_2=1}^m \dots \sum_{r_k=1}^m \left(\frac{\partial^k \psi_i}{\partial V_{r_1} \partial V_{r_2} \dots \partial V_{r_k}} \right) \Big|_0 \sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{r_1}(s) \xi_{r_2}(s) \dots \xi_{r_k}(s) \right). \quad (6.6)$$

Сравнивая выражения (6.5) и (6.6), можно сделать вывод, что сумма Q будет равна $M[x_i^P]$, если выполнены условия

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^N \alpha_s &= 1 \\ \sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{r_1}(s) \xi_{r_2}(s) \dots \xi_{r_k}(s) &= \mu_{r_1, r_2, \dots, r_k} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

где $r_1, r_2, \dots, r_k = \overline{1, m}; k = \overline{1, q}$.

В результате решения системы уравнений (6.7) находятся неизвестные $\alpha_1, \dots, \alpha_N; \xi_{11}, \dots, \xi_{m1}, \dots, \xi_{1N}, \dots, \xi_{mN}$.

Исходная система уравнений (6.1) интегрируется N раз для найденных комбинаций эквивалентных возмущений, а затем рассчитываются $x_i^P(s), s = \overline{1, N}$ и находятся искомые вероятностные характеристики по соотношениям вида

$$M[x_i^P] = \sum_{s=1}^N \alpha_s x_i^P(s), p = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

Найдем решение системы (6.7) для случая $q=2$ (соотношения метода эквивалентных возмущений для $q = 3$ и $q = 5$ приведены в [6]).

Пусть для системы случайных величин V_1, \dots, V_m известны вероятностные характеристики

$$M[V_r] = 0, r = \overline{1, m},$$

$$M[V_{r_1}, V_{r_2}] = \begin{cases} \sigma_r^2 - \text{при } r_1 = r_2 = r; r = \overline{1, m}, \\ 0 - \text{при } r_1 \neq r_2; r_1, r_2 = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Тогда система (6.7) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^N \alpha_s &= 1, \\ \sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{rs} &= 0, r = \overline{1, m}, \\ \sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{r_1 s} \xi_{r_2 s} &= 0, r_1, r_2 = \overline{1, m}, r_1 \neq r_2, \\ \sum_{s=1}^N \alpha_s \xi_{rs}^2 &= \sigma_r^2, r_1 = r_2 = r, r = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Положим $N=m+2$ и выберем значения эквивалентных возмущений ξ_{rS} согласно нижеприведенной табл. 1, добиваясь обращения в нуль возможно большего числа коэффициентов α_s .

Таблица 1

Номер комбинации	r						
	1	2	3	...	m-2	m-1	m
ξ							
1	ξ_1	0	0	...	0	0	0
2	0	ξ_2	0	...	0	0	0
...
m-1	0	0	0	...	0	ξ_{m-1}	ξ_m
m	0	0	0		0	0	ξ_m
m+1	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_{m-2}	ξ_{m-1}	ξ_m
m+2	$-\xi_1$	$-\xi_2$	$-\xi_3$...	$-\xi_{m-2}$	$-\xi_{m-1}$	$-\xi_m$

Для выбранного числа комбинаций и принятой матрицы эквивалентных возмущений из решения системы (6.10) следует

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{1}{m}, r = \overline{1, m}; \alpha_{m+1} = -\frac{1}{2m}, \alpha_{m+2} = \frac{1}{2m} \\ \xi_r &= \sqrt{m} \cdot \sigma_r, r = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Таким образом, главные вероятностные характеристики выхода динамической системы $M[x_i]$ и $D[x_i]$ могут быть найдены по соотношениям :

$$M[x_i] = \sum_{s=1}^{m+2} \alpha_s x_{i(s)} = \frac{1}{m} \left(\sum_{s=1}^m x_{i(s)} + \frac{x_{i(m+2)} - x_{i(m+1)}}{2} \right), \quad (6.12)$$

$$D[x_i] = \sum_{s=1}^{m+2} \alpha_s x_{i(s)}^2 - (M[x_i])^2 = \\ = \frac{1}{m} \left(\sum_{s=1}^m x_{i(s)}^2 + \frac{x_{i(m+2)}^2 - x_{i(m+1)}^2}{2} \right) - (M[x_i])^2. \quad (6.13)$$

Аналогичные формулы можно получить и при числе членов разложения в ряд Тейлора $q > 2$.

