В.А. ФУРСОВ, Н.Е. КОЗИН

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

2007

СГАУ

САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.А. ФУРСОВ, Н.Е. КОЗИН

ПРАКТИКУМ
ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Утверждено Редакционно-издательским советом
в качестве учебного пособия

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2 0 0 7

УДК 004.9(075)
ББК 39.87
Ф 954

**Инновационная образовательная программа
«Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области
аэрокосмических и геоинформационных технологий»**

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук В. М. Ч е р н о в,
д-р физ.-мат. наук А. И. Ж д а н о в

Фурсов В.А.
Ф 954 **Практикум по теории информации:** учеб. пособие / *В.А. Фурсов, Н.Е. Козин.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 80 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0628-5

Учебное пособие «Практикум по теории информации» представляет собой сборник задач, сгруппированных по темам таким образом, что каждая тема соответствует одной лекции учебного пособия «Лекции по теории информации», изданного в 2006 г. В каждой теме приведены как примеры решения задач, так и задачи для самостоятельной работы. Учебное пособие соответствует программе подготовки студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика». Подготовлено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

УДК 004.9(075)
ББК 39.87

ISBN 978-5-7883-0628-5

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий «Практикум по теории информации» является сборником задач, дополняющим изданные в 2006 году «Лекции по теории информации». Задачи в «Практикуме» сгруппированы таким образом, что каждая тема соответствует одной лекции указанного учебного пособия. В начале каждой темы приведены достаточно подробные примеры решения задач, позволяющие студентам самостоятельно освоить курс.

При отборе задач для «Практикума» авторы стремились ограничиться небольшим числом примеров и задач, которые достаточно полно отражают основные разделы курса. Материал, содержащийся в учебном пособии «Лекции по теории информации» и в настоящем «Практикуме», является достаточным для изучения курса «Теория информации» по учебному плану направления «Прикладная математика и информатика». «Практикум» может быть полезным также для студентов других специальностей и направлений, в учебные планы которых включен курс «Теория информации». В частности, он может быть рекомендован в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям информационные технологии и информационная безопасность.

Учебное пособие подготовлено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

ТЕМА 1. МОДЕЛИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Задача 1.1.

Найти спектр последовательности косинусоидальных импульсов (рис. 1).

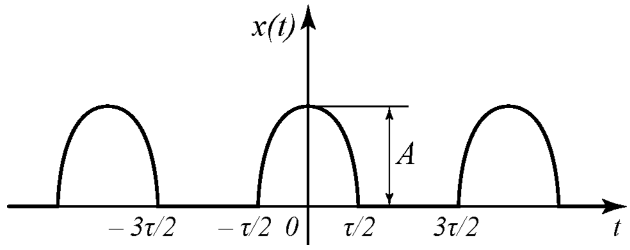

Рис. 1.

Решение.

Функция $x(t)$, описывающая данный сигнал, может быть представлена следующим образом:

$$x(t)=\begin{cases} h\cdot\cos(\omega t) & \text{при} \quad -\left(\dfrac{\tau}{2}-iT\right)\le t\le\dfrac{\tau}{2}+iT, \\ 0 & \text{при} \quad -\left(\dfrac{3\tau}{2}+iT\right)<t<-\left(\dfrac{\tau}{2}+iT\right), \end{cases}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T};\ T=2\tau;\ i=0,1,2,...$$

Комплексная амплитуда сигнала равна

$$A_k=\frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}h\cos\omega_0 t\exp\left(-jK\omega_0 t\right)dt=$$

$$=\frac{2h}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\frac{\exp(j\omega_0 t)+\exp(-j\omega_0 t)}{2}\exp(-jK\omega_0 t)\,dt=$$

$$=\frac{h}{2}\left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\exp\left(-j(K-1)\omega_0 t\right)dt+\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\exp\left(-j(K+1)\omega_0 t\right)dt\right]=$$

$$=\frac{h}{T}\left[\frac{\exp\left(j(K-1)\omega_0 \tau/2\right)-\exp\left(-j(K-1)\omega_0 \tau/2\right)}{j(K-1)\omega_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\left(j(K+1)\omega_0 \tau/2\right)-\exp\left(-j(K+1)\omega_0 \tau/2\right)}{j(K+1)\omega_0}\right]=$$

$$=\frac{h}{\pi(K-1)}\sin(K-1)\omega_0 \tau/2+=\frac{h}{\pi(K+1)}\sin(K+1)\omega_0 \tau/2=$$

$$=\frac{-h}{\pi(K-1)}\cos\frac{K\omega_0\tau}{2}+\frac{h}{\pi(K+1)}\cos\frac{K\omega_0\tau}{2}.$$

Так как при $T=2\tau,\quad \omega_0=2\pi/T=\pi/\tau$

$$\left|\cos\frac{K\omega_0\tau}{2}\right|=\left|\cos\frac{K\pi}{2}\right|=\begin{cases}1 & при\quad K\quad четном,\\ 0 & при\quad K\quad нечетном,\end{cases}$$

то спектр сигнала содержит только четные гармоники, при этом модуль комплексной амплитуды

$$A_K=\frac{2h}{\pi\left(K^2-1\right)}.$$

График спектра амплитуд изображен на рис. 2.

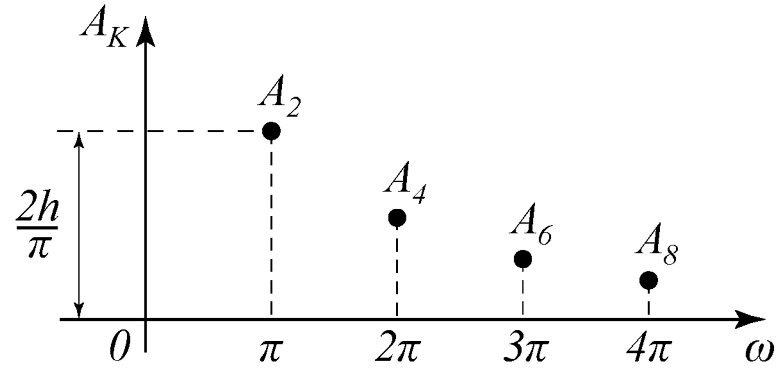

Рис. 2.

Задача 1.2.

Определить спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных импульсов длительностью τ и амплитудой A, следующих с частотой $\omega_1 = 2\pi/T$ (рис. 3), описываемых как:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{при} \quad t_1 \le t \le t_2 = t_1 + \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 < t < t_3 = t_1 + T. \end{cases}$$

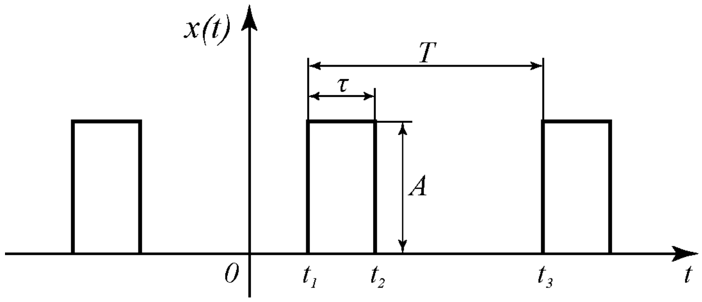

Рис. 3.

Решение.

В соответствии с формулой для спектра амплитуд имеем

$$A(jk\omega_1) = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+\tau} Ae^{-jk\omega_1 t}dt =$$

$$= \frac{2A}{T}\frac{\left[e^{-jk\omega_1 t_1} - e^{-jk\omega_1(t_1+\tau)}\right]}{2j(k\omega_1/2)},$$

или

$$A(jk\omega_1) = \frac{2A\tau}{T}\frac{\sin(k\omega_1\tau/2)}{k\omega_1\tau/2}e^{-jk\omega_1(t_1+\tau/2)}.$$

Амплитуды гармоник, включая постоянную составляющую $A_0/2$, определим из выражения

$$A(k\omega_1) = \frac{2A\tau}{T}\left|\frac{\sin(k\omega_1\tau/2)}{k\omega_1\tau/2}\right|$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$

Выбор начала отсчета времени на их величину не влияет. Огибающая спектра амплитуд в соответствии с последним равенством определяется как

$$A(\omega) = \frac{2A\tau}{T}\left|\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right|.$$

При $\omega = 0$ получаем

$$A_0 = 2A\tau/T.$$

Характер изменения амплитуд определяется функцией $\sin x/x$ и не зависит от частоты следования импульсов. На частотах, кратных $2\pi/\tau$, огибающая спектра равна нулю.

На рисунке 4 приведена диаграмма спектра амплитуд.

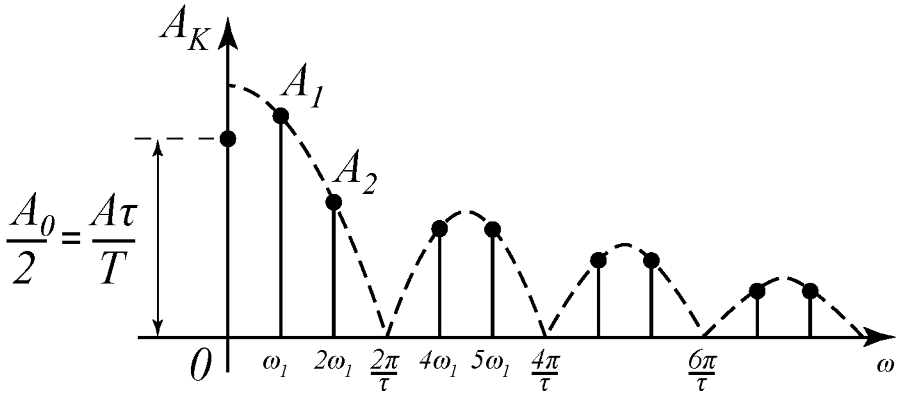

Рис. 4.

Задача 1.3.

Найти спектральную характеристику $S(j\omega)$ одиночного прямоугольного импульса:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{при} \quad -\dfrac{\tau}{2} \le t \le \dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\tau}{2} < t < -\dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

По найденной $S(j\omega)$ построить линейчатый спектр периодической последовательности этих импульсов.

