

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

Е.П. РОСТОВА, Е.Б. КОРЕЕВА

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.05 Бизнес-информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2018

УДК 517.0(075)

ББК 22.16я7

P783

Рецензент: канд. Физ.-мат. наук, доц. **О. А. Васильева**
д-р техн. Наук, проф. **И. Н. Хаймович**

Ростова, Елена Павловна

P783 **Специальные разделы высшей математики: учеб. пособие / Е.П. Ростова, Е.Б. Кореева.** – Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. – 84 с.

ISBN 978-5-7883-1241-5

Содержит методическое обеспечение по математике, посвященное изучению дифференциальных уравнений, элементов векторного анализа, криволинейных и повторных интегралов.

Данное издание можно использовать для работы на практических занятиях в аудиториях и для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной формы обучения по направлениям подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.05 Бизнес информатика.

Подготовлено на кафедре математических методов в экономике.

УДК 517.0(075)

ББК 22.16я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.....	4
1.1 Решение уравнений третьего порядка с действительными и комплексными корнями	4
2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	8
2.1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.....	8
2.2. Решение дифференциальных уравнений первого порядка	9
2.3. Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.....	15
2.4. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида	17
2.5. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью произвольного вида	20
2.6. Указания к решению задачи 2.6	22
3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ	24
3.1. Вычисление производной скалярного поля по направлению	24
3.2. Вычисление градиента скалярного поля	26
3.3. Вычисление дивергенции векторного поля	27
3.4. Вычисление ротора векторного поля.....	28
4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ	29
4.1. Вычисление криволинейного интеграла второго рода	29
4.2. Вычисление двойного интеграла	31
4.3. Вычисление тройного интеграла.....	32
Приложения	35

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

1.1 Решение уравнений третьего порядка с действительными и комплексными корнями

В основе решения задачи 1.1 данной курсовой работы лежит *теорема о разложении многочлена на линейные множители* (Пискунов, т.1, гл. VII, §6) [1]:

Всякий многочлен n -ой степени разлагается на n линейных множителей вида $(x - a)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n .

Следствие (Пискунов, т.1, гл. VII, §7) [1]:

Всякий многочлен n -ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

В задаче 1.1 требуется найти все корни уравнения третьего порядка и записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Напомним, какие существуют формы записи комплексных чисел.

Комплексным числом z называется выражение $z=a+ib$, где a и b – действительные числа; i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2= - 1$; a называется действительной или вещественной частью, b – мнимой частью числа z . Обозначают их следующим образом: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число $z = a+ib$ изображается на плоскости xOy в виде точки $A(a, b)$ с координатами a и b . Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Соответствие между точками комплексной плоскости и комплексными числами взаимно однозначно. Точкам комплексной плоскости, лежащим на оси Ox , соответствуют действительные числа ($b=0$). Точки, лежащие на оси Oy , изображают чисто мнимые числа, так как в этом случае $a=0$. Поэтому ось Oy на комплексной плоскости называют осью мнимых чисел или мнимой осью, а ось Ox – действительной осью.

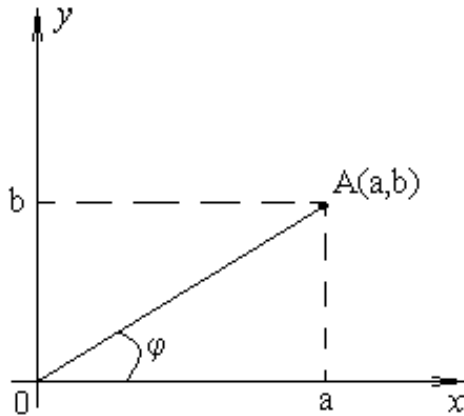


Рис. 1. Изображение комплексного числа $z=a+ib$.

Число $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называют **модулем комплексного числа** $z=a+ib$. Модуль числа z равен расстоянию от начала координат до точки A , изображающей это число.

Всякое решение системы уравнений
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$
 называется **аргументом комплексного числа** $z=a+ib \neq 0$.

Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом $\text{Arg } z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось Ox до совпадения с радиус-вектором \overline{OA} точки A . При этом $\varphi > 0$, если поворот совершается против часовой стрелки, и $\varphi < 0$, если поворот совершается по часовой стрелке. Значение $\text{Arg } z$, удовлетворяющее условию $0 \leq \text{Arg } z < 2\pi$, называется **главным значением аргумента** и обозначается символом $\arg z$.

В некоторых случаях главным значением аргумента называется значение $\text{Arg } z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа z :

$$z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Формулы Эйлера $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ преобразуют тригонометрическую форму комплексного числа в **показательную**: $z=re^{i\varphi}$.

Итак, комплексное число можно записать следующим образом:

алгебраическая форма $z=a+ib$,

тригонометрическая форма $z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

показательная форма $z=re^{i\varphi}$.

Образец решения задачи 1.1

Задача 1.1. Найти все корни уравнения $(z - 9i)(z^2 + 10\sqrt{3}z + 100) = 0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Решение

Левая часть уравнения – многочлен третьей степени, поэтому уравнение имеет ровно три корня.

Произведение равно нулю, когда хотя бы один сомножитель равен нулю. Приравняем к нулю каждую из скобок: $z - 9i = 0$ или $z^2 + 10\sqrt{3}z + 100 = 0$. Решим первое из полученных уравнений: $z - 9i = 0$.

$z_1 = 9i$ – это алгебраическая запись. Здесь $\operatorname{Re} z_1 = 0$, $\operatorname{Im} z_1 = 9$. Найдем модуль этого комплексного числа: $r_1 = |z_1| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9$. Далее определим аргумент. Так как $\operatorname{Re} z_1 = 0$, то z_1 – чисто мнимое число, следовательно, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (см. Табл. 1 приложения).

Значит, тригонометрическая запись числа будет иметь вид:

$$z_1 = 9\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right). \text{ Показательная форма записи: } z_1 = 9e^{i\pi/2}.$$

Решим второе уравнение $z^2 + 10\sqrt{3}z + 100 = 0$.

Вычислим дискриминант $D = (10\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 300 - 400 = -100$. $\sqrt{D} = \pm 10i$.

Тогда корни $z_2 = \frac{-10\sqrt{3} + 10i}{2} = -5\sqrt{3} + 5i$ и $z_3 = \frac{-10\sqrt{3} - 10i}{2} = -5\sqrt{3} - 5i$.

Рассмотрим каждый из них. Для второго корня $\operatorname{Re} z_2 = -5\sqrt{3}$ и $\operatorname{Im} z_2 = 5$. Модуль второго корня $r_2 = |z_2| = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10$. Чтобы найти аргумент

z_2 решим систему уравнений
$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{10}, \\ \sin \varphi = \frac{5}{10}. \end{cases}$$
 Решением данной системы будет

$\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$ (см. Табл. 1 приложения).

Тригонометрическая запись: $z_2 = 10\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$. Показательная запись: $z_2 = 10e^{i5\pi/6}$.

Для третьего корня аналогично: $\operatorname{Re} z_3 = -5\sqrt{3}$ и $\operatorname{Im} z_3 = -5$. Модуль третьего корня $r_3 = |z_3| = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + (-5)^2} = \sqrt{100} = 10$. Аргумент φ_3 найдем из системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{10}, \\ \sin \varphi = \frac{-5}{10}. \end{cases} \text{ В результате решения получим } \varphi_3 = -\frac{5\pi}{6} \text{ (см. Табл. 1 приложе-}$$

ния). Тогда тригонометрическая запись: $z_3 = 10\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$, показательная запись: $z_3 = 10e^{-i5\pi/6}$.

Замечание: следует отметить, что корни z_2 и z_3 являются комплексно-сопряженными ($\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_3$, $\operatorname{Im} z_2 = -\operatorname{Im} z_3$). Модули комплексно-сопряженных чисел равны: $r_2 = r_3$. Для аргументов $\arg z_2 = -\arg z_3$.

Ответ: алгебраическая форма записи: $z_1 = 9i$, $z_2 = -5\sqrt{3} + 5i$, $z_3 = -5\sqrt{3} - 5i$;

тригонометрическая форма записи: $z_1 = 9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$,

$z_2 = 10\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_3 = 10\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$;

показательная форма записи: $z_1 = 9e^{i\pi/2}$, $z_2 = 10e^{i5\pi/6}$, $z_3 = 10e^{-i5\pi/6}$.

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение дифференциального уравнения (Пискунов, т.2, гл. XIII, §2, стр. 16, определение 1) [1]:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения.

2.1. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида $f(x)dx = \varphi(y)dy$ называются **дифференциальными уравнениями с разделенными переменными**. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными решаются путем интегрирования правой и левой частей: $\int f(x)dx = \int \varphi(y)dy$.

Дифференциальные уравнения вида $f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy$ называются **дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными**. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными приводятся к предыдущему виду путем деления правой и левой частей на $\varphi_1(y)f_2(x)$, а далее решаются путем интегрирования правой и левой частей: $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy$.

Образец решения задачи 2.1

Задача 2.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{\cos^2 x}{y}$.

Решение.

Определим вид данного дифференциального уравнения. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Преобразуем его, зная, что $y' = \frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x}{y}$.

Разделим переменные: $ydy = \cos^2 x dx$. Проинтегрируем правую и левую части: $\int ydy = \int \cos^2 x dx$ (см. Приложение). Получим: $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$.

Отсюда $y = \sqrt{x + \frac{1}{2}\sin(2x) + C}$.

Ответ: $y = \sqrt{x + \frac{1}{2}\sin(2x) + C}$.

2.2. Решение дифференциальных уравнений первого порядка

В задаче под номером 2.2 в различных вариантах даны дифференциальные уравнения первого порядка следующих видов: однородные относительно x и y , линейные, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах.

Рассмотрим каждый из этих видов.

Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x, y)$ называются **однородными относительно x и y** , если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y . Дифференциальные уравнения однородные относительно x и y решаются с помощью замены $z = \frac{y}{x}$ или $y = zx$, где $z = z(x)$. Этой заменой однородные дифференциальные уравнения сводятся к уравнению с разделяющимися переменными, решение которых было описано выше.

Замечание: функция $f(x, y)$ называется однородной порядка k относительно переменных x, y , если при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.

Образец решения однородного дифференциального уравнения первого порядка

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x^2 + 2xy)dx + xudy = 0.$$

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Для этого преобразуем его: $xudy = -(x^2 + 2xy)dx$. Далее разделим левую и правую части на $xudx$ для того, чтобы слева осталось $\frac{dy}{dx} = y'$: $y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}$.

Покажем, что функция $f(x, y) = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}$ является однородной функцией нулевого порядка:

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x \lambda y}{\lambda x \lambda y} = -\frac{\lambda^2 (x^2 + 2xy)}{\lambda^2 xy} = -\frac{x^2 + 2xy}{xy} = f(x, y).$$

Следовательно, данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решаем его при помощи замены $z = \frac{y}{x}$ или $y = zx$, где $z = z(x)$. Тогда $y' = z'x + z$. Уравнение примет вид: $z'x + z = -\frac{x^2 + 2xzx}{xz}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Упростим правую часть $z'x + z = -\frac{1}{z} + 2$ и перенесем z вправо: $z'x = -z - \frac{1}{z} + 2$. Правую часть уравнения приведем к общему знаменателю: $z'x = -\frac{z^2 + 1 - 2z}{z}$ и распишем $z' = \frac{dz}{dx}$: $\frac{dz}{dx}x = -\frac{z^2 + 1 - 2z}{z}$. Разделим переменные $\frac{z}{(z-1)^2} dz = -\frac{dx}{x}$ и проинтегрируем правую и левую части $\int \frac{z}{(z-1)^2} dz = -\int \frac{dx}{x}$. Получим $\ln|z-1| - \frac{1}{z-1} = -\ln|x| + C$ (см. Приложение).

Вернемся к первоначальным переменным, подставив $z = \frac{y}{x}$:

$$\ln\left|\frac{y}{x} - 1\right| - \frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = -\ln|x| + C, \text{ или } \ln\left|\frac{y-x}{x}\right| - \frac{x}{y-x} = -\ln|x| + C.$$

Ответ: $\ln\left|\frac{y-x}{x}\right| - \frac{x}{y-x} = -\ln|x| + C.$

Дифференциальные уравнения вида $y' + f(x)y = \varphi(x)$ называются **линейными дифференциальными уравнениями первого порядка**. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка решаются следующим образом:

- 1) делаем замену $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$;
- 2) составляем систему уравнений $\begin{cases} v' + vf(x) = 0, \\ u'v = \varphi(x) \end{cases}$;
- 3) решаем первое уравнение системы, находим функцию $v(x)$;
- 4) подставляем полученное значение $v(x)$ во второе уравнение системы и решаем его, находим $u(x)$;
- 5) записываем ответ как произведение двух функций $y = u(x)v(x)$.

