

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

*В.Р. КАРГИН, Б.В. КАРГИН*

## МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

*Часть 2*

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 22.03.02 Металлургия

САМАРА

Издательство Самарского университета

2017

УДК 621.77.01 (075)

ББК 34.6я7

К218

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Н. Д. П р о н и ч е в,  
канд. техн. наук, доц. А. П. Б ы к о в

*Каргин, Владимир Родионович*

**К 218** **Механика сплошных сред. Часть 2:** учеб. пособие / *В.Р. Каргин, Б.В. Каргин.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 80 с.

**ISBN 978-5-7883-1160-9**

На современном уровне изложены основные разделы механики сплошных сред: теории упругости и пластичности, применительно к процессам обработки металлов давлением. Теоретический материал иллюстрирован примерами решения соответствующих задач.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 22.03.02 *Металлургия*. Может быть полезно аспирантам, научным и инженерно-технологическим работникам предприятий металлургической и машиностроительной промышленности.

Подготовлено на кафедре обработки металлов давлением.

УДК 621.77.01 (075)

ББК 34.6я7

ISBN 978-5-7883-1160-9

© Самарский университет, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 1. Теория упругости.....</b>	<b>4</b>
1.1. Обобщенный закон Гука.....	4
1.2. Различные формы записи основного закона упругости.....	11
1.3. Удельная потенциальная энергия.....	18
1.4. Постановка задач в теории упругости и способы их решения.....	20
1.5. Частные случаи объемного напряженного состояния...	26
1.6. Выводы.....	33
Задания для самоконтроля.....	35
<b>Глава 2. Теория пластичности.....</b>	<b>37</b>
2.1. Условия перехода металла в пластическое состояние.....	37
2.2. Условие постоянства максимального касательного напряжения.....	39
2.3. Условие постоянства интенсивности напряжений.....	42
2.4. Условие упрочнения.....	49
2.5. Простое и сложное нагружение.....	55
2.6. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации.....	57
2.7. Постулат Друкера.....	59
2.8. Ассоциированный закон течения.....	62
2.9. Теория малых упругопластических деформаций.....	63
2.10. Теория пластического течения.....	67
2.11. Теория Сен-Венана-Леви-Мизеса.....	71
2.12. Выводы.....	73
Задания для самоконтроля.....	75
<b>Рекомендуемый библиографический список.....</b>	<b>78</b>

## ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В основе теории упругости используются следующие гипотезы:

1) перемещения и деформации в каждой точке тела малы; компоненты деформаций выражаются через перемещения и связаны формулой

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right);$$

2) в каждой точке тела главные направления тензора напряжения совпадают с главными направлениями тензора деформации;

3) соответствующие компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны линейными зависимостями:

$$T_{\sigma} = \varphi(T_{\varepsilon}),$$

$$\sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_{cp}),$$

$$D_{\sigma} = \varphi(D_{\varepsilon}).$$

### 1.1. Обобщенный закон Гука

Вы изучили отдельно напряженное и деформированное состояние. Это было возможно только потому, что они выражены с помощью полевых тензоров. Это изучение несет довольно большую информацию, но не дает полной законченности в решении упругой задачи. Дело в том, что основной целью процесса деформирования является установление связи между силами и напряжениями, с одной стороны, и смещениями, деформациями - с другой. Только такая связь позволяет пояснить физическую картину процесса. Первая формулировка закона, связывающего напряжения с деформацией, принадлежит выдающемуся естествоиспытателю, члену Лондонского королевского общества (прототип - наша Академия наук) Роберту Гуку (1653-1703). Он изучал поведение стальной струны, нагруженной грузами, и свой закон упругости вначале представил в следующем виде: "Каково удлинение, такова и сила".

Гук усовершенствовал микроскоп, барометр, зеркальный телескоп, сконструировал ряд других приборов. Он совместно с Гюйгенсом установил постоянные точки термометра (точку таяния льда и точку кипения воды). Гук выступал против теории флогистона ("огненной материи"), исследовал с помощью микроскопа строение

растений. Также широко известен в технике шарнир Гука. Из краткого перечня открытий видна широта и глубина его научных интересов. Кстати, свой закон упругости он открыл при создании пружины для часов, которая используется до настоящего времени.

Закон, названный его именем, был открыт в 1660 г. и опубликован в явном виде в 1678 г. В переводе на современный технический язык содержание, которое вкладывал в свой закон Гук, можно выразить следующим образом: "Деформация упругого тела пропорциональна действующему на него усилию".

Мы же рассматриваем пропорциональность напряжений и деформаций. Ясно, что это более правильное (обобщенное) понятие. Экспериментальные исследования подтвердили, что закон Гука хорошо согласуется с действительностью только при достаточно малых деформациях, где пропорциональность величин не дает больших погрешностей. Дело в том, что в природе не существует обратимых процессов, поэтому физически никакой пропорциональности быть не может. Но даже при малых деформациях закон Гука в простой форме типа  $\sigma = E\varepsilon$  не может дать полной картины того, что происходит в деформируемом теле. Дело в том, что здесь  $\sigma$  и  $\varepsilon$  определяются в направлении действия силы. Другие компоненты деформации в записи не присутствуют. Таким образом, такое выражение является приближенным и применимым для линейного напряженного состояния. В общем случае объемного напряженного состояния мы имеем шесть компонентов тензоров напряжений и деформаций, которые необходимо связать между собой. Другими словами, требуется обобщенный закон Гука. Такой закон создан. В его основе лежит пропорциональность (основная идея Гука), но только не двух, а нескольких величин. И хотя формулировка записи обобщенного закона упругости и его формулировка изменились, но из-за центральной идеи пропорциональности его называют законом Гука. Он формулируется следующим образом: компоненты тензора деформации в данной точке являются линейными и однородными функциями компонент тензора напряжений или наоборот. Математически в тензорной форме его можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} - \text{прямая форма записи,}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \text{обратная форма записи.}$$

Здесь  $S_{ijkl}$  – тензор модулей податливости, а  $C_{ijkl}$  – тензор модулей упругости.

Как мы видим, полевые тензоры напряжений и деформаций связаны материальными тензорами четвертого ранга, которые отражают свойства материала, его строение и симметрию. И если не принимать гипотезы однородности материала, мы должны находить компоненту в каждой точке тела. Но и при принятии однородности имеем практически неразрешимую задачу, так как нужно 81 испытание по определению упругих свойств. Поэтому приходится привлекать дополнительную информацию.

Так, из-за симметрии тензоров напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  деформаций  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  возникает симметрия и материального тензора по двум первым и двум последним индексам, т.е.

$$S_{ijkl} = S_{jikl}, \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}.$$

В результате этого остаются 36 независимых компонент материального тензора, характеризующих анизотропное упругое тело:

$$\begin{array}{cccccc} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2312} & S_{2323} & S_{2331} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3112} & S_{3123} & S_{3131} \end{array}$$

Далее пропорциональность связана с обратимостью процесса упругости, из-за чего возникает еще один тип симметрии, перестановка пар индексов, т.е.  $S_{ijkl} = S_{klij}$  Тогда число независимых

компонентов тензора модулей податливости уменьшится до 21, т.к. коэффициенты, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны между собой. Например, наблюдается следующая связь:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33} + 2S_{1112}\sigma_{12} + 2S_{1123}\sigma_{23} + 2S_{1131}\sigma_{31}.$$

Здесь линейная деформация зависит как от нормальных, так и от касательных напряжений.

Классический подход в теории упругости не позволяет далее уменьшить число независимых компонентов материального тензора. Правда, академик В. Новожилов, исходя из теории инвариантов, показал, что число неизвестных можно свести к 18. Наши исследования установили, что для металлов количество независимых компонент можно свести к 15. В любом случае такое число констант определить не удастся. В связи с этим отходят от классического подхода и смотрят на особенности поведения реальных тел. Так, замечено, что изготавливаемые методом обработки металлов давлением металлические полуфабрикаты – листки, прутки, труб и т.д. – имеют определенную симметрию механических характеристик, что приводит к дальнейшему уменьшению числа коэффициентов. Рассмотрим основные из них.

1. Три полосы симметрии (ортотропное тело, ортогональная анизотропия). Такая симметрия характерна для листовых полуфабрикатов и композиционных материалов, когда армирующие волокна расположены в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В этом случае через каждую точку тела проводят три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии свойств. Образно говоря, это симметрия "спичечного коробка".

Какие упрощения вносит данная симметрия? Оказывается, что при преобразовании компонент материального тензора остаются такие, у которых либо все индексы одинаковы, либо попарно равны. Другими словами, при такой симметрии не может быть компонент типа  $S_{1112}$ ,  $S_{2111}$ ,  $S_{3331}$  и т.д.

Обобщенный закон Гука запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = 2S_{1212}\sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11} + S_{2222}\sigma_{22} + S_{2233}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = 2S_{2323}\sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{3311}\sigma_{11} + S_{3322}\sigma_{22} + S_{3333}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{31} = 2S_{3131}\sigma_{31}.$$

Таким образом, не только уменьшилось число независимых компонент материального тензора до 9, но и удалось отделить линейные величины от сдвиговых.

Для того чтобы использовать уравнения Гука, в расчетах необходимо компоненты материального тензора выразить через технические показатели. В качестве технических показателей здесь используются коэффициенты Пуассона  $\nu_{ij}$  и модуля упругости  $E_i$  разных направлений. Напомним, что коэффициенты Пуассона представляют собой отношение поперечной деформации к деформации вдоль действия сил. Напряженное состояние при испытании образцов для его нахождения - линейное. Например:

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{S_{2211}}{S_{1111}}.$$

Если  $\nu_{ij} = 0$ , то поперечная деформация отсутствует (древесная пробка). Если  $\nu_{ij} = 0,5$ , то поперечная деформация в упругом теле максимальная (резина). Для стали  $\nu_{ij} = 0,25-0,33$ , свинца  $\nu_{ij} = 0,45$ , бетона  $\nu_{ij} = 0,08-0,18$ .

Закон Гука через технические показатели запишется так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{33}; & \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33}; & \varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2G_{23}}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E_3} - \frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_{22}; & \varepsilon_{31} &= \frac{\sigma_{31}}{2G_{31}}, \end{aligned}$$

где  $G_{ij}$  – модули сдвига или модули упругости второго рода.

Напомним, что  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}$  и т.д.

Между отдельными показателями при ортотропном теле имеются взаимосвязи:

$$\varepsilon_2\nu_{21} = \nu_{12}\varepsilon_1; \quad \varepsilon_3\nu_{31} = \nu_{13}\varepsilon_1; \quad \varepsilon_3\nu_{32} = \nu_{23}\varepsilon_2;$$



$$V_{12}V_{23}V_{31} = V_{32}V_{13}V_{21}.$$

Для металлов, как показали наши исследования, число определяемых констант можно снизить до 7, так как для них имеются дополнительные соотношения типа

$$\frac{V_{21}}{V_{12}} = \frac{1 - V_{31}}{1 - V_{32}}.$$

2. Плоскость изотропии – трансверсально-изотропное тело. Здесь через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все свойства эквивалентны (равнозначны).

Примером трансверсально-изотропного тела является круглый профиль, полученный при прессовании. Механические свойства в поперечном сечении одинаковые, но отличаются в продольном направлении. Если в качестве плоской изотропии брать плоскость 1-2, то наблюдается равенство следующих компонент:  $S_{1111} = S_{2222}$ , так как растяжение в 1-м и 2-м направлениях дает одинаковый результат;  $S_{1133} = S_{2233}$  – при растяжении образца, вырезанного в направлении 3, поперечное его сужение в 1-м и 2-м направлениях приводит к одному и тому же результату;  $S_{2323} = S_{3131}$  – поворот вокруг оси 3 равнозначен повороту в направлениях 1 и 2.

Кроме того, из-за наличия плоскости изотропии 1–2 коэффициент, связанный со сдвигом, может быть заменен и через линейные коэффициенты, т.е.

$$2S_{1212} = S_{1111} - S_{2222}$$

Уравнения по закону Гука для трансверсально-изотропного тела запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = (S_{1111} - S_{1122})\sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11} + S_{1111}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = 2S_{2323}\sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{3311}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + S_{3333}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{31} = 2S_{2323}\sigma_{31},$$

или

$$\varepsilon_{11} \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{V_{12}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{V_{13}}{E_3}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{E_2}(1 - \nu_{12})\sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{11} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G_{23}};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{33} - \nu_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{11})]; \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G_{23}}.$$

Таким образом, число независимых компонент материального тензора уменьшается до пяти. Отметим, что для металлов их можно сократить и до трех.

### 3. Полная симметрия - изотропное тело.

Здесь

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333};$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311};$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122}).$$

Тогда

$$\varepsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} (\sigma_{22} + \sigma_{33}); \quad \varepsilon_{12} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{1111} \sigma_{22} + S_{1122} (\sigma_{33} + \sigma_{11}); \quad \varepsilon_{23} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{1111} \sigma_{33} + S_{1122} (\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad \varepsilon_{31} = (S_{1111} - S_{1122}) \sigma_{31}.$$

Таким образом, независимых компонент только две.

Выпишем закон Гука для изотропной среды, переходя к системе декартовых координат и выражая коэффициенты через технические константы:

$$S_{1111} = \frac{1}{E}; \quad S_{1122} = -\frac{\mu}{E};$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y - \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Здесь запись проведена через три показателя -  $\mu$ ,  $E, G$ .

Однако независимых, как уже показано, два показателя. Поэтому имеется связь модуля сдвига с модулем упругости:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Полученные уравнения называют физическими уравнениями теории упругости. Интересно отметить, что происходил спор между двумя группами ученых, которых возглавляли Коши и Пуассон. Группа Коши утверждала, что независимых показателей только два. В правильности их суждений вы убедились сами. Группа Пуассона говорила об одной независимой константе. Но тогда коэффициент Пуассона у всех материалов был бы равен 0,25, а это не соответствует действительности.