Решение

В соответствии с выражением для спектральной характеристики

$$S(j\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\exp(-j\omega t)\,dt=\frac{A}{j\omega}\left(\exp\left(j\omega\frac{\tau}{2}\right)-\exp\left(-j\omega\frac{\tau}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2A}{\omega}\cdot Sin\frac{\omega\tau}{2}=A\tau\cdot\frac{Sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Задача 1.4.

Найти спектр дельта-функции, отличной от нуля в начале координат:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1.$$

Решение.

Дельта-функцию можно трактовать как предельную форму прямоугольного импульса длительности τ и амплитуды $\frac{1}{\tau}$, получаемую при $\tau\to 0$. Тогда, приняв амплитуду импульса равной $h=\frac{1}{\tau}$, получим

$$S(j\omega)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}=1.$$

Модуль и фаза спектральной плотности равны соответственно $S(\omega)=1$; $\varphi(\omega)=0$.

Задача 1.5.

Найти спектр одиночного импульса высокочастотных колебаний (рис. 5).

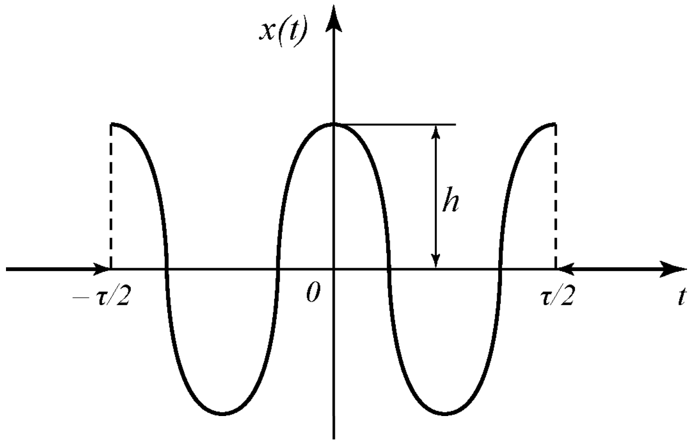

Рис. 5.

Решение.

Функция $x(t)$, описывающая данный сигнал, может быть представлена в виде:

$$x(t)=\begin{cases} h\cdot\cos(\omega t) & \text{при} \quad -\dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\tau}{2}<t<-\dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Спектральная плотность такого сигнала равна

$$S(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp(-j\omega t)dt=\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}h\cos\omega_0 t\exp(-j\omega t)dt=$$

$$=\frac{h}{2}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\exp\big(j(\omega_0-\omega)t\big)dt+\frac{h}{2}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\exp\big(-j(\omega_0-\omega)t\big)dt=$$

$$=\frac{h}{2}\left[\frac{\exp\left(j(\omega_0-\omega)\tau/2\right)-\exp\left(j(\omega_0-\omega)\tau/2\right)}{j(\omega_0-\omega)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\left(j(\omega_0+\omega)\tau/2\right)-\exp\left(j(\omega_0+\omega)\tau/2\right)}{j(\omega_0+\omega)}\right]=$$

$$=\frac{h}{(\omega_0-\omega)}\sin(\omega_0-\omega)\tau/2+\frac{h}{(\omega_0+\omega)}\sin(\omega_0+\omega)\tau/2=$$

$$=\frac{h\tau}{2}\frac{\sin\frac{(\omega_0-\omega)\tau}{2}}{\frac{(\omega_0-\omega)\tau}{2}}+\frac{h\tau}{2}\frac{\sin\frac{(\omega_0+\omega)\tau}{2}}{\frac{(\omega_0+\omega)\tau}{2}}.$$

Из сравнения полученного выражения с выражением для спектра одиночного импульса такой же длительности и величины h, но без высокочастотного заполнения (см. задачу 1.3), видно, что по отношению к спектру прямоугольного импульса спектр импульса высокочастотных колебаний смещен на величину несущей ω_0 и расширен в два раза за счет появления зеркального отображения спектра.

Задача 1.6.

Найти спектр одиночного экспоненциального импульса.

Решение.

Экспоненциальный импульс определяется функцией

$$x(t)=\begin{cases} h\cdot\exp\{-\alpha t\} & \text{при } t\ge 0,\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$$

Модуль и фаза спектральной плотности определяются соответственно выражениями:

$$S(\omega)=\frac{h}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}};\ \varphi(\omega)=arctg\frac{\omega}{\beta}.$$

Задача 1.7.

Найти спектр сигнала включения:

$$x(t)=h\cdot 1(t)=\begin{cases} h & \text{при} \quad t\ge 0, \\ 0 & \text{при} \quad t<0. \end{cases}$$

Решение.

Единичная функция $1(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости и, следовательно, к ней нельзя применить преобразование Фурье. Однако ее можно рассматривать как образованную из импульса экспоненциальной формы (см. задачу 1.6.) при неограниченном уменьшении его коэффициента затухания $\beta\to 0$.

В соответствии с этим спектральная плотность сигнала включения будет равна

$$S(j\omega)=\lim_{\beta\to 0}\frac{h}{\beta+j\omega}=\frac{h}{j\omega}=\frac{h}{\omega}\exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда модуль и фаза спектральной плотности определяются выражениями:

$$S(\omega)=\frac{h}{\omega};\ \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}.$$

Задача 1.8.

Пусть в задаче 1.2 длительность прямоугольного импульса увеличилась в 2 раза:

$$x(t)=\begin{cases} A & \text{при} \quad -\tau\le t\le\tau, \\ 0 & \text{при} \quad \tau<t<-\tau. \end{cases}$$

Как изменится при этом спектральная характеристика?

Задача 1.9.

Для периодической последовательности импульсов (задача 1.4) вычислить первые пять членов рядя Фурье. Оценить энергетический вклад (в %) постоянной составляющей и первой гармоники при $\tau = \frac{T}{2}$.

Задача 1.10.

Определить практическую ширину спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов при ширине импульсов $\tau = \frac{T}{2}$ для случая, когда должны быть учтены все гармонические составляющие сигнала, содержащие не менее 95% общей мощности сигнала.

Указание.

При решении задачи воспользоваться результатами, полученными при решении задач 1.4, 1.9.

ТЕМА 2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Задача 2.1.

Определить корреляционную функцию для процесса со спектральной плотностью вида δ -функции:

$S(\omega)=\delta(\omega)$.

Решение.

Согласно общей формуле и исходя из определения δ -функции как предела прямоугольной функции ширины Ω и высоты $\frac{1}{\Omega}$ при $\Omega \to 0$, получим

$$K(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega=$$

$$=\lim_{\Omega\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\Omega/2}^{\Omega/2}\exp(j\omega\tau)\frac{1}{\Omega}d\omega=\frac{1}{2}\left|\exp(j\omega\tau)\right|_{\omega=0}=\frac{1}{2}.$$

Задача 2.2.

Определить спектральную плотность $S(\omega)$ для стационарного процесса с корреляционной функцией вида:

$R(\tau)=A\exp(-\alpha|\tau|)$.

Решение.

$$S(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\tau)Cos(\omega\tau)d\tau=\frac{2A}{\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-\alpha\tau)Cos\omega\tau d\tau=\frac{2A\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Задача 2.3.

Определить спектральную плотность для стационарного процесса с корреляционной функцией вида δ-функции:

$$R(\tau)=\delta(\tau).$$

Решение.

Исходя из определения δ-функции как предела прямоугольного импульса $\delta_\tau(t)$, длительности τ и высоты $\frac{1}{\tau}$ при $\tau\to 0$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt$, где $x(t)$ – произвольная функция, может быть представлен в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=\lim_{\tau\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta_\tau(t)dt=\lim_{\tau\to 0}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}x(t)\frac{1}{\tau}dt.$$

Согласно теореме о среднем значении,

$$\lim_{\tau\to 0}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}x(\tau)\frac{1}{\tau}dt=\lim_{\tau\to 0}x(\Theta)\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}dt,$$

где $x(\Theta)$ – среднее значение $x(t)$ в пределах $\left[-\tau/2;\tau/2\right]$.

Таким образом,

$$\lim_{\tau\to 0}x(\Theta)\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\frac{1}{\tau}dt=\lim_{\substack{\tau\to 0\\ |\Theta|\le\tau}}x(\Theta)=x(\Theta).$$

Тогда, полагая спектральную плотность равной $K_x(\tau)=\delta(\tau)$ и $\exp(-j\omega\tau)=x(t)$, с учетом полученных соотношений получим

$$S(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_x(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\exp(-j\omega\tau)dt=$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \exp\left(-j\omega\tau\right) \right|_{\tau=0} = \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, при корреляционной функции типа δ-функции спектр равномерен на всех частотах (сигнал типа «белый шум»).

Задача 2.4.

Определить автокорреляционную функцию и дисперсию стационарного процесса со спектральной плотностью вида:

$$S(\omega) = \begin{cases} S, & -\omega_0 < \omega < \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases}$$

Задача 2.5.

Определить корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)$ для стационарного случайного сигнала:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(a_j \cos\omega_j t + b_j \sin\omega_j t \right),$$

где a_j, b_j – вещественные взаимно некоррелированные случайные величины.

$$M\left\{a_j\right\} = M\left\{b_j\right\} = 0, \quad M\left\{a_j^2\right\} = M\left\{b_j^2\right\} = \sigma_j^2 .$$

Задача 2.6.

Определить корреляционную функцию для стационарного процесса со спектральной плотностью вида (рис. 6):

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \le \omega_0, \\ \sigma^2, & \omega_0 < |\omega| < 2\omega_0, \\ 0, & 2\omega_0 \le |\omega|. \end{cases}$$

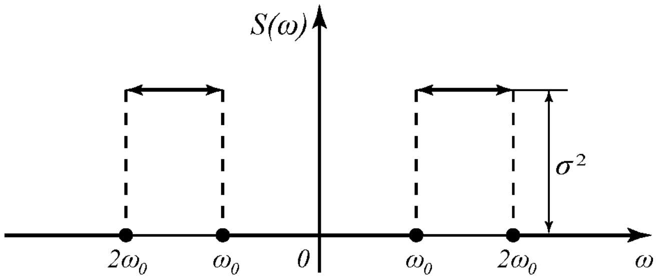

Рис. 6.

Задача 2.7.