Замечание: функция $v(x)$ записывается без постоянной интегрирования, а функция $u(x)$ с постоянной интегрирования.

**Образец решения линейного дифференциального уравнения
первого порядка**

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(2x - 2)y' = x + 2y - 3$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Для этого преобразуем его, разделив правую и левую части на $(2x - 2)$.

$y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}$, или $y' - \frac{2}{2x - 2}y = \frac{x - 3}{2x - 2}$. Это линейное дифференциальное уравнение, т. к. оно имеет вид $y' + f(x)y = \varphi(x)$.

Линейные дифференциальные уравнения решаются следующим образом:

1) делаем замену $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$;

2) подставляем замену в уравнение: $u'v + uv' - \frac{2}{2x - 2}uv = \frac{x - 3}{2x - 2}$;

3) преобразуем полученное уравнение: $u'v + u\left(v' - \frac{1}{x - 1}v\right) = \frac{x - 3}{2x - 2}$;

4) записываем систему уравнений:
$$\begin{cases} v' - \frac{1}{x - 1}v = 0, \\ u'v = \frac{x - 3}{2x - 2}; \end{cases}$$

5) решаем первое уравнение системы и находим v . Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Вначале выделим производную: $v' = \frac{1}{x - 1}v$. Затем запишем иначе v' : $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x - 1}$. Далее разделим переменные: $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x - 1}$. Проинтегрировав правую и левую части $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x - 1}$, получим: $\ln |v| = \ln |x - 1|$ (см. Приложение). Следует отметить, что при отыскании функции v не записывают постоянную интегрирования. Поэтому получаем $v = (x - 1)$;

6) подставляем полученную функцию $v = (x - 1)$ во второе уравнение системы: $u'(x - 1) = \frac{x - 3}{2(x - 1)}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим производную: $u' = \frac{x - 3}{2(x - 1)^2}$. Распишем u' : $\frac{du}{dx} = \frac{x - 3}{2(x - 1)^2}$. Затем разделим переменные $du = \frac{x - 3}{2(x - 1)^2}dx$ и проинтегрируем правую и левую части:

$$\int du = \int \frac{x - 3}{2(x - 1)^2} dx.$$

В результате интегрирования получаем:

$$u = \int \frac{x-1}{2(x-1)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{2(x-1)^2} = \int \frac{dx}{2(x-1)} - \int (x-1)^{-2} dx = \frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} + C \quad (\text{см. Приложение});$$

7) выпишем полученную функцию: $y = uv = \left(\frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} + C \right) (x-1)$.

Ответ: $y = \left(\frac{1}{2} \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} + C \right) (x-1)$.

Дифференциальные уравнения вида $y' + f(x)y = \varphi(x)y^n$ ($n \neq 0, n \neq 1$) называются **уравнениями Бернулли**. Уравнения Бернулли решаются тем же способом, что и линейные дифференциальные уравнения.

1) делаем замену $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$;

2) составляем систему уравнений $\begin{cases} v' + vf(x) = 0, \\ u'v = \varphi(x)u^n v^n; \end{cases}$

3) решаем первое уравнение системы, находим функцию $v(x)$;

4) подставляем полученное значение $v(x)$ во второе уравнение системы и решаем его, находим $u(x)$;

5) записываем ответ как произведение двух функций: $y = u(x)v(x)$.

Замечание: как и в предыдущем случае, функция $v(x)$ записывается без постоянной интегрирования, а функция $u(x)$ с постоянной интегрирования.

Образец решения уравнений Бернулли

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Это уравнение Бернулли, т. к. имеет вид $y' + f(x)y = \varphi(x)y^n$ ($n \neq 0, n \neq 1$). Решаем это уравнение следующим образом:

1) делаем замену $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$: $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2 u^4 v^4$;

2) преобразуем выражение $u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = x^2 u^4 v^4$;

3) составляем систему уравнений
$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = x^2 \cdot u^4 v^4; \end{cases}$$

4) решаем первое уравнение системы и находим v . Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Вначале выделим производную: $v' = -\frac{v}{x}$. Затем запишем иначе v' : $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$.

Далее разделим переменные: $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав правую и левую части

$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, получим: $\ln |v| = -\ln |x|$ (см. Приложение). Следует отметить, что при отыскании функции v не записывают постоянную интегрирования. Поэтому получаем $v = \frac{1}{x}$;

5) подставляем полученную функцию $v = \frac{1}{x}$ во второе уравнение системы:

$u' \frac{1}{x} = x^2 u^4 \frac{1}{x^4}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим производную: $u' = \frac{u^4}{x}$. Распишем u' : $\frac{du}{dx} = \frac{u^4}{x}$. Затем разделим пе-

ременные: $\frac{du}{u^4} = \frac{dx}{x}$ и проинтегрируем правую и левую части: $\int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{x}$. В ре-

зультате интегрирования получаем: $\frac{u^{-3}}{-3} = \ln |x| + C$ (см. Приложение). Отсюда вы-

ражаем $u(x)$: $u = \sqrt[3]{\frac{1}{-3(\ln |x| + C)}}$.

6) выпишем полученную функцию $y = uv = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1}{-3(\ln |x| + C)}}$.

Ответ: $y = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1}{-3(\ln |x| + C)}}$.

Дифференциальные уравнения вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называются **уравнениями в полных дифференциалах**, если $M(x,y)'_y = N(x,y)'_x$. Уравнение в полных дифференциалах решается двумя способами.

Первый способ:

1) находим интеграл $u = \int M(x,y)dx$, причем постоянную интегрирования записываем в виде неизвестной функции $\varphi(y)$;

2) дифференцируем полученную функцию u'_y и приравниваем к $N(x, y)$, полученное уравнение решаем и находим $\varphi(y)$;

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$.

Второй способ:

1) находим интеграл $u = \int N(x, y)dy$, причем постоянную интегрирования записываем в виде неизвестной функции $\psi(x)$;

2) дифференцируем полученную функцию u'_x и приравниваем к $M(x, y)$, полученное уравнение решаем и находим $\psi(x)$;

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$.

Образец решения уравнений в полных дифференциалах

Задача 2.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y+e^x \sin y)dx+(x+e^x \cos y)dy=0$.

Решение

Определим вид данного дифференциального уравнения. Для этого выделим $M(x, y)= y+e^x \sin y$ и $N(x, y)= x+e^x \cos y$ и продифференцируем $M(x, y)'_y=1+e^x \cos y$, $N(x, y)'_x=1+e^x \cos y$. Видно, что $M(x, y)'_y=N(x, y)'_x$, значит это уравнение в полных дифференциалах.

Первый способ:

1) находим интеграл $u = \int M(x, y)dx = \int (y + e^x \sin y)dx = yx + e^x \sin y + \varphi(y)$;

2) дифференцируем полученную функцию:

$$u'_y=(yx+e^x \sin y+\varphi(y))'_y = x+e^x \cos y+\varphi'_y$$

и приравниваем к $N(x, y)$: $x+e^x \cos y+\varphi'_y= x+e^x \cos y$. Полученное уравнение решаем и находим $\varphi(y)$: $\varphi'_y=0$. Значит, $\varphi(y)=C$.

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$: $yx+e^x \sin y=C$.

Второй способ:

1) находим интеграл: $u = \int N(x, y)dy = \int (x + e^x \cos y)dy = xy + e^x \sin y + \psi(x)$;

2) дифференцируем полученную функцию:

$$u'_x=(xy+e^x \sin y+\psi(x))'_x = y+e^x \sin y+\psi'_x$$

и приравниваем к $M(x, y)$: $y+e^x \sin y +\psi'_x = y+e^x \sin y$. Полученное уравнение решаем и находим $\psi(x)$: $\psi'_x=0$. Значит, $\psi(x)=C$.

3) записываем ответ в виде $u(x, y)=C$: $xy+e^x \sin y=C$.

Ответ: $xy+e^x \sin y=C$.

2.3. Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются *дифференциальными уравнениями высших порядков*.

Рассмотрим некоторые дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка, и методы их решения.

а) *Уравнения, допускающие понижение порядка*, – уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Уравнения этого вида решаются путем n -кратного интегрирования. В результате каждого интегрирования порядок уравнения понижается на единицу.

б) *Уравнения, допускающие понижение порядка, не содержащие явно независимую переменную x* , – уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$. Данные уравнения решаются заменой $y' = p$, где $p = p(y)$, при помощи которой порядок понижается на единицу.

в) *Уравнения, допускающие понижение порядка, не содержащие явно искомую функцию $y(x)$ и ее первые производные до $(k-1)$ -го порядка включительно* – уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$. Такие уравнения решаются введением новой неизвестной функции $z(x) = y^{(k)}(x)$, что позволяет понизить порядок на k .

Образец решение задачи 2.3

Задача 2.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y'' + 2xy' = x$.

Решение

Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, не содержащее явно искомую функцию y .

1) В записи уравнения отсутствует y , значит, делаем замену $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'$.

2) Подставляем замену в уравнение: $(1+x^2)z' + 2xz = x$. Полученное уравнение преобразуем: $z' + \frac{2x}{1+x^2}z = \frac{x}{1+x^2}$. Получили линейное дифференциальное уравнение. Решаем его, как и в предыдущем номере 2.2, заменой $z = uv$, тогда $z' = u'v + uv'$.

3) Подставим замену в уравнение: $u'v + uv' + \frac{2x}{1+x^2}uv = \frac{x}{1+x^2}$ и преобразуем его: $u'v + u\left(v' + \frac{2x}{1+x^2}v\right) = \frac{x}{1+x^2}$.

4) Составим систему уравнений:
$$\begin{cases} v' + \frac{2x}{1+x^2}v = 0, \\ u'v = \frac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$

5) Решим сначала первое уравнение системы $v' + \frac{2x}{1+x^2}v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим производную $v' = -\frac{2x}{1+x^2}v$ и распишем ее $\frac{dv}{dx} = -\frac{2x}{1+x^2}v$. Разделим переменные $\frac{dv}{v} = -\frac{2x}{1+x^2}dx$ и проинтегрируем правую и левую части $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2x}{1+x^2}dx$. В результате получим: $\ln|v| = -\ln|1+x^2|$ (см. Приложение), т.е. $v = \frac{1}{1+x^2}$.

6) Подставим полученную функцию $v = \frac{1}{1+x^2}$ во второе уравнение системы $u' \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$. Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Выделим u' : $u' = \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} = x$ и запишем ее иначе $\frac{du}{dx} = x$. Разделим переменные $du = xdx$ и проинтегрируем правую и левую части $\int du = \int xdx$. Получаем $u = \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^2 + C_1}{2}$ (см. Приложение).

7) Запишем найденную функцию $z = uv = \frac{x^2 + C_1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2 + C_1}{2(1+x^2)}$.

8) Вернемся к искомой функции y , используя замену $y' = z$:

$y' = \frac{x^2 + C_1}{2(1+x^2)}$. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Распишем y' : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + C_1}{2(1+x^2)}$ и разделим переменные $dy = \frac{x^2 + C_1}{2(1+x^2)}dx$. Проин-

тегрируем правую и левую части $\int dy = \int \frac{x^2 + C_1}{2(1+x^2)}dx$. Для вычисления интеграла

$\int \frac{x^2 + C_1}{2(1+x^2)}dx$ в числителе выделим $(x^2 + 1)$. Отметим, что стоящая в числителе константа C_1 – это некоторая постоянная величина. Поэтому выражение $x^2 + C_1$ можно записать в виде $x^2 + C_1 + 1$. Смысл от этого не нарушился, и, в то же время, выделился нужный нам многочлен $(x^2 + 1)$.

$y = \int \frac{x^2 + 1}{2(1+x^2)}dx + \int \frac{C_1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2} \int dx + C_1 \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x + C_1 \arctg(x) + C_2$ (см. Прило-

жение).

Ответ: $y = \frac{1}{2}x + C_1 \arctg(x) + C_2$.