## 1.2. Различные формы записи основного закона упругости

Подобно разложению тензоров напряжений и деформаций на шаровой тензор и девиатор, описывающих изменения объема и формы тела, обобщенный закон Гука можно представить в виде двух законов: закона изменения объема и закона изменения формы тела. Относительное изменение объема тела характеризуется объемной деформацией

$$Q = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{cp}$$

Сложим левые и правые части уравнений, отражающих линейные деформации, получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

+

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

+

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

---


$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

или

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_{cp}.$$

Откуда

$$\sigma_{cp} = \frac{E}{3(1-2\mu)} Q.$$

Введем новую упругую постоянную, описывающую объемный модуль:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Тогда

$$\sigma_{cp} = KQ.$$

Это и есть запись закона упругого изменения объема: среднее напряжение прямо пропорционально объемной деформации в окрестности точки. Поэтому считается, что объемная деформация исчезает при нагрузке. Для того чтобы вывести закон упругого изменения формы, нужно получить зависимость девиатора деформаций от девиатора напряжений:

$$\left( \begin{array}{ccc} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2} \nu_{xy} & \frac{1}{2} \nu_{xz} \\ \frac{1}{2} \nu_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2} \nu_{yz} \\ \frac{1}{2} \nu_{zx} & \frac{1}{2} \nu_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{array} \right) = f \left\{ \left( \begin{array}{c} \sigma_x - \sigma_{cp} \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y - \sigma_{cp} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z - \sigma_{cp} \end{array} \right) \right\}$$

Рассмотрим вначале преобразования с первым компонентом девиатора деформаций:

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{cp} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_y - \frac{\mu}{E} \sigma_z + \frac{2\mu-1}{E} \sigma_{cp}.$$

Добавим и вычтем из этого уравнения выражение  $\frac{\mu}{E} \sigma_{cp}$ .

Тогда

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{cp} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_x - \frac{2\mu-1}{E} \sigma_{cp} - 3\frac{\mu}{E} \sigma_{cp}$$

или

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{cp} = \frac{1+\mu}{E} (\sigma_x - \sigma_{cp}) = \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_{cp}),$$

откуда

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}).$$

Аналогично можно получить и другие уравнения:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}); \quad \tau_{xy} - 2G\frac{1}{2}v_{xy};$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}); \quad \tau_{yz} - 2G\frac{1}{2}v_{yz};$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}); \quad \tau_{zx} - 2G\frac{1}{2}v_{zx}.$$

Окончательно имеем следующую взаимосвязь девиаторов напряжений и деформаций:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}v_{xy} & \frac{1}{2}v_{xz} \\ \frac{1}{2}v_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}v_{yz} \\ \frac{1}{2}v_{zx} & \frac{1}{2}v_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{pmatrix}$$

В сокращенном виде

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon.$$

Это и есть запись закона упругого изменения формы тела: девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформаций в окрестности точки.

Рассмотрим физический смысл модулей упругости.

Если объемный модуль  $K$  определяет сопротивление конкретного материала при изменении объема, то модуль сдвига  $G$

определяет сопротивление материала при изменении его формы, а модуль упругости  $E$  – сопротивление материала формы.

Путем вычитания можно получить следующие уравнения в главных осях:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 &= 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_1 &= 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_1).\end{aligned}\tag{1}$$

Из уравнений (1) следует, что

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Запишем интенсивность напряжений в главных осях:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

В этой записи изменим разность напряжений по формулам (30), получим

$$\sigma_i = E \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Так как  $2G = \frac{E}{(1 + \mu)}$ , а для изотропного тела  $\mu = 0,5$ , то

$$\sigma_i = E \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Окончательно

$$\sigma_i = E\varepsilon_i.$$

При упругой деформации интенсивность напряжений прямо пропорциональна интенсивности деформаций. Аналогично можно получить зависимости интенсивности касательных напряжений  $T$  от интенсивности деформаций сдвига:

$$T = G\Gamma,$$

октаэдрических касательных напряжений от октаэдрической угловой деформации:

$$\tau_{окт} = G\nu_{окт}.$$

Установим связь между направляющими тензорами напряжений и деформаций в главных осях:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_{cp}}{\tau_{окт}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2 - \sigma_{cp}}{\tau_{окт}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3 - \sigma_{cp}}{\tau_{окт}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_{cp})}{G\nu_{окт}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_{cp})}{G\nu_{окт}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_{cp})}{G\nu_{окт}} \end{pmatrix}$$

Откуда направляющий тензор напряжений равен направляющему тензору деформаций, т.е.

$$\overline{D}_\sigma = \overline{D}_\varepsilon.$$

Найдем уравнения обобщенного закона Гука в обратной форме, когда напряжения выражены через деформации. Возьмем первое уравнение закона Гука в прямой форме и опять вычтем и прибавим выражение

$$\frac{\mu\sigma_x}{E}. \text{ Получим}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1+\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Так как

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\mu}Q,$$

то

$$\varepsilon_x = \frac{1+\mu}{E} \sigma_x - \frac{\mu}{1-2\mu} Q,$$

Полученное уравнение решим относительно напряжения  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)} Q.$$

Полученные коэффициенты при  $\varepsilon_x$  и  $Q$  принимаем за новые упругие постоянные – коэффициенты Ляме:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}, \quad 2G = \frac{E}{1+\mu}.$$

Аналогично можно получить зависимости и для других составляющих напряжения. Окончательно шесть уравнений закона Гука в обратной форме можно записать так:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda Q + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda Q + 2G\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda Q + 2G\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2)$$

В тензорной записи

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, обобщенный закон Гука может быть представлен в различных формах записи: в виде прямого и обратного выражения, в виде законов изменения объема и формы тела.

**Задача 1.** Определить относительные линейные и угловые деформации, если в исследуемой точке задан тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 40 & 0 & -16 \\ 0 & -40 & 12 \\ -16 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

и другие константы:  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $G = 7,7 \cdot 10^4$  МПа.

**Решение.** Для нахождения компонент деформаций используем уравнения закона Гука в прямой форме. Коэффициент Пуассона найдем из формулы



$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

откуда

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^5} - 1 = 0,3.$$

Линейная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [40 - 0,3(-40 + 20)] = 2,3 \cdot 10^{-4}.$$

Аналогично находятся и другие компоненты деформаций.

**Задача 2.** Стальная деталь нагружена и замерены следующие упругие деформации:

$$\varepsilon_x = 0,001, \varepsilon_y = 0,002, \varepsilon_z = 0,003, \gamma_{xy} = 0,0015, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Найти напряженное состояние детали, если  $E = 2,1$  МПа,  $\mu = 0,33$ .

**Решение.** Для нахождения компонент тензора напряжений используем запись закона Гука в обратной форме. Вначале находим коэффициенты Ляме:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,33}{(1-2 \cdot 0,33)(1+0,33)} = 1,53 \cdot 10^5.$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1+0,33)} = 7,9 \cdot 10^4.$$

Объемная деформация

$$Q = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,001 + 0,002 + 0,003 = 0,006.$$

Компоненты напряжения

$$\sigma_x = \lambda Q + 2G\varepsilon_x = 1,53 \cdot 10^5 \cdot 0,006 + 2 \cdot 7,9 \cdot 10^4 \cdot 0,001 = 1080 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 7,9 \cdot 10^4 \cdot 0,0015 = 120 \text{ МПа}.$$

Аналогично находятся и другие компоненты тензора напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1080 & 120 & 0 \\ 120 & 1250 & 0 \\ 0 & 0 & 1400 \end{pmatrix}$$

### 1.3. Удельная потенциальная энергия

В процессе упругой деформации тела внешние силы совершают работу, которая накапливается в деформированном объеме в виде потенциальной энергии. После прекращения действия внешних сил потенциальная энергия полностью расходуется на упругое восстановление первоначального объема и формы тела. Следовательно, при упругой деформации работа внешних сил равна работе внутренних сил, или потенциальной энергии.

При одноосном растяжении удельная работа упругой деформации, отнесенная к единице объема, определяется площадью, заштрихованной на рис. 1, а.

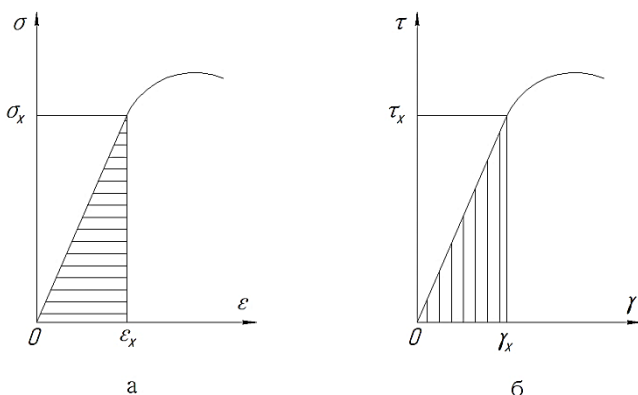


Рис. 1

Откуда

$$A = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x.$$

Аналогично удельная работа при чистом сдвиге (рис. 1, б)

$$A = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}.$$

Используя принцип независимости действия сил при упругой деформации (принцип суперпозиции сил), полная удельная работа для элементарного параллелепипеда, расположенного в окрестности исследуемой точки, равна половине скалярного произведения составляющих компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$A = W = 0,5(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

В сокращенной форме записи

$$W = \frac{1}{2} T_{\sigma} T_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

или, если развернуть, то

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Подобно разложению тензора второго ранга на шаровой тензор и девиатор потенциальную энергию  $W$  упругой деформации тела можно представить в виде суммы потенциальной энергии изменения объема  $W_0$  и изменения формы  $W_{\phi}$ , т.е.

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Эти составляющие можно записать так:

$$W_0 = \frac{1}{2} T_{\sigma}^0 T_{\sigma}^0,$$

$$W_{\phi} = \frac{1}{2} D_{\sigma} D_{\varepsilon}.$$

Эти равенства могут быть записаны тоже в развернутой форме. Энергию, соответствующую изменению формы, находим вычитанием:

$$W_{\phi} = W - W_0. \quad (3)$$

Удельная потенциальная энергия в главных осях

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (4)$$

Подставим в (4) вместо деформаций их значения из обобщенного закона Гука в прямой форме. Получим

$$W = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right].$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема в главных осях

$$W_0 = \frac{1}{2E} \sigma_\phi Q = \frac{1}{6} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

В этом уравнении также деформации заменим их значениями из обобщенного закона Гука в прямой форме. Имеем

$$W_0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Подставим найденные значения  $W_\phi$ ,  $W_0$  в (4). Получим

$$W_\phi = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$

#### 1.4. Постановка задач в теории упругости и способы их решения

При постановке статистических задач для упругой изотропной среды имеем следующую замкнутую систему 15 уравнений, полученных ранее. Их можно свести в отдельные группы.

Три статистических уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

Шесть кинематических (геометрических) уравнений связи деформаций с перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

Сюда относят и шесть уравнений совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{in}}{\partial x_j \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_n} = 0. \quad (7)$$

Шесть физических уравнений

$$\sigma_{ij} = \lambda Q \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}. \quad (8)$$

Граничные условия на поверхности тела

$$S_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Эти уравнения содержат 15 переменных, характеризующих напряженно-деформированное состояние упругого изотропного тела и перемещения его точек: шесть напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ,

шесть деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  и, наконец, три перемещения  $U_x, U_y, U_z$ .

Решения указанной выше системы уравнений должны выполняться всюду внутри объема тела. Кроме того, на поверхности, ограничивающей тело, должны быть удовлетворены и граничные условия. Они могут быть либо статистическими (поверхностные напряжения в каждой точке поверхности тела (рис. 2, а), либо кинематическими (рис. 2, б), либо смешанными (на части поверхности тела задаются перемещения, а на остальной части поверхности - напряжения (рис. 2, в).

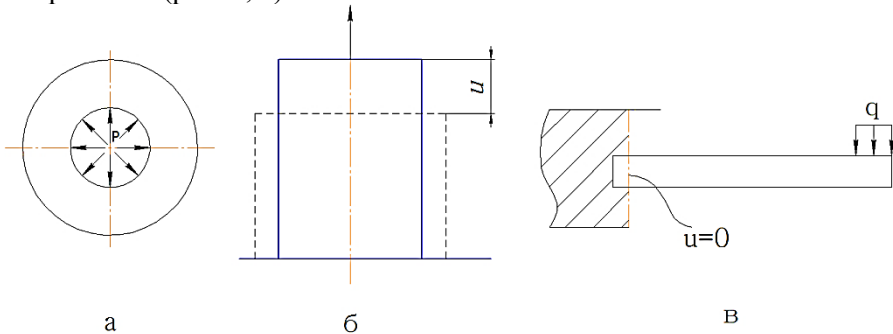


Рис. 2

Условия на поверхности тела могут быть сведены к трем случаям:

1) на поверхности тела заданы нагрузки и не наложено ограничений на перемещения; этот случай называется первой основной задачей упругости;

2) на поверхности тела заданы перемещения всех точек поверхности; этот случай называется основной задачей теории упругости;

3) на одной части поверхности тела заданы нагрузки, а на другой – перемещения; это – смешанная задача упругости.

При решении статических задач также задаются упругие константы материала:  $E, \mu, G$ .

Различают прямую, обратную и полуобратную задачи теории упругости. В прямой задаче граничные условия заданы, а требуется определить поле напряжений, деформаций и перемещений во всем объеме деформируемого тела. В обратной задаче в объеме тела заданы

перемещения (деформации) или напряжения и требуется определить все остальные перемещения, входящие в систему основных уравнений теории упругости, в том числе и граничные условия. В полуобратной задаче, предложенной Сен-Венаном, частично заданы одновременно перемещения и напряжения, а требуется определить все остальные перемещения. На практике чаще всего встречаются с прямой задачей теории упругости. Известны два основных пути ее решения: в перемещениях или в напряжениях.

