

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Горохов

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
СОВРЕМЕННОЙ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ**

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве электронного учебного пособия*

Самара

Издательство «Самарский университет»

2014

УДК 530.1:512.54+535.14
ББК 22.31
Г70

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. Е. К. Башкиров,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. Л. Дербов

Горохов, А. В.

Г70

Математические методы современной квантовой оптики :

[Электронный ресурс] / А. В. Горохов. – Электронное учебное пособие. – Самара : Изд-во «Самарский университет», 2014. – 223 с.
Режим доступа: <http://weblib.samsu.ru/localsrc/ssupress/main.php>,
ограниченный. – Загл. с экрана.

Учебное пособие составлено в соответствии с программами курсов «Теория групп в квантовой физике», «Кооперативные и когерентные явления» и «Квантовая оптика и квантовая информатика», которые автор читает бакалаврам и магистрантам физического факультета СамГУ. Изложен математический аппарат принципов симметрии, когерентных состояний, интегралов по траекториям с применением к задачам квантовой оптики и исследованы методы нахождения решений квантовых кинетических уравнений. Предназначено бакалаврам и магистрантам физических специальностей университетов, но может быть также полезно аспирантам, научным работникам и преподавателям физических специальностей вузов.

УДК 530.1:512.54+535.14
ББК 22.31

© Горохов А.В., 2014

© Самарский государственный
университет, 2014

© Оформление. Издательство
«Самарский университет», 2014

Оглавление

Введение	6
1 Принципы симметрии и динамика квантовых систем	10
1.1 Модельные гамильтонианы и динамические группы	10
1.2 Когерентные состояния и группы Ли	14
2 Интегралы по траекториям в голоморфном представлении и квазиклассическая динамика	25
2.1 Гауссовы пакеты и гамильтоновы интегралы по путям	27
2.2 Символы операторов и интегралы по траекториям	29
2.3 Квазиклассическое приближение и гамильтоновы уравнения в пространствах Кэлера	32
2.4 Нестандартные члены и проблема выхода за рамки квазиклассики	35
2.5 Фейнмановский пропагатор гармонического осциллятора	37
2.6 Фейнмановский пропагатор частицы со спином j в магнитном поле	42
3 Когерентные состояния группы $SU(N)$ и N-уровневые атомы	44
3.1 Многоуровневые атомы во внешнем однородном поле	44
3.2 Динамика кубита и генерация атомных когерентных состояний	46
3.3 Группа $SU(3)$ и трехуровневые атомы во внешних полях	49
4 Геометрическая фаза в квантовой оптике	61
4.1 Метод геометрической фазы в квантовой теории	61
4.2 Модель Джейнса - Каммингса и фаза Берри	62
4.3 Группа $SU(2)$ и расчет фазы Берри для постоянного воздействия	65
4.4 Геометрическая интерпретация фазы Берри	67
4.5 Квазиклассический предел	69
5 Динамические супергруппы и суперкогерентные состояния в квантовой оптике и теории систем многих частиц	71

5.1	Преобразование Хаббарда - Стратоновича и интегралы по траекториям для фермион - бозонных гамильтонианов	71
5.1.1	Взаимодействующие бозоны и фермионы и преобразования Хаббарда - Стратоновича	72
5.1.2	Расчет интеграла по траекториям для статистической суммы многофермионной системы	75
5.2	Суперсимметричные модели Джейнса - Каммингса	82
5.2.1	Супергруппа $OSp(2 2)$ и модель Джейнса - Каммингса	82
5.2.2	Континуальный интеграл в представлении когерентных состояний супергруппы $OSp(2 2)$	86
5.2.3	Эволюция параметров когерентных состояний	89
5.2.4	Решение гамильтоновых уравнений для суперсимметричных обобщений модели Джейнса - Каммингса	91
5.2.5	Вероятности перехода и статистическая сумма в суперсимметричной модели Джейнса - Каммингса	95
6	Когерентная релаксация квантовых систем с конечным числом уровней	99
6.1	Квантовое кинетическое уравнение, релаксация и декогеренция	99
6.2	Когерентная релаксация системы двухуровневых атомов и уравнение Фоккера - Планка	104
6.2.1	Релаксация двухуровневого атома ($j = 1/2$)	108
6.2.2	Релаксация эквидистантной системы с $j = 1$	110
6.3	Релаксация двухуровневой системы в "сжатом" термостате	112
6.4	Релаксация системы трехуровневых атомов	117
6.5	Точное решение уравнения Фоккера - Планка для изолированного атома	120
6.6	Одновременные и двухвременные корреляционные функции	124
7	Двухуровневая система во внешних стохастических полях	131
7.1	Уравнение Фоккера-Планка	131
7.2	Пропагатор уравнения Фоккера - Планка. Метод теории возмущений	133
7.3	Конкретные реализации стохастических процессов и вычисление наблюдаемых	138
7.3.1	Оптический белый шум	139
7.3.2	Процессы Кубо - Андерсона	143
7.4	Марковские дихотомические процессы. Метод дифференцирования статистических средних	146
7.5	Точно решаемые модели	151

8 Когерентная релаксация ансамблей большого числа квантовых систем	161
8.1 Асимптотическое разложение для уравнения Фоккера - Планка	161
8.2 Когерентная релаксация ансамбля двухуровневых атомов . . .	163
8.3 Диполь-дипольно взаимодействующие атомы и квантовое управление	169
9 Релаксация осцилляторных систем, статистика фотонов, сжатие и квантовые ковры	173
9.1 Релаксация гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами в "сжатом" термостате	173
9.2 Кинетика параметрического осциллятора в термостате со сжатыми флуктуациями	177
9.3 Квантовые суперпозиции и фракталы	181
9.3.1 Квантовые ковры	182
9.3.2 Фрактальные решения для гармонического осциллятора	189
9.3.3 Связанные осцилляторы и динамика фракталов	200
10 Спонтанное параметрическое рассеяние и трехмерная группа Лоренца	203
10.1 Спонтанное параметрическое рассеяние	203
10.2 Квантовый параметрический усилитель и когерентные состояния	204
10.3 Динамика когерентных состояний в модели СПР	205
10.4 Суперпозиции, смеси и сжатие	207
Задания для самостоятельной работы студентов и заключение	212
Библиографический список	216

Введение

Учебное пособие посвящено изложению теории когерентных состояний и их применениям к задачам квантовой оптики и квантовой теории информации. Наиболее последовательный подход к введению когерентных состояний и исследованию их свойств и приложений основан методе групп и алгебр Ли – математическом аппарате принципов симметрии.

Принципы симметрии и методы теории групп играют важную роль в аппарате современной квантовой физики. По разным аспектам ее использования к настоящему времени опубликовано огромное количество статей, обзоров и монографий. В начале 70-х годов возник, тесно связанный с теорией групп метод обобщенных когерентных состояний. Оказалось, что когерентные состояния (КС), если их удачно построить, оказываются квантовыми состояниями наиболее близкими к классическим (минимизация соотношений неопределенности для генераторов динамической группы). Эволюция параметров когерентного состояния приводит к классической динамике для классического аналога квантовой задачи. Если же гамильтониан линеен по генераторам динамической алгебры, то временная эволюция квантовой задачи является чисто классической. В последнее время метод динамических групп и алгебр активно применяется в квантовой оптике и квантовой информатике. В настоящей работе метод динамических групп, связанных с ними КС и континуальных интегралов является основным методом исследования. При этом изучены как принципиальные вопросы построения КС для моделей многоуровневых атомов, исследования их свойств, так и их применения к теории когерентного (коллективного, кооперативного) поведения в квантовой оптике.

Потребность в детальном изучении двух-, трех- и многоуровневых атомов, взаимодействующих как классическим (лазерным), так и с квантованным электромагнитным полем, связана также с разработкой так называемых Q -компьютеров (квантовых компьютеров) и с кодированием и декодированием сигналов, передаваемых по квантовому каналу – квантовая криптография.

Когерентная (унитарная) динамика, является скорее исключением, чем правилом. Любая реальная физическая система всегда связана с внешним окружением и поэтому эволюционирует неунитарным образом, что приводит к необратимому разрушению когерентности. В последнее время интенсивно

развиваются экспериментальные и теоретические методы исследования взаимодействия простейших атомных систем с лазерным излучением, действующим вблизи атомных переходов – физика микромазера и спектроскопия изолированных атомов (молекул). Активно разрабатываются схемы квантовых вычислений на одиночных атомах и ансамблях из небольшого числа атомов. В теории сверхизлучения и нелинейных оптических явлений объектом исследования являются как единичные атомы, так и коллективы атомов, находящихся в специально приготовленных кооперативных (когерентных) состояниях.

При исследовании когерентных кооперативных явлений необходимо учитывать взаимодействие квантовых ансамблей с большим внешним окружением – термостатом на основе квантовых кинетических уравнений. Для систем с динамической группой и построенными когерентными состояниями эти сложные операторные уравнения можно свести к уравнениям типа Фоккера-Планка, получение которых и поиск методов их решения является самостоятельной и актуальной задачей. Важной является также проблема выбора удобного и адекватного физической модели базиса для вычисления квантовомеханических средних от операторов физических величин. Последние приводят к одновременным и разновременным корреляционным функциям, измеряемым экспериментально. Привлекательной чертой использования КС для описания динамики и спонтанной релаксации ансамбля двухуровневых атомов является то, что уравнения динамики не зависят от числа атомов, а в УФП для релаксации, число атомов входит как параметр. Это даёт возможность применения асимптотических методов для нахождения приближённых решений в случае больших коллективов частиц.

Кратко остановимся на содержании учебного пособия.

В первой главе дан сжатый обзор метода динамических групп и когерентных состояний в квантовой теории, который конкретизирован для многоуровневых квантовых систем и других модельных гамильтонианов квантовой оптики. Строятся КС групп Ли, важных для приложений в квантовой оптике и лазерной физике и исследуются их свойства.

Во второй главе выведен вид интеграла по траекториям для ковариантного символа оператора эволюции в представлении КС и методом стационарной фазы находятся квазиклассические уравнения движения. Показано, что эти уравнения являются гамильтоновыми и согласованными с симплектической структурой комплексного многообразия Кэлера – однородного пространства параметров КС.

В третьей главе развитый метод использован для описания динамики N –уровневых атомов во внешних классических полях с использованием КС

группы $SU(N)$. Исследована динамика двух- и трехуровневых атомов с эквидистантным спектром (группа $SU(2)$) и неэквидистантным спектром (группа $SU(3)$) во внешнем классическом поле. Подробно изучается динамика трехуровневого V - атома в бигармоническом и импульсном лазерном поле.

В четвертой главе изложен метод геометрической фазы в квантовой физике и выполнен расчет фазы Берри для модели двухуровневого атома (кубита), взаимодействующего с квантованной фотонной модой в идеальном резонаторе - модель Джейнса - Каммингса.

В пятой главе построено обобщение техники континуальных интегралов на случай систем взаимодействующих бозонов и фермионов (метод Хаббарда - Стратоновича) и построена суперсимметричная формулировка модели Джейнса - Каммингса.

В шестой главе строятся операторные кинетические уравнения, описывающие когерентную спонтанную релаксацию системы атомов в термостате — фотонной бане. Методом КС строятся соответствующие им уравнения Фоккера- Планка (УФП) для ковариантного символа матрицы плотности, которые затем решаются точно в случае изолированного атома. Для небольших значений инвариантных операторов Казимира эффективным методом решений оказывается метод разложения по обобщенным сферическим функциям для групп $SU(n)$. Такие сферические функции в комплексных переменных построены в явном виде для группы $SU(2)$, где они совпадают с хорошо известными и для группы $SU(3)$. Вычисляется характеристическая функция и одновременные корреляционные функции. Выводится формула для корреляционной функции первого порядка на языке символов операторов, что делает ее удобной при использовании полученного решения уравнение Фоккера-Планка. Вычисляются контуры линии излучения и исследуется влияние на ширину контура т.н. "сжатых" флуктуаций термостата.

В седьмой главе изучается релаксация двухуровневой системы, которая взаимодействует не только с фотонным термостатом, но и с окружающими ее атомами, взаимодействие с которыми рассматривается как стохастический процесс. Получено операторное кинетическое уравнение, в котором взаимодействие со стохастическим полем учитывается точно. Соответствующее ему УФП, полученное методом КС, решается точно по стохастическому полю, приводящему к сдвигу уровней и методом теории возмущений, учитывая поправку второго порядка малости по стохастическому полю, приводящему к переходу между уровнями. Рассматривается подход к решению полученного УФП методом дифференцирования статистических средних, который в общем случае приводит к необходимости обращения к методам теории возмущений. Другой рассматриваемый подход основан на получении операторного

кинетического уравнения, в котором учитывается только необратимость воздействия стохастических полей на исследуемую систему. Показывается, что это уравнение является точным, если ограничиться информацией о стохастических процессах, находящихся только в двухвременных корреляционных функциях. Находится точное решение соответствующего УФП. Вычисляются и сравниваются вероятности нахождения атома в верхнем и нижнем состояниях и форма контура линии излучения. Установлена связь продольного и поперечного времен релаксации T_1 , T_2 с параметрами стохастических полей.

В восьмой главе изложен метод нахождения решений для УФП, описывающих спонтанную релаксацию ансамбля N невзаимодействующих между собой атомов в виде асимптотического разложения по обратным степеням числа частиц N . Изучается система двухуровневых атомов, для которой вычисляются поправки первого порядка малости $\sim \frac{1}{N}$ для пропагатора и формы контура линии излучения. Исследована необратимая динамика системы двух диполь - дипольно взаимодействующих двухуровневых атомов, локализованных в оптической ловушке и взаимодействующих с фотонным термостатом и внешним лазерным полем.

В девятой главе с помощью метода КС изучается релаксация осцилляторных (фотонных) систем, имеющих некомпактную группу динамической симметрии. Рассматривается релаксация гармонического осциллятора и вырожденного параметрического усилителя в "сжатом" термостате, для которых получены точные решения. В частности показано, что метод динамических групп позволяет отыскивать решения не только уравнения Шредингера, но и УФП. Исследованы фрактальные свойства т.н. квантовых ковров, возникающих для специально организованных бесконечных суперпозиций n -квантовых фотонных состояний, введенных Берри и Войчиком.

В десятой главе в рамках метода КС исследована динамика рождения бифотонов в спонтанном параметрическом рассеянии света и изучена динамика их сжатия.

В заключении сформулированы основные результаты учебно - методического пособия, даны рекомендации студентам и приведен список задач для самостоятельного решения.

Пособие написано при поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание №2.870.2011) и ФЦП "Научные и научно - педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (контракт №14.740.11.0063).

Глава 1

Принципы симметрии и динамика квантовых систем

1.1 Модельные гамильтонианы и динамические группы

Принципы симметрии являются одной из ключевых идей современной физики и методы теории групп находят широкое применение при установлении самых общих свойств физических систем. Особенно важную роль теоретико-групповые методы играют в квантовой физике. На начальном этапе развития квантовой механики приложения теории групп исчерпывались, в основном, задачей классификации состояний квантовой системы по неприводимым представлениям групп симметрии (геометрических групп симметрии, таких как группа трехмерных вращений $SO(3)$, групп перестановок P_n для систем тождественных частиц, точечных и кристаллографических групп в теории молекул и физике твердых тел) и выводом правил отбора для амплитуд переходов см., например, [1, 2]. (Мы не затрагиваем здесь исключительно важные приложения теоретико-групповых методов, связанных с релятивистской физикой и квантовой теорией поля.)

Новый интерес к теоретико-групповым методам был стимулирован в начале 60-х годов XX века работами Гелл-Манна и Неемана, в которых представления группы $SU(3)$ были с успехом использованы для классификации адронов. В результате дальнейших обобщений возникло новое направление - метод динамических групп. Под динамической группой (группой "порождающей состояния") понимают группу G , унитарное неприводимое представление которой действует в гильбертовом пространстве всех состояний системы. При этом оказалось, что на язык теории групп можно перевести такие важные задачи, как расчет энергетического спектра, вероятностей переходов, построение векторов состояния системы и т.п.

К настоящему времени существует большое число работ, в которых рассматривались как принципиальные, так и прикладные задачи, связанные с введением динамических групп [3, 4, 5, 6, 7]. Кратко остановился на методе

групп симметрии и динамических групп в квантовой механике.

Рассмотрим квантовомеханическую систему, описываемую уравнением

$$\widehat{L}|\Psi\rangle = 0. \quad (1.1)$$

Для стационарной системы $\widehat{L} = \mathcal{E} - \widehat{H}$, для нестационарной $\widehat{L} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}$, где \widehat{H} — гамильтониан системы.

Если в множестве операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний системы (1.1) можно найти такие операторы $\widehat{S}(g^0)$, $g^0 \in G_0$, что

$$[\widehat{L}, \widehat{S}(g^0)] = 0 \quad (1.2)$$

и, если для любых $g_1^0, g_2^0 \in G_0$

$$\widehat{S}(g_1^0) \cdot \widehat{S}(g_2^0) = \widehat{S}(g_1^0 \cdot g_2^0), \quad g_1^0 \cdot g_2^0 \in G_0$$

и существует обратный оператор $(\widehat{S}(g^0))^{-1} = \widehat{S}(g^{0-1})$, то говорят, что множество операторов $\{\widehat{S}(g^0)\}$ образует представление абстрактной группы G_0 , а сама группа G_0 называется группой симметрии или инвариантности данной физической системы. Для дальнейших целей настоящей работы мы будем считать группу G_0 некоторой группой Ли. Важно также отметить, что если у системы имеются вырожденные состояния, отвечающие фиксированному уровню энергии, то (в стационарном случае) преобразования из группы симметрии "связывают" разные векторы состояния в пространстве одного неприводимого представления. Исходя из некоторого состояния $|\Psi_0\rangle$ можно "сдвигом" по группе симметрии получить все остальные линейно-независимые состояния, входящие в данный мультиплет

$$|\Psi_k\rangle = \widehat{S}(g_k^0)|\Psi_0\rangle, \quad g_k^0 \in G_0.$$

Оказалось, что концепция группы симметрии физической системы допускает естественное и плодотворное обобщение. Основная идея здесь состоит в том, чтобы попытаться описать всю совокупность состояний системы как единое представление некоторой, более широкой, чем группа симметрии, группы.

Дополним множество операторов, тождественно коммутирующих с оператором \widehat{L} , операторами, перестановочными с \widehat{L} на решениях уравнения (1.1):

$$[\widehat{L}, \widehat{T}(g)]\{|\Psi\rangle\} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь уже, исходя из некоторого состояния $|\Psi_0\rangle$, действием операторов $\widehat{T}(g)$ можно получить все решения уравнения (1.1).