Определить спектральную плотность для стационарного случайного процесса с корреляционной функцией вида (рис. 7):

$$R(\tau)=\begin{cases}\sigma^2(1-|\tau|), & |\tau|\le 1,\\ 0, & |\tau|>1.\end{cases}$$

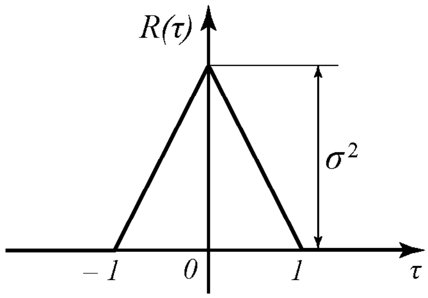

Рис. 7.

Задача 2.8.

Белый шум со спектральной плотностью $S_0 = Const$ проходит через усилитель с частотной характеристикой

$$W(\omega) = W_0 \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right).$$

Найти спектральную плотность и корреляционную функцию выходного сигнала.

ТЕМА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ В ДИСКРЕТНЫЕ

Задача 3.1.

Определить погрешность квантования во времени сигнала конечной длительности. Известно следующее:

1) сигнал $x(t)$ может принимать с равной вероятностью любые значения в пределах от 0 до $x_{\max}$;
2) частота квантования ω_k выбрана таким образом, что относительная величина площади энергетического спектра сигнала, находящегося в пределах частот от $\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_k$ до $\omega = \infty$, равна 5%.

Решение.

По условию относительная величина площади отсекаемого участка спектра сигнала $\gamma_{\omega_0} = 0,05$. Средняя мощность сигнала

$$P_T = \int_0^{x_{\max}} x^2 w(X)\,dx .$$

Так как сигнал по шкале уровней распределен равновероятно, то $w(X) = \frac{1}{x_{\max}}$. Тогда

$$P_T = \frac{1}{x_{\max}} \int_0^{x_{\max}} x^2\,dx = \frac{x_{\max}^2}{3} .$$

Следовательно, искомая погрешность квантования

$$D\omega_0 = \frac{0,05x_{\max}^2}{3x_{\max}^2} 100\% = 1,7\% .$$

Задача 3.2.

Найти частоту квантования по времени экспоненциального сигнала $x(t) = A_0 \exp(-\alpha t)$, $t \ge 0$, если относительная величина площади отсекаемой части энергетического спектра равна 5%; $\alpha = 10\ c^{-1}$.

Решение.

Из условий задачи имеем

$$\gamma_{\omega_c} = \frac{\int\limits_{\omega_c}^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega}{\int\limits_{0}^{\infty} \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega} = 0,05 .$$

Спектральная плотность сигнала

$$S(j\omega) = \int\limits_0^\infty x(t)\exp(-j\omega t)dt = \int\limits_0^\infty A_0 \exp\left(-(\alpha + j\omega)t\right)dt = \frac{A}{\alpha + j\omega} .$$

Модуль спектральной плотности

$$\left|S(j\omega)\right| = \frac{A_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} .$$

Энергия сигнала равна

$$W_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{A_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{A_0^2}{2\alpha} .$$

Энергия сигнала, сосредоточенная в диапазоне частот от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$, равна

$$W_{\omega_c} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_c}^\infty \left|S(j\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega_c}^\infty \frac{A_0^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{A_0^2}{\pi\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega_c}{\alpha}\right) .$$

Подставляя найденные значения интегралов в приведенную выше формулу для γ_{ω_c} и производя несложные преобразования, получим

$$arctg\frac{\omega_c}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_{\omega_c},$$

откуда

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\gamma_{\omega_c}\right) = \frac{\omega_c}{\alpha},$$

или

$$ctg\left(\frac{\pi}{2}\gamma_{\omega_c}\right) = \frac{\omega_c}{\alpha}.$$

Используя формулу разложения

$$ctgx = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \ldots\right]$$

и для малых значений x ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$\frac{2}{\pi\gamma_{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\alpha}$$

или окончательно

$$\omega_c = \frac{2\alpha}{\pi\gamma_{\omega_c}} = \frac{2\cdot 10}{\pi\cdot 0,05} = 127,5 \quad c^{-1}.$$

Требуемая частота квантования сигнала, согласно теореме Котельникова,

$$\omega_к = 2\omega_c = 225 \quad c^{-1}.$$

Задача 3.3.

Передаваемый по каналу связи сигнал квантуется по уровню способом замены его мгновенных значений ближайшим меньшим квантованным уровнем. Определить необходимое количество уровней квантования сигнала при условии, что приведенная среднеквадратическая погрешность квантования не превышает 0,3%.

Решение.

При заданном способе квантования погрешность квантования отрицательная и может принимать значения от 0 до $-\Delta_x$, где Δ_x — шаг квантования. Среднее квадратическое значение погрешности квантования равно

$$\sigma_к = \frac{\Delta_x}{2\sqrt{3}}.$$

Приведенная средняя квадратическая погрешность

$$\gamma_ê\% = \frac{\sigma_ê}{x_{\max}}100 = \frac{\Delta_x}{2\sqrt{3}N\Delta_x}100 = \frac{1}{2\sqrt{3}N}100,$$

где N — количество интервалов, на которые разбивается динамический диапазон сигнала при квантовании.

Так как количество уровней квантования M на единицу превышает количество интервалов квантования, то

$$M = N + 1 = \frac{50}{\sqrt{3}\gamma_к\%} + 1 = \frac{50}{\sqrt{3}\cdot 0,3} + 1 = 97.$$

Задача 3.4.

В измерительном приборе расстояние между соседними метками шкалы постоянно и равно a. При округлении отсчета до ближайшего целого деления погрешность округления по абсолютной величине не превышает половины расстояния между соседними метками. Найти погрешности распределения вероятности, математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Погрешность при округлении отсчета можно рассматривать как случайную величину x, которая может принимать с равной вероятностью любые значения в пределах от $-\alpha/2$ до $+\alpha/2$. Следовательно, плотность распределения случайной величины x постоянна в этих пределах и равна нулю за ними.

Так как должно быть справедливо равенство

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} w_1(x)\,dx = w_1(x)\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} dx = 1,$$

то

$$w_1(x) = \frac{1}{\alpha}.$$

Закон равномерного распределения в данном случае можно записать в виде

$$w_1(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x < -\alpha/2; \\ 1/\alpha & \textit{при} \quad -\alpha/2 \le x \le \alpha/2; \\ 0 & \textit{при} \quad x > \alpha/2. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия погрешности округления соответственно равны

$$Mx = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1 x dx = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} x\frac{1}{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2}{8}\right)^2 = 0\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - a(x)\right)^2 w_1(x)dx = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} x^2\frac{1}{\alpha}dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^3}{24} + \frac{\alpha^3}{24}\right) = \frac{\alpha^2}{12}.$$

Задача 3.5.

Определить по теореме Котельникова шаг дискретизации Δt для детерминированной функции

$$u(t) = \begin{cases} 2e^{-t} \text{ при } t \ge 0, \\ 0 \text{ при } t < 0, \end{cases}$$

ориентируясь на практическую ширину спектра, задаваемую коэффициентом $\eta = 0{,}95$ в правой части равенства Парсеваля (1.25) (см. «Лекции по теории информации», стр. 17).

Задача 3.6.

Показать, что при квантовании сигнала $u(t)$, имеющего плотность распределения значений $p(u)$, с постоянным шагом Δ, значение которого много меньше диапазона изменения $u(t)$, среднеквадратическая ошибка квантования σ достигает минимума при расположении уровня квантования в середине шага.

Задача 3.7.

Контрольно-измерительное устройство имеет систематическую погрешность 30 мВ и случайную погрешность, распределенную по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 10 мВт. Найти вероятность того, что общая погрешность устройства примет значение, принадлежащее интервалу 10-50 мВ.

ТЕМА 4. МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

Задача 4.1.

Двоичный источник задан матрицей:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

Определить выражение для энтропии источника и построить график ее зависимости от p.

Решение.

Используя выражение для энтропии, в данном случае можно записать

$$H(Z) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p).$$

График зависимости представлен на рис. 8.

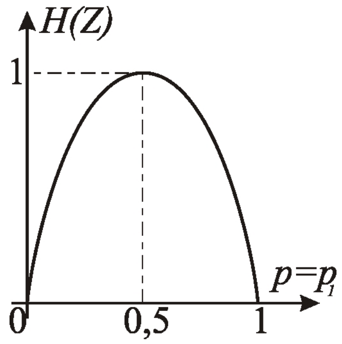

Рис. 8.

Задача 4.2.

Дискретный источник задан матрицей:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{bmatrix}.$$

Определить при каких значениях p_k энтроприя максимальна.

Решение.

Задача сводится к отысканию максимума энтропии

$H(Z) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_a p_i$ при условии $\sum p_i = 1$.

Функция Лагранжа для соответствующей задачи на безусловный экстремум

$$F(p,\lambda) = -\sum_{p=1}^{N} p_i \log_2 p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} p_i - 1\right) \to extr .$$

Необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial p_i} = -\log_2 p_i - \log_2 e + \lambda = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

$$\frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N} p_i - 1 = 0,$$

откуда следует

$p_i = 2^{\lambda - \log_2 e} = 1/N$ для всех $i = \overline{1,N}$.

Проверкой легко убедиться, что указанное значение доставляет максимум.

Задача 4.3.

Вероятности появления сообщений дискретного ансамбля X равны

$$p(x_1) = 1/2,\ p(x_2) = 1/4,\ p(x_3) = 1/4.$$

При этом условные вероятности появления сообщений ансамбля Y

$$p(y_1 \mid x_1) = p(y_2 \mid x_1) = p(y_3 \mid x_1) = 1/3;$$

$$p(y_1 \mid x_2) = 1/2;\ p(y_2 \mid x_2) = p(y_3 \mid x_2) = 1/4;$$

$$p(y_1 \mid x_3) = p(y_2 \mid x_3) = 1/2;\ p(y_3 \mid x_3) = 1/2.$$

Вычислить энтропию ансамбля Y.

Решение.

Учитывая, что $p(x_i, y_j) = p(y_j \mid x_i)\,p(x_i) = p(x_i \mid y_j)\,p(y_j)$, найдем вероятности $p(y_1)$, $p(y_2)$, $p(y_3)$.