При решении задач теории упругости в перемещениях в качестве основных неизвестных переменных принимаются три перемещения:

$U_x, U_y, U_z$ . Для их нахождения используются три уравнения равновесия, записанные через перемещения.

Рассмотрим первое выражение из уравнений равновесия (5):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Вначале в уравнения закона Гука в обратной форме подставим выражения деформаций через перемещения:

$$\sigma_x = \lambda Q + 2G\varepsilon_x = \lambda Q + 2G \frac{\partial U_x}{\partial x},$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right).$$

После подстановки полученных выражений компонент напряжений получим

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + G \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} \right) + G \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \right) = 0$$

или

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Выражение в первой скобке обозначим через  $\nabla^2 U_x$  :

$$\nabla^2 U_x = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2},$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа. Сумма во второй скобке является объемной деформацией. Тогда

$$(\lambda + G) \frac{\partial Q}{\partial x} + G \nabla^2 U_x = 0.$$

Аналогично преобразовав и два других уравнения равновесия (5) и сделав указанные замены, окончательно получим систему, называемую уравнениями Ляме:

$$(\lambda + G) \frac{\partial Q}{\partial x} + G \nabla^2 U_x = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial Q}{\partial y} + G \nabla^2 U_y = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial Q}{\partial z} + G \nabla^2 U_z = 0.$$

Эти уравнения можно рассматривать как синтез уравнений статического равновесия (5), геометрических (6) и физических (7) уравнений.

При решении задач теории упругости в перемещениях интегрируется система уравнений Ляме, причем появляющиеся при этом произвольные функции определяются легче всего из кинематических граничных условий на поверхности тела. Далее по геометрическим уравнениям связи деформаций с перемещениями находятся компоненты тензора деформаций, а с помощью уравнений обобщенного закона Гука, заданного в обратной форме, и компоненты тензора напряжений. В этом методе решения уравнения совместности деформаций использовать нет необходимости, так как они выполняются автоматически.

При решении задач теории упругости в напряжениях в качестве основных неизвестных переменных принимают шесть напряжений:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , Для их нахождения прежде всего установим некоторые положения. Продифференцируем уравнения Ляме по соответствующей координате и сложим их между собой:

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + G \nabla^2 \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + G \nabla^2 \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + G \nabla^2 \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0,$$

$$(\lambda + G) \nabla^2 Q + G \nabla^2 Q = 0$$

или

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 Q = 0.$$

Так как первый множитель не равен нулю, то, следовательно

$$\nabla^2 Q = 0.$$

Так как по закону Гука величины  $Q$  и  $\sigma_{cp}$  пропорциональны, то

$$\nabla^2 \sigma_{cp} = 0$$

или

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

Для отыскания шести напряжений  $\sigma_{ij}$  трех уравнений равновесия недостаточно. Поэтому к ним добавляют шесть уравнений совместности деформаций Сен-Венана (7), выраженные через напряжения

Рассмотрим первое уравнение из (7):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Подставим в него выражения деформаций из уравнений закона Гука в прямой форме

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}.$$



Получим

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu \sigma_z - \mu \sigma_x) = \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

или

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (9)$$

Теперь исключим из полученного равенства касательное напряжение  $\tau_{xy}$ .

С этой целью возьмем уравнения равновесия (5) и продифференцируем их соответственно по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0.$$

Складывая 2 первых равенства и вычитая из суммы третье, решаем полученное уравнение относительно  $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$ .

Подставим это выражение в уравнение (9). После преобразования получим

$$\nabla^2 \sigma_x + \nabla^2 \sigma_y - \mu \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \sigma_{cp}}{\partial z^2} = 0.$$

Прибавим и вычтем  $\nabla^2 \sigma_z$ :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - (1+\mu) \nabla^2 \sigma_z - \frac{\partial^2 \sigma_{cp}}{\partial z^2} = 0.$$

Уже доказано, что

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \nabla^2 \sigma_{cp} = 0.$$

Окончательно получаем

$$(1 + \mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z^2} = 0.$$

Остальные пять уравнений, содержащих только напряжения, выводят аналогично:

$$(1 + \mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial x^2} = 0, \quad (1 + \mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial x\partial y} = 0,$$

$$(1 + \mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial y^2} = 0, \quad (1 + \mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial y\partial z} = 0,$$

$$(1 + \mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z^2} = 0, \quad (1 + \mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z\partial x} = 0.$$

Эти соотношения называют уравнениями Бельтрами-Митчела.

При решении задач теории упругости в напряжениях интегрируются три уравнения равновесия и шесть уравнений Бельтрами-Митчела. Произвольные функции определяются из граничных условий. В результате решения получают искомые функции компонент напряжений. Далее по формулам закона Гука в прямой форме находят компоненты деформаций, а по формулам Коши – перемещения.

### 1.5. Частные случаи объемного напряженного состояния

При объемном напряженном состоянии определение поля напряжений или деформаций часто оказывается ложным. Это вынуждает вводить во многих практических задачах ряд допущений относительно распределения напряжений или деформаций, т.е. переходить от объемного напряженного состояния к частным случаям.

Частными случаями объемного напряженного состояния, весьма часто встречающимися при обработке металлов давлением, являются плоское напряженное, плоское деформированное и осесимметричное напряженное состояния.

Плоское напряженное состояние реализуется приближенно для тонкой пластины, у которой один основной размер значительно меньше, чем другие (рис. 3). По контуру пластины действуют силы, распределенные равномерно по ее толщине и параллельные плоскости пластины. В этом случае компоненты напряжений, содержащие

индексы  $y, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ , равны нулю на обеих плоских поверхностях пластины и можно предположить, что они отсутствуют по всей толщине пластины. Изменение толщины пластины не имеет значения, и толщина ее может быть принята за единицу. Три другие компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  будут постоянными по всей толщине пластины.

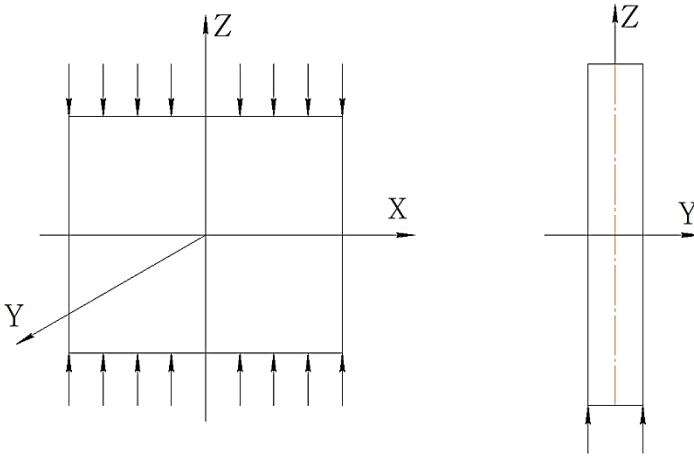


Рис. 3

Тензор напряжений имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Деформации происходят в пластине по всем трем осям и описываются тензором деформации:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Из записи тензоров следует, что ось  $y$  является главной: напряжение  $\sigma_y = 0$  – одним из главных напряжений;  $\varepsilon_y$  – главная деформация.

Величину других главных напряжений можно найти из решения определителя:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 = 0.$$

Откуда при  $\sigma_2 = 0$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия упрощаются:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0.$$

Зависимости деформаций от перемещений следующие:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}.$$

Из шести условий неразрывности деформаций остается только одно, первое:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}.$$

Остальные обращаются тождественно в нуль. Физические уравнения при упругой деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_z); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x);$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z); \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$

Условия на поверхности контура пластины:

$$S_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y;$$

$$S_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y.$$

Эти уравнения содержат восемь переменных

$$\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}, \varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}, U_x, U_z.$$

Плоское напряженное состояние в процессах обработки металлов давлением может быть, например, во фланце при вытяжке цилиндрической заготовки из листового материала, при волочении и обжиме тонкостенных труб.

Плоское деформированное состояние приблизительно реализуется для тела, у которого один основной размер значительно больше, чем другие (рис. 4). В этом случае деформация в направлении оси, параллельной большему диаметру, будет мала и ею можно пренебречь. В процессах обработки металлов давлением примерами плоского деформированного состояния являются прокатка широких тонких листов, когда ширина листа остается постоянной (прокатка без уширения), брус, подвергающийся осадке в направлении толщины. В этих примерах перемещения всех точек тела параллельны одной и той же плоскости.

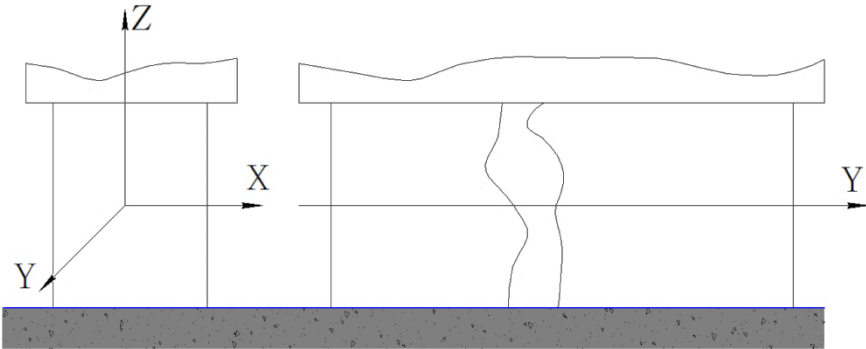


Рис. 4

Из определения плоской деформации  $\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_x = 0$ . Тогда тензор деформации имеет вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Напряженное состояние описывается тензором напряжений, состоящим из трех компонентов:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Уравнения равновесия и геометрические уравнения записываются, как при плоском напряженном состоянии.

Физические уравнения при плоской упругой деформации описываются законом Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

Из последнего уравнения при  $\mu = 0,5$   $\sigma_z = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$ .

Таким образом, плоское напряженное и плоское деформированное состояния характеризуются следующими особенностями:

- все компоненты напряжений не зависят от одной из координат, общей для всех компонентов, и остаются постоянными при ее изменении;

- в плоскостях, нормальных к оси этой координаты, компоненты касательных напряжений равны нулю, а нормальное напряжение равно нулю при плоском напряженном состоянии или равно полусумме двух других нормальных напряжений при плоском деформированном состоянии.

Из рассмотрения плоского напряженного и плоского деформированного состояний видно, что несмотря на ряд общих формул для описания обеих плоскостей, они значительно отличаются друг от друга. При плоском напряженном состоянии в направлении главной оси нормальное напряжение равно нулю, но обязательно есть главная деформация. При плоском деформированном состоянии, наоборот, деформация равна нулю, а обязательно существует нормальное напряжение, перпендикулярное к плоскости деформации.

Осесимметричное напряженное состояние реализуется для тела вращения, к поверхности которого приложены распределенные нагрузки, расположенные симметрично относительно его оси и одинаковые во всех меридиональных сечениях (рис. 5).

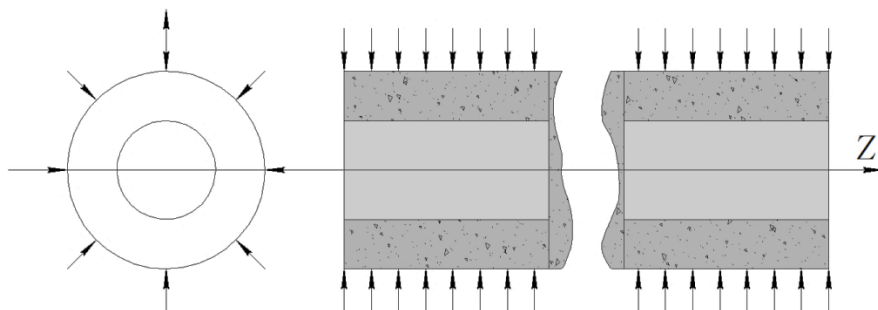


Рис. 5

При рассмотрении процессов обработки металлов давлением, таких как осадка цилиндрической заготовки, прессование и волочение прутков и труб, а также деформация круглой тонкостенной трубы, находящейся под равномерным наружным или внутренним давлением, от объемного напряженного состояния можно перейти к осесимметричному.

При анализе осесимметричного напряженного состояния удобнее пользоваться цилиндрическими координатами вместо декартовых.

Вследствие симметрии тела и симметрии внешних сил направления всех радиусов равноправны. Следовательно, составляющие напряжений не зависят от угла  $Q$ , а касательные напряжения и угловые деформации, содержащие индекс  $Q$ , будут равны нулю.

Напряжение  $\sigma_\rho$  – главное напряжение,  $\varepsilon_\rho$  – главная деформация.

Тензоры напряжений и деформаций имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\rho & \tau_{\rho z} \\ 0 & \tau_{\rho z} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\rho & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из трех уравнений равновесия в цилиндрических координатах остаются только два:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\rho}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial \rho} = 0.$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}; \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial U_\rho}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial \rho}.$$

Физические уравнения:

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\rho)]; \quad \gamma_{\rho z} = \frac{1}{G} \tau_{\rho z}.$$

При решении плоской задачи в напряжениях вместо определения трех функций  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  достаточно определить одну так называемую функцию напряжений  $\varphi(x, z)$ , посредством которой дифференцированием определяют все искомые функции:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}. \quad (10)$$

Функция называется функцией напряжений Эри, а распределение напряжений (10) удовлетворяет уравнениям равновесия (5), обращая их в тождества. Условие совместности (7) превращается в бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = 0$$



или

$$\nabla^4 \varphi = 0,$$

к решению которого и сводится плоская задача в теории упругости в напряжениях.