Под динамической группой G квантовой системы понимают конечнопараметрическую группу Ли (содержащую в качестве подгруппы группу симметрии G_0), такую, что все линейно-независимые решения уравнения (1.1)

образуют базис некоторого ее неприводимого представления. Для большинства квантовомеханических приложений оказывается достаточным изучение алгебры Ли этой группы. В принципе, если известна динамическая группа, то ее изучение полностью восполняет всю информацию, заключающуюся в уравнении (1.1) (в уравнении Шредингера). Иными словами, квантовая механика может быть полностью сформулирована на языке теории групп. Ясно, что для систем, обладающих бесконечным числом связанных состояний (таких как атом водорода, гармонический осциллятор, ротатор и т.п.) динамическая группа симметрии должна быть некомпактной группой Ли.

Наиболее просто и естественно теоретико - групповые методы удается применить в том случае, когда гамильтониан \hat{H} системы линеен по генераторам представления $\hat{T}(g)$, то есть, (см.[4-9]):

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{A}_k, \quad (1.4)$$

где ω_k – c -числа, зависящие от времени для нестационарных систем, а операторы \hat{A}_k – (генераторы) базис представления алгебры Ли группы G , удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\hat{A}_k, \hat{A}_l] = i C_{kl}^m \hat{A}_m, \quad (1.5)$$

C_{kl}^m – структурные постоянные группы G .

Несмотря на то, что (1.4) представляет собой простейшую возможность, существует достаточно широкий класс физических систем, для которых это соотношение справедливо (по крайней мере, в качестве разумного приближения). В частности, (1.4) выполняется для так называемых квадратичных систем. Можно показать [3], что оператор эволюции системы с гамильтонианом вида (1.4) (в том числе и для зависящих от времени коэффициентов ω_k) является оператором представления динамической группы G :

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T}(g(t, t_0)) = \exp \left[-i \sum_k \lambda_k(t, t_0) \hat{A}_k \right], \quad (1.6)$$

где $g(t, t_0)$ - траектория в группе G . Для коэффициентов $\lambda_k(t, t_0)$ методом распутывания операторных экспонент получается система некоторых обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, которые, в принципе, решаются точно (или в квадратурах). С использованием этого факта могут быть решены групповыми методами три типа задач [7], важных для приложений к квантовой оптике:

1. может быть найден спектр собственных значений гамильтониана и построены его собственные векторы (стационарный случай);

2. рассчитаны вероятности переходов между состояниями асимптотических гамильтонианов $\hat{H}(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{H}(t)$ (в нестационарном случае), причем вероятность перехода дается квадратом модуля матричного элемента оператора представления: $w = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\hat{T}(g(t, t_0))|^2$;
3. определен спектр квазиэнергий и найдены квазиэнергетические состояния системы с периодическим гамильтонианом $\hat{H}(t + \tau) = \hat{H}(t)$.

В общем случае будем говорить, что квантовая система обладает динамической симметрией некоторой конечнопараметрической группы Ли G , если ее гамильтониан может быть полностью записан в виде операторнозначной функции генераторов этой группы. Установление динамической группы часто ведет к более глубокому пониманию свойств физической системы.

Квантовая оптика, лазерная физика, физика конденсированных сред и квантовая информатика являются естественными областями применения именно для динамических групп и тесно связанных с ними теоретико - групповых когерентных состояний.

Одной из основных задач современной квантовой оптики является описание взаимодействия внешнего поля с веществом. В простейшей модели вещество представляется совокупностью большого числа невзаимодействующих неподвижных атомов. Если поле излучения является высокомонохроматическим как, например, излучение лазера, то существенными в атоме являются переходы между двумя уровнями, которые попадают в резонанс с полем излучения, при условии, что все остальные переходы далеки от резонанса. В этом случае атом можно рассматривать как двухуровневую систему. Группой динамической симметрии такой системы является группа $SU(2)$.

Многие задачи современной квантовой оптики описываются с помощью модели связанных осцилляторов. Гамильтониан двух взаимодействующих линейных осцилляторов имеет вид билинейной формы по операторам рождения и уничтожения квантов $\hat{a}_i, \hat{a}_j^+, [\hat{a}_i, \hat{a}_i^+] = \delta_{ij}(i, j = 1, 2)$:

$$\hat{H}(t) = \sum_{i,j=1}^N \omega_{ij}(t) \hat{a}_j^+ \hat{a}_i + [b_{ij} \hat{a}_i \hat{a}_j + d_i(t) \hat{a}_i] + [h.c]. \quad (1.7)$$

Здесь группой динамической симметрии является полупрямое произведение $W(N) \wedge Sp(2N, R)$ симплектической группы $Sp(2N, R)$ и группы Гейзенберга - Вейля $W(N)$. В частном случае гамильтониан (1.7) при $N = 2$ описывает следующие известные параметрические процессы, классифицируемые по подгруппам группы $W(2) \wedge Sp(4, R)$: параметрическая генерация и усиление, параметрическое преобразование частоты, вырожденное параметрическое усиление, генерация второй гармоники и двухфотонное поглощение

в обеих модах, генерация сжатых состояний и квадрупольное осцилляторное эхо, генерация эха с преобразованием частоты, комбинационное стоксово и антистоксово рассеяние, рассеяние Мандельштама - Бриллюэна, трехволновое и четырехволновое смешение.

1.2 Когерентные состояния и группы Ли

Когерентные состояния были введены Глаубером [10,11] для описания поля излучения лазера, которое моделировалось набором гармонических осцилляторов. Операторы переходов между соседними уровнями осциллятора \hat{a}^+ , \hat{a} , есть операторы рождения и уничтожения квантов поля излучения. Они, вместе с единичным оператором \hat{I} , порождают алгебру Ли W_1 - алгебру Гейзенберга-Вейля. КС $|\alpha\rangle$ определяются как собственные состояния оператора уничтожения

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.8)$$

Эти состояния разлагаются по стационарным состояниям $|n\rangle$ гармонического осциллятора

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.9)$$

и описывают нерасплывающийся волновой пакет с амплитудой $|\alpha|$. Другой способ введения системы КС состоит в действии оператора

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a}} \quad (1.10)$$

на вакуумный вектор $|0\rangle$, определяемый условием $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a}}|0\rangle. \quad (1.11)$$

В (1.10) $\bar{\alpha}$ - величина комплексно сопряженная α . Заметим, что оператор представления группы Гейзенберга-Вейля W_1 может быть записан в виде [4,7]

$$\hat{T}(g) = e^{i\theta\hat{I}}\hat{D}(\alpha) \quad (1.12)$$

Тогда, учитывая что оператор $e^{i\theta\hat{I}}$ является центром группы W_1 и стационарной подгруппой вектора $|0\rangle$ систему КС можно определить как

$$|\alpha\rangle = \hat{T}(g)|0\rangle. \quad (1.13)$$

Когерентные состояния обладают рядом замечательных свойств: они являются неортогональными друг другу, для них выполняется "разложение единицы" система КС является сверхполной, т.е. содержит больше состояний, чем необходимо для разложения произвольного состояния. КС минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга (для них $\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}$), поэтому они являются квантовыми состояниями, наиболее близкими к классическим. Они являются удобным базисом для разложения векторов состояния и операторов по проекторам $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Используя свойство (1.8), нетрудно видеть, что действие произвольной операторной функции $f(\hat{a})$ на $|\alpha\rangle$ сводится к его умножению на обычную комплексную функцию $f(\alpha)$

$$f(\hat{a})|\alpha\rangle = f(\alpha)|\alpha\rangle. \quad (1.14)$$

Глаубером (см., также монографию Клаудера и Сударшана [12]) были рассмотрены математические аспекты свойств осцилляторных КС и их применения для вычисления функций корреляции различных порядков при описании статистических свойств оптических полей. Корреляционные функции использовались затем для анализа явлений группировки и антигруппировки фотонов.

В работе [13] были построены спиновые когерентные состояния, возникающие при описании частицы со спином J , изучены их свойства и показано, что при $J \gg 1$ они переходят в глауберовские. Рассматривалось приложение таких когерентных состояний для вычисления статистической суммы частицы со спином в магнитном поле, описания спиновых волн и взаимодействие двух спинов в гейзенберговской модели ферромагнетика.

Важные результаты получены в [14], где построены КС для двухуровневой системы, названные атомными, как КС углового момента. Эволюция этих состояний описывается точкой на единичной двумерной сфере, что эквивалентно эволюции конца вектора энергетического спина на сфере Блоха. Поэтому атомные КС в угловой параметризации часто называют блоховскими. В этой же работе показана идентичность двухуровневой системы и частицы со спином $\frac{1}{2}$ как систем имеющих два стационарных состояния. Исследовалась связь атомных КС с неприводимыми представлениями группы $SU(2)$, описание ансамбля из большого числа двухуровневых атомов и показана связь с состояниями Дикке в теории сверхизлучения.

Метод энергетического спина применялся для описания динамики изолированной n -уровневой молекулы и показано, что группа $SU(n)$, в данном случае, является группой динамической симметрии. Ю.Швингером был предложен метод представления операторов углового момента, которые являются генераторами группы $SO(3)$ и локально изоморфной ей группе $SU(2)$, через бозонные операторы рождения и уничтожения двух сортов:

$$\hat{J}_+ = \hat{a}_1^+ \hat{a}_2, \quad \hat{J}_- = \hat{a}_2^+ \hat{a}_1, \quad \hat{J}_3 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 - \hat{a}_2^+ \hat{a}_2). \quad (1.15)$$

На основе этого метода были построены КС глауберовского типа двух-уровневой системы

$$|\alpha_1, \alpha_2\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} \exp \left\{ -\frac{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}{2} \right\} |n_1, n_2\rangle, \quad (1.16)$$

где $|n_1, n_2\rangle$ - состояние с фиксированным числом фотонов n_1, n_2 . С другой стороны, так как представление реализовано с помощью операторов рождения и уничтожения двух независимых гармонических осцилляторов, то КС (1.16) будут описывать и двухмодовое поле излучения. Обобщение на случай конечного или бесконечного счетного числа степеней свободы электромагнитного поля можно найти в [12,18]:

$$|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\rangle \equiv |\{\alpha_k\}\rangle = \prod_{k'=1}^k \sum_{\{\alpha_k\}=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha_{k'}|^2 \right\} \frac{\alpha_{k'}^{n_{k'}}}{\sqrt{n_{k'}!}} |\{\alpha_k\}\rangle. \quad (1.17)$$

При $k = 3$ когерентные состояния (1.17) использовались в [?] для получения уравнений движения макроскопических векторов поляризации для трехуровневой неэквидистантной квантовой системы в условиях коллективного поведения (задача Дикке).

Для описания статистических свойств полей излучения Глаубером было введено диагональное представление матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ по когерентным состояниям:

$$\hat{\rho}(t) = \int P(t) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha, \quad (1.18)$$

часто называемое P -представлением или представлением Глаубера – Сударшана [16]. Это представление удобно для вычисления квантовых корреляционных и характеристических функций, например, при описании экспериментов с фотодетекторами, исследования формы контура линии излучения и функций когерентности различных порядков.

Метод динамической симметрии применяется к широкому кругу задач, имеющих различные группы симметрии [4-6]. Это диктует необходимость построения систем когерентных состояний для произвольных групп Ли. Метод построения таких систем, предложенный в [2], применим только к некомпактным группам и, кроме этого, построенное множество состояний неинвариантно относительно действия операторов представления группы. А.М. Переломовым [7,14] была предложена общая концепция построения систем

когерентных состояний для унитарных неприводимых представлений произвольной группы Ли – систем обобщенных когерентных состояний. Основная идея состоит в во введении системы состояний, которые порождаются действием операторов группового сдвига на некоторый фиксированный вектор. Фактически такие состояния были предложены еще в работе Дж. Клаудера [15], однако в то время не вызвали интереса (см. обзор [16], где изложена история вопроса и приведены репринты основных журнальных публикаций по этой теме). В обзорной работе Гилмора и соавторов [17] когерентные состояния строятся по схеме несколько отличающейся от подхода Переломова и рассмотрены важные приложения КС к расчету термодинамически равновесных систем. Современное состояние проблемы изложено в недавно опубликованных монографиях [18-22].

Следуя [14], разберем основные положения метода КС. Пусть G – произвольная группа Ли, $\hat{T}(g)$ – ее унитарное представление, действующее в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Пусть $|\Psi_0\rangle$ – некоторый фиксированный вектор пространства \mathcal{H} . Рассмотрим множество векторов $\{|\Psi_g\rangle\}$, где

$$|\Psi_g\rangle = \hat{T}(g)|\Psi_0\rangle, \quad (1.19)$$

а g пробегает всю группу G .

Пусть $H = \{h\}$ – множество элементов группы G , таких, что

$$\hat{T}(h)|\Psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\Psi_0\rangle. \quad (1.20)$$

Очевидно, что H есть подгруппа группы G . Когда подгруппа H максимальна, ее называют стационарной подгруппой состояния $|\Psi_0\rangle$. Два вектора, $|\Psi_{g_1}\rangle$ и $|\Psi_{g_2}\rangle$, отличаются друг от друга фазовым множителем ($|\Psi_{g_1}\rangle = e^{i\alpha}|\Psi_{g_2}\rangle$, $|e^{i\alpha}|^2 = 1$) или, иными словами, определяют одно и тоже состояние лишь в том случае, когда $g_1 = g_2h$, $h \in H$.

Из этой конструкции видно, что векторы $|\Psi_g\rangle$ для всех g , принадлежащих одному левому классу смежности G по H , отличаются друг от друга лишь фазовыми множителями и, следовательно, определяют одно состояние. Обозначим через X множество классов смежности G/H . Выбирая в каждом классе $X = gH$ по одному представителю $g(x)$ группы G , получаем множество состояний $\{|x\rangle\}$, где

$$|x\rangle = \hat{T}(g(x))|\Psi_0\rangle, x \in X = G/H, |x\rangle \in \mathcal{H}. \quad (1.21)$$

Системой обобщенных когерентных состояний типа $\{\hat{T}(g), |\Psi_0\rangle\}$ называют множество состояний $\{|x\rangle\}$, определенных согласно (1.21).

Отметим, что множество КС инвариантно относительно действия операторов $\hat{T}(g)$, т.е. оператор $\hat{T}(g)$ переводит одно когерентное состояние в другое.

Из определения системы КС следует, что ее свойства существенно зависят от выбора начального состояния $|\Psi_0\rangle$. В монографии Переломова [7] исследован вопрос о таком выборе $|\Psi_0\rangle$, чтобы состояния полученной системы были наиболее близки к классическим. Так, чтобы, например, для спиновых КС минимизировались величины

$$\Delta \hat{J}^2 = \Delta \hat{J}_1^2 + \Delta \hat{J}_2^2 + \Delta \hat{J}_3^2 = \langle \hat{J}^2 \rangle - \langle \vec{J} \rangle^2,$$

где $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ – операторы группы $SO(3)$, и доказывалось, что в этом случае

$$|\Psi_0\rangle = |j, j\rangle \quad \text{или} \quad |\Psi_0\rangle = |j, -j\rangle. \quad (1.22)$$

(Смысл векторов $|j, \pm j\rangle$ будет пояснен ниже).

Более общий способ выбора начального вектора $|\Psi_0\rangle$, применимый также для группы Гейзенберга - Вейля, осцилляторной группы и других нильпотентных и разрешимых групп, для некомпактных полупростых групп Ли, обладающих дискретными сериями представлений также описан в [7]. Идея метода заключается в расширении алгебры Ли \mathfrak{G} группы G до комплексной алгебры \mathfrak{G}^c и рассмотрении стационарной подалгебры B в \mathfrak{G}^c состояния $|\Psi_0\rangle$. Те векторы, для которых эта алгебра максимальна, и являются наиболее близкими к классическим (см., также [20,22]).

Рассмотрим построение и свойства системы КС на примере группы $SU(2)$, локально изоморфной группе вращений $SO(3)$, важной в приложениях и в дальнейшем контексте. Общие свойства системы КС, их связь с вопросами квантования и многочисленные физические приложения можно найти в [16].

Унитарное неприводимое представление $T(g)$ группы $SU(2)$ задается неотрицательным целым или полуцелым числом j :

$$T(g) = T^{(j)}(g), \quad \dim T^j = 2j + 1.$$

Инфинитезимальные операторы (генераторы) алгебры $SU(2)$ $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3$. Отметим, что оператор $\hat{J}_i (i = 1, 2, 3)$ описывает бесконечно малое вращение вокруг i -ой оси.

В пространстве представлений \mathcal{H}^j существует канонический базис $|j, m\rangle$, векторы которого являются векторами операторов \hat{J}_0 и квадратичного оператора Казимира

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2; \quad (1.23)$$

$$\hat{J}_0|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad \hat{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad j \geq m \geq -j. \quad (1.24)$$

Из этих операторов можно построить лестничные повышающие и понижающие инфинитезимальные операторы

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2, \quad \hat{J}_0 = \hat{J}_3 \quad (1.25)$$

представления $\hat{T}^j(g)$, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{J}_0, \hat{J}_{\pm}] = \pm\hat{J}_{\pm}; \quad [\hat{J}_-, \hat{J}_+] = -2\hat{J}_0. \quad (1.26)$$

В качестве фиксированного вектора $|\Psi_0\rangle$, для построения системы КС, наиболее близких к классическим, выберем вектор $|j, -j\rangle$ (1.22), который можно рассматривать как вакуумный

$$|\Psi_0\rangle = |j, -j\rangle \equiv |0\rangle. \quad (1.27)$$

Оператор представления $\hat{T}^j(g) = e^{-i\phi\hat{J}_1}e^{-i\theta\hat{J}_2}e^{-i\psi\hat{J}_3}$ можно записать в виде:

$$\hat{T}^j(g) = \hat{T}_{g_{\bar{n}}}^j \hat{T}^j(h), \quad (1.28)$$

где $g_{\bar{n}}$ – элемент однородного пространства $X = G/H = SU(2)/U(1)$, h – элемент подгруппы $U(1)$ диагональных матриц второго порядка, группы $SU(2)$.

Система КС будет определяться как

$$|\bar{n}\rangle = \hat{T}^j(g)|\Psi_0\rangle = \hat{T}^j(g)|0\rangle = \hat{T}^j(g_{\bar{n}})\hat{T}^j(h)|0\rangle = e^{i\alpha(\bar{n})}\hat{T}^j(g_{\bar{n}})|0\rangle \quad (1.29)$$

где $\bar{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, – единичный вектор,

$$\hat{T}^j(g_{\bar{n}}) = e^{i\theta(\bar{m}\vec{J})} \equiv \hat{D}(\bar{n}), \quad T \geq 0, \quad (1.30)$$

$\bar{m} = (\sin\phi, -\cos\phi, 0)$ – единичный вектор, перпендикулярный \bar{n} и $\bar{n}_0 = (0, 0, 1)$.