В заключение приведем этапы статистического анализа нелинейной динамической системы с помощью метода эквивалентных возмущений :

- 1). Выбор значений эквивалентных возмущений согласно табл. 1.
- 2). Численное решение системы дифференциальных уравнений (6.1) $(m+2)$ раза для комбинаций значений случайных параметров, равных соответствующим эквивалентным возмущениям.
- 3). Вычисление искомых вероятностных характеристик по формулам типа (6.12), (6.13).

Метод эквивалентных возмущений предполагает проведение относительно небольшого числа моделирований по сравнению с другими методами данной группы, требует знания только моментных характеристик входных случайных величин. Однако его применение сопряжено с процедурой отыскания решения вспомогательной системы уравнений типа (6.7) и не позволяет получить аналитические оценки точности получаемых оценок вероятностных характеристик.

6.2. МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ

В основе интерполяционного метода лежит идея аппроксимации интерполяционными полиномами существующей зависимости между входными случайными параметрами и выходными величинами [6], [7]. Метод также применяется при математическом описании динамической системы в виде (6.1). При этом считается, что случайные величины $V_1 \dots V_m$ являются независимыми и для них известны законы распределения $p(V_1) \dots p(V_m)$.

Пусть решение системы (6.1) имеет вид

$$x_i = \varphi_i(t, V_1, \dots, V_m), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.14)$$

Требуется найти оценку математического ожидания некоторой функции $\Phi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ от фазовых координат системы в момент времени t (под эту формулировку подходят любые вероятностные характеристики) :

$$M[\Phi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\{\varphi_1(t, V_1, \dots, V_n), \dots, \varphi_n(t, V_1, \dots, V_n)\} \prod_{i=1}^m p(V_i) dV_1 \dots dV_m. \quad (6.15)$$

Так как явный вид выражения (6.14) неизвестен, то можно найти значения решений (6.14) путем численного интегрирования (6.1) на ЭВМ при определенных значениях случайных параметров $V_1 \dots V_m$, которые называются узлами интерполирования.

Пусть для первой случайной величины V_1 выбраны определенным образом q_1 вариантов узлов интерполирования $V_{11}, V_{12}, \dots, V_{1q_1}$; для произвольной j -й случайной величины V_j выбраны q_j вариантов узлов интерполирования $V_{j1}, V_{j2}, \dots, V_{jq_j}$; для последней m -й случайной величины V_m выбраны q_m вариантов узлов интерполирования $V_{m1}, V_{m2}, \dots, V_{mq_m}$.

Тогда общее число расчетных вариантов $N = \prod_{i=1}^m q_i$.

Представим функцию $\Phi(\dots)$ приближенно с помощью интерполяционного полинома Лагранжа :

$$\Phi(V_1, \dots, V_m, t) \approx \sum_{k_1=1}^{q_1} \sum_{k_2=1}^{q_2} \dots \sum_{k_m=1}^{q_m} \Phi(V_{1k_1}, V_{2k_2}, \dots, V_{mk_m}, t) \times \prod_{j=1}^m \frac{\omega_{q_j}(V_j)}{\omega'_{q_j}(V_{jk_j})(V_j - V_{jk_j})}, \quad (6.16)$$

где $\omega_{q_j}(V_j) = (V_j - V_{j1})(V_j - V_{j2}) \dots (V_j - V_{jq_j})$ - многочлен степени q_j

относительно переменной V_j ; $\omega'_{q_j}(V_{jk_j})$ - производная от $\omega_{q_j}(V_j)$ по

переменной V_j , вычисленная в точке V_{jk_j} .

Тогда искомую характеристику (6.15) $M[\Phi(\dots)]$ можно представить с учетом (6.16), поменяв местами порядок интегрирования и суммирования, в виде

$$M[\Phi(\cdot)] \approx \sum_{k_1=1}^{q_1} \dots \sum_{k_m=1}^{q_m} \Phi \left(V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}, t \right) \times \rho_{k_1, k_2, \dots, k_m}. \quad (6.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho_{k_1, k_2, \dots, k_m} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^m \frac{\omega_{q_j}(V_j) p(V_j)}{\omega'_{q_j}(V_{jk_j})(V_j - V_{jk_j})} dV_j = \\ &= \prod_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{q_j}(V_j) p(V_j)}{\omega'_{q_j}(V_{jk_j})(V_j - V_{jk_j})} dV_j = \prod_{i=1}^m \rho_{k_j} \end{aligned} \quad (6.18)$$

называются числами Кристоффеля.