В случае решения задачи в полярных координатах компоненты напряжений и условие совместности можно представить в виде выражений

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right),$$

$$\Delta^2 (\Delta^2 \varphi) = 0$$

или

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0.$$

Если напряжения распределены симметрично относительно оси, то  $\varphi = \varphi(\rho)$  имеет вид полинома

$$\varphi = A \ln \rho + B \ln^2 \rho + C \rho^2 + D,$$

где A, B, C, D – постоянные, определяемые из заданных граничных условий на контуре.

Исходя из этого, можно найти напряжения в толстостенных цилиндрах с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  при наличии внутреннего  $p_1$  и внешнего  $p_2$  давлений:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{array} \right\} = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \pm \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) \rho^2}.$$

## 1.6. Выводы

Цель теории упругости – определить поле перемещений, деформаций и напряжений при любых нагрузках на границе тела любой формы. Для решения поставленной задачи теория упругости располагает тремя статическими уравнениями равновесия, шестью геометрическими уравнениями, связывающими деформации с перемещениями, и шестью физическими уравнениями, определяющими зависимость между напряжениями и деформациями,

справедливыми для каждой точки внутри упругого тела. Приведенные уравнения составляют замкнутую систему 15 уравнений с 15 переменными, полностью описывающими напряженно-деформированное состояние тела. Решение приведенной системы уравнений должно выполняться для любой точки внутри тела и соответствовать конкретным заданным граничным условиям.

Основным законом теории упругости является обобщенный закон Гука, связывающий деформации с напряжениями  $\varepsilon_{ij} = S_{ijlm} \sigma_{lm}$  и, наоборот, напряжения с деформациями  $\sigma_{ij} = S_{ijlm} \varepsilon_{lm}$ .

Закон может быть представлен в виде прямого и обратного выражений и в виде законов упругого изменения объема и формы.

В теории упругости различают прямую и обратную задачи. В прямой задаче заданы размеры и форма тела, материал, граничные условия. Искомыми являются 15 переменных, описывающих процесс упругой деформации. В обратной задаче, кроме размеров, формы тела и материала, задана часть переменных, например, компоненты деформаций. Искомыми являются все остальные переменные, в том числе и граничные условия. Для инженера наибольший интерес представляет прямая задача, несмотря на то, что она сложнее обратной.

Известны два основных пути решения прямой задачи. Первый путь состоит в использовании системы уравнений, выраженных через напряжения. В эту систему входят три уравнения равновесия и шесть уравнений совместности деформаций, выраженных через напряжения. Такой путь решения, поскольку в нем в первую очередь находятся напряжения, называется решением задачи теории упругости в напряжениях. Второй путь решения прямой задачи состоит в том, что в качестве неизвестных функций принимают проекции векторов перемещений. Для их нахождения применяют уравнения равновесия, выраженные через перемещения. Отсюда произошло название пути решения - решение задачи теории упругости в перемещениях.

При решении задач теории упругости для трехмерных тел встречаются большие математические трудности. Это обстоятельство заставляет переходить от объемного напряженного состояния к частным случаям: плоскому напряженному состоянию, плоскому деформированному состоянию и осесимметричному напряженному состоянию.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Запишите закон Гука для упругой изотропной среды в прямой форме.
2. Что такое ортотропное упругое тело? Каким числом независимых упругих постоянных характеризуется это тело?
3. Что такое трансверсально-изотропное тело? Каким числом независимых упругих постоянных характеризуется это тело?
4. Дайте определение коэффициента Пуассона.
5. Какой физический смысл имеют объемный модуль упругости  $K$ , модуль упругости  $E$ , модуль сдвига  $G$ ?
6. Охарактеризуйте идеально упругое твердое тело.
7. Запишите системы уравнений теории упругости для изотропного тела.
8. Что такое граничные условия?
9. Какие виды граничных условий вы знаете?
10. Дайте вывод уравнений Ляме.
11. В чем сущность метода решения задач теории упругости в перемещениях?
12. Дайте вывод уравнений Бельтрами.
13. В чем сущность метода решения задач теории упругости в напряжениях?
14. Опишите прямую и обратную задачи теории упругости.
15. Сформулируйте постановку задач в теории упругости.
16. Перечислите все переменные, подлежащие определению при решении задач теории упругости.
17. Запишите тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженного и плоского деформированного состояний изотропного тела.
18. Запишите уравнения обобщенного закона Гука для плоского напряженного и плоского деформированного состояний изотропного тела.
19. Что такое функция напряжений Эри? Решением какого уравнения она является?
20. Дайте определение удельной потенциальной энергии при упругой деформации.
21. Чему равна удельная работа упругой деформации при одноосном растяжении и чистом сдвиге?

22. Как рассчитать удельную работу упругой деформации для элементарного параллелепипеда, расположенного в окрестности исследуемой точки?

23. Запишите уравнения для расчета удельной потенциальной энергии изменения объема в главных осях.

24. Как найти удельную потенциальную энергию изменения формы для упругого тела?

25. Как найти по заданной функции напряжения Эри компоненты тензора напряжений?

26. Что представляет собой осесимметричное напряженное состояние?

27. Как записываются тензоры напряжений и деформаций для осесимметричного напряженного состояния?

28. В каких процессах обработки металлов давлением реализуются схемы плоского напряженного и плоского деформированного состояний?

29. Какие основные задачи теории упругости вы знаете?

30. Закон упругого изменения объема.

31. Закон упругого изменения формы.

32. Как связаны между собой при упругой деформации интенсивность напряжений и деформаций, интенсивность касательных напряжений и степень деформации сдвига, октаэдрические касательные напряжения с октаэдрическими угловыми деформациями?

33. Как получить уравнения закона Гука в обратной форме, используя уравнения закона Гука в прямой форме?

34. Показать, что при упругой деформации выполняется условие  $\overline{D}_\sigma = \overline{D}_\varepsilon$ .

35. Перечислить величины, характеризующие свойства упругих тел.

## ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Изучению напряжений, деформаций и перемещений в пластически деформируемых телах посвящен раздел механики сплошных сред, называемый теорией пластичности. Теория пластичности решает главным образом те же задачи, что и теория упругости, но для материалов с другими физическими свойствами. Поэтому между указанными теориями имеется много общего. В частности, общими являются уравнения равновесия, геометрические уравнения, уравнения совместности деформаций. Только вместо обобщенного закона Гука, используемого в теории упругости, в теории пластичности применяются другие физические соотношения.

### 2.1. Условия перехода металла в пластическое состояние

Начало пластических деформаций является следствием перехода от одной формы устойчивого равновесия в атомной решетке зерна к другой. При линейном напряженном состоянии, например при растяжении, можно считать, что пластическое состояние наступает тогда, когда нагрузка вызывает нормальные напряжения, равные пределу текучести  $\sigma_T$ . Если по мере деформации металл упрочняется, то для дальнейшего развития пластической деформации необходимо увеличить напряжение, величина которого определяется кривой упрочнения. Если упрочнение отсутствует, то пластическая деформация протекает при постоянном напряжении. Отсюда следует, что возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями.

Теперь требуется перенести эти рассуждения и на случай трехмерного (объемного) напряженного состояния. Сделать это значительно сложнее. Дело в том, что напряженное состояние в рассматриваемой точке описывается шестью компонентами тензора напряжений –  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ . Количество возможных комбинаций напряжений, при которых тело переходит в пластическое состояние, является бесконечным. Точная форма поверхности раздела упругих и пластических деформаций неизвестна. В связи с этим приходится прибегать к гипотезам по переходу тела в пластическое состояние, а поверхность раздела строить на основе гипотез. Эти гипотезы и

соответствующие уравнения, которые являются их математической формулировкой, называют критериями (условиями) пластичности.

К ним предъявляются следующие требования:

1. Критерий пластичности должен иметь форму инварианта, так как характеризуется уравнением состояния тела, которое выражает некоторый физический закон. А это значит, что в это уравнение в качестве независимых переменных должны входить инварианты.

2. В уравнение критерия пластичности, помимо компонентов тензора напряжений, должны входить компоненты материального тензора, характеризующие механические свойства металла и определяющие возникновение пластических деформаций при простейших напряжённых состояниях.

3. Критерий пластичности должен быть действительным для любых элементарных объемов металла, находящихся в произвольном объёмном напряжённом состоянии.

Исходя из вышеприведённых требований для изотропного металла, критерий пластичности не должен зависеть от направлений и может быть представлен в виде функции инвариантов девиатора напряжений:

$$F[I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K,$$

где  $K$  – постоянная пластичности.

Как показывают опыты, при всестороннем равномерном растяжении или сжатии пластические деформации не возникают. Поэтому критерий пластичности можно представить как функцию только второго и третьего инвариантов девиатора напряжений:

$$F[I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K.$$

Если известны главные нормальные и максимальные касательные напряжения,

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K$$

или

$$F(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}) = K.$$

Из многочисленных предложенных в разное время критериев пластичности наибольшее применение в обработке металлов давлением получили условия Треска и Мизеса. Рассмотрим их более подробно той исторической последовательности, как они появились.

## 2.2. Условие постоянства максимального касательного напряжения

Французский инженер Треска в 1868 г., основываясь на собственных опытах по истечению металла через отверстия, впервые высказал предположение (гипотезу) о том, что в момент начала пластической деформации во всех точках деформируемой среды максимальные касательные напряжения имеют одно и то же значение для данного металла, т.е.

$$|\tau_{\max}| = K.$$

Несколько позднее французский ученый Сен-Венан в 1871 г. дал математическую формулировку этого условия для плоской деформации.

Если  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = K.$$

При линейном напряжённом состоянии  $\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , откуда постоянная текучести  $K = 0,5\sigma_T$ .

В объёмном случае условие Треска можно записать:

$$\begin{aligned} 2|\tau_{12}| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T, \\ 2|\tau_{23}| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_T, \\ 2|\tau_{31}| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_T. \end{aligned} \quad (11)$$

Если все три условия выполняются со знаком неравенства, то металл находится в упругом состоянии. Чтобы металл находился в состоянии текучести, в одном или двух из этих уравнений должен быть знак равенства.

Окончательное условие Треска можно сформулировать следующим образом. *Переход тела из упругого состояния в пластическое не зависит от вида напряжённого состояния и происходит тогда, когда по крайней мере одно или два касательных напряжений достигают максимального значения, определяемого только механическими свойствами металла.*

Из уравнений (11) вытекает следующее соотношение между пределом текучести при сдвиге  $\tau_T$  :

$$2\tau_T = \sigma_T.$$

В трехмерном пространстве главных нормальных напряжений условие Треска интерпретируется поверхностью пластичности, представляющей собой правильную шестигранную призму бесконечной длины, ось которой равнонаклонена к трем главным осям (рис.6), т.е.  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .

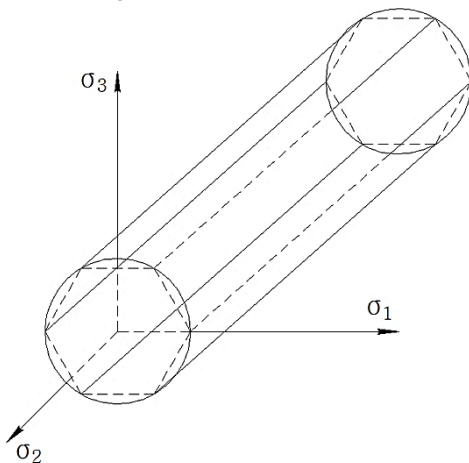


Рис. 6

Так как поверхность пластичности описывается тремя уравнениями, то она ограничена шестью попарно параллельными плоскостями. Поскольку возникновение пластических деформаций определяется не величиной главных нормальных напряжений, а их разностью, длина призмы не ограничена. Если точка, изображающая напряжённое состояние в главных осях, находится внутри призмы, то материальная частица металла деформируется упруго. Когда изображающая точка попадает на поверхность призмы, в частице металла возникает пластическая деформация.

При плоском напряженном состоянии ( $\sigma_2 = 0$ ) уравнения (11) принимают вид



$$\begin{aligned}
 |\sigma_1| &\leq \sigma_T, \\
 |\sigma_3| &\leq \sigma_T, \\
 |\sigma_3 - \sigma_1| &\leq \sigma_T.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

На плоскости  $\sigma_1\sigma_3$  эти уравнения определяют шестиугольник (рис. 7).

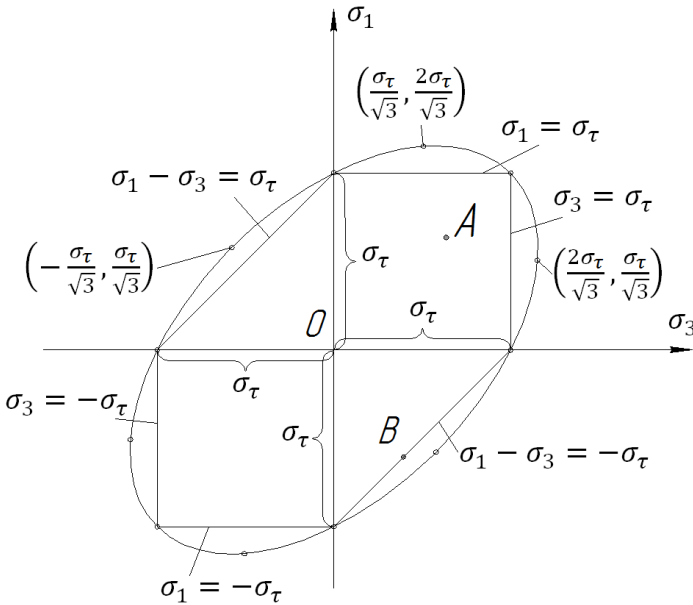


Рис. 7

Если точка  $A$ , изображающая напряжённое состояние, находится внутри шестиугольника, частица металла деформируется упруго. Если точка  $B$  лежит на контуре шестиугольника, в частице возникает пластическая деформация. В соответствии с условиями при линейном напряженном состоянии шестиугольник отсекает на осях координат отрезки, равные  $\sigma_T$ .