Обычно полагают фазовый множитель $e^{i\alpha(\bar{n})}$ равным единице и тогда

$$|\bar{n}\rangle = \hat{D}(\bar{n})|0\rangle = e^{i\theta(\bar{m}\vec{J})}|0\rangle. \quad (1.31)$$

Таким образом, КС (1.31) являются спиновым КС, введенными в [13]. Отметим также, что вектор \bar{n} задается на двухмерной сфере S^2 , которая является однородным пространством группы $SU(2)$:

$$S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2), \quad (1.32)$$

и может рассматриваться как фазовое пространство классического аналога квантовой частицы со спином j .

Для оператора $\hat{D}(\bar{n})$ существует несколько форм записи:

$$\hat{D}(\bar{n}) = \hat{D}(\xi) = e^{\xi \hat{J}_+ - \bar{\xi} \hat{J}_-}, \quad (1.33)$$

где $\xi = -\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}$;

$$\hat{D}(\xi) = e^{z \hat{J}_+} e^{\eta \hat{J}_0} e^{z' \hat{J}_-} \equiv \hat{D}(z), \quad z = -tg\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}, \quad (1.34)$$

$$\eta = -2lncos|\xi| = ln(1 + z\bar{z}), \quad z' = -\bar{z}.$$

Форма записи $\hat{D}(z)$ в виде (1.34) является записью оператора в "нормальном" виде. Действуя оператором $\hat{D}(z)$ на вакуумный вектор $|0\rangle \equiv |j, -j\rangle$, получим форму записи КС в комплексной параметризации

$$|z\rangle = (1 + z\bar{z})^{-j} e^{z \hat{J}_+} |0\rangle. \quad (1.35)$$

Геометрический смысл перехода от переменных θ и ϕ к переменной $z = -tg\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}$, состоит в стереографической проекции из южного полюса двумерной сферы S^2 на плоскость комплексного переменного z и последующего отражения относительно мнимой оси.

Операторы представления $\hat{T}^j(g)$ переводят одно КС в другое

$$\hat{T}^j(g)|z\rangle = e^{i\psi(z,g)}|z_g\rangle. \quad (1.36)$$

Обобщенные КС неортогональны друг другу

$$\langle z|w\rangle = [(1 + z\bar{z})(1 + w\bar{w})]^{-j} (1 + \bar{z}w)^{2j}. \quad (1.37)$$

Имеет место "разложение единицы":

$$\int_{\chi} d\mu_j(z) |z\rangle \langle z| = \hat{I}, \quad (1.38)$$

где инвариантная мера на однородном пространстве $\chi = SU(2)/U(1)$ записывается в виде

$$d\mu_j(z) = \frac{2j+1}{\pi} \frac{d^2z}{(1 + z\bar{z})^2}, \quad d^2z = dRe(z)dIm(z). \quad (1.39)$$

Генераторы группы действуют на КС следующим образом:

$$z \hat{J}_+ |z\rangle = (j + \hat{J}_0) |z\rangle, \quad (1.40)$$

$$\hat{J}_- |z\rangle = z(j - \hat{J}_0) |z\rangle. \quad (1.41)$$

Матричные элементы имеют вид:

$$\langle z|\hat{J}_3|w\rangle = -j \frac{1 - \bar{z}w}{1 + \bar{z}w} \langle z|w\rangle, \quad (1.42)$$

$$\langle z|\hat{J}_+|w\rangle = 2j\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}w}\langle z|w\rangle, \quad (1.43)$$

$$\langle z|\hat{J}_-|w\rangle = 2j\frac{w}{1+\bar{z}w}\langle z|w\rangle. \quad (1.44)$$

Ковариантные символы операторов (Q -символы) в представлении КС получаются из (1.42) - (1.44), если положить $w = z$. С помощью КС также удобно задавать и контрвариантные символы операторов (P -символы):

$$\hat{A} = \int_{\mathcal{X}} P_A(z, \bar{z})|z\rangle\langle z|d\mu_j(z), \quad (1.45)$$

которое для матрицы плотности имеет вид

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} P(z, \bar{z}, t)|z\rangle\langle z|\frac{2j+1}{\pi}\frac{d^2z}{(1+z\bar{z})^2}, \quad (1.46)$$

аналогичный (1.18), где она была записана в представлении глауберовских КС.

Зная $P(z, \bar{z}, t)$ – P -символ матрицы плотности, и используя представление когерентных состояний нетрудно вычислить характеристическую функцию

$$\chi(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\mathcal{X}} P(z, \bar{z}, t)d\mu_j(z)\langle z|e^{\alpha\hat{J}_+}e^{\beta\hat{J}_0}e^{\gamma\hat{J}_-}|z\rangle, \quad (1.47)$$

а по ней и среднее значение любого атомного оператора вида $\hat{J}_+^l \hat{J}_0^n \hat{J}_-^m$

$$\langle \hat{J}_+^l \hat{J}_0^n \hat{J}_-^m \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^l \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)^m \chi(\alpha, \beta, \gamma)|_{\alpha=\beta=\gamma=0}. \quad (1.48)$$

Такие средние значения от операторов, взятых в один и тот же момент времени, часто называют одновременными корреляторами. Отметим, что в пределе больших значений $j \rightarrow \infty$, КС переходят в глауберовские КС [13].

Выше отмечалась эффективность метода КС для физических задач, обладающих группой симметрии. Наиболее просто и естественно это удастся сделать в том случае, когда гамильтониан \hat{H} системы является линейным по генераторам \hat{A}_k представления $\hat{T}(G)$ этой группы

$$\hat{H} = \sum_k h^k \hat{A}_k. \quad (1.49)$$

Несмотря на простоту последнего выражения, ему соответствует достаточно широкий класс физических задач, в частности, оно выполняется для

квадратичных систем. Системы, для которых справедливо (1.49), получили название систем с "линейной" реализацией группы динамической симметрии.

В качестве физического приложения рассмотрим задачу о движении частицы произвольного спина j в переменном однородном магнитном поле или, эквивалентную ей в математическом аспекте, задачу об эволюции $2j + 1$ - уровневой эквидистантной системы, взаимодействующей с внешним классическим полем. Группа $SU(2)$ является группой динамической симметрии и гамильтониан рассматриваемой задачи можно представить в виде линейной комбинации генераторов этой группы [5]

$$\hat{H}(t) = A(t)\hat{J}_+ + \bar{A}(t)\hat{J}_- + B\hat{J}_0, \quad (1.50)$$

где A, \bar{A}, B – зависят от компонент переменного внешнего поля, магнитного момента и спина частицы или матричных элементов дипольного момента переходов между уровнями системы. В частности, $B = \hbar\omega_0$ – расстояние между уровнями.

Эволюция такой системы описывается уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle = A(t)\hat{J}_+ + \bar{A}(t)\hat{J}_- + B\hat{J}_0|\Psi(t)\rangle, \quad (\hbar = 1) \quad (1.51)$$

решение которого можно искать в виде:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\phi(t)}|z(t)\rangle, \quad (1.52)$$

где $|z(t)\rangle$ - КС, определенное согласно (1.35). С учетом (1.52), уравнение (1.51) принимает вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}|z(t)\rangle = (\hat{H} - \dot{\phi})|z(t)\rangle \quad (1.53)$$

и, с помощью (1.40) и (1.41), из (1.53) можно получить уравнения для $z(t)$ и $\phi(t)$:

$$i\dot{z} = A - \bar{A}z^2 + Bz, \quad (1.54)$$

$$\dot{\phi} = j(\bar{z}A + z\bar{A} - B). \quad (1.55)$$

Если в (1.52) в качестве вектора КС взять спиновое КС $|n\rangle$, то уравнение (1.54) принимает вид

$$\dot{\vec{n}} = -[\vec{a}(t), \vec{n}]. \quad (1.56)$$

Таким образом, метод КС позволяет квантовомеханическую задачу нахождения волновой функции свести к более простой классической задаче,

при этом плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ (или единичная сфера S^2) играют роль фазового пространства для классического аналога динамической системы и описывают динамику когерентных состояний.

Остановимся теперь на когерентных состояниях группы $SU(1, 1)$.

Группа $SU(1, 1)$ имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений, и, соответственно, можно построить несколько систем когерентных состояний для этой группы. Для нас далее представляют интерес представления так называемой положительной дискретной серии T_+^k , причем те, которые можно реализовать с помощью бозонных операторов рождения и уничтожения. Коммутационные соотношения, задающие алгебру Ли группы $SU(1, 1)$, выглядят следующим образом:

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, [\hat{K}_-, \hat{K}_+] = 2\hat{K}_0. \quad (1.57)$$

Инвариантный оператор

$$\hat{K}^2 = \hat{K}_0^2 - \frac{1}{2} (\hat{K}_+^2 \hat{K}_-^2 + \hat{K}_-^2 \hat{K}_+^2) = k(k-1)\hat{1}.$$

Принципиальным отличием группы $SU(1, 1)$ от $SU(2)$ является неодносвязность первой - т.е., если в группе $SU(2)$ каждый замкнутый путь может быть непрерывным образом деформирован в точку, то в группе $SU(1, 1)$ такая деформация невозможна. Поэтому при рассмотрении подобных групп переходят к рассмотрению их односвязных универсальных накрывающих, получаемых "склеиванием" необходимого количества экземпляров исходных групп, число которых определяется рангом фундаментальной группы $\pi_1(G)$ топологического пространства исходной группы Ли G .

В данном случае $\pi_1(SU(1, 1))$ изоморфна группе всех целых чисел Z , поэтому накрывающая группа $\widetilde{SU(1, 1)}$ содержит бесконечный центр Z и не является матричной группой [7].

Когерентное состояние имеет вид:

$$\begin{aligned} |\zeta \rangle &= (1 - |\zeta|^2)^k \exp(\zeta \hat{K}_+) |\psi_0 \rangle = \\ &= (1 - |\zeta|^2)^k \sum_m \sqrt{\frac{\Gamma(m+2k)}{m! \Gamma(2k)}} \zeta^m |k, k+m \rangle, \end{aligned}$$

где $|k, k+m \rangle$ - собственный вектор оператора \hat{K}_0 . Фактор-пространство в данном случае является двумерным гиперboloидом, и ζ допускает соответствующую угловую параметризацию. Разложение единицы

$$\int |\zeta \rangle \langle \zeta| \frac{2k-1}{\pi} \frac{d^2\zeta}{(1-|\zeta|^2)^2} = \hat{I}$$

существует для $k > 1/2$.

Вычисляя инвариантный оператор, можно установить, что для реализации операторов \hat{K}_0, \hat{K}_\pm через бозонные операторы рождения и уничтожения одной моды возможны два значения $k = 1/4$ и $k = 3/4$.

В самом деле, динамическая алгебра $su(1, 1)$ одномодового квантового осциллятора порождается тремя операторами

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{4} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+), \quad \hat{K}_+ = \frac{1}{2} \hat{a}^+ \hat{a}^+, \quad \hat{K}_- = \frac{1}{2} \hat{a} \hat{a},$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.57)

Операторы из алгебры Ли $su(1, 1)$ являются билинейными комбинациями обычных операторов рождения и уничтожения возбуждений осциллятора. Поэтому, при действии на собственный вектор гамильтониана осциллятора (фоковское состояние $|n\rangle$) сохраняется четность состояния. (Все собственные состояния осциллятора характеризуются квантовым числом "четность": состояния с четным $n = 0, 2, 4, \dots$ являются "четными" а состояния с нечетным $n = 1, 3, 5, \dots$ "нечетными". В координатном представлении "четность" волновой функции связана с тем, как ведет себя волновая функция осциллятора при преобразовании инверсии $x \rightarrow -x$ (сохраняет или изменяет знак).)

Как уже было отмечено, алгебра $su(1, 1)$ имеет инвариантный оператор $\hat{K}^2 = \hat{K}_0^2 - \frac{1}{2}(\hat{K}_+ \hat{K}_- + \hat{K}_- \hat{K}_+)$, собственное значение которого стандартно записывается в виде $k(k-1)$. Действуя оператором \hat{K}^2 на произвольный вектор $|n\rangle$, легко проверить, что $\hat{K}^2 |n\rangle = -\frac{3}{16} |n\rangle$.

Приравнивая $k(k-1) = -\frac{3}{16}$, получаем два значения k : $k_1 = \frac{1}{4}$, $k_2 = \frac{3}{4}$. С другой стороны, в теории представлений группы $SU(1, 1)$ собственный вектор диагонального оператора \hat{K}_0 задается равенством:

$$\hat{K}_0 |k, m\rangle = (k+m) |k, m\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Сопоставляя это равенство с аналогичным соотношением для оператора числа возбуждений $\hat{a}^+ \hat{a}$, получаем, что всем "четным состояниям" соответствует значение $k = \frac{1}{4}$, а "нечетным" — $k = \frac{3}{4}$.

Обойти проблемы, связанные с построением инвариантной меры в разложении единицы для первого из значений k , может помочь "трюк Герри" [34] (см., также, [6]).

Он состоит в использовании соотношения

$$\langle 0 | \hat{I} | 0 \rangle = 1 = \frac{|2k-1|}{\pi} \int (1 - \zeta \bar{\zeta})^{|2k-1|+1} \frac{d^2 \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta})^2}.$$

Другими словами, для $k < \frac{1}{2}$ нужно сделать замену $2k \rightarrow |2k-1| + 1$.

Глава 2

Интегралы по траекториям в голоморфном представлении и квазиклассическая динамика

Подход, основанный на использовании фейнмановских интегралов [23] по траекториям (континуальных интегралов), является одним из наиболее важных и используемых в теоретической физике. Это объясняется тем, что он является интуитивно наглядным и универсальным. С его помощью легко записываются ряды теории возмущений, находятся квазиклассические асимптотики квантовых величин, а также получаются важные результаты, справедливые за пределами применимости теории возмущений в физике высоких энергий, теории систем многих частиц и в квантовой оптике.

Обычно для записи континуального интеграла вводят амплитуду перехода между начальным и конечным состояниями в координатном представлении и выражают его либо в лагранжевой форме, используя координатное представление, либо в виде интеграла по путям в фазовом пространстве [23-27].

Формулировка квантовой механики Р.Фейнманом на основе интегралов по траекториям (или континуальных интегралов) широко применяется и в представлении КС [15].

Имеется, однако, альтернативная формулировка интегралов по траекториям в фазовом пространстве, в которой используются амплитуды перехода между начальными и конечными глауберовскими когерентными состояниями [24]. Это представление интегралов по траекториям оказалось очень полезным при анализе бозонных систем. Большую роль здесь играет то обстоятельство, что глауберовские КС являются одним из тех базисов в пространстве векторов состояний квантовой системы, которые наиболее близки к классическим. Преимуществом такого представления является то, что в нем функция Грина не имеет особенностей, и для квантовых систем, гамильтониан которых является квадратичной формой по бозонным операторам рождения и уничтожения, вычисляется точно, так как все промежуточные интегралы

являются гауссовыми. Так, в [25] метод континуального интегрирования применялся для описания явлений сверхтекучести бозе- и ферми-систем, сверхизлучательных фазовых переходов, динамики одномодовой многоуровневой модели взаимодействия света с веществом. В [5,6] изучались квантовые системы, традиционные в квантовой оптике: вырожденный параметрический усилитель и двухмодовый параметрический усилитель. Для них было найдено точное выражение для пропагатора – временной функции Грина (ядра оператора эволюции) и указан способ вычисления двухвременных корреляционных функций разных порядков.

Дж. Р. Клаудером (см. [16]) были введены континуальные интегралы в представлении блоховских (спиновых) КС на группе $SU(2)$, причем использовалась параметризация КС точкой на единичной двумерной сфере $S_2 : |\theta, \varphi\rangle$. В работах Х. Курацуджи и соавторов рассматривались интегралы по траекториям в представлении спиновых КС с использованием комплексной параметризации ($|z\rangle, z \in \mathbb{C}$). Изучалась квазиклассическая асимптотика построенных интегралов по траекториям и было установлено, что она приводит к классической динамике в искривленном фазовом пространстве – двумерной сфере $S_2 = \bar{C}$. В статье [31] в задаче о распутывании оператора эволюции квантовой системы, взаимодействующей с бозонным полем, были введены континуальные интегралы более общего вида в представлении КС на простых группах Ли.

Теоретико-групповые методы были использованы также Кляйнертом [30] М.С. Мариновым и М.В. Терентьевым в работе [27], где изучались континуальные интегралы на компактных простых группах Ли и на сферах произвольной размерности, но в отличие от работ [16,32], континуальные интегралы строились в рамках лагранжевого формализма.

Далее проведен обзор методов нахождения интеграла по траекториям в представлении КС группы G , являющейся динамической группой квантового гамильтониана (мы следуем здесь работам [26,28,29,31-33]). Когерентные состояния на группе G строятся с использованием метода голоморфных функций, аналогично голоморфному представлению, известному для глауберовских КС. Такой подход обладает тем преимуществом, что позволяет естественно ввести симплектическую структуру на однородном пространстве группы G , параметризующем КС, превратив его в фазовое пространство классического аналога исследуемой квантовой задачи и использовать мощные гамильтоновы методы, разработанные в классической механике [35].

Теория, которая развивается далее, справедлива (помимо глауберовских КС) для КС, связанных с унитарными представлениями компактных полупростых групп Ли и представлениями унитарных дискретных серий некомпактных полупростых групп. Мы будем рассматривать модельные гамильто-

нианы с дискретным спектром и ограничимся случаем квадратично интегрируемых КС.

Кроме того, мы покажем, что интегралы по траекториям из работ [16,32,34] имеют лишь квазиклассический смысл, а именно, пригодны лишь для получения квазиклассических асимптотик.