2.4. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида

Дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

называются **линейными однородными дифференциальными уравнениями** с постоянными коэффициентами. Описание решения уравнений данного вида:

1) составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \text{ решив которое находим корни } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n;$$

2) записываем ответ в виде $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$,

где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальная система решений, которая записывается следующим образом:

если λ – действительный простой корень, то ему соответствует одно решение: $y = e^{\lambda x}$;

если λ – действительный корень кратности k , то ему соответствует k решений: $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}, y_3 = x^2 e^{\lambda x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}$;

если $\lambda = \alpha \pm i\beta$ – пара простых комплексно-сопряженных корней, то им соответствуют два решения: $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$;

если $\lambda = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряженных корней кратности k , им соответствуют $2k$ решений: $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$

$$y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

.....

$$y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

называются **линейными неоднородными дифференциальными уравнениями** с постоянными коэффициентами.

Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть $f(x)$ вида

$$f(x) = e^{\alpha x} (T_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x),$$

где α и β – постоянные, $T_n(x)$ и $R_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно с постоянными действительными коэффициентами, то это линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и **правой частью специального вида**.

Если же правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами не соответствует описанному виду, то говорят, что задано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и **правой частью произвольного вида**.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, как уже отмечалось выше, могут иметь правую часть либо специального вида, либо произвольного.

Рассмотрим **решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида** $f(x) = e^{\alpha x}(T_n(x)\cos \beta x + R_m(x)\sin \beta x)$:

1) составим линейное однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному линейному неоднородному уравнению.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \text{ и решим его.}$$

Получим решение $y^0(x)$;

2) далее записываем частное решение исходного неоднородного уравнения. Вид частного решения зависит от правой части и от корней характеристического уравнения, полученных в пункте 1:

если $f(x) = e^{\alpha x}T_n(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n)$, то частное решение

$$\tilde{y}(x) = x^p \cdot e^{\alpha x}(c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n),$$

где $p=0$, если α – не является корнем характеристического уравнения;

$p=k$, если α – является корнем характеристического уравнения кратности k .

Если $f(x) = e^{\alpha x}(T_n(x)\cos \beta x + R_m(x)\sin \beta x)$, то частное решение

$$\tilde{y}(x) = x^p \cdot e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos \beta x + P_s(x)\sin \beta x),$$

где $p=0$, если $\alpha + i\beta$ – не является корнем характеристического уравнения;

$p=k$, если $\alpha + i\beta$ – является корнем характеристического уравнения кратности k ;

$Q_s(x)$ и $P_s(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени s , где $s = \max\{n, m\}$.

3) частное решение $\tilde{y}(x)$ подставляем в исходное неоднородное уравнение и находим неизвестные коэффициенты частного решения;

4) ответ записываем в виде суммы $Y(x) = y^0(x) + \tilde{y}(x)$.

**Образец решения линейного неоднородного
дифференциального уравнения с правой частью специального вида**

Задача 2.4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.

Решение

Определим вид дифференциального уравнения. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью специального вида.

1) Составим соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' + 2y' + 5y = 0$ и решим его.

2) Для того, чтобы решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$, надо составить его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

3) Найдем λ , решив квадратное уравнение. Дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$. Тогда $\sqrt{D} = \pm 4i$ и $\lambda_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$, $\lambda_2 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$.

4) Запишем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$: $y = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x)$.

5) Теперь запишем частное решение \tilde{y} линейного неоднородного дифференциального уравнения. Правая часть $f(x) = 10\cos x$, т. е. $f(x) = e^{\alpha x} (T_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$.

В записи правой части $f(x)$ явно отсутствует $e^{\alpha x}$, значит считаем, что $e^{\alpha x} = 1$, тогда $\alpha = 0$. $\beta = 1$, т. к. $f(x) = 10\cos(1x)$. При $\cos x$ стоит многочлен $T_n(x) = 10$ — это многочлен нулевой степени $n = 0$. Слагаемое с $\sin x$ отсутствует, значит считаем, что многочлен $R_m(x) = 0$, т. е. также многочлен нулевой степени $m = 0$.

Частное решение будем искать в виде $\tilde{y} = x^p e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + P_s(x) \sin \beta x)$. В данном примере $p = 0$, т. к. $\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i$ не является корнем характеристического уравнения. $s = \max\{n, m\} = \max\{0, 0\} = 0$. С учетом выше сказанного, запишем $\tilde{y} = a \cos x + b \sin x$ и найдем a и b .

6) Вычислим $\tilde{y}' = -a \sin x + b \cos x$, $\tilde{y}'' = -a \cos x - b \sin x$ и подставим их в изначальное уравнение:

$$(-a \cos x - b \sin x) + 2(-a \sin x + b \cos x) + 5(a \cos x + b \sin x) = 10 \cos x.$$

7) Раскроем скобки:

$$-a \cos x - b \sin x - 2a \sin x + 2b \cos x + 5a \cos x + 5b \sin x = 10 \cos x$$

и приведем подобные $(-a + 2b + 5a) \cos x + (-b - 2a + 5b) \sin x = 10 \cos x$.

Из системы находим $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$, из которых путем интегрирования получаем $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$;

3) ответ записываем в виде $Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$.

Образец решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с правой частью произвольного вида

Задача 2.5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}.$$

Решение

Сначала определим вид дифференциального уравнения. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью произвольного вида.

1) Составим соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка: $y'' - 3y' + 2y = 0$ и решим его.

2) Для того, чтобы решить линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$, надо составить его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

3) Найдем λ , решив квадратное уравнение. Дискриминант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$. Тогда $\sqrt{D} = 1$ и $\lambda_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \lambda_2 = \frac{3-1}{2} = 1$.

4) Запишем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

5) Далее будем считать, что C_1 и C_2 не постоянные величины, а функции, зависящие от x , т. е. $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$, и запишем систему дифференциальных

уравнений:
$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' \cdot 2e^{2x} = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}. \end{cases}$$

6) Решим полученную систему. Для этого из первого уравнения выразим C_1' и подставим во второе уравнение.
$$\begin{cases} C_1' = -C_2' e^x, \\ -C_2' e^{2x} + C_2' \cdot 2e^{2x} = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение $C_2' e^{2x} = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$.

Выразим $C_2' = \frac{1}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{1}{e^x+1}$.

Подставим полученное выражение в первое уравнение $C_1' = -\frac{e^x}{e^x+1}$.

7) Получили два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными $C_1' = -\frac{e^x}{e^x+1}$ и $C_2' = \frac{1}{e^x+1}$. Решим их.

8) В $C_1' = -\frac{e^x}{e^x+1}$ распишем C_1' : $\frac{dC_1}{dx} = -\frac{e^x}{e^x+1}$. Разделим переменные $dC_1' = -\frac{e^x}{e^x+1} dx$ и проинтегрируем правую и левую части $\int dC_1 = -\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$. Получим $C_1 = -\ln(e^x+1) + K_1$ (см. Приложение).

9) В $C_2' = \frac{1}{e^x+1}$ распишем C_2' : $\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{e^x+1}$. Разделим переменные $dC_2 = \frac{dx}{e^x+1}$ и проинтегрируем правую и левую части $\int dC_2 = \int \frac{dx}{e^x+1}$. Получим $C_2 = \int \frac{dx}{e^x+1} = \left[\begin{array}{l} e^x+1=t \\ x = \ln |t-1|, dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + K_2 = \ln \left(\frac{e^x}{e^x+1} \right) + K_2$ (см. Приложение).

10) Подставим полученные значения C_1 и C_2 в общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ однородного дифференциального уравнения:

$$y = (-\ln(e^x+1) + K_1) e^x + \left(\ln \left(\frac{e^x}{e^x+1} \right) + K_2 \right) e^{2x}.$$

Ответ: $y = (-\ln(e^x+1) + K_1) e^x + \left(\ln \left(\frac{e^x}{e^x+1} \right) + K_2 \right) e^{2x}.$

2.6. Указания к решению задачи 2.6

Задача 2.6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения 2.2 при начальном условии $y(2)=0$ и сравнить это решение с точным.

Решение

Решение данной задачи состоит из двух этапов. Во-первых, надо определить точное решение уравнения задачи 2.2 при заданном начальном условии. Во-вторых, надо используя средства табличного процессора Excel методом Эй-

лера найти приближенное решение того же уравнения задачи 2.2 при том же начальном условии.

В качестве примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение задачи 2.2.

Рассмотрим первую часть решения задачи. Из решения уравнения задачи 2.2. $(2x - 2)y' = x + 2y - 3$ имеем общее решение дифференциального уравнения: $y = \left(\frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{1}{x - 1} + C \right) (x - 1)$. Для нахождения неизвестной константы C воспользуемся начальным условием $y(2) = 0$. Это означает, что при $x = 2$ функция y принимает значение, равное 0. Подставим 2 и 0 вместо соответственно x и y в общее решение:

$$0 = \left(\frac{1}{2} \ln |2 - 1| + \frac{1}{2 - 1} + C \right) (2 - 1).$$

Решим полученное уравнение $0 = (1 + C)$ и получим $C = -1$. Тогда точное решение дифференциального уравнения $(2x - 2)y' = x + 2y - 3$ при начальном условии $y(2) = 0$ будет $y = \left(\frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{1}{x - 1} - 1 \right) (x - 1)$.

Во второй части решения с помощью табличного процессора Excel методом Эйлера требуется построить приближенное решение дифференциального уравнения задачи 2.2 $(2x - 2)y' = x + 2y - 3$, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 0$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Векторный анализ – это раздел векторного исчисления, в котором изучаются средствами математического анализа векторные и скалярные функции одного или нескольких аргументов.

Определение скалярного поля (Пискунов, т.1, гл. VIII, §13, стр. 272) [1].

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D , в которой задана функция $u=u(x, y, z)$. В этом случае говорят, что в области D задано скалярное поле.

Определение векторного поля:

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D , в каждой точке которой определен вектор $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. В этом случае говорят, что в области D задано векторное поле.

Геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня $u(x, y)=C$ в пространстве двух измерений, и поверхности уровня $u(x, y, z)=C$ в пространстве трех измерений.

Геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. **Векторная линия** – это линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. **Векторная трубка** – это поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Скалярное поле имеет следующие числовые характеристики: производная по направлению и градиент.

3.1. Вычисление производной скалярного поля по направлению

Производная скалярного поля $u(x, y, z)$ по направлению \vec{l} характеризует скорость изменения функции $u(x, y, z)$ в направлении \vec{l} и вычисляется по формуле: $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, где $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ – частные производные функции $u(x, y, z)$, а $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора \vec{l} .

Образец решения задачи 3.1

Задача 3.1. Найти производную скалярного поля $u=e^x\sqrt{z}+y^3x^2+\ln(yz)$ в точке $M_0(0,1,4)$ по направлению к точке $M_1(0,4,0)$.

Решение

При решении данной задачи воспользуемся формулой для производной скалярного поля $u(x, y, z)$ по направлению \vec{l} : $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$.

1) Найдем частные производные функции $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sqrt{z} + 2xy^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 x^2 + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^x}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{z}.$$

2) Вычислим значения частных производных в точке M_0 . Для этого подставим вместо x, y и z соответствующие координаты точки, т. е. 0, 1, 4.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = e^0 \sqrt{4} + 2 \cdot 0 \cdot 4^3 = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = 3 \cdot 1^2 \cdot 0^2 + \frac{1}{1} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = \frac{e^0}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3) Теперь найдем вектор \vec{l} . В данной задаче направление задается вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$. Значит для того чтобы найти координаты вектора \vec{l} надо из координат точки M_1 вычесть соответствующие координаты точки M_0 . Получим: $\vec{l} = \{0, 3, -4\}$

4) Далее найдем направляющие косинусы вектора \vec{l} . Для этого вычислим модуль вектора \vec{l} : $|\vec{l}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ и разделим по координатно вектор \vec{l} на $|\vec{l}| = 5$. Получим: $\cos \alpha = \frac{0}{5} = 0$, $\cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6$, $\cos \gamma = -\frac{4}{5} = -0,8$.

5) Подставим полученные значения в формулу производной по направлению: $\frac{\partial u}{\partial l} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot (-0,8) = 0,6 - 0,4 = 0,2$.

Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = 0,2$.

3.2. Вычисление градиента скалярного поля

Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – это вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в точке M_0 в сторону возрастания функции $u(x, y, z)$ в этой точке. Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ обозначается $\text{grad } u$ или ∇u и равен $\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$.

Образец решения задачи 3.2

Задача 3.2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \cos(xy) + \sin(yz)$ в точке $M(0, 2, \pi)$.

Решение

Градиентом называется вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в т. М в сторону возрастания функции $u(x, y, z)$ в той же точке.