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(y_1 \mid x_i) p(x_i) =$$

$$= p(y_1 \mid x_1)\,p(x_1) + p(y_1 \mid x_2)\,p(x_2) + p(y_1 \mid x_3)\,p(x_3) =$$

$$= (1/3)(1/2) + (1/2)(1/4) + (1/4)(1/4) = (1/6 + 1/8 + 1/16) =$$

$$= 8/48 + 6/48 + 3/48 = 17/48.$$

Аналогично получаем $p(y_2) = 7/24$, $p(y_3) = 17/48$. Заметим, что

$$p(y_1) + p(y_2) + p(y_3) = \frac{17}{48} + \frac{7}{24} + \frac{17}{48} = 1.$$

Таким образом,

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{3} p(y_i) \log_2 p(y_i) =$$

$$-17/48 \log_2 17/48 - 7/24 \log_2 7/24 - 17/48 \log_2 17/48 \approx 1{,}5787.$$

Задача 4.4.

Сигнал формируется в виде двоичного кода с вероятностями появления символов «1» и «0» соответственно $p(x_0) = 0{,}4$, $p(x_1) = 0{,}6$.

Заданы следующие условные вероятности:

$p(x_0 \mid x_0) = p(x_1 \mid x_1) = 0{,}1$ — вероятность того, что появится тот же символ;

$p(x_1 \mid x_0) = p(x_0 \mid x_1) = 0{,}9$ — вероятность того, что появится другой символ.

Найти $H(x)$.

Решение.

Используя общую формулу, находим искомую энтропию

$$H(X) = -\sum_{i=0}^{1} p(x_i) \sum_{j=0}^{1} p(x_i \mid x_j) \log_2 p(x_i \mid x_j) =$$

$$= -\left(0{,}1\log_2 0{,}1 + 0{,}9\log_2 0{,}9\right)\left(0{,}6 + 0{,}4\right) = 0{,}467 \frac{дв.ед.}{эл.}.$$

Задача 4.5.

Определить энтропию системы, которая описывается дискретной случайной величиной x со следующим рядом распределения:

$$p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 0{,}01, \quad p(x_5) = 0{,}96.$$

Задача 4.6.

Определить минимальное число взвешиваний, которое необходимо произвести на равноплечих весах, чтобы среди 27 внешне неотличимых монет найти одну фальшивую, более легкую.

Задача 4.7.

Записать соотношения между:

$H(Z)$, $H(V)$, $H_V(Z)$, $H_Z(V)$, $H(ZV)$

для случаев, когда:

а) V и Z независимы;

б) V и Z зависимы.

Задача 4.8.

Дано произведение ансамблей:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ 0,45 & 0,3 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Являются ли ансамбли независимыми?

Найти $H(Y)$, $H(XY)$, $H_Y(X)$, $H_X(Y)$.

Задача 4.9.

Дано произведение ансамблей:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_1y_3 \\ 0,25 & 0,05 & 0,2 & 0,25 & 0,2 & 0,05 \end{bmatrix}.$$

Являются ли ансамбли независимыми?

Найти $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H_Y(X)$, $H_X(Y)$.

Задача 4.10.

Определить неопределенность выбора из последовательности 8 равновероятных статистически независимых десятичных цифр.

Задача 4.11.

Определить энтропии $H(U)$, $H(V)$, $H_V(U)$, $H(UV)$, если задана матрица вероятных состояний системы, объединяющей источники U и V:

$$p(u,v) = \begin{array}{c} p(u_1) \\ p(u_2) \\ p(u_3) \end{array} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Задача 4.12.

Задано произведение ансамблей сообщений:

$$XY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 & x_3y_1 & x_3y_2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,18 & 0,12 & 0,12 & 0,08 \end{bmatrix}.$$

Определить частную энтропию сообщения x_2 и частную энтропию сообщения y_2 при условии, что известно сообщение x_2.

Задача 4.13.

Определить энтропию сообщения из пяти букв, если общее число букв равно 32, а все сообщения равновероятны.

ТЕМА 5. МЕРЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Задача 5.1.

Измеряемая величина изменяется в пределах от x_0 до x_0+a и распределена по закону равной вероятности. Найти дифференциальную энтропию этой случайной величины.

Решение.

Закон равной вероятности в данном случае представляется в виде

$$w(X)=\begin{cases} 1/a & \text{при} \quad x_0 \le X \le x_0+a, \\ 0 & \text{при} \quad X < x_0 \quad \text{и} \quad X > x_0+a. \end{cases}$$

Тогда искомая энтропия

$$h(X)=-\int_{-\infty}^{\infty} w(X)\log_2 w(X)dX=-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x_0+a}\log_2\frac{1}{a}dX=\log_2 a \quad \text{дв.ед.}$$

Задача 5.2.

Определить дифференциальную энтропию непрерывной случайной величины *x*, распределенной по нормальному закону с параметрами $N\left(0,\sigma^2\right)$, где $\sigma=2{,}71$.

Решение.

Нормальное распределение случайной величины с нулевым средним имеет вид

$$w(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тогда искомая энтропия

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(X)\log_2 w(X)dX =$$

$$= -\log_2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} w(X)\log_2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)dX +$$

$$+\frac{\log_2 e}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} w(X)x^2 dX \quad \text{ää.åä.} = -\log_2\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) + \frac{\log_2 e}{2} = \log_2 \sigma\sqrt{2\pi e}.$$

Задача 5.3.

Определить разность дифференциальных энтропий гаусовских непрерывных сообщений с дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Задача 5.4.

Непрерывная случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $N(m_x, \sigma_x)$. Как повлияет на величину энтропии увеличение в два раза

а) m_x?

б) σ_x?

Задача 5.5.

Сравнить энтропии непрерывных случайных сигналов, распределенных соответственно равномерно на интервале $[-\alpha;\alpha]$ и нормально, если их дисперсии равны.

Задача 5.6.

Во сколько раз средняя мощность сигнала с равномерным распределением значений отсчетов должна быть больше мощности сигнала с нормальным распределением отсчетов при условии, что оба сигнала имеют одинаковые дифференциальные энтропии?

ТЕМА 6. КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ КАК МЕРА СНЯТОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Задача 6.1.

Контролируемый параметр x может принимать 2 значения x_0 и x_1 с вероятностью $p(x_0) = p(x_1)$. Вследствие ограниченной точности системы контроля могут иметь место ошибки контроля, т. е. вместо x_0 может быть зафиксировано x_1 и наоборот. Условные вероятности таких событий равны 0,01.

Определить количество информации, получаемое при контроле.

Решение.

Введем следующие обозначения результатов контроля:

y_0 — система контроля указывает, что параметр X имеет значение x_0;

y_1 — система контроля указывает, что параметр X имеет значение x_1. Тогда условные вероятности ошибочного контроля будут соответственно равны $p(y_1 | x_0) = 0{,}01$ и $p(y_0 | x_1) = 0{,}01$.

Количество получаемой информации будет равно разности начальной и остаточной энтропии

$$I(Y,X) = H(X) - H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{1} p(x_i)\log_2 p(x_i) +$$

$$+\sum_{j=0}^{1} p(y_j)\sum_{i=1}^{1} p(x_i | y_j)\log_2 p(x_i | y_j).$$

Начальная энтропия

$$H(X) = -p(x_0)\log_2 p(x_0) - p(x_1)\log_2 p(x_1) =$$

$$= 2\cdot 0{,}5\log_2 0{,}5 = 1\frac{дв.ед.}{сообщ.}$$

Для определения условной энтропии $H(X\,|\,Y)$ необходимо знать вероятности $p(y_j)$ и $p(x_i\,|\,y_j)$. Вероятности $p(y_j)$ вычисляем по формуле полной вероятности:

$$p(y_j)=\sum_i p(x_i)\,p(y_{ij}\,|\,x_i).$$

При этом

$$p(y_0)=p(x_0)\,p(y_0\,|\,x_0)+p(x_1)\,p(y_0\,|\,x_1)=$$

$$=p(x_0)\big[1-p(y_1\,|\,x_0)\big]+p(x_1)\,p(y_0\,|\,x_1)=$$

$$=0{,}5(1-0{,}01)+0{,}5\cdot 0{,}01=0{,}5\,;$$

$$p(y_1)=p(x_0)\,p(y_1\,|\,x_0)+p(x_1)\,p(y_1\,|\,x_1)=$$

$$=p(x_0)\,p(y_1\,|\,x_0)+p(x_1)\big[1-p(y_0\,|\,x_1)\big]=0{,}5\,.$$

Условные вероятности $p(x_i\,|\,y_j)$ вычисляем по формуле Байеса:

$$p(x_i\,|\,y_j)=\frac{p(x_i)\,p(y_j\,|\,x_i)}{p(y_j)}\,.$$

При этом

$$p(x_0\,|\,y_1)=\frac{p(x_0)\,p(y_1\,|\,x_0)}{p(y_1)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}01}{0{,}5}=0{,}01\,;$$

$$p(x_1\,|\,y_0)=\frac{p(x_1)\,p(y_0\,|\,x_1)}{p(y_0)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}01}{0{,}5}=0{,}01\,.$$

Таким образом, условная энтропия

$$H(X\,|\,Y)=-p(y_0)\big[p(x_0\,|\,y_0)\log_2 p(x_0\,|\,y_0)+p(x_1\,|\,y_0)\log_2 p(x_1\,|\,y_0)\big]-$$
$$-p(y_1)\big[p(x_0\,|\,y_1)\log_2 p(x_0\,|\,y_1)+p(x_1\,|\,y_1)\log_2 p(x_1\,|\,y_1)\big]=$$

$$= -p(y_0)\left\{\left[1-p(x_1\,|\,y_0)\right]\log_2\left[1-p(x_1\,|\,y_0)\right]+p(x_1\,|\,y_0)\log_2 p(x_1\,|\,y_0)\right\}-$$
$$-p(y_1)\left\{p(x_0\,|\,y_1)\log_2 p(x_0\,|\,y_1)\right\}+$$

$$+\left[1-p(x_0\,|\,y_1)\right]\log_2\left[1-p(x_0\,|\,y_1)\right]=0{,}081\frac{дв.ед.}{сообщ.}.$$

Окончательно получаем

$$I(X,Y)=1-0{,}081=0{,}92\frac{дв.ед.}{сообщ.}.$$

Задача 6.2.