В [7] доказано, что если в качестве узлов интерполирования выбрать корни ортогональных полиномов по весу, равному плотности распределения случайной величины $p(\mathbf{V})$, то при использовании n узлов интерполирования данный метод дает точные значения в классе многочленов всех степеней до степени $q=2n-1$ включительно. При этом для каждой плотности распределения вероятностей, являющейся весовой функцией, существует единственная система ортогональных многочленов [7].

Для наиболее распространенных видов законов распределения приведем ортогональные многочлены, когда в качестве весовых функций выбраны функции плотности распределения вероятностей.

Пусть случайная величина V распределена равномерно на интервале $[a, b]$. Тогда с помощью линейного преобразования вида

$$V = \frac{b-a}{2} \lambda + \frac{b+a}{2} \quad (6.19)$$

случайную величину V можно получить из случайной величины λ , распределенной равномерно на интервале $[-1, 1]$ с плотностью $p_p(\lambda) = \frac{1}{2}$.

Ортогональной системой многочленов на интервале $[-1, 1]$ с весом $\frac{1}{2}$ является система многочленов Лежандра вида [7] :

$$H_0(\lambda) = 0, H_1(\lambda) = \lambda, H_n(\lambda) = \lambda H_{n-1}(\lambda) - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} H_{n-2}(\lambda). \quad (6.20)$$

Числа Кристоффеля для узлов, выбранных в точках, соответствующих корням многочленов Лежандра степени $(n+1)$, определяются по формуле

$$\rho_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{H_{n+1}(\lambda) d\lambda}{H'_{n+1}(\lambda)(\lambda - \lambda_k^{n+1})}. \quad (6.21)$$

Значения корней λ_k ортогональных многочленов Лежандра до **8** порядка включительно ($q \leq 8$) для случая закона равномерного распределения плотности вероятности на интервале $[-1, 1]$ приведены в табл. 2. Их следует пересчитывать для конкретных параметров равномерного закона распределения случайной величины по (6.19).

$$V_k = \frac{b-a}{2} \lambda_k + \frac{b+a}{2}, \quad k = \overline{1, q}. \quad (6.22)$$

Числа Кристоффеля ρ_k рассчитываются заранее и для $q \leq 8$ также приведены в табл. 2, при этом они выбираются из таблицы без пересчета. Пусть случайная величина V распределена по нормальному закону с параметрами M_V, D_V . Тогда с помощью линейного преобразования вида

$$V = M_V + \lambda \sigma_V \quad (6.23)$$

случайную величину V можно получить из нормально распределенной случайной величины λ с $M_\lambda = 0, D_\lambda = 1$.

Весовой функции вида $p_\Gamma(\lambda) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-0,5\lambda^2)$ соответствует система ортогональных многочленов Эрмита на интервале $(-\infty, +\infty)$, которые можно вычислить по рекуррентным формулам [7] :

$$H_0(\lambda) = 0, H_1(\lambda) = \lambda, H_{n+2}(\lambda) = \lambda H_{n+1}(\lambda) - (n+1)H_n(\lambda) \quad (6.24)$$

Значения корней ортогональных многочленов Эрмита λ_k для веса $p_\Gamma(\lambda)$ приведены в табл. 3 и пересчитываются для случайной величины V по (6.23):

$$V_k = M_V + \sigma_V \lambda_k. \quad (6.25)$$

Числа Кристоффеля ρ_k не зависят от параметров нормального закона распределения и выбираются также из табл. 3 без пересчета. Таблицы, подобные табл. 2 и 3, могут быть рассчитаны и для других законов распределения случайных величин, например, для экспоненциального закона приведены в [7].