При плоском деформированном состоянии  $\sigma_2$  всегда является средним главным нормальным напряжением  $\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$  и из трех уравнений (11) остается одно:

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T. \quad (13)$$

В произвольных осях, если ось z совпадает с главной осью, условие пластичности имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2. \quad (14)$$

Условие пластичности Треска-Сен-Венана в общем удовлетворительно характеризует наступление пластического состояния металла и согласуется с наблюдениями по линиям Людерса-Чернова.

### 2.3. Условие постоянства интенсивности напряжений

В объёмных задачах использование условия Треска в виде трех уравнений наталкивается на большие математические трудности. Часто нелегко установить заранее, какое из трех касательных напряжений достигает максимального значения, а также учесть влияние среднего главного напряжения. Эти обстоятельства привели немецкого ученого Мизеса в 1913 г. к гипотезе об описании вокруг шестигранной призмы в координатах  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  кругового цилиндра (рис. б), уравнение которого имеет вид

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T. \quad (15)$$

Уравнение (15) отличается от второго инварианта девиатора напряжений  $I_2(D_\sigma)$ , интенсивности касательных напряжений  $T$ , октаэдрического касательного напряжения только постоянным множителем. Поэтому условие пластичности Мизеса носит в литературе несколько наименований: «условие постоянства интенсивности напряжений», «условие постоянства интенсивности

касательных напряжений», «условие постоянства октаэдрического касательного напряжения».

Условие пластичности Мизеса инвариантно к преобразованию координат. Оно учитывает влияние среднего главного напряжения на условие перехода упругой деформации в пластическую. Третий инвариант девиатора напряжений не оказывает влияния на наступление пластического состояния.

Если главные напряжения в каком-либо элементе тела таковы, что они определяют точку, лежащую на поверхности цилиндра (рис. б), то элемент металла будет находиться в пластическом состоянии. Если главные нормальные напряжения в элементе таковы, что они определяют точку, лежащую внутри цилиндра, то элемент будет находиться в упругом состоянии. Так как количество точек на поверхности цилиндра бесконечно большое, то существует неограниченное количество комбинаций величин главных напряжений, удовлетворяющих условию (15).

В дальнейшем выяснилось, что раньше Мизеса это условие как условие прочности было предложено польским ученым Губером в 1904 г. Позднее Генки в 1923 г. заметил, что левая часть условия Губера имеет простой физический смысл, соответствуя с точностью до постоянного множителя удельной энергии упругого изменения формы тела:

$$W_{\phi} = \frac{1 + \mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (16)$$

Откуда получаем условие пластичности Мизеса (15). Таким образом, пластическая деформация тела начинается тогда, когда запас удельной энергии упругого изменения формы достигает определённой для данных условий величины независимо от схемы напряжённого состояния. Поэтому условие Мизеса в отличие от вышеприведенных часто называют энергетическим условием пластичности или уравнением Губера-Мизеса-Генки.

Приняв при плоском напряжённом состоянии в произвольных осях  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , уравнение (15) примет вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2. \quad (17)$$

В главных осях выражение (17) запишется так:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2.$$

Приняв при плоском деформированном состоянии в произвольных осях  $\sigma_z = 0,5(\sigma_x - \sigma_y)$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , уравнение (15) примет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_T^2. \quad (18)$$

В главных осях при  $\sigma_2 = \sigma_{cp}$  выражение (18) запишется так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T = \pm 2\tau_T = 2k, \quad (19)$$

откуда  $\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}$ .

Сравнивая (13) и (19), видим, что для плоского деформированного состояния рассмотренные условия пластичности совпадают, но по Треска  $\tau_T = 0,5\sigma_T$ , а по Мизесу  $\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}$ .

Рассмотрим графики условий начала пластических деформаций по критериям Мизеса и Треска для плоского напряженного состояния.

Уравнение (17) описывает эллипс с центром в начале координат  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (см. рис. 7). Условия пластичности Треска описывают шестиугольник. В точках с координатами  $(0, \sigma_T)$ ,  $(\sigma_T, 0)$ ,  $(0, -\sigma_T)$ ,  $(-\sigma_T, 0)$  критерии пластичности Мизеса и Треска совпадают. Эти точки соответствуют линейному напряженному состоянию растяжения или сжатия. Другие четыре точки на эллипсе

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T, \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \right), \left( \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T, \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T \right), \\ \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T, -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \right), \left( -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T \right)$$

соответствуют плоскому напряженному и плоскому деформированному состояниям. В этих точках критерии Треска и Мизеса отличаются друг от друга на 15 %. В точках

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T, \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \right),$$

соответствующих чистому сдвигу, критерии отличаются друг от друга примерно на 8 %.

Таким образом, рассматриваемые критерии пластичности Треска и Мизеса близки друг к другу. Мизес считал условие Треска точным, а свое – приближенным. Однако многочисленные эксперименты показали, что условие Мизеса выполняется в состоянии текучести для поликристаллических металлов лучше, чем условие Треска.

**Задача 3.** Напряженное состояние в исследуемой точке изотропного тела задано в виде тензора напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 200 \\ 0 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Принимая  $\sigma_T = 800$  МПа, по критерию пластичности Мизеса выяснить, в каком состоянии находится исследуемая частица металла.

**Решение.** По формуле (15) находим

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(100-300)^2 + (300-200)^2 + (200-100)^2 + 6(100^2 + 200^2)} =$$

$$= 600 \text{ МПа} < 800 \text{ МПа}.$$

Исследуемая частица тела находится в упругом состоянии.

**Задача 4.** Найти внутреннее давление, при котором в толстостенной трубе зарождается пластическая деформация.

**Решение.** Согласно условию постоянства максимального касательного напряжения для плоского деформированного состояния

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \sigma_T;$$

у внутренней поверхности  $\sigma_\theta$  достигает наибольшего значения:

$$\sigma_{\theta(\rho=r_1)} = P_1 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Радиальное напряжение при этом равно  $P_1$ . Тогда

$$P_1 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + P_1 = \sigma_T.$$

откуда

$$P_1 = \frac{\sigma_T}{1 + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}}.$$

Использование энергетического условия пластичности в полной форме (15) приводит к большим математическим трудностям, связанным с его нелинейностью. Например, при плоской по напряжениям осесимметричной задаче уравнение статического равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0.$$

Чтобы решать его совместно с условием пластичности, желательно, чтобы условие пластичности было выражено в виде разности  $\sigma_\rho - \sigma_\theta$ . Однако условие пластичности имеет вид

$$(\sigma_\theta - \sigma_\rho)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 = 2\sigma_T^2$$

или

$$\sigma_\theta^2 + \sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta = \sigma_T^2.$$

Для облегчения решения задач используют запись условия пластичности через разность главных напряжений. Покажем это.

Запишем показатель вида напряженного состояния Лодэ-Надаи:

$$v_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}.$$

Разрешим его относительно среднего напряжения

$$\sigma_2 = \nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (20)$$

Энергетическое условие пластичности в главных осях напряжений имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Подставим в него выражение (20). Получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (3 + \nu_\sigma^2) = 4\sigma_T^2,$$

откуда

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

Это уравнение запишем в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_T, \quad (21)$$

где  $\beta$  – коэффициент Лоде,

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

Если среднее главное нормальное напряжение равно одному из крайних, т.е.  $\sigma_2 = \sigma_1$  или  $\sigma_2 = \sigma_3$ , то  $\beta = 1$ , а условие (21) принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T,$$

т.е. совпадает с условием пластичности Треска-Сен-Венана. Максимальную величину коэффициент  $\beta$  имеет при плоском деформированном состоянии, когда

$$\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3), \nu_\sigma = 0, \beta = 2/\sqrt{3} = 1,155 \text{ (рис. 8).}$$

В этом случае

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T = 1,155\sigma_T$$

и разница между обоими условиями пластичности наибольшая. Как видно, эта наибольшая разница невелика, т.е. влияние  $\sigma_2$  на переход из упругого состояния в пластическое несущественно.

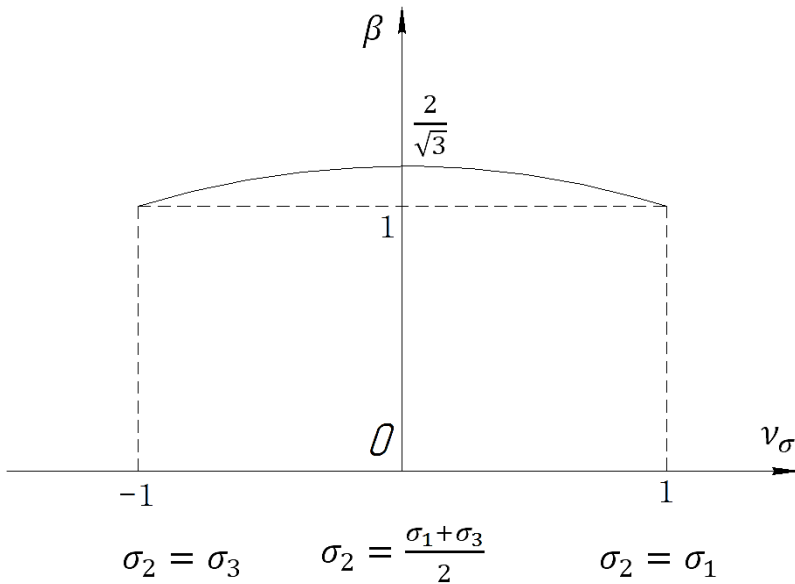


Рис. 8

Энергетическое условие пластичности часто используют при расчетах процесса обработки металлов давлением в виде (21), где  $\frac{2}{\sqrt{3}} \geq \beta \geq 1$ . Если принять максимальное значение  $\beta$ , то (21) можно рассматривать как приближенную запись энергетического условия пластичности.

Использование условия пластичности в упрощенной линейной форме записи (21) не дает однозначного решения, так как не всегда известно точное значение  $\beta$ .

Однако отдельные задачи, в частности осесимметричное деформирование тонкостенных оболочек, удастся решить, если использовать параметрическое представление условия пластичности Мизеса.

Рассмотрим вначале случай изотропного тела. Как показал А. Надаи, энергетическое условие пластичности изотропного тела

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$



геометрически интерпретируется эллипсом с углом наклона осей  $45^\circ$  и может быть записано, как всякое управление эллипса, в параметрической форме:

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos \psi,$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos \left( \psi - \frac{\pi}{3} \right),$$

где  $\psi$  – функция, через которую выражены напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Пределы изменения этой функции устанавливаются исходя из знаков действующих напряжений или, другими словами, из условий конкретной задачи.

Так при

$$\sigma_1 > 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 < 0 \quad \frac{3}{2} \pi \leq \psi \leq \frac{11}{6} \pi.$$

Аналогично можно установить, что

при

$$\sigma_1 < 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 < 0 \quad \frac{5}{6} \pi \leq \psi \leq \frac{3}{2} \pi,$$

при

$$\sigma_1 > 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 > 0 \quad -\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

и, наконец, при

$$\sigma_1 < 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 > 0 \quad \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{5}{6} \pi.$$

## 2.4. Условие упрочнения

Пластическая деформация приводит к упрочнению металла, предел его текучести повышается (рис. 9). Если образец растягивать из начального состояния, то при  $\sigma_1 = \sigma_T$  в образце возникает пластическая деформация  $\varepsilon_A^{\text{II}}$ . Произведем нагружение образца до точки  $A$ , а затем полную его разгрузку до точки  $N$ . Если теперь вновь

растягивать образец из упрочненного состояния, то нагружение будет совпадать с прямой  $NA$ . Пластическая деформация возникает в образце в точке  $A$ , когда соблюдается условие  $\sigma_1 = \sigma_A$ . В связи с этим  $\sigma_T$  называют начальным, а  $\sigma_A$  – текущим пределом текучести при линейном напряженном состоянии.

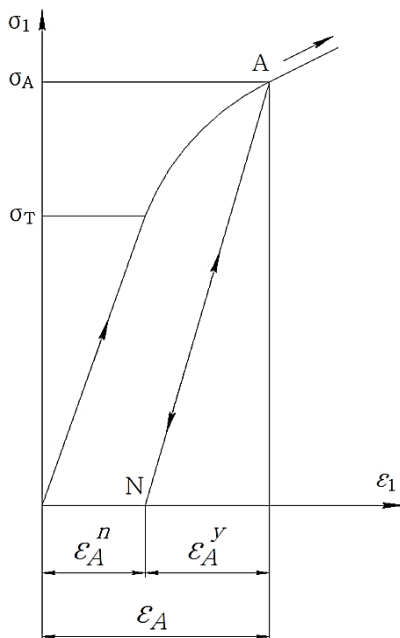


Рис. 9

Текущий предел текучести зависит от предыдущей пластической деформации и позволяет легко различать при одноосном растяжении *нагружение*, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией, и *разгрузку*, происходящую чисто упруго.

Если по достижении точки  $A$  приращение напряжения  $d\sigma_1$  таково, что  $\sigma_1 > \sigma_A$ , произойдет нагружение, а если  $\sigma_1 < \sigma_A$ , то произойдет разгрузка.

При переходе к сложному напряженному состоянию рассматривают *поверхность нагружения* (рис. 10). В шестимерном пространстве напряжений  $\sigma_{ij}$  уравнение поверхности текучести  $\Sigma_T$  является границей области.

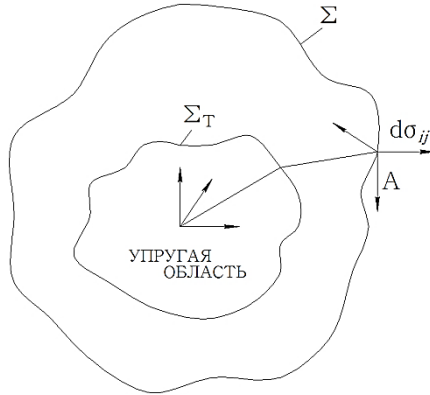


Рис. 10

Если точка, изображающая напряженное состояние, лежит внутри области, ограниченной  $\Sigma_T$ , частица ведет себя как упругое тело. Если точка находится на поверхности текучести  $\Sigma_T$ , в частице возникают пластические деформации. Граница  $\Sigma_T$  представляет собой выпуклую поверхность совокупности пределов текучести для всевозможных напряженных состояний. Начало координат соответствует нулевым напряжениям.