2.1 Гауссовы пакеты и гамильтоновы интегралы по путям

Построение гамильтоновых интегралов по траекториям для квантовой системы, описываемой стандартными операторами координаты \hat{x}_α и импульса \hat{p}_α с коммутационными соотношениями:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha] = i \hbar \delta_{\alpha\beta} \hat{I}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n,$$

становится почти автоматическим и элегантным после введения в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} набора состояний $|P, Q\rangle$, которым в координатном x -представлении соответствуют функции из $L_2(\mathbb{R}_n)$:

$$\langle x|P, Q\rangle = (\pi \hbar)^{-n/4} \exp \left\{ \left[i P \cdot x - \frac{1}{2} (x - Q)^2 \right] / \hbar \right\}, \quad (2.1)$$

и сопоставления каждому оператору $\hat{F} = F(\hat{p}, \hat{x})$ среднего значения

$$F(P, Q) = \langle P, Q | \hat{F} | P, Q \rangle.$$

Состояния $|P, Q\rangle$ связаны с орбитой представления $\hat{T}(P, Q, \lambda)$ группы Гейзенберга - Вейля и являются знаменитыми когерентными состояниями Глаубера [11,12]

$$|P, Q\rangle = e^{-i\lambda/\hbar} \hat{T}(P, Q, \lambda) |0\rangle, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{T}(P, Q, \lambda) &= \exp(i\lambda\hat{I}/\hbar) \exp(iP \cdot \hat{x}/\hbar) \exp(-iQ \cdot \hat{p}/\hbar), \\ |0\rangle \rightarrow \langle x|0\rangle &= (\pi \hbar)^{-n/4} \exp(-x^2/2\hbar) - \end{aligned}$$

вакуумный вектор. Замечательным свойством когерентных состояний $|P, Q\rangle$ является то, что они удовлетворяют соотношению полноты (разлагают единицу), т.е.

$$\int \langle x|P, Q\rangle \langle P, Q|x'\rangle \prod \frac{dP_\alpha dQ_\alpha}{2\pi\hbar} = \delta_{(n)}(x - x'). \quad (2.3)$$

Далее, при вычислении пропагатора

$$\langle x|\hat{U}(t, t')|x'\rangle = \mathcal{K}(x, t|x', t')$$

нужно разбить интервал $t - t'$ на малые участки $\Delta t = (t - t')/m$ и представить оператор эволюции в виде m -кратного упорядоченного произведения экспонент

$$\begin{aligned}\hat{U}(t_k, t_{k-1}) &= T_D \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \hat{H}(\tau) d\tau \right\} \approx \\ &\approx \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \hat{H}(\tau) d\tau + O(|\Delta t|),\end{aligned}$$

Вставляя между соседними операторами $\hat{U}(t_{k+1}, t_k) \hat{U}(t_k, t_{k-1})$ единичный оператор

$$\hat{I} = \int |P(t_k), Q(t_k)\rangle \langle P(t_k), Q(t_k)| \prod_{\alpha} \frac{dP_{\alpha} dQ_{\alpha}}{2\pi\hbar},$$

вычисляем матричные элементы

$$\begin{aligned}&\langle P(t_k), Q(t_k) | \hat{U}(t_k, t_{k-1}) | P(t_{k-1}), Q(t_{k-1}) \rangle \simeq \\ &\simeq \langle P(t_k), Q(t_k) | P(t_{k-1}), Q(t_{k-1}) \rangle \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{H}(P(t_k), Q(t_k); P(t_{k-1}), Q(t_{k-1})) d\tau \right\},\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{H}(P, Q; P', Q') = \langle P, Q | \hat{H} | P', Q' \rangle / \langle P, Q | P', Q' \rangle,$$

переходим к пределу $m \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$. В результате получается хорошо известное выражение для пропагатора в виде интеграла по траекториям в фазовом пространстве соответствующей классической задачи, заданной функцией Гамильтона $\mathcal{H}(P, Q) = \langle P, Q | \hat{H} | P, Q \rangle$. Наиболее корректно эта процедура излагается на языке вейлевских символов [28,29], при этом необходимо тщательно учитывать свойства допредельного выражения. Последнее проявляется в том, что функция действия в интеграле по траекториям имеет несколько необычный вид - содержит скачки аргументов, А это, в свою очередь, связано с тем, что главный вклад в интеграл по траекториям дают негладкие пути [28].

Итак, имеется следующий важный результат:

Если квантовым операторам ставятся в соответствие вейлевские символы - функции на фазовом пространстве, то символ оператора эволюции представляется в виде интеграла по траекториям в фазовом пространстве.

Может создаться впечатление, что изложенный метод проходит для любых квантовых задач. В том, что это не совсем так легко убедиться, занявшись,

например, описанием спиновых систем. Тривиальной причиной невозможности записи стандартного интеграла по траекториям является то, что спиновые операторы нельзя выразить через операторы координат и импульсов. Точно также выглядит ситуация с вторично квантованными фермионными гамильтонианами.

С другой стороны, хорошо известно [35], что $2n$ -мерное евклидово пространство \mathbb{R}_{2n} , $((P, Q) \in \mathbb{R}_{2n})$ является лишь самым простым примером фазовых пространств классических гамильтоновых систем (симплектических многообразий) и имеется задача о квантовании в рамках метода интегралов по траекториям симплектических многообразий, не сводящихся к \mathbb{R}_{2n} .

2.2 Символы операторов и интегралы по траекториям

Приступим, теперь, к построению интегралов по траекториям в представлении групповых когерентных состояний, основываясь, главным образом, на работах [6,9,31-33].

Пусть для некоторой квантовой задачи найдена динамическая группа гамильтониана \hat{H} . Будем понимать под этим утверждением, что в пространстве всех состояний системы действует унитарное неприводимое представление группы G , а гамильтониан \hat{H} удалось выразить в виде полиномиальной операторнозначной функции самосопряженных генераторов представления $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_r$:

$$\hat{H} = \sum_{s_1, \dots, s_r} \omega_{s_1 \dots s_r} \hat{A}_1^{s_1} \dots \hat{A}_r^{s_r}. \quad (2.4)$$

(Здесь r — число параметров в группе G .)

Гамильтонианы вида (2.4) появляются, например, при исследовании многочастичных задач после перехода к представлению вторичного квантования. Коэффициенты разложения $\omega_{s_1 \dots s_r}$ могут явно зависеть от времени (при учете воздействия на квантовую систему внешних классических полей).

Согласно принципам квантовой механики информация о динамике системы заключена в матричных элементах оператора эволюции:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T}_D \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\tau) d\tau \right]. \quad (2.5)$$

При вычислении матричных элементов оператора эволюции для гамильтонианов вида (2.4) будем использовать базис когерентных состояний на группе G [4,7,20], задаваемый орбитой представления группы G на фиксированном векторе $|0\rangle$ со стационарной подгруппой G_0 , а именно:

$$\forall g_\xi \in \mathcal{X} = G/G_0 \longmapsto |\xi\rangle = \hat{T}(g_\xi)|0\rangle,$$

то есть, когерентные состояния нумеруются точками однородного пространства группы (фактор-пространства G/G_0).

Известно [35,36], что однородные пространства классических комплексных групп Ли могут быть наделены комплексной структурой и на пространстве $\mathcal{X} = G/G_0$ можно ввести локальные комплексные координаты, т.е.

$$\xi \longmapsto z \equiv (z^1, \dots, z^n), \quad 2n = \dim(G/G_0).$$

После проведения комплексификации гильбертово пространство состояний удобно реализовать в виде пространства голоморфных функций со скалярным произведением [32]:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{X}} \bar{\Psi}_1(z) \Psi_2(z) \exp[-\rho(z, \bar{z})] d\mu(z, \bar{z}),$$

где

$$|\Psi\rangle \longmapsto \Psi(z) = \langle z | \Psi \rangle / \langle z | 0 \rangle, \quad |z\rangle \equiv |\xi(z^1, \dots, z^n)\rangle,$$

$$\rho(z, \bar{z}) = 2 \ln |\langle z | 0 \rangle|,$$

а $d\mu(z, \bar{z})$ – (право) инвариантная мера на \mathcal{X} .

Для любой голоморфной функции $\Psi(z)$ выполняется соотношение:

$$\Psi(z) = \int_{\mathcal{X}} K(z, \bar{w}) \Psi(w) \exp[-\rho(w, \bar{w})] d\mu(w, \bar{w}), \quad (2.6)$$

где

$$K(z, \bar{w}) = \langle z | w \rangle / \langle z | 0 \rangle \langle 0 | w \rangle$$

- воспроизводящееся ядро, аналогичное в пространстве голоморфных функций δ - функции Дирака. Функция $K(z, \bar{w})$ известна в литературе, как функция Бергмана [36]. Ядро Бергмана позволяет ввести в пространстве $\mathcal{X} = G/G_0$ инвариантную дифференциальную 2-форму:

$$\omega^2 = i \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \quad (2.7)$$

которая определяет на \mathcal{X} симплектическую структуру многообразия Кэлера.

Каждому оператору \hat{F} , определенному в пространстве векторов состояния системы (пространстве неприводимого представления группы G), поставим в соответствие так называемый ковариантный символ $\mathcal{F}(z, \bar{z})$ по аналогии с работой Ф.А. Березина [28]. При этом

$$\left(\hat{F} \Psi \right) (z) = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{F}(z, \bar{w}) \frac{K(z, \bar{w})}{K(w, \bar{w})} \Psi(w) d\mu(w, \bar{w}), \quad (2.8)$$

где

$$\mathcal{F}(z, \bar{w}) = \frac{\langle z | \hat{F} | w \rangle}{\langle z | w \rangle}. \quad (2.9)$$

Прямым вычислением легко проверить, что произведению операторов (если оно определено)

$$\hat{F} = \hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2,$$

ставится в соответствие свертка их символов:

$$\mathcal{F}(z, \bar{z}) = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{F}_1(z, \bar{w}) \mathcal{F}_2(w, \bar{z}) \frac{K(z, \bar{w}) K(w, \bar{z})}{K(z, \bar{z}) K(w, \bar{w})} d\mu(w, \bar{w}). \quad (2.10)$$

Используя 2-форму ω^2 , можно ввести на множестве всех ковариантных символов скобку Пуассона:

$$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}(z, \bar{z}) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha, \bar{\beta}} g^{\alpha \bar{\beta}} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z^\alpha} \right] \quad (2.11)$$

При этом

$$\sum_{\beta} g_{\alpha \bar{\beta}} g^{\bar{\beta} \lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda}, \quad \sum_{\alpha} g_{\alpha \bar{\beta}} g^{\alpha \bar{\lambda}} = \delta_{\beta}^{\lambda},$$

где

$$g_{\alpha \bar{\beta}} = \partial^2 \ln K(z, \bar{z}) / \partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta.$$

Построенная скобка Пуассона позволяет изучать классическую динамику, соответствующую исследуемой квантовой задаче - фазовые потоки на многообразии \mathcal{X} .

Используя формулы (2.10)-(2.11) и воспользовавшись процедурой, аналогичной той, что изложена выше, можно показать, что [32] ковариантный символ оператора эволюции (2.5) приводится к виду интеграла по траекториям в многообразии Кэлера. В самом деле, если моменты времени t_0 и t достаточно близки, то оператору эволюции на бесконечно малый интервал времени Δt можно сопоставить ковариантный символ

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t_0 + \Delta t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathcal{H}(z, \bar{z} | \tau) d\tau \right], \quad (2.12)$$

где $\mathcal{H}(z, \bar{z} | \tau)$ — ковариантный символ гамильтониана \hat{H} , отыскание которого сводится к расчету матричных генераторов динамической группы по когерентным состояниям $\langle z | \hat{A}_k | z \rangle$.

Если $t - t_0$ не мало, то разбивая интервал $[t - t_0]$ на m частей $\Delta t = (t - t_0)/m$ и используя хорошо известное групповое свойство для оператора эволюции, аппроксимируем ковариантный символ $\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0)$ m -кратной

сверткой символов вида (2.12):

$$\mathcal{U}^{(m)}(z, \bar{z}|t, t_0) = \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}^{(m)} \right] \prod_{k=1}^{m-1} d\mu(z_k, \bar{z}_k), \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(m)} = \frac{\hbar}{i} \left\{ \sum_{l=1}^m \left[\ln K(z_{l-1}, \bar{z}_l) - \frac{1}{2} \ln K(z_{l-1}, \bar{z}_{l-1}) - \frac{1}{2} \ln K(z_l, \bar{z}_l) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2} \ln K(z_m, \bar{z}_m) - \frac{1}{2} \ln K(z_0, \bar{z}_0) - \sum_{l=1}^m \int_{t_{l-1}}^{t_l} \mathcal{H}(z_{l-1}, \bar{z}_l|\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поступая далее обычным для физиков образом, т.е. сделав подстановку $z(t_l) = z(t_{l-1}) + \Delta z_l$, ($z(t_l) \equiv z_l$), разлагая слагаемые из $\mathcal{S}^{(m)}$ в ряд по степеням Δz , удерживая слагаемые только первого порядка малости и выполнив формальный предельный переход к $m \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$, получаем ковариантный символ в виде интеграла по траекториям на пространстве $\mathcal{X} = G/G_0$:

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}|t, t_0) = \int \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S} \right) \prod_{t_0 < \tau < t} d\mu(z(\tau), \bar{z}(\tau)), \quad (2.15)$$

где действие \mathcal{S} имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int_{t_0}^t \left\{ i\hbar \sum_{\alpha=1}^n [\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha}(\tau+0) \dot{z}^{\alpha}(\tau) - \mathcal{Z}_{\alpha}(\tau) \dot{\bar{z}}^{\alpha}(\tau)] - \mathcal{H}(z(\tau), \bar{z}(\tau+0)|\tau) \right\} d\tau - \\ - \frac{i\hbar}{2} \ln \left[\frac{K(z(t), \bar{z}(t))}{K(z(t_0), \bar{z}(t_0))} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В (2.16) введены обозначения

$$\mathcal{Z}_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\alpha}} \ln K(w, \bar{w}) \Big|_{\bar{w}=\bar{z}(\tau)}, \quad \bar{\mathcal{Z}}_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w^{\alpha}} \ln K(w, \bar{w}) \Big|_{\bar{w}=\bar{z}(\tau+0)}.$$

Сдвиги в аргументах выражения (2.16) отражают способ задания допредельного выражения (2.14).

2.3 Квазиклассическое приближение и гамильтоновы уравнения в пространствах Кэлера

Покажем, что несмотря на то, что выражение (2.15) выглядит аналогично стандартному гамильтонову интегралу по траекториям (с заменой вейлевского символа гамильтониана на ковариантный символ \mathcal{H} и 1-формы $\sum_{\alpha} P_{\alpha} dQ_{\alpha}$

на 1- форму $\sum_{\alpha} [\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha} dz^{\alpha} - \mathcal{Z}_{\alpha} d\bar{z}^{\alpha}]$, тем не менее в представленной форме оно может претендовать только на описание квазиклассического предела ($\hbar \rightarrow 0$) и, к сожалению, не пригодно вне его рамок.

Рассмотрим вначале задачу о подсчете квазиклассического символа оператора эволюции. Известно, что для его отыскания можно воспользоваться методом стационарной фазы. Это приближение, реализованное для континуального интеграла (2.15), приводит к квазиклассическому фейнмановскому пропагатору:

$$\mathcal{U}_{cl}(z, \bar{z}|t, t_0) = \tilde{\mathcal{U}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{cl}\right), \quad (2.17)$$

где \mathcal{S}_{cl} — действие, вычисленное вдоль классической траектории, определяемой уравнениями Гамильтона:

$$\dot{z}^{\alpha} = \{z^{\alpha}, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\bar{z}}^{\alpha} = \{\bar{z}^{\alpha}, \mathcal{H}\}; \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Уравнения (2.18) естественно получаются как следствие условия $\delta \mathcal{S} = 0$ и их нужно решать с двухточечными граничными условиями:

$$z(t_0) = z, \quad \bar{z}(t) = \bar{z}.$$

В свою очередь, предэкспоненциальный множитель $\tilde{\mathcal{U}}$ также имеет вид интеграла по путям:

$$\tilde{\mathcal{U}} = \sqrt{\frac{K(z(t), \bar{z}(t))}{K(z(t_0), \bar{z}(t_0))}} \cdot \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \delta^{(2)} \mathcal{S}\right\} \prod_{t_0 < \tau < t} \mu(z_{cl}, \bar{z}_{cl}) \prod_{\alpha=1}^n dRe\xi^{\alpha}(\tau) dIm\xi^{\alpha}(\tau). \quad (2.19)$$

Здесь $\delta^{(2)} \mathcal{S}$ — вторая вариация функционала действия:

$$\delta^{(2)} \mathcal{S} = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{i\hbar}{4} \sum_{\alpha\beta} \left[\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\tau) \dot{\xi}^{\alpha} \xi^{\beta} + \mathcal{M}_{\alpha\bar{\beta}}(\tau) \dot{\xi}^{\alpha} \bar{\xi}^{\beta} - \mathcal{M}_{\bar{\alpha}\beta}(\tau) \dot{\bar{\xi}}^{\alpha} \xi^{\beta} - \mathcal{M}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau) \dot{\bar{\xi}}^{\alpha} \bar{\xi}^{\beta} - \mathcal{N}_{\alpha\beta}(\tau) \xi^{\alpha} \xi^{\beta} - \mathcal{N}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau) \bar{\xi}^{\alpha} \bar{\xi}^{\beta} \right] \right\} d\tau. \quad (2.20)$$

Здесь введены обозначения

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\tau) = \left(\frac{\partial^2 \ln K}{\partial z^{\alpha} \partial z^{\beta}} \right) \Big|_{\substack{z=z_{cl}(\tau) \\ \bar{z}=\bar{z}_{cl}(\tau)}}, \quad \mathcal{M}_{\alpha\bar{\beta}}(\tau) = \left(\frac{\partial^2 \ln K}{\partial z^{\alpha} \partial \bar{z}^{\beta}} \right) \Big|_{\substack{z=z_{cl}(\tau) \\ \bar{z}=\bar{z}_{cl}(\tau)}},$$

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau) = \bar{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}(\tau),$$

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(\tau) = \bar{\mathcal{N}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\tau) = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} - \frac{i\hbar}{4} \sum_{\gamma} \frac{\partial^3 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta \partial z^\gamma} \dot{z}^\gamma \right]_{\bar{z}=\bar{z}_{cl}(\tau)}^{z=z_{cl}(\tau)}.$$

Кроме того,

$$d\mu(z, \bar{z}) \equiv \mu(z, \bar{z}) \prod_{\alpha} d \operatorname{Re} z^{\alpha} d \operatorname{Im} z^{\alpha}$$

и через ξ^{α} , $\bar{\xi}^{\alpha}$ обозначены вариации траекторий, т.е. их отклонения от экстремальных (классических) путей, удовлетворяющих уравнениям (2.18):

$$\xi^{\alpha} = z^{\alpha} - z_{cl}^{\alpha}, \quad \bar{\xi}^{\alpha} = \bar{z}^{\alpha} - \bar{z}_{cl}^{\alpha}.$$

С использованием пропагатора (2.17) можно получить обобщение условия квантования Бора - Зоммерфельда на случай классической динамики в фазовом пространстве, являющимся многообразием Кэлера. Для этого запишем квазиклассический символ оператора эволюции в виде:

$$\mathcal{U}_{cl} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\mathcal{S}_{cl} + \frac{\hbar}{i} \ln \tilde{\mathcal{U}} \right) \right\} \quad (2.21)$$

и вычислим изменение его фазы вдоль замкнутой классической орбиты Γ . Находим, что

$$\Delta \mathcal{S}_{cl} = i \hbar \sum_{\alpha=1}^n \oint_{\Gamma} (\bar{\mathcal{Z}}_{\alpha} dz^{\alpha} - \mathcal{Z}_{\alpha} d\bar{z}^{\alpha}) \quad (2.22)$$

или, с учетом теоремы Стокса [35]

$$\Delta \mathcal{S}_{cl} = 2 \hbar \int_{\Sigma_{\Gamma}} \omega^2 \equiv \hbar \sum_{\alpha, \beta} \int_{\Sigma_{\Gamma}} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z^{\alpha} \partial \bar{z}^{\beta}} dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}.$$

Интеграл от 2-формы ω^2 вычисляется по поверхности Σ_{Γ} , охваченной замкнутой траекторией Γ .