При нахождении градиента скалярного поля пользуются следующей формулой:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

1) Вычислим частные производные функции $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin(xy) \cdot x + \cos(yz) \cdot z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \cos(yz) \cdot y.$$

2) Найдем значения частных производных в точке M . Для этого в частные производные вместо x, y и z подставим соответствующие координаты точки M , т. е. $0, 2$ и π :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = -\sin(0 \cdot 2) \cdot 2 = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = -\sin(0 \cdot 2) \cdot 0 + \cos(2 \cdot \pi) \cdot \pi = \pi, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = \cos(2 \cdot \pi) \cdot 2 = 2.$$

3) Запишем полученные значения в формулу градиента $\nabla u|_M = 0\vec{i} + \pi\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ: $\nabla u|_M = \{0, \pi, 2\}$

3.3. Вычисление дивергенции векторного поля

Дивергенция векторного поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ есть следующая сумма: $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Если в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\operatorname{div} \vec{F}(M_0) = 0$, то говорят, что в этой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ векторное поле \vec{F} является *соленоидальным*.

Образец решения задачи 3.3

Задача 3.3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = zx^2\vec{i} - y^5\vec{j} + zy^2\vec{k}$ соленоидальным.

Решение

Векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

Для того чтобы выяснить является ли векторное поле \vec{F} соленоидальным, вычислим дивергенцию данного векторного поля. Для этого воспользуемся формулой дивергенции:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \text{ где } \vec{F} = \{P, Q, R\}.$$

1) В данном примере $P = zx^2$, $Q = -y^5$, $R = zy^2$.

Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xz$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -5y^4$, $\frac{\partial R}{\partial z} = y^2$.

2) Просуммируем получившиеся частные производные и получим $\operatorname{div} \vec{F} = 2xz - 5y^4 + y^2 \neq 0$. Значит, рассматриваемое векторное поле не является соленоидальным.

Ответ: Векторное поле $\vec{F} = zx^2\vec{i} - y^5\vec{j} + zy^2\vec{k}$ не является соленоидальным.

3.4. Вычисление ротора векторного поля

Ротор векторного поля \vec{F} обозначается $\text{rot } \vec{F}$ и вычисляется по формуле:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Если в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\text{rot } \vec{F}(M_0) = 0$, то говорят, что в этой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ векторное поле \vec{F} является **потенциальным**.

Образец решения задачи 3.4

Задача 3.4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^5 \vec{i} + y^2 \vec{j} - z^3 \vec{k}$ потенциальным.

Решение

Векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$ является потенциальным, если $\text{rot } \vec{F} = 0$.

Для того чтобы найти $\text{rot } \vec{F}$ воспользуемся следующей формулой:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

1) В данном примере $P = x^5$, $Q = y^2$, $R = -z^3$.

Тогда $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Значит, $\text{rot } \vec{F} = 0$ и рассматриваемое векторное поле является потенциальным.

Ответ: Векторное поле $\vec{F} = x^5 \vec{i} + y^2 \vec{j} - z^3 \vec{k}$ является потенциальным.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ И КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В данном разделе даны задачи на вычисление криволинейного интеграла по координатам (криволинейного интеграла II рода), двойного интеграла по заданной области D и тройного интеграла по заданной области V .

4.1. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Определение криволинейного интеграла по координатам (криволинейный интеграл II рода) можно найти в учебном пособии Пискунова Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» том 2, глава XV.

Введем некоторые обозначения.

$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy$ – **полный криволинейный интеграл**

в плоскости от $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ по направленной дуге AB .

$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AB} P(x, y, z)dx + \int_{AB} Q(x, y, z)dy + \int_{AB} R(x, y, z)dz$ – **полный**

криволинейный интеграл в пространстве от $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ по направленной пространственной дуге AB .

Физический смысл криволинейного интеграла II рода (Пискунов Н.С., т. 2, гл. XV, § 3, стр. 216) [1]: Работа, совершаемая силой $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ вдоль линии $L=MN$, равна криволинейному интегралу $A = \int_M^N Pdx + Qdy + Rdz$.

Основные свойства криволинейного интеграла II рода:

1) Криволинейный интеграл II рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy .$$

$$2) \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy .$$

3) Разобьем кривую $L=AB$ точкой C на части L_1 и L_2 , тогда

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy .$$

Сведение криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу:

1) для параметрически заданной функции $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [t_1, t_2]$:

$$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt,$$

здесь точка A имеет координаты $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ и точка B $(\varphi(t_2), \psi(t_2))$;

2) для функции $y=f(x), x \in [a, b]$: $\int_A^B Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'_x]dx$,

здесь точка A имеет координаты $(a, f(a))$ и точка B $(b, f(b))$.

Образец решения задачи 4.1

Задача 4.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y \geq 0$), от $M(3, 0)$ до $N(-3, 0)$.

Решение

Как было отмечено выше, искомая работа равна криволинейному интегралу $A = \int_M^N Pdx + Qdy + Rdz$. В данном случае $P = x^2 - y^2$, $Q = x^2 + y^2$, $R = 0$. Значит,

нужно вычислить криволинейный интеграл $\int_M^N (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$.

Для того чтобы перейти от криволинейного интеграла к определенному, надо выразить $y(x)$ из $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ с учетом условия ($y \geq 0$).

Получим $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$. Далее найдем $y' = \frac{2}{3} \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{2x}{3\sqrt{9 - x^2}}$.

Подставим полученные результаты в интеграл, заменив при этом пределы интегрирования на абсциссы точек M и N :

$$\begin{aligned} \int_M^N (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy &= \int_3^{-3} \left(x^2 - 4 + \frac{4}{9}x^2 \right) dx + \left(x^2 + 4 - \frac{4}{9}x^2 \right) \left(-\frac{2x}{3\sqrt{9 - x^2}} \right) dx = \\ &= \int_{-3}^3 \left(\frac{13}{9}x^2 - 4 - \frac{10x^3}{27\sqrt{9 - x^2}} - \frac{8x}{3\sqrt{9 - x^2}} \right) dx = \left(\frac{13}{27}x^3 - 4x - \frac{10}{81}(9 - x^2)^{3/2} + \frac{18}{3}\sqrt{9 - x^2} \right) \Big|_{-3}^3 = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 2$.

4.2. Вычисление двойного интеграла

Определение двойного интеграла можно найти в учебном пособии Пискунова Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» том 2, глава XIV.

Двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D обозначается

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Основные свойства двойного интеграла:

1) $\iint_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy$;

2) $\iint_D cf(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$, где c – постоянная;

3) Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2 , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Сведение двойного интеграла к повторному интегралу:

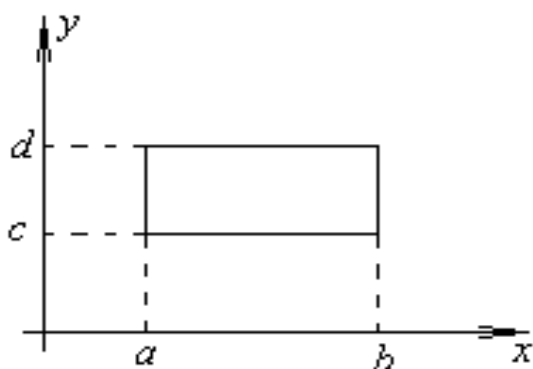


Рис. 2. Прямоугольная область R .

1) для прямоугольной области R :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx;$$

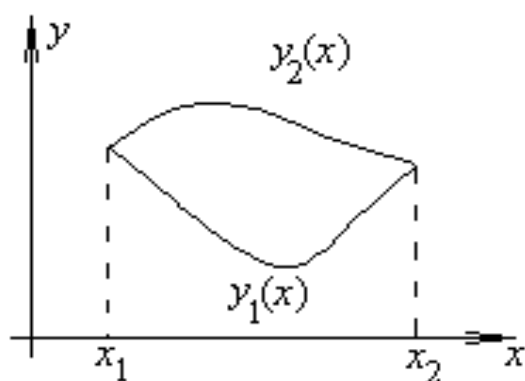


Рис. 3. Произвольная область D .

2) для произвольной области D :

$$\begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y(x)) dy \right) dx.$$

4.3. Вычисление тройного интеграла

Определение тройного интеграла можно найти в учебном пособии Пискунова Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления» том 2, глава XIV.

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по области V обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Сведение тройного интеграла к трехкратному интегралу для произ-

вольной области V :
$$\begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Замечание: если область интегрирования V является цилиндром или конусом, либо ее проекция на ось $z=0$ задается в полярной системе координат, то ис-

пользуются цилиндрические координаты:
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \text{ и тогда}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho, \varphi, z) dz.$$

Если же область V является шаром или его частью, то применяются сфери-

ческие координаты:
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \text{ причем, } \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Образец решения задачи 4.3

Задача 4.3. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V 8y^2 ze^{-xyz} dx dy dz$, если область V ограничена поверхностями: $x=2, y=-1, z=2, x=0, y=0, z=0$.

Решение

Формула сведения тройного интеграла к трехкратному для данной обла-

сти:
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

1) Изобразим область V .

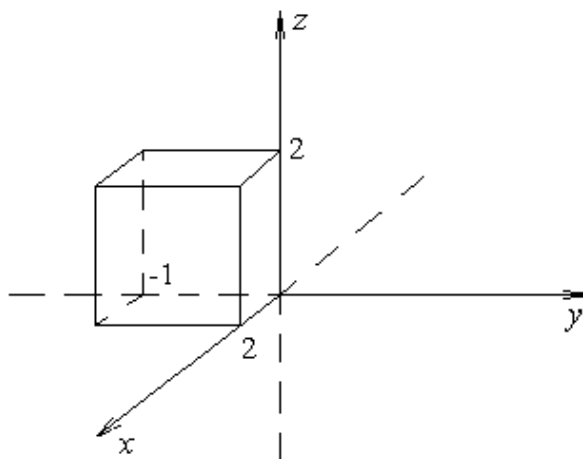


Рис. 5. Область V .

2) Из рисунка видно, что пределы интегрирования по z это 0 и 2, по y – это -1 и 0, по x – это 0 и 2.

3) Сведем исходный тройной интеграл к трехкратному и вычислим его:

$$\begin{aligned} \iiint_V 8y^2 ze^{-xyz} dx dy dz &= \int_0^2 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^2 8y^2 ze^{-xyz} dx \right) dy \right) dz = \int_0^2 \left(\int_{-1}^0 \left((-8y^2 ze^{-xyz}) \Big|_{x=0}^{x=2} \right) dy \right) dz = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^2 (-8y^2 ze^{-2yz} + 8y^2 z) dz \right) dy = \int_{-1}^0 \left((4yze^{-2yz} + 2e^{-2yz} + 4y^2 z^2) \Big|_{z=0}^{z=2} \right) dy = \\ &= \int_{-1}^0 (8ye^{-4y} + 2e^{-4y} + 16y^2 - 2) dy = \left(-2ye^{-4y} - e^{-4y} + \frac{16}{3}y^3 - 2y \right) \Big|_{y=-1}^{y=0} = \\ &= -1 - 2e^4 + e^4 + \frac{16}{3} - 2 = \frac{7}{3} - e^4. \end{aligned}$$

Ответ: $\iiint_V 8y^2 ze^{-xyz} dx dy dz = \frac{7}{3} - e^4.$

Список литературы

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов./ *Н.С. Пискунов* – М.: Наука, 2 т., 1985.
2. *Плотникова, Ю.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: методические указания / *Ю.А. Плотникова, М.Г. Плотников, Е.В. Дурова [и др.]*. – Вологда-Молочное: Вологодская ГМХА, 2011. – 37 с.

Таблица интегралов

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm A} \right| + C \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Таблица 1

Таблица значений тригонометрических функций

Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

Таблица 2

Градусы	210	225	240	270	300	315	330	360
Радианы	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Вариант соответствует номеру в списке группы.

Вариант 1.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-5)(z^2+8z+64)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-3)^2=\ln(x+1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = yx$.

2. $y' \sin x - y \cos x = 1$.

3. $y'' x \ln x = y'$.

4. $y'' - 5y' + 6y = 2 \cos x$.

5. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2.

при начальном условии $y(\frac{\pi}{2})=0$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{x}e^y + ze(1-x) + y^3$ в точке $M_0(1,0,2)$ по направлению к точке $M_1(1,3,6)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \frac{y^2x}{z^3}$ в точке $M(1,-4,2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^3\vec{i} - zy^2\vec{j} + z^2y\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j} - z^2\vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2-2y)\vec{i} + (y^2-2x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(-4,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=x^2, y=\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$; $V: x=0, y=1, y=x, z=0, z=1$.