С увеличением пластической деформации по мере развития упрочнения поверхность нагружения  $\Sigma$ , совпадающая в начальном (неупрочненном) состоянии с поверхностью текучести  $\Sigma_T$ , расширяется и смещается.

Допустим, что в точке  $A$  пластически деформируемого упрочняемого тела напряжения  $\sigma_{ij}$  получили приращения  $d\sigma_{ij}$ . Если вектор  $d\sigma_{ij}$  направлен наружу к поверхности нагружения  $\Sigma$ ,

происходит нагружение частицы. Если же вектор  $d\sigma_{ij}$  направлен внутрь поверхности нагружения  $\Sigma$ , то происходит разгрузка. Если вектор  $d\sigma_{ij}$  лежит в касательной плоскости к поверхности нагружения  $\Sigma$ , в частице произойдут нейтральные изменения, сопровождающиеся упругими деформациями.

Рассмотрим некоторые простые формы поверхности нагружения.

*Изотропное упрочнение.* В этом случае упрочнение материала происходит одинаково во всех направлениях и не зависит от среднего напряжения  $\sigma_{cp}$ . Тогда поверхность нагружения можно задать в виде

$$F[J_2(D_\sigma), J_3(D_\sigma)] = \varphi(q), \quad (22)$$

где  $\varphi(q)$  – возрастающая положительная функция,  $q$  – параметр упрочнения, характеризующий предыдущую деформацию.

Если предположить, что условие (22) содержит только второй инвариант девиатора напряжений, то условие (22) запишем в виде

$$\sigma_i = \varphi(q).$$

Оно представляет собой круговую цилиндрическую поверхность, равнонаклоненную к главным осям. В процессе пластической деформации радиус поверхности увеличится и в зависимости от выбора параметра  $q$  можно получить различные текущие поверхности нагружения.

Особый интерес представляет случай, когда в качестве меры упрочнения принимается величина достигнутой интенсивности деформацией  $\varepsilon_i$  (*деформационная гипотеза упрочнения*):

$$\sigma_i = E'(\varepsilon_i)\varepsilon_i, \quad (23)$$

где  $E'(\varepsilon_i)$  – некоторая характерная для данного металла функция, иногда называемая *модулем пластичности*.

Если в координатах  $\sigma_i, \varepsilon_i$  построить кривую, то для упругого и пластического состояний получим одну и ту же зависимость для различных напряженных состояний, называемую *единой кривой* (рис. 11).

Здесь  $E'$  – модуль пластичности,

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \text{ – упругая область,}$$

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i \text{ – пластическая область.}$$

Разница между  $E$  и  $E'$  состоит в том, что  $E$  – величина постоянная (константа материала), а  $E'$  – величина переменная, зависящая от упрочнения, температуры, скорости деформации и т.п.

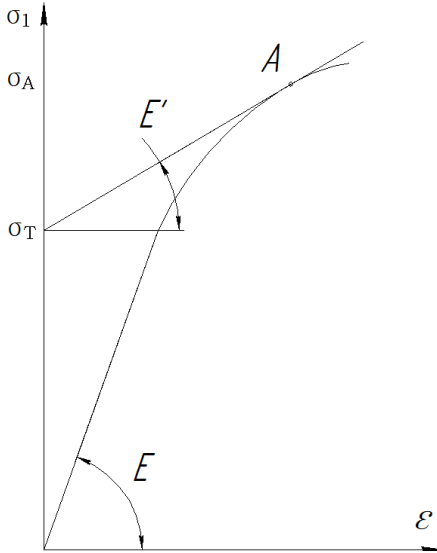


Рис. 11

За меру упрочнения  $q$  иногда берут накопленную пластическую деформацию или так называемый параметр Удквиста:

$$q = \int d\varepsilon_i^n,$$

где  $d\varepsilon_i^n$  – интенсивность приращения пластических деформаций.

В главных осях  $d\varepsilon_i^n$  имеет вид

$$d\varepsilon_i^n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1^n - d\varepsilon_2^n)^2 + (d\varepsilon_2^n - d\varepsilon_3^n)^2 + (d\varepsilon_3^n - d\varepsilon_1^n)^2}.$$

За меру упрочнения  $q$  может быть принята и удельная работа пластической деформации частицы (энергетическая гипотеза упрочнения) на всем пути пластического деформирования:

$$q = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n .$$

Энергетическое условие упрочнения является более общим, чем предыдущее условие, и подтверждается опытами для более широкого класса нагружения. Однако оно не учитывает деформационной анизотропии и может быть использовано лишь для сравнительно несложных путей нагружения.

При изотропном упрочении поверхность нагружения равномерно расширяется, оставаясь подобной самой себе. Эффект Баушингера при этом не описывается, поскольку  $\sigma_T$  в прямом  $OA^+$  и обратном  $OA^-$  направлениях нагружения одинаковы по величине (рис. 12, а).

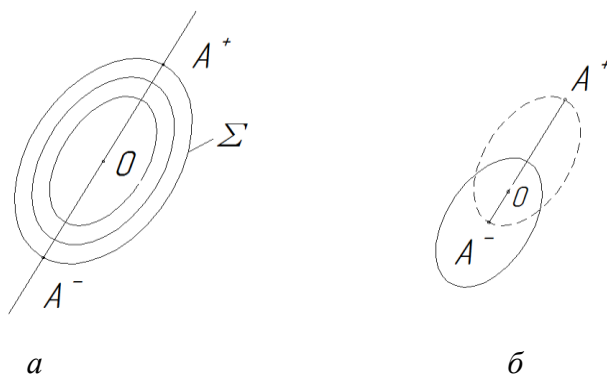


Рис. 12

*Трансляционное упрочнение.* Поверхность нагружения испытывает жесткое смещение в направлении деформирования (рис. 12, б). Сплошная линия – начальное положение, пунктирная – положение после деформации. Если теперь вновь нагрузить металл, то  $\sigma_T$  в направлении предыдущей деформации ( $OA^+$ ) возрастает – произошло упрочнение. В обратном направлении ( $OA^-$ )  $\sigma^T$  падает

(произошло разупрочнение). Эта схема качественно описывает эффект Баушингера.

Уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = K,$$

где  $a_{ij}$  – координаты центра поверхности нагружения.

Наиболее простой вариант выбора  $a_{ij}$ : линейное упрочнение

$$a_{ij} = c \mathcal{E}_{ij}^n,$$

где  $c$  – положительная константа, характерная для данного материала;  $\mathcal{E}_{ij}^n$  – компоненты пластической деформации.

*Перенос и расширение.* Комбинация двух предыдущих случаев приводит к более полной схеме нагружения, т.е.

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q).$$

Это уравнение удовлетворительно описывает упрочнение металла в довольно широких границах изменения пути нагружения.

## 2.5. Простое и сложное нагружение

Нагружение частицы называется простым, если все компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  или внешние силы возрастают от начального состояния пропорционально одному параметру, т.е.

$$\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^o$$

где  $\sigma_{ij}^o$  – постоянный тензор;  $\lambda$  – переменный скалярный параметр.

В противном случае нагружение называется сложным. Примерами простого нагружения в  $P + M$  - опытах являются лучи  $OA$  и  $OB$ , примерами сложного нагружения траектории –  $OC, OM_1N, OP_1D$  (рис. 13).

При простом нагружении коэффициент Лодэ-Надаи  $\nu_\sigma$ , положение главных осей  $T_\sigma$  не меняется в процессе нагружения.

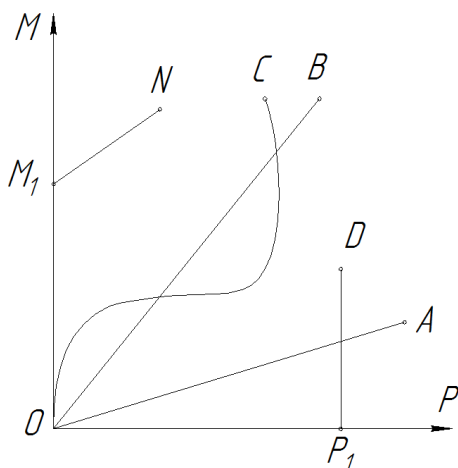


Рис. 13

А.А. Ильюшин разработал теорему о простом нагружении. Для того чтобы во всех точках несжимаемого тела, нагружаемого внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру, нагружение было простым, достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^m,$$

где  $A$  и  $m$  – характеристики металла.

При простом нагружении в каждой точке тела

$$v_\sigma = v_\varepsilon = \text{const.}$$

Это справедливо для тела любой формы, при любом количестве и любых направлениях внешних сил.

Для упругого тела последовательность его нагружения внешними силами какой-либо роли не играет, так как имеет место однозначное соответствие между напряженным и деформированным состояниями независимо от того, каким образом они созданы. В упругопластических телах ситуация оказывается принципиально отличной. Для упругопластического тела существенен не только характер напряженного состояния в его точке, но и путь, по которому оно было создано. В зависимости от этого может значительно меняться деформированное состояние в одних и тех же точках тела.



Это наглядно видно при простом растяжении (рис. 14). Одному и тому же напряжению  $\sigma_T^*$  могут соответствовать деформации  $00_1, 00_2, 00_3$  и т.д.

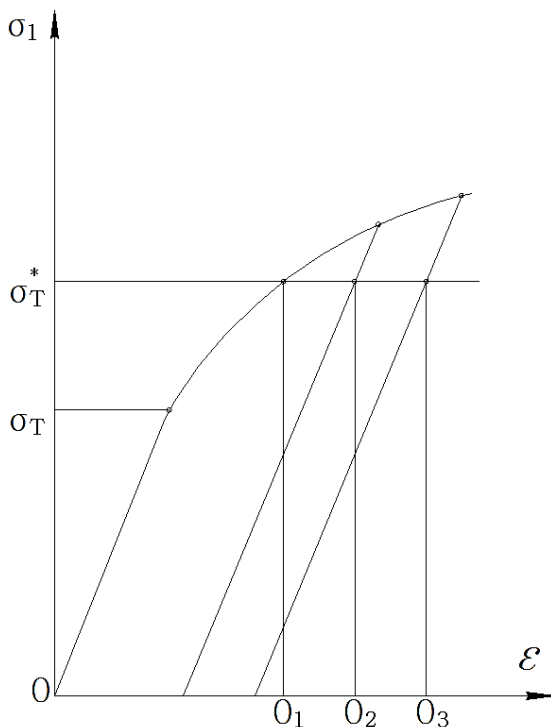


Рис. 14

## 2.6. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации

При определении технологических параметров обработки металлов давлением, связанных с точностью получения формы, необходимо знать, как поведет себя материал после снятия всех внешних сил, т.е. знать характер его разгрузки. Теоретический анализ точностных параметров проводится на основе теоремы о разгрузке А.А. Ильюшина.

Рассмотрим одноосное растяжение образца и его разгрузку (рис. 15).

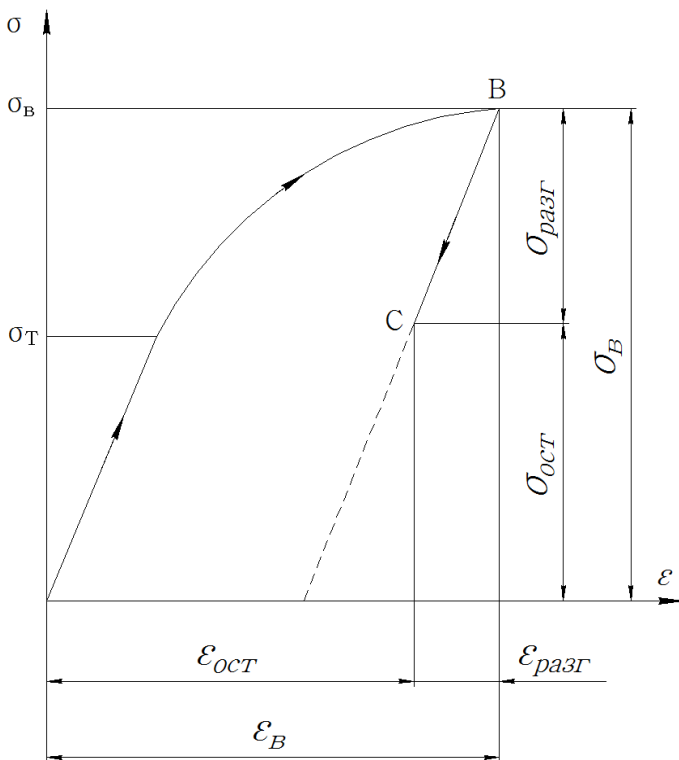


Рис. 15

Предположим, что в растянутом образце в точке  $B$  возникло напряжение  $\sigma_B$ . Причем  $\sigma_B > \sigma_T$ . Этому напряжению соответствует деформация  $\varepsilon_B$ . Если теперь частично разгрузить образец на  $\sigma_{разг}$ , то в образце останутся остаточные напряжения  $\sigma_{ост} = \sigma_B - \sigma_{разг}$ . Напряжению  $\sigma_{ост}$  соответствует деформация  $\varepsilon_{ост} = \varepsilon_B - \varepsilon_{разг}$ .

Как показывает опыт, если при разгрузке тело подчиняется закону Гука, то  $\varepsilon_{разг}$  можно определить по формуле

$$\varepsilon_{разг} = \sigma_{разг} / E.$$

Таким образом, при вычислении остаточных деформаций необходимо из полной деформации, соответствующей наибольшему напряжению, вычесть упругую деформацию, соответствующую значению напряжения, на величину которого уменьшилось наибольшее напряжение.