Изменение $\Delta \ln \tilde{\mathcal{U}}$ вдоль траектории Γ определяется (согласно Келлеру [37]) числом сингулярностей $\tilde{\mathcal{U}}$. Если число фокальных точек на траектории равно ν , то полное изменение $\ln \tilde{\mathcal{U}}$ равно $i\nu\pi/2$. Требуя, чтобы пропагатор \mathcal{U}_{cl} был однозначным при обходе классического пути, получаем:

$$2 \int_{\Sigma_{\Gamma}} \omega^2 = \pi \left(2n + \frac{\nu}{2} \right), \quad 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Поскольку $\Sigma_{\Gamma} = \Sigma_{\Gamma}(E)$, где E — энергия классической системы, соответствующей орбите Γ , то формулу (2.23) можно использовать для нахождения квазиклассических уровней энергии системы, заданной гамильтонианом (2.4).

Отметим, что для компактной динамической группы G "площадь" поверхности в (2.23) не может превосходить некоторой конечной величины и это приводит к ограниченности дискретного спектра гамильтониана (последнее согласуется с тем, что унитарные неприводимые представления компактной группы конечномерны).

При явном использовании формулы (2.4) возникает задача подсчета числа ν (индекса Маслова - Морса пути Γ на многообразии \mathcal{X}). При физическом подходе она упирается в нахождение предэкспоненты $\tilde{\mathcal{U}}$, вычисление которой, в принципе, проводится явно, т.к. $\tilde{\mathcal{U}}$ определяется гауссовым интегралом по траекториям.

2.4 Нестандартные члены и проблема выхода за рамки квазиклассики

В предыдущем разделе было показано, что введенные ранее интегралы по траекториям дают корректную квазиклассику. Интересно, что для систем с линейным гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{A}_k$$

квазиклассические уравнения (2.18) являются точными в том смысле, что они совпадают с уравнениями, задающими эволюцию во времени когерентного состояния. Они появляются как следствие уравнения Шредингера, в котором вектор состояния ищется в виде:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\phi(t)) |z(t)\rangle.$$

Попытаемся теперь применить введенные интегралы по траекториям для выхода за рамки квазиклассики. (Хорошо известно, что это возможно для обычных интегралов по траекториям, записанных, например, с использованием вейлевских символов [29].)

Рассмотрим задачу вычисления точного фейнмановского пропагатора. Как известно, эта проблема является одной из самых трудных в методе интегралов по траекториям. Встанем на ту точку зрения, что (2.15) можно понимать как некоторым образом определенный предел конечнократного интеграла, и рассмотрим конечнократную аппроксимацию выражения (2.15). В результате несложных вычислений получаем:

$$\mathcal{U}'(z, \bar{z}|t, t_0) = \int \cdots \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}'^{(m)}\right] \prod_{l=1}^{m-1} d\mu(z_l, \bar{z}_l), \quad (2.24)$$

где

$$\mathcal{S}'^{(m)} = -i\hbar \sum_{l=1}^m \left\{ \bar{\mathcal{Z}}_\alpha(t_l)[z^\alpha(t_l) - z^\alpha(t_{l-1})] - \mathcal{Z}_\alpha(t_{l-1})[\bar{z}^\alpha(t_l) - \bar{z}^\alpha(t_{l-1})] \right\} - \\ - \frac{i\hbar}{2} \ln \left[\frac{K(z_m, \bar{z}_m)}{K(z_0, \bar{z}_0)} \right] - \sum_{l=1}^m \int_{t_{l-1}}^{t_l} \mathcal{H}(z_{l-1}, \bar{z}_l | \tau) d\tau.$$

Очевидно, что (2.24) не совпадает с правильной допредельной формулой (2.13). (Мы рассматриваем общий случай, когда $\mathcal{X} \neq \mathbb{C}_n$. Если же ограничиться случаем глауберовских когерентных состояний, то формулы (2.24) и (2.13) эквивалентны.)

Более того, при выполнении каждого из интегрирований в (2.24) возникают неустранимые расходимости, которых нет при аналогичном интегрировании в (2.13). Причина такого поведения континуального интеграла (2.15) состоит в том, что многообразии Кэлера G/G_0 является пространством с кривизной, что чисто технически проявляется в том, что логарифм воспроизводящего ядра $K(z, \bar{w})$ не является билинейной функцией, как в случае глауберовских когерентных состояний, связанных с плоским многообразием \mathbb{C}_n .

Возможный выход из этого затруднения состоит в том, чтобы при выполнении предельного перехода от (2.13) к (2.15) удерживать в разложении $\mathcal{S}^{(m)}$ по степеням Δz дополнительные слагаемые, для того, чтобы получающийся интеграл по траекториям допускал восстановление допредельного выражения (2.13). Это требование приводит к тому, что модифицированный интеграл по траекториям принимает вид:

$$\mathcal{U}(z, \bar{z} | t, t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_\epsilon \right) \prod_{t_0 < \tau < t} d\mu(z(\tau), \bar{z}(\tau)), \quad (2.25)$$

при этом

$$\mathcal{S}_\epsilon = \mathcal{S} + \Delta \mathcal{S}(\epsilon),$$

где \mathcal{S} - "стандартное" действие, задаваемое формулой (2.16), а $\Delta \mathcal{S}(\epsilon)$ обозначает сумму всех нестандартных слагаемых (которые отсутствуют в случае интеграла по траекториям в представлении глауберовских когерентных состояний):

$$\Delta \mathcal{S}(\epsilon) = -\frac{i\hbar}{2} \cdot \sum_{l_1 + \dots + l_n = 2}^{\infty} \left\{ \frac{\epsilon^{l_1 + \dots + l_n - 1}}{(l_1 + \dots + l_n)!} \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n} \ln K(z(\tau), \bar{z}(\tau))}{(\partial \bar{z}^1)^{l_1} \dots (\partial \bar{z}^n)^{l_n}} \cdot (\dot{z}^1(\tau))^{l_1} \dots (\dot{z}^n(\tau))^{l_n} + \right. \right.$$

$$+(-1)^{l_1+\dots+l_n} \cdot \frac{\partial^{l_1+\dots+l_n} \ln K(z(\tau+0), \bar{z}(\tau+0))}{(\partial z^1)^{l_1} \dots (\partial z^n)^{l_n}} \cdot (\dot{z}^1(\tau))^{l_1} \dots (\dot{z}^n(\tau))^{l_n} \Big] d\tau \Big\}. \quad (2.26)$$

При вычислении вдоль гладкой классической траектории нестандартные слагаемые исчезают, именно поэтому некорректный интеграл по траекториям (2.15) приводит к правильной асимптотике.

Конкретные примеры построения интегралов по траекториям для систем с динамической группой гамильтониана разобраны нами в работах [6,9,31-33] (см., также [40,41]). Имеется ряд задач, для которых заранее известен правильный вид ковариантного символа оператора эволюции. К их числу относятся, например, квантовые системы с линейным по генераторам динамической группы гамильтонианом, поскольку в этом случае ковариантный символ сводится к матричному элементу оператора представления группы G , описывающего временную эволюцию. Поэтому такие задачи можно использовать для проверки соотношения (2.25). Так, вычисление символа \mathcal{U} по формуле (2.25) для задачи о спине во внешнем (постоянном) и однородном магнитном поле приводит к правильному фейнмановскому пропагатору в представлении когерентных состояний на группе $SU(2)$. В статье [40] близкий подход применен для расчетов амплитуд переходов и статистических сумм квантовых систем с динамическими группами $SU(2)$ и $SU(1,1)$.

Для примера приведем расчеты фейнмановских пропагаторов одномерного гармонического осциллятора (свободного и взаимодействующего с внешней классической силой) и частицы со спином j во внешнем однородном и постоянном магнитном поле.

2.5 Фейнмановский пропагатор гармонического осциллятора

Сначала рассмотрим более простой случай свободного гармонического осциллятора.

Его фейнмановский пропагатор в представлении глауберовских когерентных состояний определен матричным элементом оператора эволюции

$$\mathcal{K}(\alpha, t | \alpha', t') = \langle \alpha | \hat{U}(t, t') | \alpha' \rangle. \quad (2.27)$$

Здесь

$$\hat{U}(t, t') = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (t - t') \hat{H}_0 \right], \quad \hat{H}_0 = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) -$$

гамильтониан осциллятора;

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \bar{\alpha}\hat{a})|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle -$$

глауберовское (осцилляторное) когерентное состояние;

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{n!} |0\rangle -$$

собственный вектор оператора числа возбуждений осциллятора $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Вакуумное состояние $|0\rangle$ удовлетворяет соотношениям:

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Как мы уже видели, скалярное произведение когерентных состояний имеет вид:

$$\langle \alpha|\alpha'\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 - 2\bar{\alpha}\alpha'\right)\right].$$

Далее удобно использовать, что когерентное состояние является собственным вектором неэрмитового оператора уничтожения \hat{a} :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Очевидно, что оператор эволюции одномерного гармонического осциллятора имеет следующий формальный вид:

$$\hat{U}(t-t') = e^{-i\omega_0(t-t')/2} \exp\left[-i(t-t')\omega_0\hat{a}^+\hat{a}\right].$$

Для того, чтобы найти матричный элемент оператора эволюции, найдем сначала результат его действия на когерентное состояние $|\beta\rangle$:

$$\hat{U}(t-t')|\beta\rangle = e^{-i\omega_0(t-t')/2} \exp\left[-i\lambda\hat{N}\right]|\beta\rangle.$$

Здесь введено обозначение $\lambda = \omega_0(t-t')$.

Поддействуем оператором $\exp(-i\lambda\hat{N})$ на уравнение на собственные значения, которому подчиняется когерентное состояние:

$$e^{-i\lambda\hat{N}}\{\hat{a}|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle\}.$$

Последнее соотношение можно переписать как

$$e^{-i\lambda\hat{N}}\hat{a}e^{i\lambda\hat{N}}e^{-i\lambda\hat{N}}|\beta\rangle = \beta e^{-i\lambda\hat{N}}|\beta\rangle.$$

Далее находим, что

$$\begin{aligned} e^{-i\lambda\hat{N}} \hat{a} e^{i\lambda\hat{N}} &= \hat{a} - i\lambda [\hat{N}, \hat{a}] + \frac{(-i\lambda)^2}{2!} [\hat{N}, [\hat{N}, \hat{a}]] + \dots = \\ &= \hat{a} \left(1 + i\lambda + \frac{(i\lambda)^2}{2!} + \dots \right) = \hat{a} e^{i\lambda}, \end{aligned}$$

Вспомним, что $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$.

Теперь видно, что

$$\hat{a} |\tilde{\beta}\rangle = e^{-i\lambda} |\tilde{\beta}\rangle,$$

где введено обозначение

$$|\tilde{\beta}\rangle = e^{-i\lambda\hat{N}} |\beta\rangle.$$

Очевидно, что $\tilde{\beta} = e^{-i\lambda} \beta$. Поэтому можем записать, что

$$\exp\left[-i\omega_0(t-t')\hat{a}^+\hat{a}\right] |\alpha'\rangle = |e^{-i\omega_0(t-t')} \alpha'\rangle. \quad (2.28)$$

Подставляя найденные соотношения в выражение для матричного элемента оператора эволюции и используя вид скалярного произведения когерентных состояний, находим после очевидных преобразований:

$$\mathcal{K}(\alpha, t|\alpha', t') = e^{\frac{-i\omega_0(t-t')}{2}} \exp\left\{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\alpha'|^2}{2} + \bar{\alpha}\alpha' e^{-i\omega_0(t-t')}\right\}. \quad (2.29)$$

Видно, что в представлении КС фейнмановский пропагатор имеет очень простой вид.

Теперь перейдем к задаче об осцилляторе, находящимся под воздействием классической силы $F(t)$.

Его гамильтониан имеет вид:

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2 - \hat{x}F(t).$$

Перейдем к системе единиц, в которой $\hbar = m = 1$, и перепишем гамильтониан в виде:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t),$$

где

$$\hat{H}_0 = \omega_0 \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

- гамильтониан невозмущенного осциллятора, а

$$\hat{H}_1(t) = -F(t) \sqrt{\frac{1}{2\omega_0}} (\hat{a} + \hat{a}^+)$$

- гамильтониан взаимодействия. Здесь использована запись гамильтониана через операторы уничтожения и рождения квантов возбуждений осциллятора:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\omega_0} \hat{x} + i\hat{p}/\sqrt{\omega_0}),$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\omega_0} \hat{x} - i\hat{p}/\sqrt{\omega_0}),$$

которые удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1.$$

Оператор эволюции удобно отыскивать в представлении взаимодействия, в котором он удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера:

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_I(t) = -i \hat{H}_I(t) \hat{U}_I(t) = (\beta(t) \hat{a}^+ - \bar{\beta}(t) \hat{a}) \hat{U}_I(t).$$

Здесь $\hat{H}_I(t) = e^{it\hat{H}_0} \hat{U}_1(t) e^{-it\hat{H}_0}$ - гамильтониан взаимодействия в "картине взаимодействия

$$\beta(t) = \frac{i}{\sqrt{2\omega_0}} F(t) e^{i\omega_0 t}.$$

Формальное решение для оператора эволюции можно записать через хронологически упорядоченную экспоненту Дайсона:

$$\hat{U}_I(t) = \hat{T}_D \exp \left\{ -1 \int_0^t \hat{H}_I(\tau) d\tau \right\}.$$

Эта запись оператора эволюции является основой для получения амплитуд и вероятностей переходов с помощью теории возмущений (когда внешняя сила $F(t)$ "мала".)

Однако в данном случае, основываясь на алгебраических свойствах гамильтониана взаимодействия (он имеет вид линейной комбинации операторов рождения и уничтожения - генераторов трехпараметрической группы Гейзенберга - Вейля \mathcal{W}_1), можно найти точное выражение для оператора эволюции, что формально соответствует суммированию ряда теории возмущения.

Будем искать оператор эволюции в виде оператора представления группы Гейзенберга - Вейля:

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t) &= \hat{T}(g(t)) \equiv \exp(-i\phi(t)\hat{I}) \hat{D}(\alpha(t)) = \\ &= e^{-i\phi(t)} e^{-\alpha(t)\bar{\alpha}(t)/2} e^{\alpha(t)\hat{a}^+} e^{-\bar{\alpha}(t)\hat{a}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Дифференцируя это выражение по t , находим, что параметры оператора эволюции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\alpha} = \beta(t), \quad \dot{\phi} = \text{Im}(\bar{\beta} \alpha),$$

с начальными условиями: $\alpha(0) = 0$, $\phi(0) = 0$. Решения уравнений легко находятся (в квадратурах). При этом, в частности

$$\alpha(t) = \int_0^t \beta(t') dt'.$$

Оператор эволюции в картине Шредингера имеет вид

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(t) \hat{U}_I(t),$$

где оба оператора в правой части заданы в явном виде. Теперь легко видеть, что нахождение символа оператора эволюции (фейнмановского пропагатора) сводится к вычислению матричного элемента оператора $\hat{D}(\alpha(t))$ между когерентными состояниями:

$$\langle \xi | \hat{D}(\alpha(t)) | \xi' \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} (|\alpha(t)|^2 + |\xi|^2 + |\xi'|^2) + \alpha(t) \bar{\xi} - \bar{\alpha}(t) \xi' + \bar{\xi} \xi' \right].$$

Получение полного выражения для пропагатора $K(\xi, t; \xi', 0)$ отсюда очевидно. Предоставляем сделать это читателю (см. задачу 9, Приложения).

Зная явный вид оператора эволюции можно найти, например, вероятность n - квантового возбуждения осциллятора из начального вакуумного состояния.

Она определяется по формуле:

$$w_n(t) = | \langle n | \hat{U}(t) | 0 \rangle |^2 = | \langle n | \hat{D}(\alpha(t)) | 0 \rangle |^2. \quad (2.31)$$

Используя определение когерентного состояния $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$, находим, что

$$w_n(t) = | \langle n | \alpha(t) \rangle |^2 = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!},$$

где $\rho = |\alpha(t)|^2$, т.е. вероятность n - квантового возбуждения задана формулой Пуассона.

В нашем случае

$$\alpha(t) = \frac{i F_0}{\sqrt{2\omega_0}} \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt' = \quad (2.32)$$

$$= \frac{i F_0}{2\sqrt{2\omega_0}} \left(\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t} - 1}{\omega_0 + \omega} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right). \quad (2.33)$$

2.6 Фейнмановский пропагатор частицы со спином j в магнитном поле

Гамильтониан частицы со спином j во внешнем однородном нестационарном магнитном поле запишем в виде:

$$\hat{H} = -\hbar \gamma \vec{B} \vec{J},$$

здесь $\hat{J}_i (i = x, y, z)$ - генераторы группы $SU(2)$, подчиняющиеся коммутационным соотношениям:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i \hat{J}_z, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i \hat{J}_y, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i \hat{J}_x;$$

(γ - гиромагнитное отношение).

$$\vec{B} = (B_{\perp} \cos \omega t, B_{\perp} \sin \omega t, B_{\parallel}).$$

В гамильтониане учтена только ориентационная энергия магнитного момента во внешнем поле, что возможно для электрически нейтральной частицы, обладающей магнитным моментом, такой как нейтрон, или для заряженных частиц, удельный заряд которых мал. Такие гамильтонианы возникают в методе ядерного магнитного резонанса, в теории экспериментов с пучками поляризованных нейтронов и при получении атомных конденсатов.

Рассчитаем зависимость вероятности переворота спина частицы от времени в случае, когда в начальный момент времени (до включения "вращающегося" поля) частица имеет проекцию спина на ось z равную $\hbar/2$, и описывается начальным вектором состояния:

$$|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С использованием техники группы $SU(2)$, которая является группой динамической симметрии задачи, можно показать, что оператор эволюции приводится к виду:

$$\hat{U}(t) = \exp(-i \omega t \hat{J}_z) \exp(-i \theta \hat{J}_y) \exp(-i \Omega t \hat{J}_z) \exp(i \theta \hat{J}_y).$$

Для доказательства, нужно перейти во вращающуюся с угловой скоростью ω систему координат, в которой гамильтониан становится независимым от времени, а затем, диагонализировать полученный оператор, приведя его к виду, пропорциональному проекции оператора спина на ось z .