Вариант 2.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-5i)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $e^{x-1}=(x+3)^2$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $3y'=(4x-1)y^2$.

2. $y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin(2x)$.

3. $2xy'' = y'$.

4. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$.

5. $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\frac{\pi}{2})=3$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(4+y^2) - e^{x-z} + z^2$ в точке $M_0(1,2,1)$ по направлению к точке $M_1(-1,0,2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \frac{3}{x^3} - \frac{y^2}{4} + \frac{5}{z^5}$ в точке $M(1,-2,1)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \frac{y^2}{z^3} \vec{i} + \frac{z^2}{x^3} \vec{j} + \frac{x^2}{y^3} \vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = (x^2+2y) \vec{i} + (y^3-3x) \vec{j} + (2x-z^2) \vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2+2y) \vec{i} + (y^2+2x) \vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(-4,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=-x^2, y=-\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V x^2z \sin(xyz) dx dy dz$; $V: x=0, x=2, y=\pi, y=0, z=0, z=1$.

Вариант 3.

I.1. Найти все корни уравнения $(5-2z)(z^2-8z+32)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения

$$\lg(x+1) = \frac{1}{x-3}.$$

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y^2 y' = x^2$.

2. $y' + \frac{2y}{x} = -x^2$.

3. $y'' (1 - x^2) = x y'$.

4. $y'' - 4 y' + 4y = -x^2 + 3x$.

5. $y'' + 4 y = 2 \operatorname{tg} x$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(1)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \frac{z}{x} - \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ в точке $M_0(1,1,1)$ по

направлению к точке $M_1(2,3,3)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = ye^z - xe^y$ в точке $M(3,0,0)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = 3x^2z\vec{i} + 4xy^3\vec{j} - 3xz^2\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = 4xz\vec{i} + 3y^3\vec{j} + 2x^2\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2+2y)\vec{i} + (y^2+2x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: 2 - \frac{x^2}{8} = y$ от точки $M(-4,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V 8y^2z e^{2xyz} dx dy dz$; $V: x = -1, x=0, y=2, y=0, z=0, z=1$.

Вариант 4.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+5)(z^2-8z+64)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-2)^2=\sin(x+1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = y \cos x$.

2. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$.

3. $y'' \cos x + y' \sin x = 0$.

4. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$.

5. $4y'' + y = 4\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=0$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=xz - \sqrt{y}x^2+z^3$ в точке $M_0(2,1,1)$ по направлению к точке $M_1(2,1,5)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=4\sqrt{z} + \frac{3}{\sqrt{y}} - 2\sqrt{x}$ в точке $M(4,1,4)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = (1+2xy)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} - 2zy\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = 2yz\vec{i} - 3xz\vec{j} + xy\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : $x^2+y^2=4$ ($y \geq 0$) от точки $M(2,0)$ к точке $N(-2,0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V zy^2 \cos(xyz)dxdydz$; $V: x=0, x=1, y=\pi, y=0, z=0, z=2$.

Вариант 5.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+5i)(z^2+8\sqrt{3}z+64)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-2)^2=\ln(x+3)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = e^x(y^2+4)$.

2. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

3. $y''x = (1+2x^2)y'$.

4. $y'' + y' = e^{-x}$.

5. $y'' + 4y = (\sin 2x)^2$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(-2)=5$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \frac{2}{\sqrt{x-y}} + \frac{3}{\sqrt{z-y}} - \frac{4}{\sqrt{xz}}$ в точке

$M_0(2,1,2)$ по направлению к точке $M_1(2,-3,2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = x^y + y^z$ в точке $M(1,1,3)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = (2x+3y)\vec{i} + (4y+5z)\vec{j} + (7x-2z)\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле

$$\vec{F} = (x^2 - 2x)\vec{i} + \left(y^5 - \frac{6}{y^4}\right)\vec{j} + (z^3 - 3z)\vec{k}.$$

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=4$ ($x \geq 0, y \geq 0$) от точки $M(2,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right) dx dy dz$; $V: x=0, y=-1, y=x/2, z=0, z=-\pi^2$.

Вариант 6.

I.1. Найти все корни уравнения $(5i-2z)(z^2+8z+32)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $e^{x-3}=(x+2)^2$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y y' = \cos x$.

2. $x y' - 2y = x^3 \cos x$.

3. $y'' = 2\sqrt{1+y'}$.

4. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$.

5. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\pi)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=x^2+y^2-z$ в точке $M_0(1,0,1)$ по направлению к точке $M_1(1,4,1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=x^2y^3-yz$ в точке $M(2,-1,6)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = (e^x - 1)\vec{i} + (y - e^x y)\vec{j} - z\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = (x - 4z)\vec{i} + (y - x^3)\vec{j} + (z - 5y)\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : $y=x^2$ от точки $M(-1,1)$ к точке $N(1,1)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V z x^2 \sin(xyz/4) dx dy dz$; $V: x=0, x=1, y=2\pi, y=0, z=0, z=4$.

Вариант 7.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-4)(z^2+5z+25)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения

$$\lg(x+3) = \frac{1}{x-2}.$$

II. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y' = yx^2$.

2. $y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

3. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.

4. $y'' + 2y' - 8y = 3 \sin x$.

5. $y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2 при начальном условии $y(e) = 0$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(xy - yz + xz)$ в точке $M_0(-2, -1, 1)$ по направлению к точке $M_1(0, 1, 2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \sqrt{xy^3} - \frac{z^2}{x}$ в точке $M(2, 2, 2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \ln x^2 \vec{i} - \frac{2y}{x} \vec{j} + \ln z^2 \vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = x^2 y \vec{i} - y \vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(-1, 0)$ к точке $N(0, 1)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz$; $V: x=0, y=-2, y=4x, z=0, z=1$.

Вариант 8.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-4i)(z^2-5\sqrt{3}z+25)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-1)^2=\cos(x-1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $x^2 y' = y^2$.

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3. $y'' = x \sin x$.

4. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x}$.

5. $y'' \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}y \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=4$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(1+x^2) + y^3 - z^2$ в точке $M_0(-1, 2, -2)$ по направлению к точке $M_1(-2, 0, 0)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = x^2 y z^3$ в точке $M(-2, 1, -1)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \sqrt{x^2-1}\vec{i} + \frac{x+z}{\sqrt{x^2-1}}\vec{j} - \frac{zx}{\sqrt{x^2-1}}\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (2xy-y)\vec{i} + (x^2+x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=9$ ($y \geq 0$) от точки $M(3, 0)$ к точке $N(-3, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz$; $V: x=0, x=1, y=1, y=0, z=0, z=1$.

Вариант 9.

I.1. Найти все корни уравнения $(4-3z)(z^2-5z+25)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-4)^2=\ln(x+5)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y'=(y-1)(2x-1)$.

2. $y' \cos x - 2y \sin x = 2$.

3. $y''=(x+2)^5-1$.

4. $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4$.

5. $y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=3$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=ze^x-xe^y$ в точке $M_0(0,0,1)$ по направлению к точке $M_1(-1,2,3)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=\sqrt{x^2-z^2}+6y$ в точке $M(5,-4,3)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F}=(xz^2-y^3)\vec{i}+(y^3-z^4)\vec{j}+(x^3-xz^2)\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F}=e^x yz\vec{i}+e^x z\vec{j}+e^x y\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии

$L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ от точки $M(1,0)$ к точке $N(0,3)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (4xy+3x^2y^2)dxdy$; $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V y^2 e^{xy/2} dx dy dz$; $V: x=0, y=2, y=2x, z=0, z=-1$.

Вариант 10.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+4)(z^2-5z+\frac{25}{2})=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $2^{x-4} = \frac{1}{x+2}$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $\sqrt{1-x^2} y' = 1$.

2. $y' - \frac{3y}{x} = x^3 e^x$.

3. $y'' = 2x \ln x$.

4. $y'' + y' - 5y = 50 \cos x$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(1) = e$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{z^3 x} - \sqrt{yx} + \sqrt{yz}$ в точке $M_0(1, 1, 2)$ по направлению к точке $M_1(-2, 1, 1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = y^x - z^y$ в точке $M(-2, 1, 1)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \frac{\ln x^2}{z} \vec{i} + (x^2 - z^2) \vec{j} - \frac{\ln z^2}{x} \vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = (2z + x^2) \vec{i} + (y^3 - 3x) \vec{j} + (y - z^2) \vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = y \vec{i} - x \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(1, 0)$ к точке $N(-1, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (9x^2 y^2 + 12xy) dx dy$; $D: x=1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.

3. $\iiint_V zy^2 \cos(xyz/3) dx dy dz$; $V: x=0, x=3, y=1, y=0, z=0, z=2\pi$.

Вариант 11.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+4i)(z^2+5\sqrt{3}z+25)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\lg(x-2)=\frac{1}{x-4}$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $(y-1)y' = 1$.

2. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

3. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

4. $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$.

5. $4y'' + y = \frac{1}{\sin(x/2)}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=2$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(z^2 - y^2 + x^2)$ в точке $M_0(1, -3, -3)$ по направлению к точке $M_1(1, 0, 1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \ln(x^3 + z) + \sqrt{yx}$ в точке $M(1, 4, 2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = (4z - xy^2)\vec{i} + (5x - \frac{y}{z^2})\vec{j} + (zy^2 - 3y)\vec{k}$ соленоидальным.

ным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = 4x\vec{i} + 6y\vec{j} + 5z\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: y = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$ от точки $M(2, 0)$ к точке $N(0, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (9x^2y^2 + 8xy) dx dy$; $D: x=1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V y^2 \cos(\pi xy/2) dx dy dz$; $V: x=0, y = -1, y=x, z=0, z=2\pi^2$.

Вариант 12.

И. Найти все корни уравнения $(4i-3z)(z^2+5z+\frac{25}{2})=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\frac{1}{x+5} = \sin(x-1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = \operatorname{ctg} x$.

2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$.

3. $y'' + (y'')^2 = 0$.

4. $y'' - 4y' + 5y = 10x$.

5. $y'' - 2y' = \frac{e^{2x}}{1 - e^{2x}}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(2x^2 - y^2)$ в точке $M_0(-1, -1, 2)$ по направлению к точке $M_1(1, 1, 1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = yz^2 - x^4$ в точке $M(1, 2, -3)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = xy\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = e^x y\vec{i} + e^y z\vec{j} + e^z x\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$) от точки $M(\sqrt{2}, 0)$ к точке $N(-\sqrt{2}, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (18x^2y^2 + 24xy) dx dy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz$; $V: x=0, y=1, y=2x, z=0, z=\pi^2$.

Вариант 13.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-3)(z^2+6z+36)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $e^{x-5}=(x+3)^2$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = -\operatorname{tg} x$.

2. $y' - \frac{y}{x} = -2 \ln x$.

3. $(y')^3 = y''$.

4. $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(1)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=e^{x+y-z}$ в точке $M_0(2,0,2)$ по направлению к точке $M_1(0,-1,0)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=ze^x - ye^z$ в точке $M(0,-2,0)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \frac{-2x}{y}\vec{i} + \ln(y^2)\vec{j} + \frac{z^2}{y}\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = \frac{-yz}{x^2}\vec{i} + \frac{z}{x}\vec{j} + \frac{y}{x}\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=1$ ($x \geq 0, y \geq 0$) от точки $M(1,0)$ к точке $N(0,1)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (27x^2y^2 + 12xy) dx dy$; $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V zx^2 \sin(xyz/2) dx dy dz$; $V: x=0, x=1, y=0, y=4, z=0, z=\pi$.

Вариант 14.

I.1. Найти все корни уравнения $(z - 2i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) = 0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $3^{x-3} = \frac{1}{x+3}$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = y(x^2 - x)$.

2. $x y' + 2y = \frac{1}{x}$.

3. $-y'' = y$.

4. $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4$.

5. $y'' + y = \cos^2(2x)$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(3) = 1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = xe^y - ye^z$ в точке $M_0(1, 0, 0)$ по направлению к точке $M_1(2, 2, 2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в точке $M(2, 1, -2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = y^2 z^3 \vec{i} + x^6 z^5 \vec{j} + y^7 x^4 \vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле

$$\vec{F} = (2xy - z)\vec{i} + (2yz - x)\vec{j} + (2zx - y)\vec{k}.$$

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: 2x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) от точки $M(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ к точке $N(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (18x^2y^2 + 8xy) dx dy$; $D: x=1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V x^2 \sin(\pi xy/2) dx dy dz$; $V: x=2, y=0, y=x, z=0, z=\pi$.