А.А. Ильюшин распространил эту закономерность и на случай сложного напряженного состояния для определения остаточных деформаций, напряжений или перемещений частиц тела. Теорема о разгрузке звучит так.

Перемещения точек тела, а также деформации и напряжения в определенный момент разгрузки равны разностям между их значениями в момент начала разгрузки и упругими перемещениями, деформациями, напряжениями, которые возникли бы в ненагруженном теле под действием внешних сил, равных разностям нагрузок до и после разгрузки.

Для технологических расчетов наиболее важно следствие из теоремы. При полном снятии внешних сил для определения остаточных перемещений, деформаций, напряжений нужно решить пластическую задачу для данных внешних сил, а также для этих же сил решить упругую задачу. Затем взять разность этих решений.

Допустим, что при нагружении тела были достигнуты напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Тогда после полной разгрузки, когда все внешние силы уменьшаются до нуля, в теле будут остаточные напряжения  $\sigma_{ij}^{oct}$  и остаточные деформации  $\varepsilon_{ij}^{oct}$ , равные

$$\sigma_{ij}^{oct} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*,$$

$$\varepsilon_{ij}^{oct} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*,$$

где  $\sigma_{ij}^*$  и  $\varepsilon_{ij}^*$  – напряжения и деформации, которые являются решением задачи теории упругости для тела, нагруженного внешними силами, соответствующими моменту начала разгрузки.

## 2.7. Постулат Друкера

Согласно постулату Друкера в цикле нагружения – разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели пластические деформации. Покажем это.

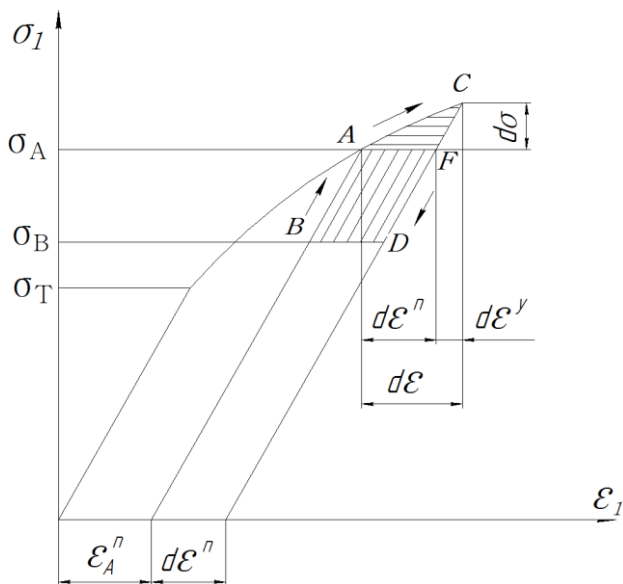


Рис. 16

Произведем простое нагружение образца до точки  $A$  ( $\sigma_A > \sigma_T$ ), затем разгрузку его до точки  $B$  (рис. 16). Это состояние примем за начальное. Далее произведем нагружение по линии  $BA$ . Точка  $A$  лежит на кривой упрочнения, так что ей соответствует начало пластического состояния. Из точки  $A$  произведем бесконечно малое догружение на величину  $d\sigma$  до точки  $C$ , вызывающее приращение пластической деформации  $d\varepsilon^n$ . Наконец, произведем разгрузку до начального напряжения  $\sigma_B$  в точке  $D$ . Удельная работа пластической деформации в цикле нагружения – разгрузки  $BACD$  равна сумме площадей параллелограмма и криволинейного треугольника  $ACF$ , следовательно

$$\begin{aligned}
 (\sigma_A - \sigma_B) d\varepsilon^n &> 0, \\
 d\sigma d\varepsilon^n &> 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Таким образом, за цикл нагружения и разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу на вызванных ими деформациях. В (24) входят только приращения пластической деформации, так как работа добавочных напряжений на приращениях упругой деформации в замкнутом по нагружению цикле равна нулю.

В случае объемного напряженного состояния напряжения в начальном состоянии в точке  $B$  обозначим через  $\sigma_{ij}^o$  (рис. 17).

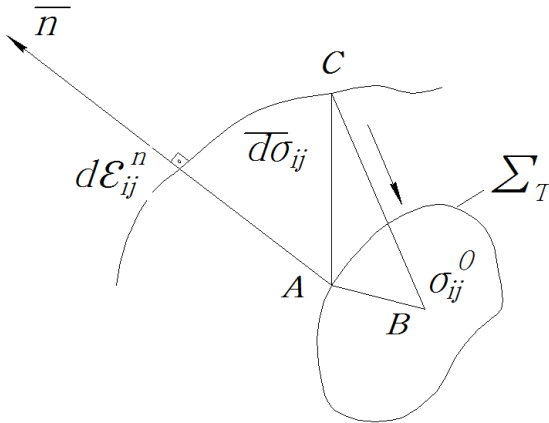


Рис. 17

Произведем нагружение в упругой области по линии  $BA$ . Точка  $A$  лежит на поверхности  $\Sigma_T$ , соответствующей началу пластического течения. Из точки  $A$  произведем бесконечно малое догружение  $d\sigma_{ij}$  до точки  $C$  (вектор  $\overline{AC}$ ), что вызовет пластическую деформацию  $d\varepsilon_{ij}^n$ . Вернемся теперь в точку  $B$ . Согласно постулату Друкера за весь цикл нагружения и разгрузки  $BACB$  добавочные напряжения  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^o$  и  $d\sigma_{ij}$  выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^o) d\varepsilon_{ij}^n &> 0, \\ d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n &> 0. \end{aligned}$$

Из постулата Друкера следует, что поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращение пластических деформаций,  $d\varepsilon_{ij}^n$  направлен по нормали к ней.

## 2.8. Ассоциированный закон течения

Как только возникают пластические деформации, определяющие уравнения теории упругости перестают быть верными. В силу того что пластическая деформация зависит от истории нагружения материала, в теории пластичности соотношение между напряжениями и деформациями очень часто формулируется через приращения деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^y + d\varepsilon_{ij}^n .$$

Для вывода уравнений, связывающих приращения компонент деформации с компонентами напряжений, применяется ассоциированный закон течения.

Компоненты приращения пластической деформации являются функциями компонент напряжений. Поэтому приращение работы пластической деформации  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n$  также является функцией компонент напряжений. Однако они не являются независимыми, так как удовлетворяют условию пластичности  $F(\sigma_{ij}) = K$ . Поэтому условие максимума функции приращения работы пластической деформации  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n$  по способу множителя Лагранжа запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n - d\lambda F) = 0 ,$$

где  $d\lambda$  – множитель Лагранжа. Отсюда следует:

$$d\varepsilon_{ij}^n = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (25)$$

Это соотношение является математическим выражением ассоциированного (с условием пластичности) закона течения.

Поясним полученный результат геометрически. Из соотношения (24) следует, что скалярное произведение двух векторов  $(\overline{\sigma_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}^o})$  и  $d\varepsilon_{ij}^n$  положительно, т.е. угол между ними острый (рис. 18).

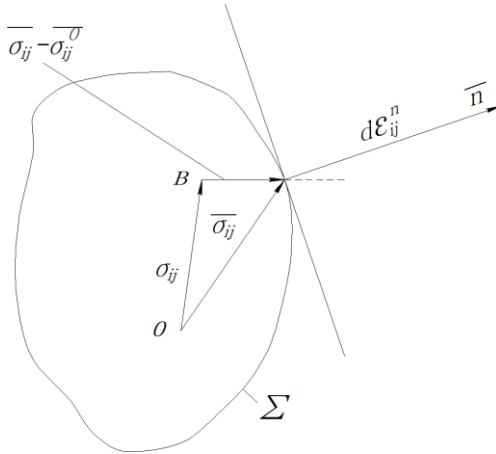


Рис. 18

Так как точка  $B$  может быть взята по обе стороны от вектора  $\overline{\sigma_{ij}}$ , то поверхность нагружения  $\Sigma$  выпукла, а вектор приращения пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^n$  направлен по нормали к поверхности нагружения. Только при выполнении этих двух условий угол между векторами  $\overline{\sigma_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}^o}$  и  $d\varepsilon_{ij}^n$  будет острым.

Поскольку направляющие косинусы нормали к поверхности пропорциональны частным производным от уравнения поверхности по координатам, приходим к соотношению (25).

## 2.9. Теория малых упругопластических деформаций

Эта теория разработана А.А. Ильюшиным. Она устанавливает связь между напряжениями и деформациями и применима при условии простого нагружения. Деформации являются достаточно малыми, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь.

Кроме того, деформации являются упругопластическими, когда в одних частях тела возникают только упругие, в других – пластические деформации.

В основе теории лежат следующие гипотезы:

1. Объемная деформация элемента тела всегда является упругой и связана со средним напряжением такой же зависимостью, как и при упругой деформации:

$$\sigma_{cp} = K\theta \text{ или } \sigma_{cp} = 3K\varepsilon_{cp}.$$

Часто твердое тело полагают несжимаемым, тогда

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{cp} = 0.$$

2. Девиаторы напряжений и деформаций совпадают с точностью до постоянного множителя (подобны между собой)  $\psi$ :

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon$$

В развернутом виде:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}), \tau_{xy} = \psi \frac{1}{2} \gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}), \tau_{yz} = \psi \frac{1}{2} \gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}), \tau_{zx} = \psi \frac{1}{2} \gamma_{zx}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим параметр  $\psi$  через интенсивности напряжений и деформаций  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{\psi}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \psi \frac{3}{2} \varepsilon_i, \end{aligned}$$

откуда

$$\psi = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}.$$



После подстановки связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}.$$

Это и есть физические уравнения теории малых упругопластических деформаций. Они играют такую же роль, как уравнения обобщенного закона Гука. Но в отличие от последних, они являются нелинейными.

Когда пластически деформированное тело предполагается несжимаемым, то уравнения примут вид

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_{cp}), \quad \gamma_{xy} = 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_y - \sigma_{cp}), \quad \gamma_{yz} = 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz},$$

$$\varepsilon_z = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} (\sigma_z - \sigma_{cp}), \quad \gamma_{zx} = 3 \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{zx}.$$

3. Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  является для заданного материала вполне определенной функцией от интенсивности деформаций  $\varepsilon$ ;  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ .

Вид этой функции определяется механическими свойствами материала и не зависит от характера напряженного состояния. Функция  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  действительна как для упругой, так и пластической области (гипотеза единой одной кривой). Кривую  $\sigma_i = E(\varepsilon_i)$  строят на основании опытных данных при простом растяжении.

Теория располагает:

тремя дифференциальными уравнениями статического равновесия, являющимися едиными для упругой и пластической областей:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0;$$

шестью геометрическими уравнениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right);$$

шестью физическими уравнениями:

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_\varepsilon;$$

уравнением для расчета  $\varepsilon_i$  и зависимостью  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ .

Всего имеем 17 уравнений с 17 неизвестными  $(U_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \sigma_i, \varepsilon_i)$ .

Решение задачи будет такое, когда для каждой точки деформированного тела удовлетворяются все уравнения. Кроме того, на границе тела должны быть выполнены контурные условия:

$$S_k = \sigma_{jk} n_j.$$

Экспериментальные исследования подтверждают корректность теории (рис. 19).

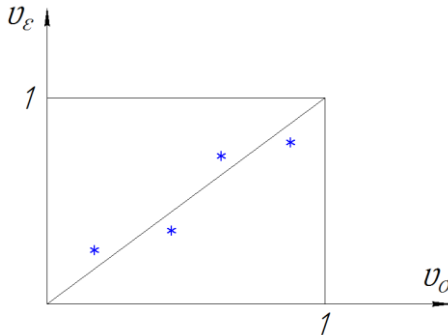


Рис. 19

Решение задач пластичности по теории малых упругопластических деформаций, как и задач упругости, можно получить двумя основными методами: в перемещениях или в напряжениях.

В плоских и осесимметричных задачах число уравнений уменьшается. Например, при плоском напряженном состоянии их будет восемь:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_x,$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_y,$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2,$$

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

## 2.10. Теория пластического течения

Теория пластического течения устанавливает связь между бесконечно малыми приращениями пластической деформации и напряжениями.

Она основывается на следующих гипотезах:

1. Соблюдается объемный закон Гука:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3K} \sigma_{cp} = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_{cp}.$$

2. Полные приращения компонент деформации равны сумме приращений упругих и пластических деформаций, т.е.

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^y + d\varepsilon_x^n, \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^y + d\gamma_{xy}^n.$$

Индексы  $y$  и  $n$  означают соответственно упругую и пластическую деформации.

В соответствии с первой гипотезой отсюда следует равенство:

$$d\varepsilon_{cp}^n = d\varepsilon_x^n + d\varepsilon_y^n + d\varepsilon_z^n = 0.$$

Это условие можно интерпретировать как несжимаемость материала в пластическом состоянии.