Полученный вид оператора эволюции справедлив для любого спина j , а для $j = \frac{1}{2}$ представляется 2×2 матрицей $\hat{u}(t) \in SU(2)$:

$$\hat{u}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -\bar{b}(t) & \bar{a}(t) \end{pmatrix} = \tag{2.34}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} \left(\cos \frac{\Omega t}{2} - i \cos \theta \sin \frac{\Omega t}{2} \right) & -i e^{-i\omega t/2} \sin \theta \sin \frac{\Omega t}{2} \\ -i e^{i\omega t/2} \sin \theta \sin \frac{\Omega t}{2} & e^{i\omega t/2} \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + i \cos \theta \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Здесь введены обозначения $\theta = \text{arctg} \left(\frac{\omega_{\perp}}{\omega_0 - \omega} \right)$, $\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_{\perp}^2}$ — частота Раби; ($\omega_0 = -\gamma B_{\parallel}$, $\omega_{\perp} = -\gamma B_{\perp}$).

Фейнмановский пропагатор $K(z, t; z', 0) = \langle z | \hat{U}(t) | z' \rangle$ после несколько громоздкого, но несложного расчета, находится без вычисления интеграла по траекториям:

$$K(z, t; z', 0) = e^{i\phi(t)} \frac{(1 + \bar{z} \cdot z'_u)^{2j}}{(1 + |z|^2)^j \cdot (1 + |z'_u|^2)^j}. \quad (2.35)$$

Здесь

$$z'_u = \frac{\bar{a}(t)z' - b(t)}{\bar{b}(t)z' + a(t)}, \quad \phi(t) = j \cdot \mathcal{A},$$

где \mathcal{A} — площадь "треугольника" на сфере Блоха, с вершинами в точках, указанных единичными векторами \vec{n}_0 , \vec{n} , \vec{n}'_u . При этом $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$, а вектора \vec{n} , \vec{n}'_u соответствуют стереографическим отображениям точек комплексной плоскости z и z'_u соответственно.

Зная оператор эволюции легко вычислить вероятность "переворота" спина с течением времени t .

$$w_{+-}(t) = | \langle + | \hat{U}(t) | - \rangle |^2,$$

где

$$|+ \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |- \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$w_{+-}(t) = \left| -i e^{-i\omega t/2} \sin \theta \sin \frac{\Omega t}{2} \right|^2.$$

Отсюда, учитывая, что $\sin^2 \theta = \frac{\text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta}$, $\text{tg} \theta = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_0 - \omega}$, получаем окончательно

$$w_{+-}(t) = \frac{\omega_{\perp}^2 \sin^2 \frac{\Omega t}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_{\perp}^2}.$$

Вероятность переворота спина осциллирует во времени на частоте Раби Ω , при этом вероятность полного переворота спина ($w_{+-} = 1$) достигается лишь при условии резонанса $\omega = \omega_0$, что и лежит в основе метода (ядерного) магнитного резонанса.

Глава 3

Когерентные состояния группы $SU(N)$ и N -уровневые атомы

3.1 Многоуровневые атомы во внешнем однородном поле

Динамику N -уровневой системы во внешних классических полях можно описывать, построив КС группы $SU(N)$. В этом разделе для изучения вопросов динамики квантовых систем, имеющих группу динамической симметрии, применяется метод интегралов по траекториям.

Построим для этого когерентные состояния для динамической группы $SU(N)$ и разберем случай полносимметричных представлений $T(g) \equiv D(p, 0, \dots, 0)$, для которых КС параметризуются точкой однородного пространства

$$z = (z^1, \dots, z^{n-1}) \in SU(n)/U(n-1) \approx CP^{n-1}$$

и определены формулой

$$|z\rangle = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} z^\alpha \bar{z}^\alpha\right)^{-p} \prod_{\beta=1}^{n-1} \exp(z^\beta \hat{E}_\beta^+) |0\rangle, \quad (3.1)$$

где $|0\rangle$ — вектор доминантного (старшего) веса представления $\hat{T}(g)$ группы $SU(N)$, $\hat{E}_1^+, \dots, \hat{E}_{n-1}^+$ — повышающие операторы из базиса Картана-Вейля, не входящие в число генераторов подгруппы $U(N-1)$ инвариантной подгруппы вектора $|0\rangle$.

Ядро $K(z, \bar{w})$ имеет вид

$$K(z, \bar{w}) = \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} z^\alpha \bar{w}^\alpha\right)^{2p} \quad (3.2)$$

и приводит к $SU(N)$ -инвариантной 2-форме:

$$\omega^2 = ip(1 + \sum_{\alpha} z^{\alpha} \bar{z}^{\alpha})^{-2} [(1 + \sum_{\alpha} z^{\alpha} \bar{z}^{\alpha}) \sum_{\beta} dz^{\beta} \wedge d\bar{z}^{\beta} - \sum_{\alpha\beta} \bar{z}^{\alpha} z^{\beta} dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}]. \quad (3.3)$$

Зная (3.2) и (3.3), можно стандартными методами вычислить нормированную инвариантную меру для представления $D(p, 0, \dots, 0)$

$$d\mu(z, \bar{z}) = \dim D \cdot (1 + \sum_{\alpha} z^{\alpha} \bar{z}^{\alpha})^{-n} \prod_{\beta=1}^{n-1} (dz^{\beta} \wedge d\bar{z}^{\beta}) / 2i\pi \quad (3.4)$$

и построить интеграл по траекториям для ковариантного символа оператора эволюции системы, гамильтониан которой является функцией генераторов представления группы $SU(n)$. При этом воспроизводящееся ядро $K(z, \bar{z})$ определяется по (3.2), а величины Z_{α} и \bar{Z}_{α} по формулам

$$Z_{\alpha} = pz^{\alpha} (1 + \sum_{\beta} z^{\beta} \bar{z}^{\beta})^{-1};$$

$$\bar{Z}_{\alpha} = p\bar{z}^{\alpha} (1 + \sum_{\beta} z^{\beta} \bar{z}^{\beta})^{-1}.$$

Рассмотрим квазиклассическую динамику системы, гамильтониан которой является линейной функцией генераторов полносимметричного представления группы $SU(N)$, что соответствует, например, случаю N - уровневых атомов (молекул) во внешнем поле, которые находятся в одинаковых условиях.

Вычисляя ковариантные символы генераторов, получаем что в квазиклассическом приближении динамика N -уровневой молекулы определяется системой обобщенных уравнений Риккати

$$i\dot{z}^{\alpha} = H_{\alpha n}(t) + \sum_{\beta} [H_{\alpha\beta}(t) - H_{nn}(t)\delta_{\alpha\beta}] z^{\beta} - \sum_{\beta} H_{n\beta}(t) z^{\alpha} z^{\beta}, \quad (3.5)$$

где $(H_{nl}(t)) = H(t)$ — эрмитова $n \times n$ матрица гамильтониана, имеющая нулевой след.

Важной особенностью уравнений (3.5) является то, что они совпадают с уравнениями, определяющими эволюцию КС $|z(t)\rangle$ группы $SU(n)$ и следующим из временного уравнения Шредингера, как это было показано для случая двух- и трехуровневой систем. Это говорит о том, что квазиклассическое решение в этом случае оказывается точным. Уравнения (3.5) имеют один и тот же вид для всех полносимметричных представлений, что является отражением их квазиклассичности.

Решение задачи Коши для уравнений (3.5) имеет вид мультидробнолинейной функции, определяемой сдвигом начальной точки

$z(t_0) = (z^1(t_0) \dots z^{n-1}(t_0)) \in SU(n)/U(n-1)$ преобразованием из группы $SU(n)$. Для этого надо в (3.5) сделать подстановки вида $z^\alpha = \eta^\alpha/\eta^n$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, которые приводят к системе линейных уравнений

$$i\hbar\dot{\eta}^k = \sum_{l=1}^n H_{kl}(t)\eta^l, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Решение системы (3.6) определяется действием на заданную начальную точку $(\eta^1(t_0), \dots, \eta^n(t_0))$ унитарной матрицы $\theta(t, t_0) \in SU(n)$, т.е.

$$\eta^k(t) = \sum_{l=1}^n (\theta(t, t_0))_{kl} \eta^l(t_0),$$

откуда

$$z^\alpha(t) = \frac{\sum_{\beta=1}^{n-1} \theta_{\alpha\beta}(t, t_0) z^\beta(t_0) + \theta_{n\alpha}(t, t_0)}{\sum_{\beta=1}^{n-1} \theta_{n\beta}(t, t_0) z^\beta(t_0) + \theta_{nn}(t, t_0)}.$$

3.2 Динамика кубита и генерация атомных когерентных состояний

Рассмотрим более подробно случай двухуровневых атомов (кубитов). Для кубита, взаимодействующего с внешним классическим полем, гамильтониану (1.50) соответствует ковариантный символ

$$H(z, \bar{z}) = j\hbar[2A(t)\bar{z} + 2\bar{A}(t)z + \omega_0(z\bar{z} - 1)](1 + z\bar{z})^{-1},$$

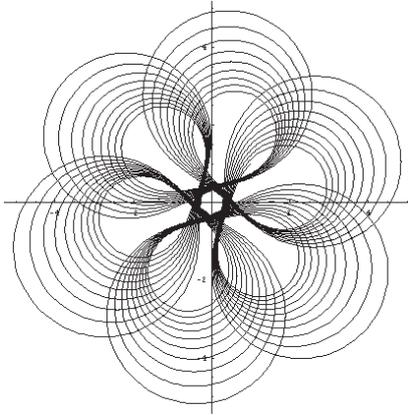
который является функцией Гамильтона "классического аналога" и определяет динамику системы. Учитывая, что $g^{\alpha\bar{\alpha}} = (1 + z\bar{z})/2j$ и явный вид $H(z, \bar{z})$, находим, что динамика когерентных состояний управляется уравнением Риккати

$$i\dot{z} = A(t) + \omega_0 z - \bar{A}(t) z^2, \quad (3.7)$$

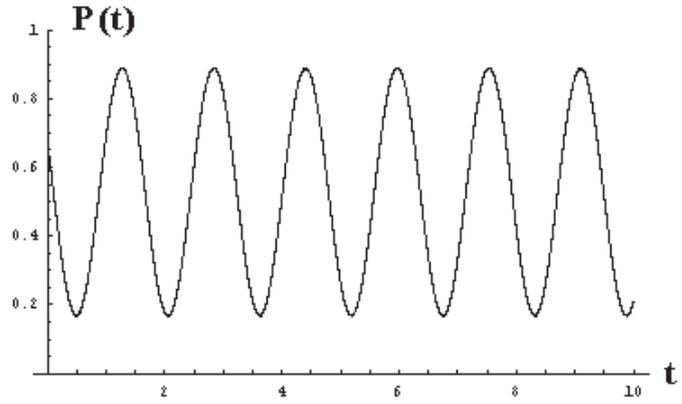
где (в случае линейно поляризованного монохроматического внешнего поля частоты ω) $A(t) = A \exp(-i\omega t)$, A определяется произведением переходного дипольного момента атома и амплитуды напряженности поля, ω_0 — частота перехода в атоме.

Временная динамика может быть наглядно представлена движением точки на плоскости или ее образом на сфере Блоха S_2 .

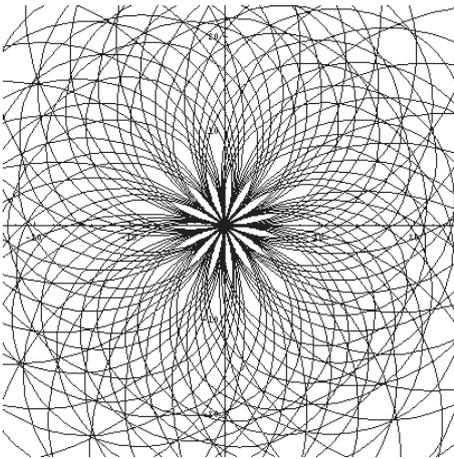
На рис. 3.1(а-г) изображены траектории на комплексной плоскости и сфере Блоха и типичная временная зависимость вероятности перехода атома на



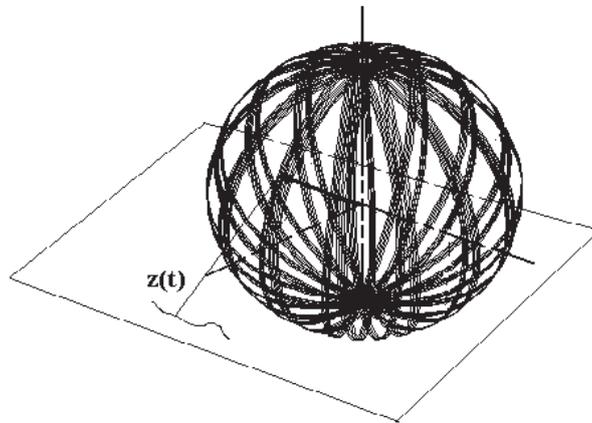
а



б



в



г

Рис. 3.1. Динамика когерентных состояний для двухуровневого атома: **а, б** - траектория на комплексной плоскости $z = x + iy$ и вероятность $P(t)$ нахождения атома на верхнем уровне для $z(0) = 1 + i$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 2/3$, $A = 2$; **в, г** - траектория на комплексной плоскости (показан участок в окрестности начала координат $-2 < \text{Re}z, \text{Im}z < 2$) и образ всей траектории на сфере Блоха для $z(0) = 1 + i$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 1,333$, $A = 10$, для временного интервала $t \in [0, 200]$

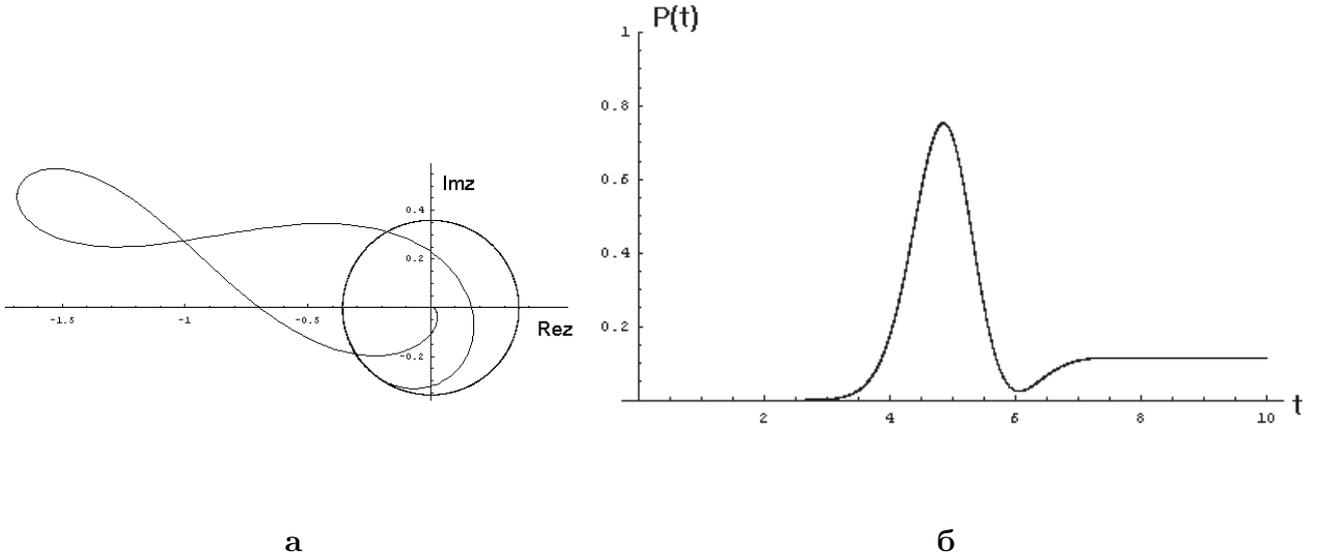


Рис. 3.2. Генерация когерентного состояния для двухуровневого атома: **а** - траектория на комплексной плоскости $z = x + iy$, $|z_0| \approx 0,358$; **б** - вероятность $P(t)$ нахождения атома на верхнем уровне ($z(0) = 0$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 2$, $A = 1,5$, $\tau = \sqrt{3/5}$, $t_0 = 5$)

верхний уровень. Видно, что траектории обладают ярко выраженной "симметрией тогда как вероятность возбуждения

$$P(t) = \frac{A^2 \sin^2 \Omega t}{(\omega - \omega_0)^2 + A^2}, \quad (3.8)$$

не зависит от тонких деталей внутренней динамики когерентных состояний. Здесь $\Omega = (1/2)\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + A^2}$ — частота Раби.

Численные расчеты показывают, что при воздействии короткого светового импульса система переходит и (с точностью до фазы, определяемой свободной временной эволюцией) остается в некотором когерентном состоянии.

На рис. 3.2 показан один из примеров генерации когерентного состояния для кубита под воздействием гауссового импульса

$$A(t) = A \exp \left[-i\omega t - (t - t_0)^2 / \tau^2 \right].$$

В частности, из 3.2,а видно, что после кратковременного внешнего воздействия первоначально невозбужденный атом переходит в когерентное состояние

$$|z_0 e^{-i\omega_0 t}\rangle$$

и точка $z(t)$ начинает вращаться с частотой ω_0 по окружности радиуса $|z_0|$.

Для сопоставления со случаем воздействия поля с постоянной амплитудой на рис. 3.2(б) приведена также зависимость от времени вероятности $P(t)$ возбуждения атома на верхний уровень при тех же начальных условиях. Здесь временная зависимость $P(t)$ уже не определяется простой формулой (3.8).

Внутри интервала воздействия со стороны внешнего поля вероятность перехода на верхний уровень очень близка к 1, а после завершения воздействия становится постоянной и определяемой формулой:

$$P(t) \rightarrow \frac{|z_0|^2}{1 + |z_0|^2}, \quad t \gg \tau.$$

Аналогичные результаты получаются и для многоуровневых атомов. Решения в случае многоуровневых атомов для не слишком большого числа уровней n также легко получаются, однако, к сожалению, здесь их невозможно адекватно наглядно представить. Задание траекторий в двумерных проекциях, например, Rez^α, Imz^α , ($\alpha = 1, \dots, n - 1$) не позволяет увидеть всех особенностей и красоты динамики когерентных состояний многоуровневого атома, поэтому мы их не будем приводить. Однако, как и для двухуровневого атома, решения (3.6) находятся в явном аналитическом виде, если на систему воздействует внешнее однородное монохроматическое поле [43].

3.3 Группа $SU(3)$ и трехуровневые атомы во внешних полях

Возможности двухуровневой системы в качестве модельного приближения в известном смысле ограничены и рассмотрение физических процессов на основе трехуровневой системы приводит к качественному и количественному описанию более тонких эффектов и явлений. Так, первые исследования трехуровневых систем привели к открытию комбинационного рассеяния в жидкостях и газах, позволили осуществить оптическую накачку атомов, что имело принципиальное значение для создания квантовых генераторов. На основе трехуровневой модели атома объясняются такие эффекты нестационарной оптики как эффект Ханле, квантовые биения и пересечение уровней [44,45].