Таблица 2

Узлы интерполяции и числа Кристоффеля
для равномерного распределения вероятностей

Число узлов, q	Номер узла, k	Узел типа Чебышева, x_k	Число Крис- тоффеля, ρ_k
1	1	0.0000000	1.000 000 0
2	1	0.577 350 3	0.500 000 0
	2	-0.577 350 3	0.500 000 0
3	1	0.000 000 0	0,444 444 4
	2	0,774 596 7	0,277 777 8
	3	-0,774 596 7	0,277 777 8
4	1	0,339 981 0	0.326 072 6
	2	-0.339 981 0	0.326 072 6
	3	0.861 136 3	0.173 927 4
	4	-0.861 136 3	0.173 927 4
5	1	0.000 000 0	0.284 444 4
	2	0.538 469 3	0.239 314 3
	3	-0.538 469 3	0.239 314 3
	4	0.906 179 8	0.118 463 4
	5	-0.906 179 8	0.118 463 4
6	1	0.238 619 2	0.233 957 0
	2	-0.238 619 2	0.233 957 0
	3	0.661 209 4	0.180 380 8
	4	-0.661 209 4	0.180 380 8
	5	0.932 469 5	0.085 662 2
	6	-0.932 469 5	0.085 662 2
7	1	0.000 000 0	0.208 979 6
	2	0.405 845 2	0.190 915 0
	3	-0.405 845 2	0.190 915 0
	4	0.741 531 2	0.139 852 7
	5	-0.741 531 2	0.139 852 7
	6	0.949 107 9	0.064 742 5
	7	-0.949 107 9	0.064 742 5
8	1	0.183 434 6	0.181 341 9
	2	-0.183 434 6	0.181 341 9
	3	0.525 532 4	0.156 853 3
	4	-0.525 532 4	0.156 853 3
	5	0.796 666 5	0.111 190 5
	6	-0.796 666 5	0.111 190 5
	7	0.960 289 8	0.050 614 2
	8	-0.960 289 8	0.050 614 2

Таблица 3

Узлы интерполирования и числа Кристоффеля
для нормального распределения вероятностей.

Число узлов, q	Номер узла, k	Узел типа Чебышева, x_k	Число Крис- тоффеля, ρ_k
1	1	0.000 000 0	1.000 000 0
2	1	0.999 999 9	0.500 000 0
	2	-0.999 999 9	0.500 000 0
3	1	0.000 000 0	0,666 666 7
	2	1.732 050 8	0,166 666 7
	3	-1.732 050 8	0,166 666 7
4	1	0,741 953 6	0.454 124 1
	2	-0.741 953 6	0.454 124 1
	3	2.334 414 2	0.045 875 8
	4	-2.334 414 2	0.045 875 8
5	1	0.000 000 0	0.533 333 3
	2	1.355 626 1	0.222 075 9
	3	-1.355 626 1	0.222 075 9
	4	2.856 969 3	0.011 257 4
	5	-2.856 969 3	0.011 257 4
6	1	0.616 706 6	0.408 828 4
	2	-0.616 706 6	0.408 828 4
	3	1.889 175 9	0.088 615 746
	4	-1.889 175 9	0.088 615 746
	5	3.324 257 4	0.002 555 784
	6	-3.324 257 4	0.002 555 784
7	1	0.000 000 0	0.457 142 3
	2	1.154 405 3	0.240 123 1
	3	-1.154 405 3	0.240 123 1
	4	2.366 759 4	0.030 757 12
	5	-2.366 759 4	0.030 757 12
	6	3.750 439 7	0.000 548 268 8
	7	-3.750 439 7	0.000 548 268 8
8	1	0.539 079 8	0.373 012 2
	2	-0.539 079 8	0.373 012 2
	3	1.636 512 0	0.117 239 9
	4	-1.636 512 0	0.117 239 9
	5	2.802 485 9	0.009 635 220
	6	-2.802 485 9	0.009 635 220
	7	4.144 547 2	0.000 112 614 5
	8	-4.144 547 2	0.000 112 614 5

Опишем этапы статистического анализа динамической системы при использовании интерполяционного метода:

1. Для заданных порядков интерполяционных многочленов q_1, \dots, q_m по случайным величинам V_1, \dots, V_m соответственно находятся по таблицам (типа таблиц 2, 3) узлы интерполирования $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1q_1}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mq_m}$ и числа

Кристоффеля $\rho_{11}, \dots, \rho_{1q_1}, \dots, \rho_{m1}, \dots, \rho_{mq_m}$.

2. По формулам пересчета типа (6.19), (6.25) рассчитываются значения узлов интерполирования для каждой случайной величины – $V_{11}, \dots, V_{1q_1}, \dots, V_{m1}, \dots, V_{mq_m}$, а также числа Кристоффеля вида (6.18).