Девiator приращений пластических деформаций имеет вид

$$D_{d\varepsilon^n} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x^n & \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{xz}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{yx}^n & d\varepsilon_y^n & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{zy}^n & d\varepsilon_z^n \end{pmatrix}$$

3. Компоненты девiatorа приращений пластических деформаций и девiatorа напряжений равны с точностью до бесконечно малого скалярного множителя  $d\lambda$ :

$$D_{d\varepsilon^n} = d\lambda D_\sigma.$$

В развернутом виде это равенство записывается так:

$$d\varepsilon_x^n = d\lambda(\sigma_x - \sigma_{cp}), \quad \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n = d\lambda\tau_{xy},$$

$$d\varepsilon_y^n = d\lambda(\sigma_y - \sigma_{cp}), \quad \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n = d\lambda\tau_{yz},$$

$$d\varepsilon_z^n = d\lambda(\sigma_z - \sigma_{cp}), \quad \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n = d\lambda\tau_{zx}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим параметр  $d\lambda$  через интенсивности  $\sigma_i$  и  $d\varepsilon_i^n$  (интенсивности приращений пластической деформации):

$$\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{1}{d\lambda} d\varepsilon_i^n .$$

Отсюда следует:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} .$$

4. Соотношение между параметром упрочнения и интенсивностью  $\sigma_i$  не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

Возьмем в качестве параметра упрочнения параметр Удквиста:

$$q = \int d\varepsilon_i^n .$$

Тогда

$$\sigma_i = \Phi(q) = \Phi\left(\int d\varepsilon_i^n\right) .$$

Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  является функцией параметра Удквиста, не зависящей от вида напряженного состояния. Найдем эту зависимость, воспользовавшись диаграммой растяжения материала.

При одноосном растяжении имеем

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_1 , \\ d\varepsilon_i^n &= d\varepsilon^n . \end{aligned}$$

По отношению к чисто пластическим деформациям материал несжимаем, поэтому

$$d\varepsilon_2^n = d\varepsilon_3^n = -\frac{d\varepsilon_1^n}{2} .$$

Тогда

$$q = \int d\varepsilon_i^n = \varepsilon^n ,$$

$$\sigma = \Phi(\varepsilon_i^n) = \Phi(\varepsilon^n) ,$$

$$d\varepsilon_i^n = d\varepsilon^n .$$

Теперь график зависимости  $\Phi(\varepsilon^n)$  нетрудно построить по диаграмме растяжения, для чего в любой точке ее нужно найти величину упругой деформации  $\varepsilon^y$  (рис. 20).

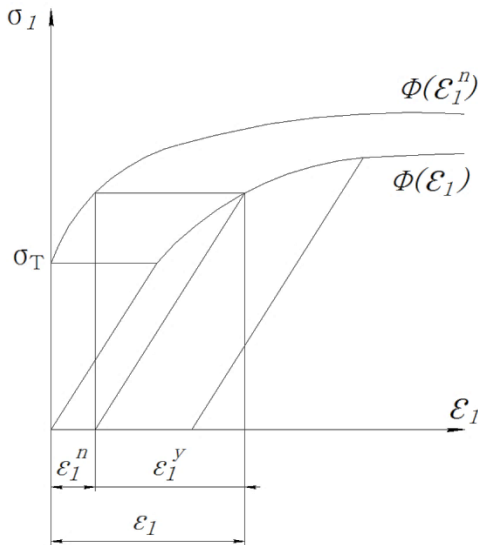


Рис. 20

Построенная таким образом кривая и является графиком функции  $\Phi\left(\int d\varepsilon_i^n\right)$ .

Уравнения теории пластического течения оказываются значительно сложнее уравнений теории малых упругопластических деформаций. При простом нагружении эти теории дают одинаковые решения. В случае сложного нагружения результаты, полученные с помощью теории пластического течения, лучше согласуются с

экспериментальными данными, и поэтому эта теория находит применение при решении задач в случаях сложных нагружений.

### 2.11. Теория Сен-Венана – Леви – Мизеса

Теория Сен-Венана – Леви – Мизеса относится к группе теорий течения и устанавливает зависимость между компонентами тензора скоростей деформаций. Для плоской задачи основные уравнения получены Сен-Венаном (1871), для пространственного случая – Леви, а затем Мизесом.

#### Основные гипотезы теории:

1. Главные оси напряжений совпадают с главными осями скоростей деформаций (в законе Гука  $D_\sigma = 2GD_\xi$   $G$  заменили на  $\lambda$ ):

$$D_\sigma = 2\lambda D_\xi ,$$

где  $\lambda$  – модуль пластичности, величина переменная и неизвестная.

В развернутом виде

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_x - \xi_{cp}), \quad \tau_{xy} = \lambda\eta_{xy} ,$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_y - \xi_{cp}), \quad \tau_{yz} = \lambda\eta_{yz} ,$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_z - \xi_{cp}), \quad \tau_{zx} = \lambda\eta_{zx} .$$

2. В пластической области выполняется условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

или

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 3\xi_{cp} = 0 .$$

Тогда физические уравнения примут вид

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\lambda\xi_x, \quad \tau_{xy} = \lambda\eta_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\lambda\xi_y, \quad \tau_{yz} = \lambda\eta_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\lambda\xi_z, \quad \tau_{zx} = \lambda\eta_{zx},$$

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\lambda \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \lambda \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\lambda \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \tau_{zx} = \lambda \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right).$$

3. Интенсивность нормальных (или касательных) напряжений постоянна в состоянии текучести:

$$\sigma_i = \sigma_T = \text{const},$$

или

$$\tau_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s = \text{const},$$

или есть для каждого материала функция интенсивности скоростей деформаций (или интенсивности скоростей деформации сдвига):

$$\sigma_i = \Phi(\xi_i)$$

или

$$\tau_i = f(\gamma_i),$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T.$$

Модуль  $\lambda$  получается следующим образом. Подставим в выражение  $\sigma_i$  значения физических уравнений:

$$\sigma_i = \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + 6(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)},$$



откуда

$$\lambda = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\xi_i}.$$

Напряжения должны удовлетворять уравнениям движения сложной среды:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + x_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

## 2.12. Выводы

В процессе обработки металлов давлением при расчетах напряженно-деформированного состояния важно знать внешние нагрузки, при которых в деформируемом теле впервые появляются пластические деформации. Условие, которому должны удовлетворять напряжения в заданной точке тела, чтобы в ней появились пластические деформации, называется условием (критерием) пластичности.

При линейном напряженном состоянии условие пластичности имеет вид  $\sigma_1 = \sigma_T$ . При сложном напряженном состоянии по предложению французских ученых Треска и Сен-Венана металл переходит в пластическое состояние, когда в нем наибольшее касательное напряжение достигает некоторого предельного значения  $\tau_{\max} = \tau_T$ . Мизес и Генки в качестве условия пластичности предложили условие постоянства интенсивности напряжений  $\sigma_i = \sigma_T$ . Практика показала, что оба условия пластичности близки между собой и довольно правильно определяют начало пластической деформации, причем условие пластичности Мизеса оказывается более точным. Оба условия пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса (часто называемое энергетическим) принимают, что наступление пластичности не зависит от среднего напряжения и схемы напряженного состояния, а определяется свойствами деформируемого металла.

При исследовании пластической деформации тела огромное значение имеет характер нагружения тела. При простом нагружении в каждой точке тела внешние силы и напряжения возрастают пропорционально одному и тому же параметру. В противном случае

нагружение будет сложным. Согласно теореме А.А. Ильюшина о простом нагружении для несжимаемого материала интенсивности напряжений и деформации связаны между собой степенной зависимостью вида  $\sigma_i = A\varepsilon_i^n$ .

При объемном напряженном состоянии поверхность нагружения является границей между упругими и пластическими деформациями. С увеличением пластической деформации по мере развития упрочнения поверхность нагружения расширяется и смещается. Расширение поверхности нагружения есть следствие упрочнения металла при пластической деформации. Смещение поверхности нагружения относительно начала координат есть следствие эффекта Баушингера. Поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращение пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^n$ , направлен по нормали к ней. Согласно постулату Друкера в цикле нагружения – разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу.

При разгрузке тела (снятие внешних сил) деформация частицы происходит благодаря накопленной ею упругой потенциальной энергии. После полной разгрузки, когда внешние силы уменьшаются до нуля, в теле будут остаточные напряжения  $\sigma_{ij}^{ocm}$  и остаточные деформации  $\varepsilon_{ij}^{ocm}$ , определяемые по теореме о разгрузке, предложенной А.А. Ильюшиным.

Теории пластичности могут быть условно отнесены к двум типам: деформационным теориям и теориям пластического течения. В теориях первого типа при построении физических уравнений устанавливается связь между напряжениями и деформациями, в теориях пластического течения – связь между бесконечно малыми приращениями компонент пластической деформации и напряжениями. Отсюда видна принципиальная разница между указанными теориями. В деформационных теориях физические уравнения являются конечными нелинейными соотношениями, в теориях пластического течения – дифференциальными. Одной из теорий деформационного типа является теория малых упругопластических деформаций.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое условие пластичности?
2. Запишите условие пластичности для одноосного растяжения, чистого сдвига.
3. Перечислите требования, предъявляемые к критериям пластичности.
4. Какие пределы текучести Вы знаете? Какова между ними связь по условию пластичности Треска, Мизеса?
5. Сформулируйте условие пластичности Треска – Сен-Венана для объемного напряженного состояния.
6. то собой представляет геометрическая интерпретация условия пластичности Треска – Сен-Венана?
7. Запишите условие пластичности Треска – Сен-Венана для плоского напряженного и плоского деформированного состояний.
8. Опишите кривую текучести для плоского напряженного состояния в главных осях по условию пластичности Треска – Сен-Венана.
9. Запишите условие Мизеса для объемного напряженного состояния в произвольных осях.
10. Почему условие пластичности Мизеса часто называют энергетическим?
11. Запишите энергетическое условие пластичности для плоского напряженного и плоского деформированного состояний.
12. При каких напряженных состояниях энергетическое условие пластичности и условие пластичности Треска – Сен-Венана совпадают? Когда между ними наибольшая разница?
13. Дайте геометрическую интерпретацию условия пластичности Мизеса в главных осях для объемного напряженного и плоского напряженного состояний.
14. Какая связь между  $\sigma_T$  и  $\tau_T$  по энергетическому условию пластичности?
15. Насколько значительно влияние среднего главного нормального напряжения  $\sigma_2$  на наступление пластического состояния?
16. Как проверяют условия пластичности?

17. Как получить линейную форму записи энергетического условия пластичности?
18. Как выглядит график изменения коэффициента Лоде в зависимости от показателя вида напряженного состояния?
19. Что представляют собой P+M-опыты?
20. Почему в результате обработки давлением поликристаллические металлы становятся анизотропными материалами?
21. Опишите природу деформационной анизотропии.
22. Запишите энергетическое условие начала пластичности для анизотропных материалов, предложенное Мизесом.
23. Какую расшифровку условия Мизеса для анизотропных тел сделал Хилл?
24. Как выглядит условие пластичности для анизотропных сред, предложенное Ю.М. Арышенским?
25. Что представляют собой коэффициенты  $\mu_{ij}$  в пластической области. Как они взаимосвязаны между собой для несжимаемых тел?
26. Дайте геометрическую интерпретацию энергетического условия пластичности для анизотропных сред при плоском напряженном состоянии.
27. Что такое начальный и текущий пределы текучести? Укажите критерий нагружения и разгрузки при одноосном растяжении.
28. Что такое поверхность нагружения? Что она представляет собой для случая изотропного упрочнения, если следовать условиям пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса?
29. Какие берут параметры в качестве меры упрочнения?
30. Опишите трансляционное упрочнение.
31. Чем объясняется расширение и смещение поверхности нагружения в процессе деформаций?
32. Сформулируйте теорему А.А. Ильюшина о простом нагружении.
33. При какой схеме упрочнения металла качественно описывается эффект Баушингера?
34. В чем состоит гипотеза «единой кривой»?

35. Сформулируйте теорему А.А. Ильюшина о разгрузке для случаев полной и частичной разгрузки (когда внешние силы уменьшаются не до нуля).

36. При кручении круглого прутка все поперечное сечение перешло в идеально пластическое состояние. Привести эпюры действующих и остаточных касательных напряжений.

37. Почему отсутствует однозначная связь между пластическими деформациями и напряжениями?

38. Дайте определение постулата Друкера для упрочняющейся и неупрочняющейся пластической среды в случае линейного и объемного напряженных состояний.

39. Сформулируйте ассоциированный закон течения.

40. Как направлен вектор  $d\varepsilon_{ij}^n$  к поверхности нагружения?

41. Докажите выпуклость поверхностей текучести и нагружения.

42. Назовите основные гипотезы теории течения.

43. Как получить связь между напряженным и деформированным состояниями в теории течения?

44. Запишите физические уравнения теории Сен-Венана – Леви – Мизеса.

45. Какие теории целесообразно использовать при простом нагружении, сложном нагружении?

46. Основные предпосылки теории малых упругопластических деформаций.

47. В каких случаях расчеты напряженно-деформированного состояния по различным теориям пластичности совпадают?

48. Как производят проверку теорий пластичности?

49. Перечислите основные уравнения теории малых упругопластических деформаций, теории пластического течения.

## РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. М.: Машиностроение, 1971. 424 с.
2. Джонсон У., Меллор П.Б. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1975. 567 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Безухов Е.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. шк. 1968. 512 с.
5. Элементы теории упругости и пластичности в авиастроении: метод. указания / Куйбышев. авиац. ин-т; сост. Ю.М. Арышенский, В.Р. Каргин. Куйбышев, 1990. 32 с.
6. Арышенский Ю.М., Гречников Ф.В. Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов. М.: Metallurgy, 1992. 304 с.
7. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1969. 504 с.
8. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением М.: Metallurgy, 1980. 456 с.
9. Арышенский Ю.М., Гречников Ф.В., Каргин В.Р. Избранные разделы по теории пластичности: учеб. пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1995. 64 с.
10. Илюкович Б.М. Введение в теорию пластичности. Киев: Выща шк. 1983. 160 с.
11. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности. М.: Metallurgy, 1987. 352 с.
12. Шевченко К.Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. М.: Высш. шк. 1970. 351 с.

Учебное издание

*Каргин Владимир Родионович,  
Каргин Борис Владимирович*

**МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД  
Часть 2**

*Учебное пособие*

Редактор Т. К. К р е т и н и н а  
Компьютерная вёрстка А. В. Я р о с л а в ц е в а

Подписано в печать 31.05.2017. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 5,0.  
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 14/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)  
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Изд-во Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