Результаты работ по исследованию особенностей поведения трехуровневых систем в поглощении слабого (пробного) поля при условии, что на смежном переходе действует интенсивное, насыщающее этот переход, электромагнитное поле, лежат в основе лазерной спектроскопии сверхвысокого разрешения [?]. Другой интересной особенностью поведения трехуровневых систем в ситуации, когда на каждый разрешенный смежный переход действует свое резонансное поле и расстройки частот равны, система в целом не переходит в верхнее состояние и практически не взаимодействует с этим полем.

Это явление получило название когерентного пленения населенностей и широко исследовалось в последние годы [45].

Напомним, что еще Шелепиным было установлено, что группой динамической симметрии при рассмотрении взаимодействия n - уровневой системы с электромагнитным полем, является группа $SU(n)$. Частный случай полуклассического описания взаимодействия трехуровневой системы с электромагнитным полем рассматривался в [46], где были в общем виде построены уравнения движения для компонент вектора, квадрат которого на константу отличается от оператора Казимира второго порядка. Эти уравнения аналогичны уравнениям Блоха для вектора энергетического спина в случае двухуровневой системы. Временной эволюции трехуровневых систем, взаимодействующих с бигармоническим полем, с полем лазерных импульсов, посвящено огромное количество работ, например, [47,48] и ссылки в них.

Построим систему КС для группы $SU(3)$, исследуем их свойства и используем для описания динамики трехуровневых систем, следуя работе [57].

Группа $SU(3)$ состоит из унитарных унимодулярных преобразований 3-х мерного комплексного пространства. Из ее генераторов можно построить алгебру повышающих и понижающих операторов, которые в матричном представлении записываются в виде

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{K}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{L}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \hat{J}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{K}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{L}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \hat{H}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{H}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Базисные векторы

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

образуют пространство, в котором действуют операторы (3.9).

Векторы (3.10) преобразуются по полносимметричному представлению $D(1,0)$ группы $SU(3)$. Инфинитезимальные операторы \hat{L}_+ , \hat{L}_- , \hat{H}_1 действуют в пространстве, натянутом на векторы $|0\rangle$, $|2\rangle$ и являются генераторами подгруппы $SU(3) \supset SU(2)$. Такие же $SU(2)$ подгруппы образуют операторы $\{\hat{J}_+, \hat{J}_-, 3\hat{H}_2 - 2\hat{H}_1\}$, которые действуют в подпространстве, натянутом

на векторы $|0\rangle$ и $|1\rangle$ и операторы $\{\hat{K}_+, \hat{K}_-, 4\hat{H}_1 - 3\hat{H}_2\}$, действующие в подпространстве, натянутом на векторы $|1\rangle$ и $|2\rangle$. Эти подгруппы могут быть расширены, так, например, оператор \hat{H}_2 коммутирует с \hat{K}_+, \hat{K}_- и оператором $4\hat{H}_1 - 3\hat{H}_2$. Эта четверка операторов образует прямое произведение

$$SU(2) \otimes U(1) = U(2).$$

Из сказанного выше следует, что операторы $\{\hat{K}_+, \hat{K}_-, 4\hat{H}_1 - 3\hat{H}_2, \hat{H}_2\}$ являются стационарной подалгеброй вектора $|0\rangle$, т.к. первые три оператора действуют в подпространстве векторов $|1\rangle, |2\rangle$, а для оператора \hat{H}_2 вектор $|0\rangle$ является собственным. Отметим, что эта стационарная подалгебра является максимальной. Следовательно, КС будет задаваться точкой факторпространства $SU(3)/U(2)$, на котором можно ввести однородную комплексную структуру. Это пространство изоморфно единичной четырехмерной сфере и двумерному комплексному проективному пространству:

$$SU(3)/U(2) \approx S_4 \approx S_2 \times S_2 \approx CP_2.$$

Действие операторов стационарной подгруппы $U(2)$ на вектор $|0\rangle$ сводится, согласно (1.21), к умножению на несущественный фазовый множитель.

Оператор представления можно записать в виде

$$\hat{D}(\alpha, \beta) = e^{\alpha\hat{J}_+ - \bar{\alpha}\hat{J}_- + \beta\hat{L}_+ - \bar{\beta}\hat{L}_-}, \quad (3.11)$$

который получается из оператора представления группы $SU(3)$ при исключении из него генераторов, образующих максимальную стационарную подалгебру $U(2)$ вектора $|0\rangle$. Оператор (3.11) можно привести к нормальному виду:

$$\hat{D}(\alpha, \beta) = e^{z_1\hat{L}_+} e^{z_2\hat{J}_+} e^{h_1\hat{H}_1 + h_2\hat{H}_2} e^{z_3\hat{J}_-} e^{z_4\hat{L}_-}, \quad (3.12)$$

где

$$z_1 = -\bar{z}_4; z_2 = -\bar{z}_3; h_1 = \ln(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^{-1}; h_2 = \ln(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^{3/2}. \quad (3.13)$$

Тогда, действуя правой частью равенства (3.12) на вектор $|0\rangle$, получим явный вид для вектора КС

$$|z_1, z_2\rangle = (1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^{-\mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2} e^{z_1\hat{L}_+} e^{z_2\hat{J}_+} |0\rangle, \quad (3.14)$$

где μ_1 и μ_2 - собственные числа диагональных операторов Картана-Вейля $\hat{H}_1|0\rangle = \mu_1|0\rangle$ и $\hat{H}_2|0\rangle = \mu_2|0\rangle$.

Представления группы "маркируют" с помощью собственных чисел операторов Казимира; для группы $SU(3)$ это операторы второго и третьего порядка. Их собственные числа выражаются через μ_1 и μ_2 следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{F}^2|0\rangle &= f^2|0\rangle = (4\mu_1^2 + 3\mu_2^2 - 5\mu_1\mu_2 - 2\mu_1)|0\rangle; \\ \hat{G}^3|0\rangle &= g^3|0\rangle = (6\mu_2^3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 18\mu_1\mu_2^2 - 14\mu_1^2 + 12\mu_1\mu_2 - 9\mu_2^2 + 10\mu_1 - 9\mu_2)|0\rangle.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Из явного вида КС (3.14) можно получить многие важные их свойства. Под действием оператора представления одно КС переходит в другое

$$\hat{T}(g)|z\rangle = e^{i\Phi(g,z)}|gz\rangle, \quad (3.16)$$

где $|z\rangle \equiv |z_1, z_2\rangle$.

Действие генераторов группы $SU(3)$ на вектор КС определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}z_1\hat{L}_+|z_1, z_2\rangle &= (-2\mu_1 + \mu_2 + 2\hat{H}_1 - \hat{H}_2)|z_1, z_2\rangle, \\ z_2\hat{J}_+|z_1, z_2\rangle &= 2(\mu_1 - \mu_2 - \hat{H}_1 + \hat{H}_2)|z_1, z_2\rangle, \\ z_1\hat{K}_+|z_1, z_2\rangle &= z_2(-2\mu_1 + \mu_2 + 2\hat{H}_1 - \hat{H}_2)|z_1, z_2\rangle, \\ \hat{J}_-|z_1, z_2\rangle &= z_2(-2\mu_1 + \mu_2 - \hat{H}_2)|z_1, z_2\rangle, \\ \hat{L}_-|z_1, z_2\rangle &= z_1(-2\mu_1 + \mu_2 - \hat{H}_2)|z_1, z_2\rangle, \\ z_2\hat{K}_-|z_1, z_2\rangle &= 2z_1(\mu_1 - \mu_2 - \hat{H}_1 + \hat{H}_2)|z_1, z_2\rangle.\end{aligned}\quad (3.17)$$

КС неортогональны друг другу и их скалярное произведение равно

$$\langle z'_1, z'_2|z_1, z_2\rangle = [(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)(1 + z'_1\bar{z}'_1 + z'_2\bar{z}'_2)]^{-\mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2} (1 + z_1\bar{z}'_1 + z_2\bar{z}'_2)^{2\mu_1 - 3\mu_2}. \quad (3.18)$$

Имеет место "разложение единицы":

$$\int_{\chi} |z_1, z_2\rangle d\mu(z_1, z_2) \langle z_1, z_2| = \hat{I}, \quad (3.19)$$

где $\chi = SU(3)/U(2)$ с инвариантной мерой

$$d\mu(z_1, z_2) = \frac{(2\mu_1 - 3\mu_2 + 2)(2\mu_1 - 3\mu_2 + 1)}{\pi^2} \frac{dRe z_1 dIm z_1 dRe z_2 dIm z_2}{(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^3}. \quad (3.20)$$

В качестве приложения метода КС, рассмотрим задачу о динамике трехуровневой системы во внешних классических полях. В [?] было показано, что оператор внутренней энергии трехуровневой системы представим в виде линейной комбинации диагональных генераторов группы $SU(3)$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\hat{H}_1 + \hbar\Omega_0\hat{H}_2, \quad (3.21)$$

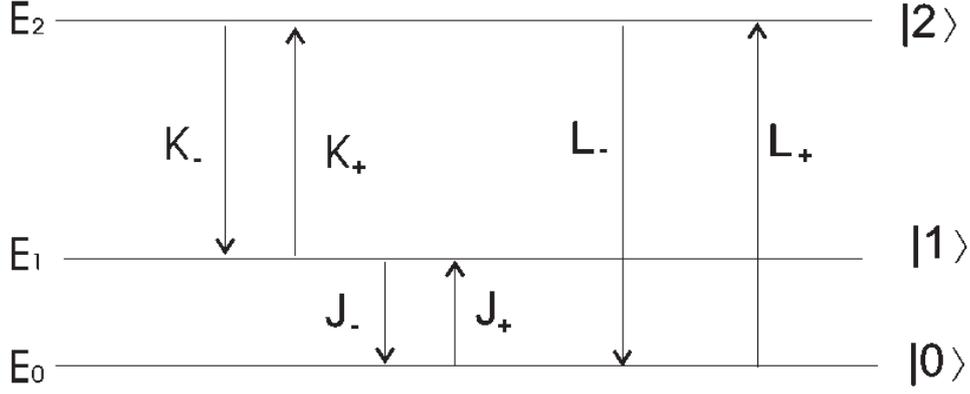


Рис. 3.3. Действие генераторов группы $SU(3)$ на уровни атома

собственные векторы которого имеют вид (3.10), и являются базисом пространства состояний системы. Это пространство есть пространство представления группы $SU(3)$. Гамильтониан взаимодействия с внешним полем записывается в виде линейной комбинации операторов перехода между уровнями

$$\hat{H}_{int} = A\hat{J}_+ + B\hat{K}_+ + D\hat{L}_+ + h.c., \quad (3.22)$$

где A, B, C — как функции времени зависят от компонент внешнего поля и матричных элементов оператора дипольного момента.

Этому гамильтониану соответствует ковариантный символ

$$\mathcal{H}(z, \bar{z}) = \left\{ \mu_1 \omega_0 (1 - z_1 \bar{z}_1) + \mu_2 \Omega_0 \left(1 - \frac{z_1 \bar{z}_1}{2} - \frac{z_2 \bar{z}_2}{2} \right) + \mu \left[A \bar{z}_2 + \bar{A} z_2 + B \bar{z}_1 z_2 + \bar{B} z_1 \bar{z}_2 + D \bar{z}_1 + \bar{D} z_1 \right] \right\} (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^{-1}$$

где $\mu = 2\mu_1 - 3\mu_2$, $\hbar = 1$.

Заметим, что одновременно все три перехода за счет операторов электрического дипольного момента запрещены правилами отбора, поэтому один переход можно рассматривать за счет оператора магнитного дипольного момента или квадрупольного электрического момента.

Полный гамильтониан системы равен сумме невозмущенного и гамильтониана взаимодействия:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hbar \omega_0 \hat{H}_1 + \hbar \Omega_0 \hat{H}_2 + (A\hat{J}_+ + B\hat{K}_+ + D\hat{L}_+ + h.c.). \quad (3.23)$$

На рис.3.3 показана схема действия операторов перехода между уровнями системы.

Решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (3.23), будем искать в виде

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\phi(t)}|z_1, z_2\rangle, \quad (3.24)$$

что приводит для вектора КС $|z_1, z_2\rangle$ к уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}|z_1, z_2\rangle = (\hat{H} - \dot{\phi})|z_1, z_2\rangle. \quad (3.25)$$

(Используется атомная система единиц, в которой $\hbar = 1$).

С учетом (3.14) и (3.15) из уравнения (3.25) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} i\dot{z}_1 &= (\omega_0 + \Omega_0)z_1 - \bar{D}z_1^2 - \bar{A}z_1z_2 + Bz_2 + D \\ i\dot{z}_2 &= (\omega_0/2 + \Omega_0)z_2 - \bar{A}z_2^2 - \bar{D}z_1z_2 + Bz_1 + A \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\dot{\phi} = (\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_2)(A\bar{z}_2 + D\bar{z}_1) - (3\mu_1 - \frac{3}{2}\mu_2)(\bar{A}z_2 + \bar{D}z_1) - (\mu_1 - \mu_2)\omega_0 + 2(\mu_1 - \mu_2)\Omega_0.$$

Важной особенностью системы (3.26) является то, что она одинакова для всех полносимметричных представлений группы $SU(3)$. Как и в случае двухуровневой системы, квантовомеханическая задача сводится к решению уравнений, описывающих классическое движение точки (z_1, z_2) на фазовой плоскости CP_2 переменных z_1, z_2 . Если перейти к локальным переменным $x, y, z \in C_3$, то подстановкой $z_1 = \frac{x}{z}, z_2 = \frac{y}{z}$ систему (3.26) можно линеаризовать. В этих переменных система принимает вид

$$\begin{aligned} i\dot{x} &= (\omega_0 + \Omega_0)x + By + Dz \\ i\dot{y} &= \bar{B}x + (\omega_0/2 + \Omega_0)y + Az \\ i\dot{z} &= \bar{D}x + \bar{A}y. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Системы уравнений (3.26) и (3.27), описывающие динамику одной трехуровневой системы во внешних классических полях и соответствующие полносимметричному представлению $D(1, 0)$ описывают и динамику ансамбля N трехуровневых систем, если их эволюция задается оператором из полносимметричного представления $D(N, 0)$. Это соответствует случаю, когда уровни энергии молекул невырождены и в начальный момент времени все молекулы находятся в одинаковом состоянии. С учетом правил отбора, возможны три схемы переходов (см. рис.3.4).

Рассмотрим динамику ансамбля N трехуровневых атомов V -типа, взаимодействующую с двумя лазерными полями, частоты которых близки к частотам атомных переходов (рис. 3.5).

В этом случае $A = |\Omega_{12}|e^{-i\omega_1 t}, D = |\Omega_{13}|e^{-i\omega_3 t}, B = 0$, где Ω_{12}, Ω_{13} — частоты Раби на переходах $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$ соответственно, ω_1, ω_3 — частоты лазерных полей. Учтем также распад возбужденных уровней со скоростями Γ_2 и Γ_3 на

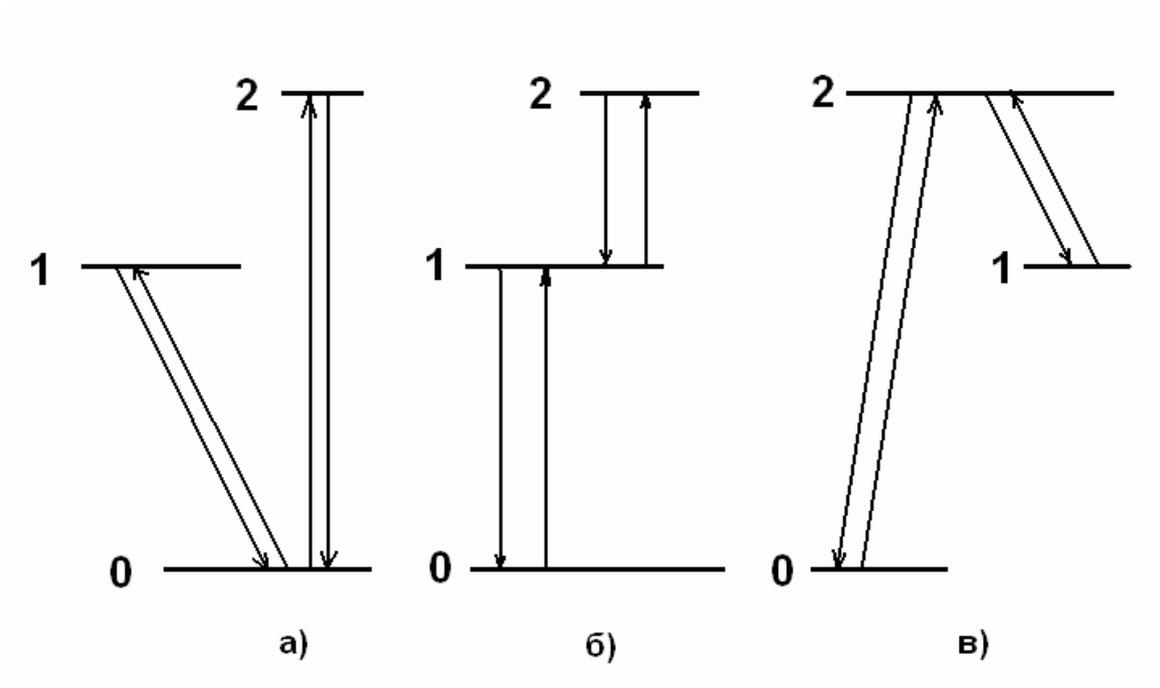


Рис. 3.4. Типы трехуровневых схем взаимодействия атома с внешними полями: а) V - атом, б) Ξ - атом, в) Λ - атом