3. Выполняется N раз численное интегрирование исходной системы

дифференциальных уравнений $N = \prod_{i=1}^m q_i$ для всех возможных комбинаций

расчетных случаев по узлам интерполирования и рассчитываются функции

$$\Phi \left(V_{1k_1}, V_{2k_2}, \dots, V_{mk_m} \right), \quad k_1 = \overline{1, q_1}, \quad k_2 = \overline{1, q_2}, \quad \dots, \quad k_m = \overline{1, q_m}.$$

4. Вычисляется искомая вероятностная характеристика по соотношению (6.17).

Трудоемкость метода можно существенно сократить, если при формировании расчетных вариантов контролировать значение выражения

$$1 - \sum_{k_1 \dots k_m} \rho_{k_1, k_2 \dots k_m}.$$

Если начинает выполняться неравенство

$$1 - \sum_{k_1 \dots k_m} \rho_{k_1, k_2 \dots k_m} < \delta, \quad (6.26)$$

где δ - заданная допустимая погрешность вычислений, то выборка узлов интерполирования прекращается и в дальнейших вычислениях участвуют лишь выбранные узлы [7].

Ниже приведены конечные выражения для вычисления различных вероятностных характеристик :

$$M[x_i(t)] \approx \sum_{k_1 \dots k_m} x_i(t, V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}) \rho_{k_1, k_2 \dots k_m}, \quad (6.27)$$

$$D[x_i(t)] \approx \sum_{k_1 \dots k_m} \left\{ x_i(t, V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}) - M[x_i(t)] \right\}^2 \rho_{k_1, k_2 \dots k_m}, \quad (6.28)$$

$$R_{x_i}(t_1, t_2) = \sum_{k_1 \dots k_m} \left\{ x_i(t_1, V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}) - M[x_i(t_1)] \right\} \times$$

$$\times \left\{ x_i(t_2, V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}) - M[x_i(t_2)] \right\} \cdot \rho_{k_1, k_2 \dots k_m}. \quad (6.29)$$

$$F_{x_i}(X_i) = P[x_i(t) \leq X_i] \approx \sum_{k_1 \dots k_m} \frac{1}{2} \left[\frac{x_i(t, V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}) - X_i}{|x_i(t, V_{1k_1}, \dots, V_{mk_m}) - X_i|} \right] \cdot \rho_{k_1 \dots k_m}. \quad (6.30)$$

Метод интерполяционных полиномов более трудоемок, чем метод эквивалентных возмущений, требует знания законов распределения входных случайных величин, но обеспечивает получение результатов с более высокой точностью, причем позволяет оценить максимальную ошибку решения в детерминированном плане [7].

6.3. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ

Метод статистических испытаний (или метод статистического моделирования, или метод Монте-Карло) является наиболее распространенным на практике методом статистического анализа нелинейных динамических систем. Его достоинствами являются наглядная вероятностная трактовка, способствующая быстрому практическому усвоению; универсальность применения к исследованию точности любых динамических систем; простая вычислительная схема; существенно упрощающая программирование; устойчивость результата по отношению к возможным ошибкам при проведении отдельных моделирований; простая оценка точности получаемых результатов.

Сущность метода статистических исследований (МСИ) заключается в следующем. На первом этапе создается моделирующий алгоритм, имитирующий воздействие случайных и детерминированных факторов на процесс функционирования и определяющий интересующие характеристики динамических систем :

$$x(t) = X(t, V, \xi(t), x_0), \quad (6.31)$$

$$y(t) = \varphi(x(t)). \quad (6.32)$$

Далее многократно повторяются реализации алгоритма (выполняется моделирование динамической системы, при которых случайные факторы V , ξ , x_0 заменяются их реализациями, полученными случайным образом) и формируется статистическая выборка (второй этап) :

$$x^{(i)}(t) = X(t^{(i)}, V^{(i)}, \xi^{(i)}(t), x_0^{(i)}) \quad , \quad (6.33)$$

$$y^{(i)}(t) = \varphi(x^{(i)}(t)), \quad i = \overline{1, N} \quad , \quad (6.34)$$

где $V^{(i)}$, $\xi^{(i)}(t)$, $x_0^{(i)}$ - реализации случайных факторов V , ξ , x_0 соответственно, N - объем выборки реализаций.