Вариант 15.

I.1. Найти все корни уравнения $(3i - 2z)(z^2 + 6z + 18) = 0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $4^{x+5} = \frac{1}{x+4}$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $\sqrt{x}y' = y$.

2. $y' - y \cos x = -\cos x$.

3. $y'' + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin x$.

4. $y'' - 4y' + 4y = -169 \sin(3x)$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0) = 3$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(-2, 1, -2)$ по направлению к точке $M_1(-2, -3, -2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \ln(x + y^2) - z$ в точке $M(0, 1, -4)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \sqrt{x+z}\vec{i} - \sqrt{y^2+z}\vec{j} + 2y\sqrt{z+y^2}\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = 2xy^2z\vec{i} + 2yx^2z\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) от точки $M(3, 0)$ к точке $N(-3, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D \left(\frac{9}{11} x^2 y^2 + \frac{4}{5} xy \right) dx dy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V zy^2 \cos(xyz/9) dx dy dz$; $V: x=0, x=9, y=1, y=0, z=0, z=2\pi$.

Вариант 16.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+2i)(z^2+4\sqrt{3}z+16)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\frac{1}{x-5} = \cos(x+1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y y' = x - 1$.

2. $y' + 2x y = \frac{\sin x}{e^{-x^2}}$.

3. $y'' (x^2+1)^3 = -2x(x^2+1)$.

4. $y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4$.

5. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=2xy - 3yz+4zx$ в точке $M_0(1,1,-3)$ по направлению к точке $M_1(-1,2,-1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=\ln(z^2+x+y^3)$ в точке $M(2,1,-1)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = xyz\vec{i} - \frac{y^2(x+z)}{2}\vec{j} + xyz\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле $\vec{F} = -z^4\vec{i} + 3x^2\vec{j} + (2y^2 - z^3)\vec{k}$.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=4$ ($x \geq 0, y \geq 0$) от точки $M(2,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (9x^2y^2 + \frac{4}{5}xy) dx dy$; $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V zy^2 \cos(xyz/9) dx dy dz$; $V: x=0, x=9, y=1, y=0, z=0, z=2\pi$.

Вариант 17.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+3)(z^2-6\sqrt{3}z+36)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-1)^2=\ln(x+2)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = yx$.

2. $y' - y \sin x = e^{-\cos x} \sin(2x)$.

3. $(1-x^2) y'' = x y'$.

4. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$.

5. $y'' + 4y = \sin^2(2x)$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\frac{\pi}{2})=3$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=x^2+y^2-z$ в точке $M_0(1,0,1)$ по направлению к точке $M_1(1,4,1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \sqrt{xy^3} - \frac{z^2}{x}$ в точке $M(2,2,2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = (zx^2 - y^3)\vec{i} + (y^3 - z^4)\vec{j} + (x^3 - xz^2)\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j} - z^2\vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=9$ ($x \geq 0, y \geq 0$) от точки $M(3,0)$ к точке $N(0,3)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y= x^2, y= -\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V x^2 \sin(\pi xy) dx dy dz$; $V: x=1, y=0, y=2x, z=0, z=4\pi$.

Вариант 18.

I.1. Найти все корни уравнения $(3-2z)(z^2-6z+18)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения

$$2^{x-3} = \frac{1}{x+3}.$$

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y^2 y' = x^2$.

2. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$.

3. $y'' x = (1+2x^2) y'$.

4. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$.

5. $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=0$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(1+x^2) + y^3 - z^2$ в точке $M_0(-1, 2, -2)$ по направлению к точке $M_1(-2, 0, 0)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \sqrt{x^2 - z^2} + 6y$ в точке $M(5, -4, 3)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = xy\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли потенциальным поле

$$\vec{F} = (x - 4z)\vec{i} + (y - x^3)\vec{j} + (z - 5y)\vec{k}.$$

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - (x^2+y^2)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(1, 0)$ к точке $N(0, 1)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (24x^3y^3 + 6xy) dx dy$; $D: x=1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.

3. $\iiint_V x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz$; $V: x=1, y=0, y=x/2, z=0, z=8\pi$.

Вариант 19.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-2)(z^2-6z+36)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\lg(x-3)=\frac{1}{x-4}$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y'=(y+4)e^x$.

2. $y'x-2y=x^3\cos x$.

3. $y''=\sqrt{1-y'^2}$.

4. $y''+6y'+13y=8e^{-x}$.

5. $y''-y'=\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\pi)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=\sqrt{z^3x}-\sqrt{yx}+\sqrt{yz}$ в точке $M_0(1,1,2)$ по направлению к точке $M_1(-2,1,1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=\ln(x^3+z)+\sqrt{yx}$ в точке $M(1,4,2)$.

3. Выяснить, будет ли поле $\vec{F}=(4z-xy^2)\vec{i}+(5x-\frac{y}{z^2})\vec{j}+(zy^2-3y)\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить, будет ли потенциальным поле

$$\vec{F}=(x^2-2x)\vec{i}+\left(y^5-\frac{6}{y^4}\right)\vec{j}+(z^3-3z)\vec{k}.$$

IV.1. Найти работу силы $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+y^2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(2,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (16x^3y^3+4xy)dxdy$; $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V 8zy^2e^{-xyz}dxdydz$; $V: x=2, x=0, y=-1, y=0, z=0, z=2$.

Вариант 20.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-3i)(z^2+6\sqrt{3}z+36)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-1)^2=\sin(x+1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = yx^2$.

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3. $y'' = (x+2)^5 - 1$.

4. $y'' + y' - 5y = 50\cos x$.

5. $4y'' + y = \sin^{-1}(x/2)$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=4$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(2x^2 - y^2)$ в точке $M_0(-1, -1, 2)$ по направлению к точке $M_1(1, 1, 1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = z e^x - y e^z$ в точке $M(0, -2, 0)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = y^2 z^3 \vec{i} + x^6 z^5 \vec{j} + y^7 x^4 \vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = (x^2 + 2y) \vec{i} + (y^3 - 3x) \vec{j} + (2x - z^2) \vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = x^2 \vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2 + y^2 = 9$ ($x \geq 0, y \geq 0$) от точки $M(3, 0)$ к точке $N(0, 3)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (16x^3 y^3 + 4xy) dx dy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$; $V: x=0, y=1, y=x, z=0, z=1$.

Вариант 21.

I.1. Найти все корни уравнения $(5-3z)(z^2+4z+16)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-5)^2=\ln(x+4)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y'=(y-1)(2x-1)$.

2. $y' - \frac{3y}{x}y=x^3e^x$.

3. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$.

4. $y'' - 4y' + 5y = 10x$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(1)=e$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=xe^y - ye^z$ в точке $M_0(1,0,0)$ по направлению к точке $M_1(2,2,2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=\ln(x+y^2) - z$ в точке $M(0,1,-4)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \frac{-2x}{y}\vec{i} + \ln(y^2)\vec{j} + \frac{z^2}{y}\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = 4xz\vec{i} + 3y^3\vec{j} + 2x^2\vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F}=(y^2-y)\vec{i}+(2xy+x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=9 (y \geq 0)$ от точки $M(3,0)$ к точке $N(-3,0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (16x^3y^3+44xy)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V x^2 \sin(\pi xy/2)dxdydz; V: x=2, y=0, y=x, z=0, z=\pi$.

Вариант 22.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+2)(z^2-4z+8)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $e^{x-2}=(x+1)^2$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $(y-1)y'=1$.

2. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$.

3. $y'' = y'^3$.

4. $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\frac{\pi}{2})=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=2xy - 3yz+4zx$ в точке $M_0(1,1,-3)$ по направлению к точке $M_1(-1,2,-1)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \frac{y^2 x}{z^3}$ в точке $M(1,-4,2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \frac{\ln x^2}{z} \vec{i} + (x^2 - z^2) \vec{j} - \frac{\ln z^2}{x} \vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = 2yz \vec{i} - 3xz \vec{j} + xy \vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = xy \vec{i}$ при перемещении вдоль линии $L: y = \sin x$ от точки $M(\pi, 0)$ к точке $N(0, 0)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (176x^3y^3 + 4xy) dx dy$; $D: x=1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.

3. $\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz$; $V: x=0, y = -2, y=4x, z=0, z=1$.

Вариант 23.

I.1. Найти все корни уравнения $(z+3i)(z^2-4z+16)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\lg(x+2)=\frac{1}{x-3}$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = -\operatorname{tg} x$.

2. $x y' + 2y = \frac{1}{x}$.

3. $y'' + \frac{1}{\cos^2 x} = \sin x$.

4. $y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4$.

5. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(3)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(4+y^2) - e^{x-z} + z^2$ в точке

$M_0(1,2,1)$ по направлению к точке $M_1(-1,0,2)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = ye^z - xe^y$ в точке $M(3,0,0)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \sqrt{x+z}\vec{i} - \sqrt{y^2+z}\vec{j} + 2y\sqrt{z+y^2}\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (xy-y^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: y=2x^2$ от точки $M(0,0)$ к точке $N(1,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (xy - 4x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V 8y^2z e^{2xyz} dx dy dz$; $V: x=-1, x=0, y=2, y=0, z=0, z=1$.

Вариант 24.

I.1. Найти все корни уравнения $(5i-3z)(z^2+4z+8)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-2)^2=\cos(x-1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $\sqrt{x}y' = y$.

2. $y' + 2xy = \frac{\sin x}{e^{-x^2}}$.

3. $y'' \ln x = y'$.

4. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$.

5. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg}x$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(0)=1$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u=xz - \sqrt{y}x^2+z^3$ в точке $M_0(2,1,1)$ по направлению к точке $M_1(2,1,5)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u=x^y+y^z$ в точке $M(1,1,3)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = xyz\vec{i} - \frac{y^2(x+z)}{2}\vec{j} + xyz\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(1,0)$ к точке $N(0,3)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (176x^3y^3+4xy)dxdy$; $D: x=1, y= -x^3, y=\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V y^2 \cos(\pi xy/2)dxdydz$; $V: x=0, y= -1, y=x, z=0, z=2\pi^2$.

Вариант 25.

I.1. Найти все корни уравнения $(z-5)(z^2+8z+64)=0$. Записать их в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

2. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $(x-3)^2=\ln(x+1)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения 1 – 5.

1. $y' = yx$.

2. $y' \sin x - y \cos x = 1$.

3. $y'' x \ln x = y'$.

4. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$.

5. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x}$.

6. Используя метод Эйлера, найти приближенное решение уравнения II.2. при начальном условии $y(\frac{\pi}{2})=0$ и сравнить это решение с точным.

III.1. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{x}e^y + ze(1-x) + y^3$ в точке $M_0(1,0,2)$ по направлению к точке $M_1(1,3,6)$.

2. Вычислить градиент скалярного поля $u = \frac{y^2x}{z^3}$ в точке $M(1,-4,2)$.

3. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^3\vec{i} - zy^2\vec{j} + z^2y\vec{k}$ соленоидальным.

4. Выяснить будет ли поле $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j} - z^2\vec{k}$ потенциальным.

IV.1. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2-2y)\vec{i} + (y^2-2x)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L : отрезок MN от точки $M(-4,0)$ к точке $N(0,2)$.

Вычислить:

2. $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$; $D: x=1, y=x^2, y=\sqrt{x}$.

3. $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$; $V: x=0, y=1, y=x, z=0, z=1$.

Примерные варианты контрольной работы по двойным интегралам.