Определить количество информации, содержащееся в одном замере случайной величины x, равномерно распределенной на интервале $[0,256]$, при условии, что погрешность измерения этой величины распределена по нормальному закону $N\left(0,\sigma^2\right)$, где $\sigma^2=5$.

Решение.

Дифференциальная энтропия случайной величины X

$$h(x)=-\int_0^{256}\frac{1}{256}\log_2\frac{1}{256}dx=8 \quad \textit{дв.ед.}$$

Остаточная дифференциальная энтропия определяется погрешностью измерения

$$h(\delta)=\log_2\sqrt{2\pi e\sigma}=\log_2\sqrt{2\pi e\cdot 5}=4{,}39 \quad \textit{дв.ед.}$$

Количество информации, получаемое в результате одного замера, определяется разностью начальной и конечной энтропий:

$$I(x)=h(x)-h(\delta)=8-4{,}39=3{,}61 \quad \textit{дв.ед.}$$

Задача 6.3.

Определить среднее количество информации, получаемое при передаче элемента сообщения по каналу, описанному матрицей совместных вероятностей:

$$p(v,z) = \begin{array}{c} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Указание.

При решении данной задачи можно воспользоваться результатами расчета априорной $H(Z) = H(U)$ и апостериорной $H_V(Z) = H_V(U)$ энтропий, полученных в задаче 4.12.

Задача 6.4.

Равновероятные двоичные символы передаются по каналу связи (рисунок 9). Вероятность приема правильного символа равна p .

Определить, сколько в среднем информации теряется при передаче одного символа.

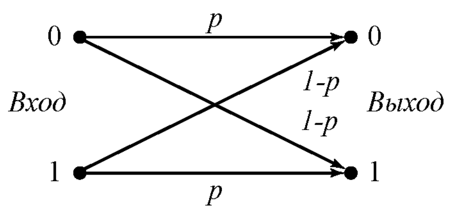

Рис. 9.

Задача 6.5.

На вход двоичной системы связи, представляющей собой два последовательных соединенных идентичных канала с вероятностями искажения двоичного символа $1-p$ в каждом (рис. 10), поступают статистически независимые двоичные равновероятные символы. Искажения в любом канале происходят независимо друг от друга.

Определить среднее количество передаваемой информации $I(WZ)$ и $I(WV)$.

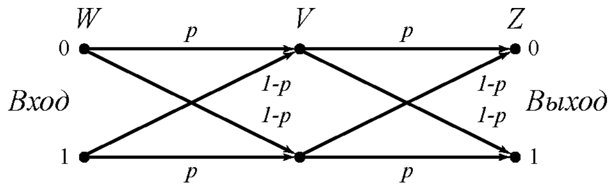

Рис. 10.

Задача 6.6.

Сообщения из ансамбля $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ передаются по каналу связи, заданному матрицей переходов:

$$p(y/x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Определить, сколько информации об x_1 содержится в выходном сообщении y_1 и сколько информации об x_2 содержится в выходном сообщении y_2?

Сколько информации в каждом случае теряется в системе связи?

Сколько в среднем информации теряется при передаче одного сообщения?

Задача 6.7.

Определить неопределенность выбора символа на экране, отображающем 32x16 статистически независимых элементов, если каждый элемент может отображать 32 независимых символа.

Задача 6.8.

Определить энтропию сообщения из 8-ми равновероятных статистически независимых десятичных цифр.

Задача 6.9.

Символы азбуки Морзе могут появиться в сообщении с вероятностями: для точки - 0.51, для тире - 0.31, для промежутка между буквами - 0.12, между словами - 0.06. Определить среднее количество информации в сообщении из 500 символов данного алфавита, считая, что связь между последовательными символами отсутствует.

Задача 6.10.

В лотерее N билетов, из них k выигрышных. Студент купил M билетов и после розыгрыша сообщил вам, что выиграл (возможно, не на один билет). Какое количество информации получено?

Задача 6.11.

Брошена пара игральных костей, и известно, что сумма выпавших значений равна 5. Сколько информации содержится в этом сообщении?

ТЕМА 7. ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКОВ СООБЩЕНИЙ

Задача 7.1.

Определить, является ли эргодическим стационарный дискретный источник сообщений, алфавит которого состоит из четырех знаков z_1, z_2, z_3, z_4, причем безусловные вероятности выбора знаков одинаковы $\left(p(z_1)=p(z_2)=p(z_3)=p(z_4)=1/4\right)$, а условные вероятности $p\left(z_i/z_j\right)$ заданы таблицей 1.

Таблица 1

	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	1/3	1/3	1/3	0
z_2	1/3	1/3	1/3	0
z_3	1/3	1/3	1/3	0
z_4	0	0	0	1

Задача 7.2.

Оценить, какую долю общего числа возможных последовательностей следует учитывать в практических расчетах, если эргодический источник характеризуется параметрами: объем алфавита $l=16$, $H(Z)=3{,}5$ дв. ед., а число знаков в последовательности $N=50$.

Задача 7.3.

Определить возможный эффект от устранения избыточности при передаче текста на русском языке, если средняя энтропия русского языка на одну букву с учетом всех ограничений и корреляционных связей составляет 2 дв.ед./букву.

Указание.

Пренебречь различиями в буквах «е» и «ё», а также считать пробел буквой, т.е. следует полагать, что алфавит состоит из 32 букв.

ТЕМА 8. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Задача 8.1.

В информационном канале используется алфавит с четырьмя различными символами. Длительности всех символов одинаковы и равны t = 1 мкс. Определить пропускную способность канала при отсутствии шумов.

Решение.

Для расчета пропускной способности дискретного канала без помех воспользуемся формулой

$$C = \overline{U_y} \max\left\{H(Y)\right\} = \frac{\log_2 N}{T_y},$$

где N – общее количество сообщений; T_y – средняя длительность сигнала.

Так как код каждого сообщения содержит четыре символа, то длительность всех сигналов будет постоянна и равна

$$T_y = 4\tau = 4 мс .$$

Так как для передачи сообщений используется алфавит с четырьмя символами, то

$$N = 4^4 .$$

Следовательно,

$$C = 250\log_2 4^4 = 250\log_2 2^8 = 2 \cdot 10^3 \frac{дв.ед.}{с.}$$

Задача 8.2.

Источник вырабатывает символы с вероятностями

$$p_1 = 0,2 ,\ \ p_2 = 0,7 ,\ \ p_3 = 0,1 ;$$

корреляционные связи между сообщениями отсутствуют. Передача информации осуществляется двоичным кодом, длительность символов которого равна $\tau = 1$ мс. Определить скорость передачи информации по каналу без помех при использовании равномерного кода.

Решение.

Скорость передачи информации определяем по формуле

$$\overline{I(Y)} = \overline{U_y} H(Y) \frac{дв.ед.}{с.},$$

где $U_y = \frac{1}{\overline{\tau_y}}$ — скорость передачи элементарных символов сигнала; $\overline{\tau_y}$ — средняя длительность элементарных сигналов.

Средняя энтропия сообщений на один символ источника

$$H(Y) = -0,4\log_2 0,4 - 0,3\log_2 0,3 -$$

$$-0,2\log_2 0,2 - 0,1\log_2 0,1 = 1,848 \frac{дв.ед.}{симв.}$$

Скорость передачи символов U_y может быть определена из выражения для пропускной способности канала. Действительно, максимальная энтропия будет иметь место при равной вероятности и статистической независимости сообщений

$$\max\{H(Y)\} \log_2 4 = 2 \frac{дв.ед.}{сообщ.}.$$

Тогда получим

$$\overline{U_y} = \frac{C}{\max\{H(Y)\}} = \frac{1000}{2} = 500 \frac{симв.}{с.}.$$

Следовательно, скорость передачи информации

$$\bar{I}(\overline{Y}) = \overline{U_y} H(Y) = 500 \cdot 1,848 = 924 \frac{дв.ед.}{с.}.$$

Задача 8.3.

Сколько в среднем можно передать букв русского текста в секунду по каналу без помех с пропускной способностью $C = 1000$ дв.ед./сек.?

Указание. Принять, что средняя энтропия русского языка на одну букву с учетом всех ограничений и корреляционных связей составляет 2 дв.ед./букву.

Решение.

$$\overline{U_у} = \frac{1000}{2} = 500\frac{букв}{с}.$$

Задача 8.4.

Определить пропускную способность дискретного канала без памяти, показанного на рисунке 11. Априорные вероятности $p(y_1) = p$, $p(y_2) = p(y_3) = q$. Скорость передачи сигналов равна $v_\tau = const$. При каком ансамбле входных сообщений реализуется максимальная пропускная способность?

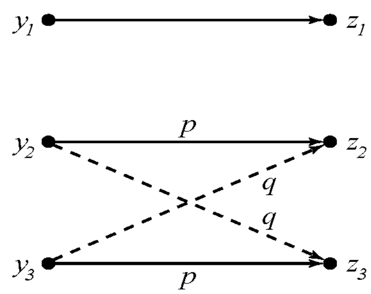

Рис. 11.

Задача 8.5.

Источник порождает независимые сообщения из ансамбля $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$.

Сообщения генерируются в двоичном коде со скоростью 100 сообщений в секунду.

Можно ли передать эти сообщения по каналу с пропускной способностью 10 бит в секунду?

Задача 8.6.

Определить пропускную способность канала с помехами типа гаусовского шума.

Полоса пропускания канала $F = 2000 \textit{Гц}$.

Дисперсия полезного сигнала $\sigma^2 = 4000\ \textit{в}^2$.

Спектральная плотность мощности помехи $p_0 = 0{,}04\ {}^{\textit{в}^2}\!/_{\textit{с}}$.

Задача 8.7.

По каналу в одну секунду передается 106 символов (скорость передачи 106 бод). Символы "0" и "1" поступают на вход канала с равной вероятностью. Определите пропускную способность канала, если вероятность правильной передачи символов $q = 0{,}9$.

Задача 8.8.

Определить ε -производительность источника, формирующего со скоростью υ_1 некоррелированные отсчеты стационарного нормального случайного сигнала с дисперсией σ^2.

Задача 8.9.