Затем обрабатывается полученная статистическая выборка реализаций методами математической статистики и находятся искомые вероятностные характеристики выхода динамической системы (третий этап) :

$$M[y(t)] \approx M_{(N)}[y(t)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{(i)}(t) \quad . \quad (6.35)$$

Такой подход к решению задачи статистического анализа базируется на законе больших чисел и предельных теоремах теории вероятностей, согласно которым частота появления случайного события в пределе стремится к его вероятности [1].

Так как в (6.35) оценка $M_{(N)}[y]$ является суммой случайных величин, равнозначных в вероятностном отношении, то согласно центральной предельной теореме Ляпунова закон распределения случайной величины $M_{(N)}[y]$ будет при $N \rightarrow \infty$ приближаться сколь угодно близко к нормальному закону распределения. Поэтому в качестве меры относительной погрешности оценки $M_{(N)}[y]$ можно принять величину [7]

$$\delta_N = \frac{|M_{(N)}[y] - M[M_{(N)}[y]]|}{3\sqrt{D[M_{(N)}[y]]}} \quad (6.36)$$

Тогда можно записать следующую вероятностную оценку погрешности [7] :

$$P(\delta_N \leq \varepsilon) \approx \Phi\left(3\varepsilon\sqrt{\frac{N}{2}}\right) \quad (6.37)$$

где ε - заданная верхняя граница погрешности δ_N ; $P(\delta_N \leq \varepsilon)$ - вероятность не превышения погрешностью δ_N фиксированной границы ε ; $\Phi(\dots)$ - функция Лапласа.

Из (6.37) следует, что если гарантийную вероятность принять равной $P_r = 0,99$, то формула для определения необходимого числа опытов N для обеспечения требуемой точности ε с вероятностью P_r запишется в виде

$$3\varepsilon\sqrt{\frac{N}{2}} \approx 2,$$

откуда

$$N \approx \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (6.38)$$

Таким образом, определение оценки вероятностных характеристик по методу статистических испытаний требует проведения большого объема моделирований (например, достижение 5% -й точности требует проведения не менее 400 испытаний), что является главным недостатком упомянутого метода.

Для снижения трудоемкости метода статистических испытаний разработаны различные его модификации. Одна из наиболее простых и в то же время эффективных модификаций основана на дополнительной обработке выборки входных случайных факторов и случайных выходных контролируемых характеристик [11].

Идея модификации основана на возможности оценки погрешности моделирования входных случайных факторов, возникающей за счет ограниченности объема выборки реализаций (числа испытаний N) и последующем ее пересчете на выходные контролируемые характеристики с использованием существующей статистической взаимосвязи между ними (с помощью смешанных ковариационных моментов).

Если математическая модель динамической системы преобразована к виду (6.1), то уточненная оценка вероятностной характеристики $M^*[y_i]$ определяется по соотношению

$$M^*[y_i] = M_{(N)}[y_i] - K_{y_i} V_{VV}^{-1} (M_{(N)}[y_i] - M[V]). \quad (6.39)$$

Здесь $M[V]$ - точное значение вектора математических ожиданий входных случайных величин V (известно по условию задачи);

$M_{(N)}[V] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V^{(j)}$ - вектор оценок математических ожиданий входных случайных величин V , найденный в результате статистической обработки выборки реализаций $\{V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(N)}\}$;

$M_{(N)}(y_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_i^{(j)}$ - вектор оценок выходных контролируемых

характеристик, найденный в рамках метода статистических испытаний;

$M_{(N)}[V] - M[V]$ - погрешность в определении оценки вероятностных характеристик для входных случайных факторов по методу статистических испытаний;

K_{VV} - автоковариационная матрица для векторной случайной величины V , которая в (6.39) заменяется своей оценкой $K_{VV(N)}$, найденной в результате обработки выборки входных случайных факторов

$$K_{VV} \approx K_{VV(N)} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \{V^{(j)} - M[V]\} \{V^{(j)} - M[V]\}^T ;$$

$K_{y_i V}$ - матрица смешанных моментов между y_i и V , отражающая их статистическую взаимосвязь, которая в (6.39) заменяется своей оценкой $K_{y_i V(N)}$, найденной в результате обработки выборки входных случайных факторов и выходных контролируемых характеристик :

$$K_{y_i V} \approx K_{y_i V(N)} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \{y_i^{(j)} - M_{(N)}[y_i]\} \{V^{(j)} - M[V]\}^T .$$

Использование оценки (6.39) позволяет получить более высокую точность при том же числе испытаний по сравнению с методом статистических испытаний или сократить трудоемкость при сохранении погрешности результата.