Вариант №1

1. Вычислить интеграл $\iint_D y^2 \cos xy dx dy$, если область D ограничена линия-

$$\text{ми: } x = 0, \quad y = \sqrt{\pi}, \quad y = x.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, если область D задана неравен-

$$\text{ствами: } x^2 + y^2 \leq 2x, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq 0.$$

3. Запишите формулу для вычисления объема с помощью тройного интеграла. Расставьте пределы интегрирования в цилиндрических и сферических координатах, вычислите объем, если тело ограничено поверхностями:

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{9}}.$$

Вариант №2

1. Вычислить интеграл $\iint_D y^2 e^{-xy/3} dx dy$, если область D ограничена линия-

$$\text{ями: } x = 0, \quad y = \sqrt{2}, \quad y = x/3.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, если область D задана неравен-

$$\text{ствами: } x^2 + y^2 \leq 4y, \quad x^2 + y^2 \geq 2y, \quad x + y \geq 0, \quad x \leq 0.$$

3. Запишите формулу для вычисления объема с помощью тройного интеграла. Расставьте пределы интегрирования в цилиндрических и сферических координатах, вычислите объем, если тело ограничено поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Вариант №3

1. Вычислить интеграл $\iint_D y^2 \cos 2xy dx dy$, если область D ограничена линиями:

$$x = 0, \quad y = \pi/2, \quad y = 2x.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, если область D задана неравенствами:

$$x^2 + y^2 \leq 2y, \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

3. Запишите формулу для вычисления объема с помощью тройного интеграла. Расставьте пределы интегрирования в цилиндрических и сферических координатах, вычислите объем, если тело ограничено поверхностями:

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{8}}.$$

Вариант №4

1. Вычислить интеграл $\iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy$, если область D ограничена линиями:

$$x = 0, \quad y = \sqrt{2\pi}, \quad y = x/2.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, если область D задана неравенствами:

$$x^2 + y^2 \leq 4y, \quad \sqrt{3}y + x \geq 0, \quad x \leq 0.$$

3. Запишите формулу для вычисления объема с помощью тройного интеграла. Расставьте пределы интегрирования в цилиндрических и сферических координатах, вычислите объем, если тело ограничено поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 3z^2.$$

Вариант №5

1. Вычислить интеграл $\iint_D y^2 \sin xy \, dx dy$, если область D ограничена линия-

$$\text{ми: } x = 0, \quad y = \pi, \quad y = x.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \, dx dy$, если область D задана неравен-

$$\text{ствами: } x^2 + y^2 \leq 2x, \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

3. Запишите формулу для вычисления объема с помощью тройного интеграла. Расставьте пределы интегрирования в цилиндрических и сферических координатах, вычислите объем, если тело ограничено поверхностями:

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}}.$$

Вариант №6

1. Вычислить интеграл $\iint_D y^2 e^{xy/4} \, dx dy$, если область D ограничена линия-

$$\text{ми: } x = 0, \quad y = \sqrt{\ln 2}, \quad y = x/4.$$

2. Вычислить интеграл $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy$, если область D задана неравен-

$$\text{ствами: } x^2 + y^2 \leq 6x, \quad x^2 + y^2 \geq 2x, \quad x + y \geq 0, \quad y \leq 0..$$

3. Запишите формулу для вычисления объема с помощью тройного интеграла. Расставьте пределы интегрирования в цилиндрических и сферических координатах, вычислите объем, если тело ограничено поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}.$$

**Варианты индивидуальных заданий по дифференциальным уравнениям
для самостоятельной работы студентов**

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$.)

- | | |
|--|---|
| 1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$. | 1.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$. |
| 1.3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$. | 1.4. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$. |
| 1.5. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$. | 1.6. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$. |
| 1.7. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$. | 1.8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$. |
| 1.9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$. | 1.10. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$. |
| 1.11. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$. | 1.12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$. |
| 1.13. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$. | 1.14. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$. |
| 1.15. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$. | 1.16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$. |
| 1.17. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$. | 1.18. $y \ln y + xy' = 0$. |
| 1.19. $(1 + e^x)y' = ye^x$. | 1.20. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$. |
| 1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$. | 1.22. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$. |
| 1.23. $(3 + e^x)yy' = e^x$. | 1.24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$. |
| 1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$. | 1.26. $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$. |
| 1.27. $(1 + e^x)yy' = e^x$. | 1.28. $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0$. |
| 1.29. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$. | 1.30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$. |
| 1.31. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$. | |

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$2.1. y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$

$$2.3. y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$2.5. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$$

$$2.7. y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$$

$$2.9. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$$

$$2.11. y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

$$2.13. y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$$

$$2.15. y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$$

$$2.17. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$$

$$2.19. y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$2.21. y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

$$2.23. y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$2.25. 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$$

$$2.27. y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$2.29. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$$

$$2.31. y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

$$2.2. xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

$$2.4. xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.6. xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$$

$$2.8. xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.10. xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$2.12. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$2.14. xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

$$2.16. xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.18. xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$$

$$2.20. xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$2.22. xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$2.24. xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$2.26. xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

$$2.28. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$2.30. xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$3.1. y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}.$$

$$3.3. y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}.$$

$$3.5. y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}.$$

$$3.7. y' = \frac{x+y-8}{3x-y-8}.$$

$$3.9. y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}.$$

$$3.11. y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}.$$

$$3.13. y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}.$$

$$3.15. y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$$

$$3.17. y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$$

$$3.19. y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}.$$

$$3.21. y' = \frac{x+y+2}{x+1}.$$

$$3.23. y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}.$$

$$3.25. y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}.$$

$$3.27. y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}.$$

$$3.29. y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}.$$

$$3.31. y' = \frac{y+2}{2x+y-4}.$$

$$3.2. y' = \frac{x+y-2}{2x-2}.$$

$$3.4. y' = \frac{2y-2}{x+y-2}.$$

$$3.6. y' = \frac{2x+y-3}{x-1}.$$

$$3.8. y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}.$$

$$3.10. y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}.$$

$$3.12. y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}.$$

$$3.14. y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}.$$

$$3.16. y' = \frac{y-2x+3}{x-1}.$$

$$3.18. y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}.$$

$$3.20. y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}.$$

$$3.22. y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}.$$

$$3.24. y' = \frac{y}{2x+2y-2}.$$

$$3.26. y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$$

$$3.28. y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}.$$

$$3.30. y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$$

Задача 4. Найти решение задачи Коши.

$$4.1. y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$$

$$4.2. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$$

$$4.3. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$$

$$4.4. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$$

$$4.5. y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$$

$$4.6. y' - \frac{1}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$4.7. y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$4.8. y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$4.9. y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$$

$$4.10. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$4.11. y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$$

$$4.12. y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$4.13. y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.14. y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$4.15. y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$$

$$4.16. y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

$$4.17. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3.$$

$$4.18. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$$

$$4.19. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.20. y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$4.21. y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$4.22. y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

$$4.23. y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$4.24. y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$4.25. y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2.$$

$$4.26. y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$4.27. y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$$

$$4.28. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$4.29. y' - 3x^2 y = x^2 (1+x^3)/3, \quad y(0) = 0.$$

$$4.30. y' - y \cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$$

$$4.31. y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1.$$

Задача 5. Решить задачу Коши.

$$5.1. y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 2.$$

$$5.2. (y^4 e^y + 2x) y' = y, \quad y|_{x=0} = 1.$$

$$5.3. y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, \quad y|_{x=1} = e.$$

$$5.4. 2(4y^2 + 4y - x) y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$$

- 5.5. $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y, \quad y|_{x=1/4} = \pi/3.$
- 5.6. $(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y, \quad y|_{x=\pi} = \pi/4.$
- 5.7. $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy, \quad y|_{x=0} = 0.$
- 5.8. $(104y^3 - x)y' = 4y, \quad y|_{x=8} = 1.$
- 5.9. $dx + (xy - y^3)dy = 0, \quad y|_{x=-1} = 0.$
- 5.10. $(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y, \quad y|_{x=16} = \pi/4.$
- 5.11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$
- 5.12. $(2 \ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy, \quad y|_{x=4} = e^2.$
- 5.13. $2(x + y^4)y' = y, \quad y|_{x=-2} = -1.$
- 5.14. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, \quad y|_{x=1/4} = 2.$
- 5.15. $2y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1.$
- 5.16. $(xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 4.$
- 5.17. $\sin 2ydx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)dy, \quad y|_{x=-1/2} = \pi/4.$
- 5.18. $(y^2 + 2y - x)y' = 1, \quad y|_{x=2} = 0.$
- 5.19. $2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0, \quad y|_{x=-4} = 1.$
- 5.20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)dy, \quad y|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$
- 5.21. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y, \quad y|_{x=3/2} = 5\pi/4.$
- 5.22. $\operatorname{ch} ydx = (1 + x \operatorname{sh} x)dy, \quad y|_{x=1} = \ln 2.$
- 5.23. $(13y^3 - x)y' = 4y, \quad y|_{x=5} = 1.$
- 5.24. $y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy, \quad y|_{x=\pi/8} = 2.$
- 5.25. $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = y/2, \quad y|_{x=2} = 1.$
- 5.26. $(2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 1.$

$$5.27. ydx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)dy = 0, \quad y|_{x=3/2} = \pi/4.$$

$$5.28. 2(y^3 - y + xy)dy = dx, \quad y|_{x=-2} = 0.$$

$$5.29. (2y + x\operatorname{tg} y - y^2\operatorname{tg} y)dy = dx, \quad y|_{x=0} = \pi.$$

$$5.30. 4y^2 dx + (e^{1/(2y)} + x)dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1/2.$$

$$5.31. dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, \quad y|_{x=-1} = 0.$$

Задача 6. Найти решение задачи Коши.

$$6.1. y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.2. xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1/2.$$

$$6.3. 2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$$

$$6.4. y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$6.5. xy' - y = -y^2 (\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1.$$

$$6.6. 2(y' + xy) = (1+x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 2.$$

$$6.7. 3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$$

$$6.8. 2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$$

$$6.9. y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3), \quad y(0) = -1.$$

$$6.10. 3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1.$$

$$6.11. 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}.$$

$$6.12. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$$

$$6.13. 2y' + 3y \cos x = e^{2x} (2 + 3\cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1.$$

$$6.14. 3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$$

$$6.15. y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 1/2.$$

$$6.16. 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = 1/2\sqrt{2}.$$

- 6.17. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$
- 6.18. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$
- 6.19. $2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x} y^{-1}, \quad y(0) = 2.$
- 6.20. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \quad y(0) = 1.$
- 6.21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$
- 6.22. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$
- 6.23. $y' + xy = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 1.$
- 6.24. $2y' + 3y \cos x = -e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1.$
- 6.25. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$
- 6.26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$
- 6.27. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$
- 6.28. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = 1/\operatorname{sh} 1.$
- 6.29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 2.$
- 6.30. $y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$
- 6.31. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

- 7.1. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$
- 7.2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y} \right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$
- 7.3. $(3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$
- 7.4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2} \right) dx - \left(2y - \frac{1}{x} \right) dy = 0.$
- 7.5. $(y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$
- 7.6. $(3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0.$

$$7.7. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0.$$

$$7.8. [\sin 2x - 2 \cos(x + y)] dx - 2 \cos(x + y) dy = 0.$$

$$7.9. (xy^2 + x/y^2) dx + (x^2 y - x^2/y^3) dy = 0.$$

$$7.10. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

$$7.11. \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy = 0.$$

$$7.12. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0.$$

$$7.13. \frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$$

$$7.14. \frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$$

$$7.15. \frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$$

$$7.16. \left(x e^x + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

$$7.17. \left(10xy - \frac{1}{\sin y} \right) dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3 \right) dy = 0.$$

$$7.18. \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) dx - \frac{x dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$7.19. e^y dx + (\cos y + x e^y) dy = 0.$$

$$7.20. (y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0.$$

$$7.21. x e^{y^2} dx + (x^2 y e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0.$$

$$7.22. (5xy^2 - x^3) dx + (5x^2 y - y) dy = 0.$$

$$7.23. \left[\cos(x + y^2) + \sin x \right] dx + 2y \cos(x + y^2) dy = 0.$$

$$7.24. (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0.$$

$$7.25. \left(\sin y + y \sin y + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

$$7.26. \left(1 + \frac{1}{y} e^{x/y} \right) dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{x/y} \right) dy = 0.$$

$$7.27. \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$7.28. 2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2y + y^2) dy = 0.$$

$$7.29. (3x^3 + 6x^2y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2y) dy = 0.$$

$$7.30. xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0.$$

$$7.31. x dx + y dy + (x dy - y dx) / (x^2 + y^2) = 0.$$

Задача 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M .

$$8.1. y' = y - x^2, \quad M(1, 2).$$

$$8.2. yy' = -2x, \quad M(0, 5).$$

$$8.3. y' = 2 + y^2, \quad M(1, 2).$$

$$8.4. y' = \frac{2x}{3y}, \quad M(1, 1).$$

$$8.5. y' = (y - 1)x, \quad M(1, 3/2).$$

$$8.6. yy' + x = 0, \quad M(-2, -3).$$

$$8.7. y' = 3 + y^2, \quad M(1, 2).$$

$$8.8. xy' = 2y, \quad M(2, 3).$$

$$8.9. y'(x^2 + 2) = y, \quad M(2, 2).$$

$$8.10. x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, \quad M(2, 1).$$

$$8.11. y' = y - x, \quad M(9/2, 1).$$

$$8.12. y' = x^2 - y, \quad M(1, 1/2).$$

$$8.13. y' = xy, \quad M(0, -1).$$

$$8.14. y' = xy, \quad M(0, 1).$$

$$8.15. yy' = -\frac{x}{2}, \quad M(4, 2).$$

$$8.16. 2(y + y') = x + 3, \quad M(1, 1/2).$$

$$8.17. y' = x + 2y, \quad M(3, 0).$$

$$8.18. xy' = 2y, \quad M(1, 3).$$

8.19. $3yy' = x$, $M(-3, -2)$.