Источник, вырабатывающий четыре символа с априорными вероятностями $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}2$; $p_4 = 0{,}1$, подключен к каналу передачи информации, обладающему пропускной способностью $C = 1000$ дв.ед./с. Передача осуществляется равномерным двоичным кодом. С какой скоростью будет осуществляться передача информации при отсутствии помех?

Задача 8.10.

Определить пропускную способность двоичного симметричного канала со скоростью манипуляции v_τ, в предположении независимости передаваемых символов.

Задача 8.11.

По каналу связи без шума могут передаваться четыре сигнала длительностью 1 мс каждый. Вычислить емкость такого канала.

Задача 8.12.

Три передатчика задаются случайными величинами со следующими законами распределениями вероятностей:

$$p(x_1=-1)=1/4,\ p(x_1=0)=1/2,\ p(x_1=1)=1/4;$$

$$p(x_2=-1)=1/3;\ p(x_2=0)=1/3;\ p(x_2=1)=1/3;$$

$$p(x_3=n)=2^{-n},\quad n=1,2,\ldots.$$

Емкость канала связи с шумом равна 4000 бод. Вычислить максимальную скорость передачи данных по этому каналу каждым из передатчиков, обеспечивающую сколь угодно высокую надежность передачи.

ТЕМА 9. ЭФФЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ

Задача 9.1.

Используя методику Шеннона-Фано, провести эффективное кодирование ансамбля из восьми знаков z_i, вероятности которых приведены в таблице 2.

Таблица 2

Знаки	Вероятности
z_1	1/2
z_2	1/4
z_3	1/8
z_4	1/16
z_5	1/32
z_6	1/64
z_7	1/128
z_8	1/128

Задача 9.2.

Для построенного в условиях задачи 9.1 эффективного кода определить среднее число символов на знак и энтропию, сравнить и объяснить результаты.

Задача 9.3.

Определить среднюю длину кодовой комбинации при эффективном кодировании знаков следующего ансамбля:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ 0,22 & 0,2 & 0,16 & 0,16 & 0,1 & 0,1 & 0,04 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Задача 9.4.

Построить эффективный код для ансамбля, состоящего из двух знаков:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить энтропию и среднее число символов на знак.

Задача 9.5.

В условиях задачи 9.4 провести эффективное кодирование блоками, содержащими по два знака. Вычислить среднее число символов на знак и сравнить с результатами задачи 9.4.

Задача 9.6.

Используя методику Хаффмена, осуществить эффективное кодирование ансамбля, заданного в задаче 9.3. Построить кодовое дерево. Проверить свойство префиксности полученного кода.

Задача 9.7.

Заданы вероятности четырех сообщений:

$p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,2$; $p_4 = 0,1$.

Построить эффективные коды с использованием методик Шеннона-Фано и Хаффмена.

Задача 9.8.

Определить среднюю длину кодовой комбинации при эффективном кодировании по методике Хаффмена знаков ансамбля, приведенного в таблице 3.

Таблица 3

Знаки	Вероятность
z_1	0,22
z_2	0,20
z_3	0,16
z_4	0,16
z_5	0,10
z_6	0,10
z_7	0,04
z_8	0,02

Задача 9.9.

В таблице 4 приведены вероятности появления сообщений ансамбля X и различные варианты кодов для этого ансамбля.

а) Какие из приведенных кодов однозначно декодируемы (каждое кодовое слово может быть идентифицировано в последовательности)?

б) Какие из приведенных кодов мгновенно декодируемы (конец каждого кодового слова может быть идентифицирован без учета последующих символов)?

в) Вычислить среднюю длину кодового слова для кодов, найденных в пункте а).

Таблица 4

Символ	$p(x_i)$	A	B	C	D	E
x_1	$\frac{1}{2}$	000	0	1	0	0
x_2	$\frac{1}{4}$	001	10	10	100	10
x_3	$\frac{1}{8}$	010	110	100	101	110
x_4	$\frac{1}{16}$	011	1110	1000	110	1110
x_5	$\frac{1}{16}$	100	11110	10000	111	1011

ТЕМА 10. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО КОДИРОВАНИЯ

Задача 10.1.

Определить, являются ли группами следующие множества:

а) $\mathbf{Z}$ относительно операции сложения;

б) $\mathbf{Z}$ относительно операции умножения;

в) $\mathbf{R}/\mathbf{0}$ относительно операции умножения.

Задача 10.2.

Определить являются ли группами следующие множества кодовых комбинаций:

1) 0001, 0110, 0111, 0011;

2) 0000, 1101, 1110, 0111;

3) 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Задача 10.3.

Разложить группу трехразрядных двоичных кодовых комбинаций по подгруппе двухразрядных кодовых комбинаций.

Задача 10.4.

Разложить группу четырехразрядных двоичных кодовых комбинаций по подгруппе двухразрядных двоичных кодовых комбинаций.

Задача 10.5.

Разложить группу пятиразрядных двоичных кодовых комбинаций по подгруппе двухразрядных кодовых комбинаций.

Задача 10.6.

Определить избыточность помехоустойчивого 11-разрядного кода, предназначенного для передачи сообщений, составленных из букв алфавита, объемом 63 знака.

Задача 10.7.

Найти образующие элементы для следующих полей:

а) GF(2);

б) GF(7);

в) GF(11).

ТЕМА 11. ПОСТРОЕНИЕ ГРУППОВЫХ КОДОВ

Задача 11.1.

Определить кодовое расстояние между двумя двоичными кодовыми комбинациями:

1111110 и 0100100.

Задача 11.2.

Определить избыточность двоичного кода, предназначенного для передачи 16 команд, если длина кода $n = 5$.

Задача 11.3.

Определить число разрядов кодовой комбинации для передачи 8 сообщений неизбыточным двоичным кодом.

Задача 11.4.

Построить групповой код для передачи 15 слов, исправляющий одиночные ошибки (нулевая комбинация не используется).

Задача 11.5.

Построить групповой код для передачи 31 слова, исправляющего одиночные ошибки (нулевая комбинация не используется).

Задача 11.6.

Построить опознаватели для исправления всех одиночных и двойных ошибок для кода, предназначенного для передачи 3 слов.

Задача 11.7.

Построить код длиной $n = 3$, предназначенный для обнаружения всех однократных ошибок: $r = 1$.

Задача 11.8.

Определить число разрешенных комбинаций плотноупакованного кода длиной $n = 7$, предназначенного для исправления однократных ошибок: $s = 1$.

Задача 11.9.

Построить групповой код, предназначенный для передачи 15 слов (нулевая комбинация не используется), способный исправлять одиночные и обнаруживать двойные ошибки: $r = 2$, $s = 1$.

Задача 11.10.

Код (32,6), использованный на космическом корабле Mariner 9, названный кодом Рида-Мюллера, имел минимальное кодовое расстояние между словами равное 16. Определить, какое максимальное число ошибок в разрядах он позволял обнаруживать.

Задача 11.11.

Пусть код длиной 7 допускает возникновение ошибок только в одном из следующих векторов:

0000000,
0000001,
0000011,
0000111,
0001111,
0011111,
0111111,
1111111.

Построить бинарный код длиной 7, корректирующий ошибки подобного рода с максимально возможной кратностью.

Задача 11.12.

Используя таблицу 5, составить правила построения кода (8,2), исправляющего все одиночные и двойные ошибки.

Таблица 5

Номер разряда	Опознаватель
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000

Задача 11.13.

Для кода (8,2), построенного по условию предыдущей задачи, построить систему разделенных проверок (проверочных равенств) для декодирования информационных символов.

Задача 11.14.

Задан код (7,3), исправляющий одиночные ошибки. Вычислить вероятность ошибочного декодирования.

Задача 11.15.

Показать, что при длинах кодов $n=3$ и $n=4$ невозможно построить код, исправляющий одиночные ошибки для ансамбля, состоящего более чем из двух сообщений.

ТЕМА 12. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Задача 12.1.

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Определить синдромы (остатки) для всех 7 одиночных ошибок.

Задача 12.2.

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Для информационного сообщения 1101 построить несистематический избыточный код. Ввести ошибку в любой разряд и, исправив её, восстановить исходное информационное сообщение.

Задача 12.3.

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$.

Для информационного сообщения 1101 построить систематический избыточный код. Ввести ошибку в любой разряд и, исправив её, восстановить исходное информационное сообщение. Результат сравнить с решением задачи 12.2.

Задача 12.4.

Построить циклический код для передачи $2^{11} - 1$ команд, исправляющий все одиночные ошибки (нулевая комбинация не используется).

Задача 12.5.

Известно, что циклический код порождается многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$. Приняты кодовые комбинации: 0111000; 0111001. Содержат ли эти комбинации ошибки? Если да, то найти и исправить ошибки. Определить исходные неискаженные информационные сообщения.

Задача 12.6.

Известно, что циклический код (15,10) порождается образующим многочленом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$. Закодировать информационное сообщение

1010010001

и записать полученное кодовое слово.

Задача 12.7.

Выбрать образующий многочлен для кода длиной $n = 15$ с числом информационных разрядов $m = 4$.

Задача 12.8.

Доказать, что полином, делящийся без остатка на $x+1$ имеет четное число членов (все кодовые слова имеют четный вес).

Задача 12.9.

Убедиться, что деление полинома $a(x)$ на полином $b(x)$ может быть произведено по следующему алгоритму:

Шаг 1) Если $b(x)$ имеет степень большую, чем степень $a(x)$, тогда результат деления равен нулю, а остатком является полином $a(x)$;

Шаг 2) Если $b(x)$ имеет степень меньшую или равную степени полинома $a(x)$, делим старший коэффициент a_n полинома $a(x)$ на старший коэффициент b_m полинома $b(x)$. Результат

$$q_{n-m} = a_n \div b_m$$

является коэффициентом остатка при степени x^{n-m}.

Шаг 3) Полагаем

$$a(x) := a(x) q_{n-m} x^{n-m} b(x)$$

переход к шагу 1).

Задача 12.10.

Пусть образующая матрица линейного кода имеет свойство, что все циклические сдвиги любой строки этой матрицы являются кодовыми словами. Показать, что такой код является циклическим.

Задача 12.11.