Оценка снижения трудоемкости (или повышения точности результата) по i -й контролируемой характеристике может быть найдена по формуле

$$x_i = (1 - r_{y_i V} r_{Vy_i})^{-1}, \quad (6.40)$$

где $r_{y_i V} r_{Vy_i} = K_{y_i V(N)} K_{VV(N)}^{-1} K_{y_i V(N)}^T D_{y_i(N)}^{-1}$ - квадрат множественного коэффициента корреляции между y_i и V ;

$D_{y_i(N)} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \{y_i^{(j)} - M_{(N)}[y_i]\}^2$ - оценка дисперсии контролируемой характеристики y_i .

Из (6.40) следует, что если $r_{y_i V} r_{Vy_i} = 0$ (что соответствует отсутствию статистической взаимосвязи между входными случайными параметрами и выходными контролируемыми характеристиками), то выигрыш от использования уточненной оценки не наблюдается.

В реальности между входными случайными величинами и выходными контролируемыми характеристиками всегда есть статистическая взаимосвязь. При ее увеличении, то есть при стремлении $r_{y_i V} r_{Vy_i}$ к 1 выигрыш будет повышаться и стремиться в пределе к бесконечности (последнее отвечает случаю, когда между входными случайными факторами и выходными контролируемыми характеристиками существует линейная зависимость).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятности: Учеб. для вузов.- М.: Высшая школа, 1999.
2. Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов: Учеб. пособие для авиац. спец. вузов /А.А.Лебедев, В.Т.Бобронников, М.Н.Красильщиков, В.В.Малышев. – М.: Машиностроение, 1985.
3. Росин М.Ф., Булыгин В.С. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления: Учеб. для вузов. – М.: Машиностроение, 1981.
4. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. – М.: Машиностроение, 1986.
5. Н. Хастингс, Дж. Пикок. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980.
6. Астапов Ю.М., Медведев В.С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. –М.: Наука, ГРФМЛ, 1982.
7. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. – М.: Машиностроение, 1968.
8. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А.А.Красовского.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
9. Майборода Ю.Л. Атмосфера и управление движением.- Л.: Гидрометеоздат, 1987
10. Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов.- М.: Наука, 1965.
11. Белоконов И.В. Использование регрессионных моделей для уточнения вероятностных характеристик в сложных динамических системах // Оптимизация процессов в авиационной технике: Межвуз. сборник, 1981, с.35-41.

ЭТАПЫ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Данное пособие рекомендуется использовать студентам при выполнении курсовой работы по дисциплине "Статистические методы анализа и идентификации динамических систем". В задании, выдаваемом студентам, отражается следующая информация:

- описание объекта исследования и физическая постановка задачи;
- основные исходные данные для составления студентами математической модели объекта исследования;
- состав случайных факторов и возмущений, а также их вероятностное описание, необходимое для записи студентом стохастической математической модели объекта исследования;
- дополнительные данные, определяющие диапазон изменения исходных данных и область предполагаемого параметрического исследования.

Первый этап курсовой работы заключается в записи стохастической нелинейной математической модели объекта исследования. После согласования с преподавателем результатов этого этапа можно переходить к проведению статистического анализа.

На втором этапе курсовой работы необходимо обосновать выбор метода приближенного стохастического анализа, предполагающего или построение линейного приближения (линеаризацию) нелинейной системы с последующим использованием методов линейного статистического анализа, или принятие гипотезы о характере связи между входными случайными факторами и выходными величинами (метод эквивалентных возмущений, метод интерполяционных полиномов).

На третьем этапе выполняется статистический анализ с использованием метода статистических испытаний.

Для получения достоверных результатов следует особое внимание уделить построению алгоритма получения решения нелинейной динамической системы, в частности, получению реализаций входных случайных факторов и возмущений.

В заключении курсовой работы даются рекомендации об эффективности использования в рассматриваемой задаче приближенного метода статистического анализа, а также делаются выводы об оценках искомых вероятностных характеристик и влиянии на них исходных данных задачи.

К пояснительно записке прилагается листинг программы с распечаткой результатов, а при защите курсовой работы демонстрируется написанное программное обеспечение, которое должно иметь дружественный интерфейс и обеспечивать наглядное представление результатов.