8.20. $y' = y - x^2$, $M(-3, 4)$.

8.21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(-2, 1)$.

8.22. $y' = x^2 - y$, $M(2, 3/2)$.

8.23. $y' = y - x$, $M(2, 1)$.

8.24. $yy' = -x$, $M(2, 3)$.

8.25. $y' = y - x$, $M(4, 2)$.

8.26. $3yy' = x$, $M(1, 1)$.

8.27. $y' = x^2 - y$, $M(0, 1)$.

8.28. $y' = 3y^{2/3}$, $M(1, 3)$.

8.29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$, $M(-2, -1)$.

8.30. $y' = x(y-1)$, $M(1, 1/2)$.

8.31. $y' = x + 2y$, $M(1, 2)$.

Задача 9. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор \overline{MN} с концом на оси Oy имеет длину, равную a , и образует острый угол с положительным направлением оси Oy .

9.1. $M_0(15, 1)$, $a = 25$.

9.2. $M_0(12, 2)$, $a = 20$.

9.3. $M_0(9, 3)$, $a = 15$.

9.4. $M_0(6, 4)$, $a = 10$.

9.5. $M_0(3, 5)$, $a = 5$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

9.6. $M_0(1, 1)$, $a:b = 1:2$.

9.7. $M_0(-2, 3)$, $a:b = 1:3$.

9.8. $M_0(0, 1)$, $a:b = 2:3$.

9.9. $M_0(1, 0)$, $a:b = 3:2$.

9.10. $M_0(2, -1)$, $a:b = 3:1$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

9.11. $M_0(2, -1)$, $a:b = 1:1$.

9.12. $M_0(1, 2)$, $a:b = 2:1$.

9.13. $M_0(-1, 1)$, $a:b = 3:1$.

9.14. $M_0(2, 1)$, $a:b = 1:2$.

9.15. $M_0(1, -1)$, $a:b = 1:3$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении $a:b$ (считая от оси Oy).

$$9.16. M_0(1, 2), \quad a:b=1:1.$$

$$9.17. M_0(2, 1), \quad a:b=1:2.$$

$$9.18. M_0(1, 3), \quad a:b=2:1.$$

$$9.19. M_0(2, -3), \quad a:b=3:1.$$

$$9.20. M_0(3, -1), \quad a:b=3:2.$$

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overrightarrow{MN} с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox , обратно пропорциональную абсциссе точки M . Коэффициент пропорциональности равен a .

$$9.21. M_0(1, e), \quad a=-1/2.$$

$$9.22. M_0(2, e), \quad a=-2.$$

$$9.23. M_0(-1, \sqrt{e}), \quad a=-1.$$

$$9.24. M_0(2, 1/e), \quad a=2.$$

$$9.25. M_0(1, 1/e^2), \quad a=1/4.$$

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overrightarrow{MN} с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy , равную a .

$$9.26. M_0(1, 2), \quad a=-1.$$

$$9.27. M_0(1, 4), \quad a=2.$$

$$9.28. M_0(1, 5), \quad a=-2.$$

$$9.29. M_0(1, 3), \quad a=-4.$$

$$9.30. M_0(1, 6), \quad a=3.$$

$$9.31. M_0(1, 1), \quad a=1.$$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$10.1. y'''x \ln x = y''.$$

$$10.2. xy''' + y'' = 1.$$

$$10.3. 2xy''' = y''.$$

$$10.4. xy''' + y'' = x + 1.$$

$$10.5. \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

$$10.6. x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$10.7. y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

$$10.8. x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$$

10.9. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$

10.10. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''.$

10.11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1.$

10.12. $xy''' + 2y'' = 0.$

10.13. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3.$

10.14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$

10.15. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$

10.16. $xy''' + y'' + x = 0.$

10.17. $\operatorname{th} x \cdot y^{IV} = y''.$

10.18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}.$

10.19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1.$

10.20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''.$

10.21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''.$

10.22. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$

10.23. $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$

10.24. $(x+1)y''' + y'' = (x+1).$

10.25. $(1 + \sin x) y''' = \cos x \cdot y''.$

10.26. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

10.27. $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}.$

10.28. $\operatorname{cth} xy'' + y' = \operatorname{ch} x.$

10.29. $x^4 y'' + x^3 y' = 4.$

10.30. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x.$

10.31. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = 12x^3.$

Задача 11. Найти решение задачи Коши.

11.1. $4y^3 y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$

11.2. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$

11.3. $y'' y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

11.4. $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

11.5. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 4.$

11.6. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

11.7. $y'' y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

11.8. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}/2, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

- 11.9. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
- 11.10. $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
- 11.11. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
- 11.12. $y'' = 18\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 3$.
- 11.13. $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$.
- 11.14. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
- 11.15. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
- 11.16. $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
- 11.17. $y'' = 8\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$.
- 11.18. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
- 11.19. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.
- 11.20. $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
- 11.21. $y'' = 50\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 5$.
- 11.22. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
- 11.23. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
- 11.24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
- 11.25. $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
- 11.26. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- 11.27. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
- 11.28. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 1$.
- 11.29. $y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
- 11.30. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.
- 11.31. $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

12.1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.

12.2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.

12.3. $y''' - y' = x^2 + x$.

12.4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.

12.5. $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$.

12.6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$.

12.7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.

12.8. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$.

12.9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.

12.10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.

12.11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.

12.12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.

12.13. $7y''' - y'' = 12x$.

12.14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.

12.15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.

12.16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.

12.17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.

12.18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.

12.19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.

12.20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.

12.21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.

12.22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.

12.23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.

12.24. $y^{IV} + y''' = x$.

12.25. $y''' - y'' = 6x + 5$.

12.26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.

12.27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$.

12.28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.

12.29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.

12.30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

12.31. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$.

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.

13.1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.

13.2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$.

13.3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$.

13.4. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$.

13.5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$.

13.6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$.

13.7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x$.

- 13.8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$.
- 13.9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x$.
- 13.10. $y''' - 3y' - 2y = -4x \cdot e^x$.
- 13.11. $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$.
- 13.12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x$.
- 13.13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$.
- 13.14. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x$.
- 13.15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$.
- 13.16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$.
- 13.17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$.
- 13.18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$.
- 13.19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$.
- 13.20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4x \cdot e^x$.
- 13.21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$.
- 13.22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4x \cdot e^x$.
- 13.23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$.
- 13.24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$.
- 13.25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$.
- 13.26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.
- 13.27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$.
- 13.28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$.
- 13.29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$.
- 13.30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$.
- 13.31. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$.

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения.

14.1. $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x)$.

14.2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$.

14.3. $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$.

14.4. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

14.5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

14.6. $y'' - 4y' + 8y = e^x (5\sin x - 3\cos x)$.

14.7. $y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x)$.

14.8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$.

14.9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.

14.10. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

14.11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

14.12. $y'' - 4y' + 8y = e^x (-3\sin x + 4\cos x)$.

14.13. $y'' + 2y' = 10e^x (\sin x + \cos x)$.

14.14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$.

14.15. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.

14.16. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.

14.17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$.

14.18. $y'' - 4y' + 8y = e^x (3\sin x + 5\cos x)$.

14.19. $y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x)$.

14.20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$.

14.21. $y'' + 6y' + 13y = -e^{3x} \cos 5x$.

14.22. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.

14.23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

14.24. $y'' - 4y' + 8y = e^x (2\sin x - \cos x)$.

14.25. $y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x)$.

- 14.26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$.
- 14.27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$.
- 14.28. $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$.
- 14.29. $y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x$.
- 14.30. $y'' - 4y' + 8y = e^x (-\sin x + 2 \cos x)$.
- 14.31. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$.

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- 15.1. $y'' - 2y' = 2 \operatorname{ch} 2x$.
- 15.2. $y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x$.
- 15.3. $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.
- 15.4. $y'' - 3y' = 2 \operatorname{ch} 3x$.
- 15.5. $y'' + 4y = -8 \sin 2x + 32 \cos 2x + 4e^{2x}$.
- 15.6. $y''' - y' = 10 \sin x + 6 \cos x + 4e^x$.
- 15.7. $y'' - 4y' = 16 \operatorname{ch} 4x$.
- 15.8. $y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}$.
- 15.9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4 \cos 2x + 8 \sin 2x$.
- 15.10. $y'' - 5y' = 50 \operatorname{ch} 5x$.
- 15.11. $y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x}$.
- 15.12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18 \sin 3x - 9 \cos 3x$.
- 15.13. $y'' - y' = 2 \operatorname{ch} x$.
- 15.14. $y'' + 25y = 20 \cos 5x - 10 \sin 5x + 50e^{5x}$.
- 15.15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64 \cos 4x - 64 \sin 4x$.
- 15.16. $y'' + 2y' = 2 \operatorname{sh} 2x$.
- 15.17. $y'' + 36y = 24 \sin 6x - 12 \cos 6x + 36e^{6x}$.
- 15.18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.
- 15.19. $y'' + 3y' = 2 \operatorname{sh} 3x$.

- 15.20. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$.
- 15.21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.
- 15.22. $y'' + 4y' = 16\operatorname{sh} 4x$.
- 15.23. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$.
- 15.24. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.
- 15.25. $y'' + 5y' = 50\operatorname{sh} 5x$.
- 15.26. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.
- 15.27. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$.
- 15.28. $y'' + y' = 2\operatorname{sh} x$.
- 15.29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$.
- 15.30. $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$.
- 15.31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$.

Задача 16. Найти решение задачи Коши.

- 16.1. $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
- 16.2. $y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1 + e^{3x})$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.
- 16.3. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$, $y(\pi/4) = 5$, $y'(\pi/4) = 4$.
- 16.4. $y'' - 6y' + 8y = 4 / (1 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.
- 16.5. $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x} / (1 + e^{-3x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- 16.6. $y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \sin \pi x = 1$, $y(1/2)$, $y'(1/2) = \pi^2 / 2$.
- 16.7. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
- 16.8. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.
- 16.9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.
- 16.10. $y'' - 6y' + 8y = 4 / (2 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

- 16.11. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x}), y(0) = 0, y'(0) = 0.$
- 16.12. $y'' + 9y = 9/\sin 3x, y(\pi/6) = 4, y'(\pi/6) = 3\pi/2.$
- 16.13. $y'' + 9y = 9/\cos 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
- 16.14. $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x}), y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$
- 16.15. $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x, y(\pi/4) = 3, y'(\pi/4) = 2.$
- 16.16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 8\ln 2, y'(0) = 14\ln 2.$
- 16.17. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}), y(0) = 0, y'(0) = 0.$
- 16.18. $y'' + 16y = 16/\sin 4x, y(\pi/8) = 3, y'(\pi/8) = 2\pi.$
- 16.19. $y'' + 16y = 16/\cos 4x, y(0) = 3, y'(0) = 0.$
- 16.20. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}), y(0) = \ln 4, y'(0) = \ln 4 - 2.$
- 16.21. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}(x/2), y(\pi) = 2, y'(\pi) = 1/2.$
- 16.22. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x}), y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 5\ln 3.$
- 16.23. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^x), y(0) = 0, y'(0) = 0.$
- 16.24. $y'' + 4y = 4/\sin 2x, y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = \pi.$
- 16.25. $y'' + 4y = 4/\cos 2x, y(0) = 2, y'(0) = 0.$
- 16.26. $y'' + y' = e^x/(2 + e^x), y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9.$
- 16.27. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = 2.$
- 16.28. $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x}), y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 3\ln 2.$
- 16.29. $y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^{-x}), y(0) = 0, y'(0) = 0.$
- 16.30. $y'' + y = 1/\sin x, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = \pi/2.$
- 16.31. $y'' + y = 1/\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Учебное издание

*Ростова Елена Павловна
Кореева Екатерина Борисовна*

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Редактор И.И. Спиридонова
Компьютерная вёрстка И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 12.04.2018. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 5,25.

Тираж 100 экз. Заказ . Арт. 5(Р1У)/2018.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.