Известно, что многочлен $x^7 - 1$ может быть разложен на неприводимые многочлены следующим образом:

$$x^7 - 1 = (x-1)\left(x^3 + x + 1\right)\left(x^3 + x^2 + 1\right).$$

Определить все циклические двоичные коды длины 7.

Задача 12.12.

Факторизовать многочлен $x^5 - 1$ над полем GF(2). Определить все циклические бинарные коды длины 5.

Задача 12.13.

Факторизовать многочлен $x^8 - 1$ над полем GF(3). Сколько существует троичных циклических кодов длины 8?

ТЕМА 13. МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

Задача 13.1.

Построить образующую матрицу систематического кода, предназначенного для передачи 15 слов (нулевая комбинация не используется) и исправляющего одиночные ошибки ($Q = 15$, $s = 1$).

Задача 13.2.

Задана образующая матрица систематического кода:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Построить все возможные разрешенные комбинации кода (7,4).

Задача 13.3.

Задана образующая матрица систематического кода:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Построить соответствующую проверочную матрицу.

С использованием указанной образующей матрицы построить избыточный код информационного сообщения 1011.

Внести ошибку в любой разряд и исправить ее с использованием построенной проверочной матрицы.

Задача 13.4.

Задан образующий полином $g(x)=x^3+x+1$ кода (7,4).

Построить образующую и соответствующую ей проверочную матрицы несистематического кода путем циклического сдвига.

С использованием построенной образующей матрицы закодировать информационное сообщение 1011. Определить синдромы с помощью проверочной матрицы и проверить возможность исправления ошибки в любом разряде.

Задача 13.5.

Задан образующий полином $g(x)=x^3+x+1$ кода (7,4).

Построить образующую и соответствующую ей проверочную матрицы систематического кода.

С использованием построенных матриц осуществить кодирование и декодирование произвольного информационного сообщения длиной $k=4$.

Внести ошибку в любой разряд закодированного сообщения и исправить её с помощью проверочной матрицы.

Задача 13.6.

Образующая матрица кода (11-7) имеет вид:

$$M_{11,7}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Является ли разрешенной последовательность 10011101110 ?

Задача 13.7.

По заданной образующей матрице построить проверочную матрицу и проверить, содержатся ли ошибки в сообщении 01100101101.

$$M_{11,7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 13.8.

По заданной проверочной матрице построить образующую матрицу.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 13.9.

Определить минимальное кодовое расстояние для двоичного систематического кода с образующей матрицей

$$M_{11,7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 13.10.

(«The Football pool problem» - Задача футбольных ставок). Требуется предсказать результат t футбольных матчей. При этом итог игры может быть победой хозяев (0), победой гостей (1) или ничьей (2). Необходимо определить минимальное число $f(t)$ ставок, которые нужно сделать, чтобы гарантированно получить второй приз (не более одной ошибки в прогнозе).

С помощью кода над полем GF(3) найти $f(t)$ для значений

а) 4,

б) 13,

в) 40,

г) 31.

ТЕМА 14. КОДИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ МАШИНАМИ

Задача 14.1.

Задана ЛПМ: $x_{k+1} = Ax_k$, $y_k = Cx_k$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Найти минимальную автономную ЛПМ над полем $GF(2)$.

Задача 14.2.

Задан образующий многочлен $g(x) = x^3 + x + 1$ кода (7,4).

Построить соответствующую этому образующему многочлену линейную последовательную машину (ЛПМ). С использованием построенной ЛПМ определить все синдромы для одиночных ошибок. Сравнить с остатками, вычисленными в задаче 12.1.

Задача 14.3.

С использованием ЛПМ, построенной в задаче 14.2, осуществить формирование избыточного кода для информационного сообщения 1101.

Задача 14.4.

Задан многочлен обратной связи $\varphi(x) = x^4 + x^2 + x + 1$.

Построить соответствующую этому многочлену образующую матрицу ЛПМ.

Задача 14.5.

Задана линейная последовательная машина

$$x_{k+1} = Ax_k\,,\quad y_k = Cx_k\,,\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С использованием матрицы преобразования подобия вида

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

построить подобную ЛПМ.

Сравнить значения выходного сигнала y_k исходной и подобной ЛПМ для $k = 0,1,2,3$ при $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Задача 14.6.

Какова минимальная длина двоичного кода, образованного генераторным многочленом

$$q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1\,?$$

Сколько ошибок он позволяет исправить?

ТЕМА 15. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

Задача 15.1.

По каналу связи, в котором действует аддитивная стационарная помеха, передается периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Параметры полезного сигнала: величина $A_x = 2B$, период следования $T_n = 100мс$. Помеха имеет нормальный закон распределения. Среднеквадратическое значение помехи $\sigma_\xi = 5B$, математическое ожидание $m_\xi = 0$. Обработка сигналов на принимающей стороне осуществляется методом синхронного накопления. Определить время обработки сигналов, необходимое для обеспечения превышения сигнала над помехой в 4 раза.

Решение.

Упрощенная схема приемника с синхронным накоплением представлена на рисунке 12.

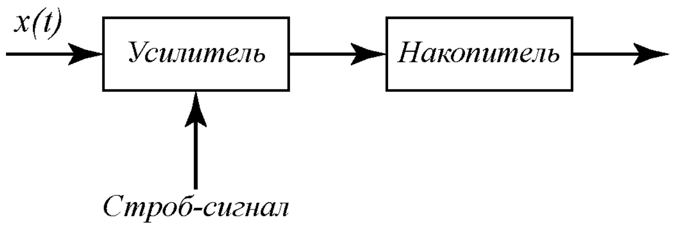

Рис. 12.

Усилитель приемника в исходном состоянии заперт. Строб-сигнал поступает синхронно с полезным сигналом и обеспечивает отпирание приемника на время подачи полезного сигнала.

Отношение сигнал/помеха на выходе накопителя в случае стационарной помехи

$$\left(\frac{A_x}{A_\xi}\right)_{вых} = \sqrt{n}\sqrt{\left(\frac{P_x}{P_\xi}\right)_{вх}},$$

где $\left(\frac{P_x}{P_\xi}\right)_{вх}$ — отношение мощностей сигнала и помехи на входе приемника; n — количество отсчетов за время приема.

В нашем случае

$$\left(\frac{P_x}{P_\xi}\right)_{вх} = \left(\frac{A_x}{\sigma_\xi}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

Продолжительность обработки сигналов в приемнике

$$T_{пр} = nT_п = \frac{\left(\frac{A_x}{A_\xi}\right)^2_{вых}}{\left(\frac{A_x}{\sigma_\xi}\right)^2_{вх}} T_п .$$

По условию задачи

$$\left(\frac{A_x}{A_\xi}\right)_{вых} = 4 .$$

Тогда необходимое время наблюдения

$$T_{пр} = \frac{4^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \cdot 0{,}1 = 10 \quad с.$$

Задача 15.2.

Необходимо осуществить обнаружение постоянного сигнала величиной $a = 2B$ на фоне аддитивной помехи с нормальным распределением и средним значением, равным нулю. Метод приема – однократный отсчет. Произвести синтез приемного устройства, работающего на основе критерия максимума правдоподобия и определить пороговый уровень.

Решение.

Так как по условию задачи помеха аддитивна и выборка Y представляет одномерную величину, то функции правдоподобия $L(a)$ и $L(0)$ определяются законом распределения помехи:

$$L(a) = w(Y \mid a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{(Y-a)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\};$$

$$L(0) = w(Y \mid 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{Y^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}.$$

Отношение правдоподобия при этом

$$\lambda = \frac{L(a)}{L(0)} = \exp\left\{-\frac{(Y-a)^2 - Y^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} = \exp\left\{\gamma\left[\frac{Y}{a} - \frac{1}{2}\right]\right\},$$

где $\gamma = \dfrac{a^2}{\sigma_\xi^2}$.

При использовании критерия максимума правдоподобия пороговое значение отношения правдоподобия $\lambda_0 = 1$. Тогда, приравняв полученное выражение для отношения правдоподобия единице, получим условие для порогового значения входного сигнала $Y_{пор.}$:

$$\exp\left\{\gamma\left[\frac{Y_{пор}}{a} - \frac{1}{2}\right]\right\} = 1,$$

откуда получаем

$$\frac{Y_{пор}}{a} - \frac{1}{2} = 0,$$

или

$$Y_{пор} = \frac{a}{2} = 1B.$$

Таким образом, приемное устройство представляет собой устройство сравнения, сравнивающее входной сигнал с пороговым уровнем $Y_{пор}$, равным половине величины полезного сигнала.

Если входной сигнал превышает пороговый уровень в 1В, то выносится решение, что во входном сигнале имеется полезный сигнал. Если же входной сигнал равен или меньше $Y_{пор}$, то выносится решение об отсутствии полезного сигнала.

Задача 15.3.

Решить задачу 15.2 для случая, когда используется критерий идеального наблюдателя и дополнительно известно, что отношение априорных вероятностей отсутствия и присутствия полезного сигнала в принятом $\frac{p(0)}{p(a)} = 10$ и среднеквадратическое значение помех ξ равно $\sigma_{\xi} = 0,5B$.

Решение.

При использовании критерия идеального наблюдателя пороговое значение отношения правдоподобия $\lambda_0 = \frac{p(0)}{p(a)}$.

Тогда, приравнивая правую часть полученного выражения для отношения правдоподобия и пороговое значение λ_0, получим следующее выражение для порогового уровня:

$$Y_{пор} = a\left(\frac{1}{\gamma}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(\frac{0,5}{2}\right)^2 \ln 10 + \frac{1}{2}\right] = 1,88B.$$

Задача 15.4.

Решить задачу 15.5 для случая, когда используется критерий Неймана-Пирсона и дополнительно известно, что среднеквадратическое значение помех $\sigma_\xi = 1,25B$ и вероятность ошибки первого рода при принятии решения не должна превышать величины $\varepsilon = 0,05$.

Решение.

Если перейти от переменных λ к переменным Y, то искомое пороговое значение $Y_{пор}$ можно определить из следующего соотношения:

$$\alpha = \int_{Y_{пор}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left(-\frac{Y^2}{2\sigma_\xi^2}\right) dY = \varepsilon .$$

После замены $Y \big/ \sqrt{\sigma_\xi^2} = Z$ получаем уравнение для нахождения $Y_{пор}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{Y_{пор}}{\sigma_\xi}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{1}{2}\left[1 - 2\Phi\left(\frac{Y_{пор}}{\sigma_\xi}\right)\right] = \varepsilon ,$$

где $\Phi\left(\frac{Y_{пор}}{\sigma_\xi}\right)$ – функция Лапласа.

По условию задачи

$$\Phi\left(\frac{Y_{пор}}{\sigma_\xi}\right) = \frac{1}{2} - \varepsilon = 0,45 .$$

По таблицам функций Лапласа находим

$$\frac{Y_{пор}}{\sigma_\xi} = 1,65 ,$$

откуда искомый пороговый уровень

$$Y_{пор} = 1,65\sigma_\xi = 1,65 \cdot 1,25 = 2,06B .$$

Задача 15.5.

На вход приемного устройства поступает смесь полезного гармонического сигнала $x(t) = A\sin\omega_0 t$ с амплитудой $A = 0,4B$ и аддитивной помехи, распределенной по нормальному закону с нулевым средним и среднеквадратическим значением $\sigma = 0,2B$. Произведено два замера входного сигнала $y(t) = x(t) + \xi(t)$ в моменты времени $t_1 = \frac{T_0}{4}$ и $t_2 = \frac{3T_0}{4}$, где $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ − период сигнала $x(t)$. Априорные вероятности значений $x_1 = 0$ и $x_2 = A = 0,4B$ соответственно $p(x_1) = p(x_2) = 0,5$. Найти апостериорные вероятности значений $x_1 = 0$ и $x_2 = A$ после указанных выше замеров.

ТЕМА 16. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Задача 16.1.

Пусть $\mathbf{x}$ — $M \times 1$-векторы, $\mathbf{A}$ — $M \times M$ -матрица. Убедитесь в справедливости формул матричного анализа:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \right) = 2\mathbf{A}\mathbf{x} \ ,$$

$$\nabla_{\mathbf{x}^T} \left(\mathbf{A} \mathbf{x} \right) = \mathbf{A} \ .$$

Задача 16.2.

Пусть линейная модель идентифицируемой модели имеет вид:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{c} + \xi \ ,$$

где

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_N \end{bmatrix}, \ N \times 1\text{-векторы} \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} \ N \times M \text{ -матрица}$$

$\mathbf{c} = \left[c_1, \dots, c_M \right]^T$ — $M \times 1$-искомый вектор.

Показать, что

$$\nabla_c \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\xi} \right) = \mathbf{X}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\xi} \ ,$$

где $\mathbf{G}$ — вещественная $N \times N$ -матрица.

Задача 16.3.

Заданы:

$$\text{матрица } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ вектор } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить МНК-оценку $\hat{\mathbf{c}}$ вектора $\mathbf{c} = [c_1, c_2]^T$ для случаев:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \xi_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сравнить оценки, объяснить результат.

Задача 16.4.

Определить параметры a, b нелинейной модели

$y = ax^b$.

Указание.

Перейти от исходной модели к линейной по параметрам.

Задача 16.5.

Производится оценка амплитуды A сигнала $x(t) = A\sin\omega_0 t$. Время наблюдения $T_{пр} = 2c \gg T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Помехи типа белого шума со спектральной плотностью $C_0 = 0,2мВ^2c$.

Найти, каково должно быть среднее значение параметра $A_{ср}$, чтобы для относительной погрешности оценки A выполнялось равенство:

$$\gamma_\sigma = \frac{\sigma}{A_{ср}} = 0,01.$$

Задача 16.6.

На вход оптимального фильтра Норса поступает сигнал прямоугольной формы длительности τ_0 с амплитудой A. Определить передаточную функцию фильтра при условии, что в канале действует белый гауссов шум.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дадим некоторые общие рекомендации по работе с учебным пособием «Практикум по теории информации». Настоящий практикум тесно связан с ранее изданным учебным пособием «Лекции по теории информации». В частности, названия тем в точности соответствуют названиям лекций. Таким образом, после каждой лекции следует проработать соответствующую тему настоящего практикума.

Не следует начинать решение задач по очередной теме до тех пор, пока не усвоены основные положения соответствующей лекции. Работа облегчается тем, что, в основном, сохранены те же, что и в лекциях, обозначения. Число контрольных задач для самостоятельного решения в каждой теме сравнительно невелико. Большое число задач по курсу «Теория информации» можно найти в комплекте аттестационных педагогических материалов.

В заключение подчеркнем, что приведенные примеры решения не следует слепо копировать. Обычно существует несколько способов решения или, по крайней мере, оформления решения задачи. Нахождение таких оригинальных способов решения и интерпретации найденных решений принесет большую пользу и удовольствие.

Конечно, приведенные здесь задачи носят, в основном, учебный характер. Поэтому используемые модели и исходные данные чрезвычайно просты. Тем не менее рекомендуем результаты решений соотносить с ситуациями, которые могут возникать на практике. При внимательном рассмотрении можно заметить, что многие задачи дают богатую пищу для анализа и интерпретации реальных моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица неприводимых многочленов

n	$a(n)$	$f(x)$	Exp
1	1	$x+1$	1 P
2	1	x^2+x+1	3 P
3	2	x^3+x+1 x^3+x^2+1	7 P 7 P
4	2	x^4+x+1 x^4+x^3+1 $x^4+x^3+x^2+x+1$	15 P 15 P 5
5	6	x^5+x^2+1 x^5+x^3+1 $x^5+x^3+x^2+x+1$ $x^5+x^4+x^3+x+1$ $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ $x^5+x^4+x^2+x+1$	31 P 31 P 31 P 31 P 31 P 31 P
6	6	x^6+x+1 x^6+x^3+1 $x^6+x^4+x^2+x+1$ $x^6+x^4+x^3+x+1$ x^6+x^5+1 $x^6+x^5+x^2+x+1$ $x^6+x^5+x^3+x^2+1$ $x^6+x^5+x^4+x+1$ $x^6+x^5+x^4+x^2+1$	63 P 9 21 63 P 63 P 63 P 63 P 63 P 21
7	18	x^7+x+1 x^7+x^3+1 $x^7+x^3+x^2+x+1$ x^7+x^4+1 $x^7+x^4+x^3+x^2+1$ $x^7+x^5+x^2+x+1$ $x^7+x^5+x^3+x+1$ $x^7+x^5+x^4+x^3+1$	127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P 127 P

n	$a(n)$	$f(x)$	Exp
		$x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$	127 P
		x^7+x^6+1	127 P
		$x^7+x^6+x^3+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^4+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^4+x^2+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^2+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^4+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^4+x^2+x+1$	127 P
		$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1$	127 P
8	16	$x^8+x^4+x^3+x+1$	51
		$x^8+x^4+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^5+x^3+x+1$	255 P
		$x^8+x^5+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^5+x^4+x^3+1$	17
		$x^8+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1$	85
		$x^8+x^6+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^4+x^3+x^2+x+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^3+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^4+1$	255 P
		$x^8+x^6+x^5+x^4+x^2+x+1$	85
		$x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x+1$	85
		$x^8+x^7+x^2+x+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^3+x+1$	85
		$x^8+x^7+x^3+x^2+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^4+x^3+x^2+x+1$	51
		$x^8+x^7+x^5+x+1$	85
		$x^8+x^7+x^5+x^3+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^5+x^4+1$	51
		$x^8+x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$	85
		$x^8+x^7+x^6+x+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^6+x^3+x^2+x^1+1$	255 P
		$x^8+x^7+x^6+x^4+x^2+x+1$	17
		$x^8+x^7+x^6+x^4+x^3+x^2+1$	85

n	$a(n)$	$f(x)$	Exp
		$x^8+x^7+x^6+x^5+x^2+x+1$ $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x+1$ $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^2+1$ $x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+1$	255 P 51 255 P 85
9	48	…	…
10	60	…	…
11	176	…	…
12	144	…	…
13	630	…	…
14	756	…	…
15	1800	…	…
…	…	…	…

Пояснения к таблице:

n – степень многочлена;

$a(n)$ – число примитивных многочленов;

$f(x)$ – неприводимый многочлен;

Exp – минимальное значение L такое, что $x^L - 1$ является делителем $f(x)$.
«P» означает, что многочлен является примитивным.

Примечание:

В таблице приведены коэффициенты для многочленов до 7-ой степени, а также число примитивных многочленов до 15-ой степени.

Для самостоятельного получения значений более высоких степеней рекомендуем воспользоваться материалами, приведенными в [9].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дмитриев, В.И. Прикладная теория информации / В.И. Дмитриев.- М.: Высшая школа, 1989. - 320 с.
2. Кузьмин, И.В. Основы теории информации и кодирования / И.В. Кузьмин, В.А. Кедрус; 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища шк. 1986. - 238 с.
3. Abramson, Norman. Information theory and coding / Norman Abramson. - New York: McGraw-Hill, 1963
4. Adamek, Juri. Foundations of coding / Juri Adamek. - Chichester Wiley, 1991
5. Church, R. Tables of Irreducible Polynomials for the First Four Prime Moduli / R Church; Ann. Math, 1935. - 198-209,.
6. Hamming W. Richard, Coding and Information Theory, Englewood Cliffs / Richard W. Hamming. - Newersey, 1980
7. Raymond, Hill. A First Course in Coding Theory / Hill Raymond; Oxford: Oxford University Press, 1986.
8. Ingels M. Franklin, Information and Coding Theory, Intext Education Publishers / Franklin M. Ingels; Scranton, 1971
9. O'Connor, S. E., Computing Primitive Polynomials / O'Connor, S. E.; A Web Resource, http://seanerikoconnor.freeservers.com/Mathematics/AbstractAlgebra/PrimitivePolynomials/overview.html
10. Weisstein Eric, Primitive Polynomial, From MathWorld / Weisstein Eric; A Web Resource. - http://mathworld.wolfram.com/PrimitivePolynomial.html

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Фурсов Владимир Алексеевич
Козин Никита Евгеньевич

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ
Учебное пособие

Технический редактор С. Н. Х о н и н а
Редакторская обработка А. А. Г н у т о в а
Корректорская обработка Е. С. К о ч е у л о в а
Доверстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 08.11.07. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 5,0.
Тираж 120 экз. Заказ . ИП 93/2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.