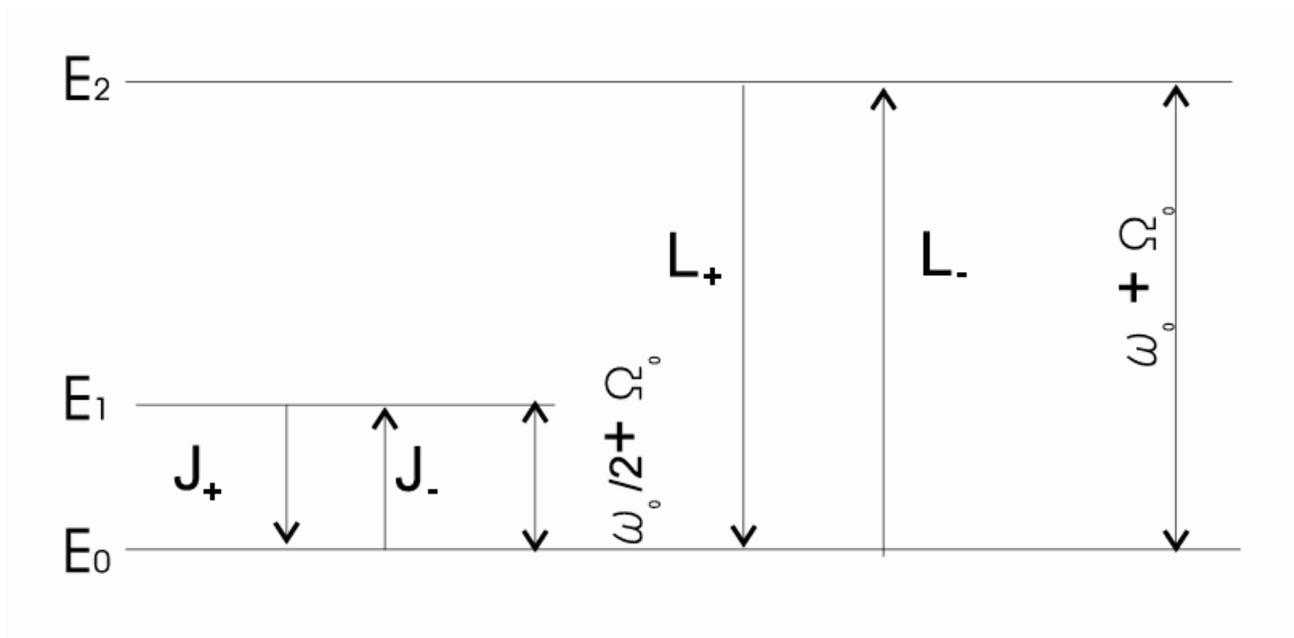


Рис. 3.5. Схема переходов и энергетический спектр V-атома

не включенные в систему уровни или из-за взаимодействия с термостатом. Тогда, в резонансном приближении система уравнений (3.27) принимает вид

$$\begin{cases} i\dot{x} = (\omega_0 + \Omega_0 - i\Gamma_3)x + |\Omega_{13}|e^{-i\omega_3 t}z \\ i\dot{y} = (\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0 - i\Gamma_2)y + |\Omega_{12}|e^{-i\omega_1 t}z \\ i\dot{z} = |\Omega_{13}|e^{i\omega_3 t}x + |\Omega_{12}|e^{i\omega_1 t}y \end{cases} \quad (3.28)$$

Для упрощения вида (3.28), в ней принят по сравнению с (3.27) начальный отсчет энергии от первого уровня. Система (3.28) решается точно методом Лапласа. Эволюция КС группы $SU(3)$ в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{-i\omega_3 t} \frac{A_1 e^{s_1 t} + B_1 e^{s_2 t} + C_1 e^{s_3 t}}{A_3 e^{s_1 t} + B_3 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t}}, \\ z_2(t) &= e^{-i\omega_1 t} \frac{A_2 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} + C_2 e^{s_3 t}}{A_3 e^{s_1 t} + B_3 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где s_1, s_2, s_3 — корни характеристического уравнения

$$s^3 - is^2(\Delta_1 + \Delta_3) + s(|\Omega_{12}^2| + |\Omega_{13}|^2 - \Delta_1\Delta_3) - i\Delta_1|\Omega_{13}|^2 - i\Delta_3|\Omega_{12}|^2 = 0$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta_1 = \omega_1 - \frac{\omega_0}{2} - \Omega_0 + i\Gamma_2,$$

$$\Delta_3 = \omega_3 - \omega_0 - \Omega_0 + i\Gamma_3.$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i определяются начальными условиями

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{s_1^2 z_1(0) - is_1(\Delta_1 z_1(0) + |\Omega_{13}|) + |\Omega_{12}|^2 z_1(0) - \Delta_1 |\Omega_{13}| - |\Omega_{12}| |\Omega_{13}|}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}, \\ A_2 &= \frac{s_1^2 z_2(0) - is_1(\Delta_3 z_2(0) + |\Omega_{12}|) + |\Omega_{13}|^2 z_2(0) - \Delta_3 |\Omega_{12}| - |\Omega_{12}| |\Omega_{13}|}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}, \\ A_3 &= \frac{s_1^2 - is_1(\Delta_1 + \Delta_3 + |\Omega_{12}|z_2(0) + |\Omega_{13}|z_1(0)) - \Delta_1\Delta_3 - \Delta_1|\Omega_{13}|z_1(0)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} \\ &\quad - \frac{\Delta_3|\Omega_{12}|z_2(0)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты B_i, C_i получаются из A_i циклической перестановкой корней s_1, s_2, s_3 . Для Λ и Ξ -атомов уравнения для КС и их решения выглядят подобным образом.

Используя формулы для КС (3.14) и (3.18), можно получить выражение для населенностей (3.30) уровней в случае описания ансамбля N молекул полносимметричным представлением $D(N, 0)$:

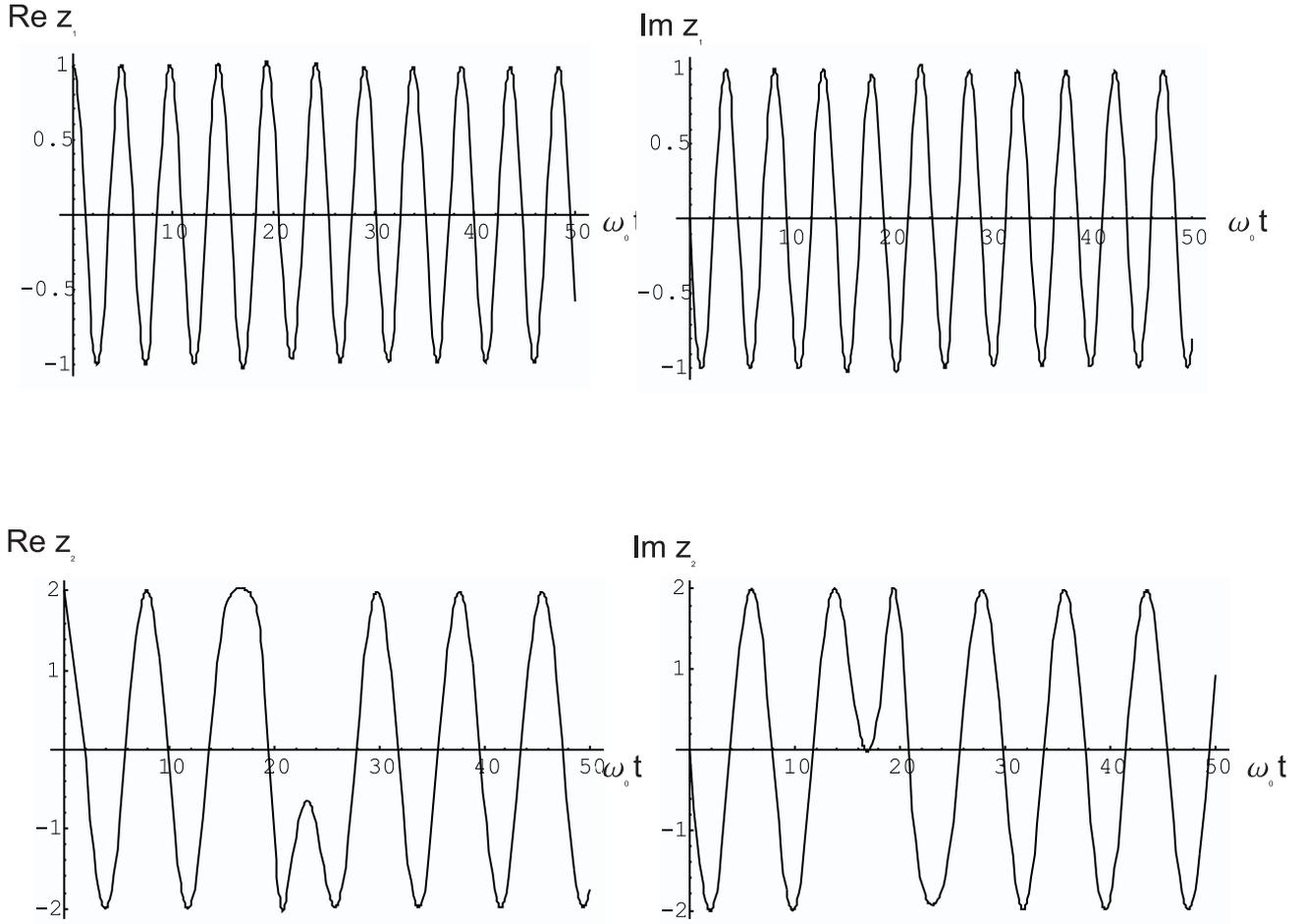


Рис. 3.6. Зависимость от времени действительной и мнимой части параметра когерентного состояния z_1, z_2 для V - атома. Случай точного резонанса. Затухание отсутствует. Возбуждение гауссовым импульсом. Параметры модели $\omega_0/2 + \Omega_0 = 0.8$; $\omega_0 + \Omega_0 = 1.3$; $\Omega_{12} = 0$; $\Omega_{13} = 2$; $\omega_{12} = 0$; $\omega_{13} = 1.3$; $\tau = 20$; $\sigma_3^2 = 10$; $Re z_1(0) = Im z_1(0) = 1$, $Re z_2(0) = Im z_2(0) = 2$. $\omega_0 t$ – безразмерное время.

$$\begin{aligned}
 N_1(t) &= N \frac{1}{1 + |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2}, \\
 N_2(t) &= N \frac{|z_2(t)|^2}{1 + |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2}, \\
 N_3(t) &= N \frac{|z_1(t)|^2}{1 + |z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Уравнения (3.26), (3.30) удобны для применения в квантовой инженерии при изучении оптимальных режимов создания суперпозиционных состояний атомов и определения времени декогеренции.

Можно рассматривать динамику такой системы под действием одного или двух лазерных полей

$$A(t) = \frac{E_{01} d_{12}}{\hbar} e^{-i\omega_1 t} = |\Omega_{12}| e^{-i\omega_1 t},$$

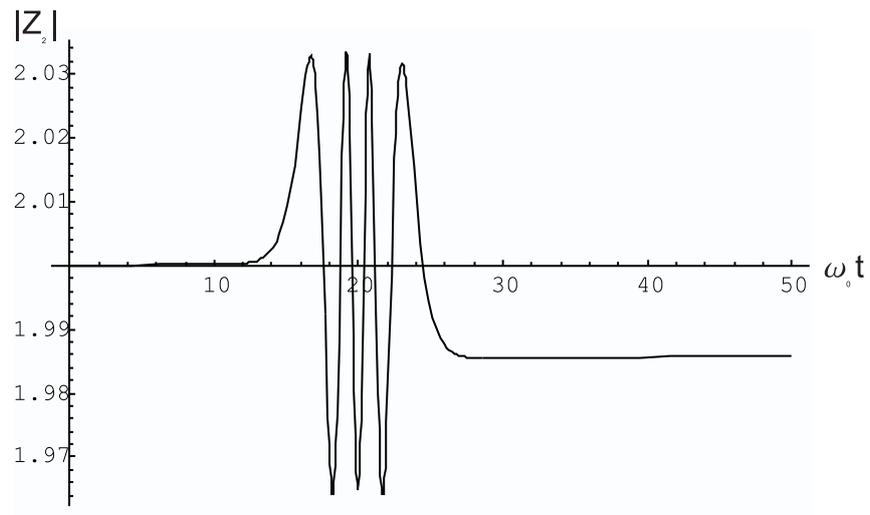
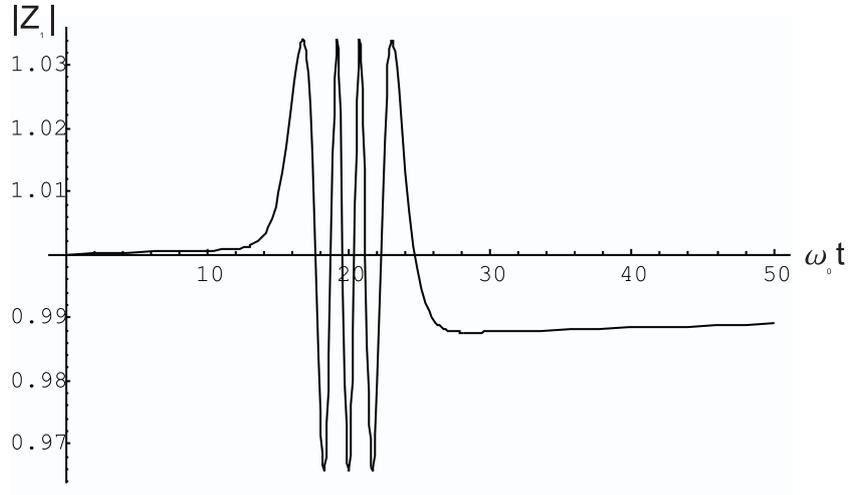


Рис. 3.7. Зависимость от времени модулей параметров когерентных состояний z_1, z_2 для V -атома. Случай точного резонанса. Затухание отсутствует. Возбуждение гауссовым импульсом. Параметры модели $\omega_0/2 + \Omega_0 = 0.8$; $\omega_0 + \Omega_0 = 1.3$; $\Omega_{12} = 0$; $\Omega_{13} = 2$; $\omega_{12} = 0$; $\omega_{13} = 1.3$; $\tau = 20$; $\sigma_3^2 = 10$. $\omega_0 t$ – безразмерное время.

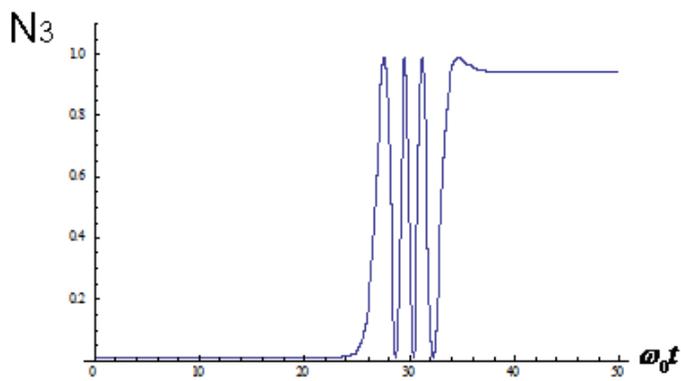
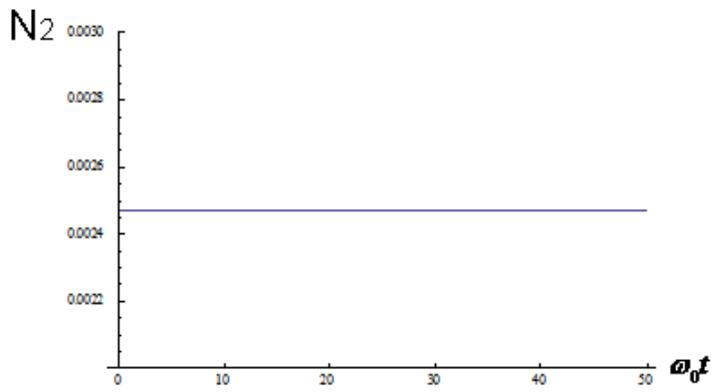
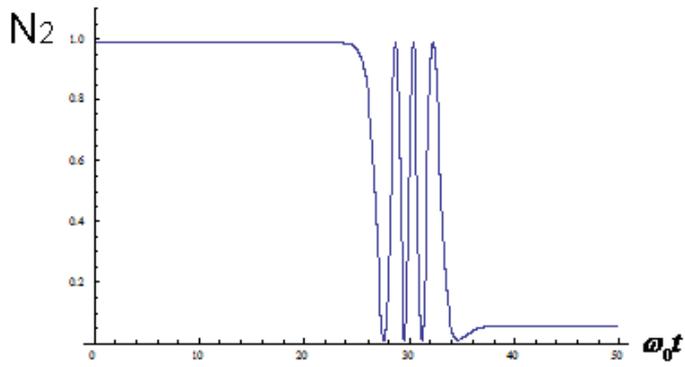


Рис. 3.8. Динамика населенностей уровней изолированного V - атома. Случай точного резонанса. Затухание отсутствует. Возбуждение гауссовым импульсом. Параметры модели $\omega_0/2 + \Omega_0 = 0.8$; $\omega_0 + \Omega_0 = 1.3$; $\Omega_{12} = 0$; $\Omega_{13} = 2$; $\omega_{12} = 0$; $\omega_{13} = 1.3$; $\tau = 20$; $\sigma_3^2 = 10$; $\omega_0 t$ – безразмерное время.

$$D(t) = \frac{E_{03}d_{13}}{\hbar} e^{-i\omega_3 t} = |\Omega_{13}| e^{-i\omega_3 t},$$

или под действием гауссовых импульсов

$$A(t) = |\Omega_{12}| \exp \left[-i\omega_1 t - \frac{(t - t_{01})^2}{\sigma_1^2} \right],$$

$$D(t) = |\Omega_{13}| \exp \left[-i\omega_3 t - \frac{(t - t_{03})^2}{\sigma_3^2} \right],$$

где ω_1 и ω_3 — частоты лазерных полей, σ_1 и σ_3 — величины, задающие ширины гауссовых импульсов, t_{01} и t_{03} — времена, соответствующие максимуму гауссовых импульсов, воздействующих на атом.

На Рис.3.6 показана эволюция действительных частей z_1 и z_2 — параметров, задающих когерентные состояния. Видно, что под действием гауссова импульса лазерного поля на переходе $1 \rightarrow 3$ (случай точного резонанса при отсутствии затухания ($\gamma = \Gamma = 0$), $t_{01} = \tau = 20$, $\sigma_3^2 = 10$) $Re z_1$, $Im z_1$, $Re z_2$ и $Im z_2$ осциллируют с частотами переходов между уровнями $1 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 2$.

Однако модули $|z_1(t)|$ и $|z_2(t)|$ (см. Рис.1.7) после переходного процесса стремятся к значениям, определяемым начальными условиями $|z_1(t)| \rightarrow |z_1(0)| = 1$, $|z_2(t)| \rightarrow |z_2(0)| = 2$. Это указывает на то, что эволюция вектора КС после прекращения воздействия имеет вид

$$|z_1, z_2\rangle = |z_{10} e^{i(\omega_0 + \Omega_0)t}, z_{20} e^{i(\omega_0 + \Omega_0)t}\rangle.$$

На Рис. 1.8 показана динамика населенности уровней при возбуждении V — атома гауссовым импульсом на том же переходе.

Можно подобрать и такие параметры внешнего воздействия на систему, чтобы она переходила (как и для двухуровневого атома) в некоторое новое КС группы $SU(3)$. Генерацию КС с заданными параметрами мы здесь не обсуждаем. Эта очень важная тема особенно в контексте физики квантовых вычислений, связана с общей актуальной проблемой управления динамикой квантовых состояний и требует отдельного рассмотрения (см., например, [?]).

Глава 4

Геометрическая фаза в квантовой оптике

4.1 Метод геометрической фазы в квантовой теории

М. Берри показал в рамках квантовой механики, что поведение неголономных систем (систем, подверженных переменному внешнему воздействию) качественно отличается от поведения систем с постоянными во времени параметрами (см. [49]). Он установил, что в пределе адиабатического изменения параметров системы общее изменение фазы волновой функции может отличаться от изменения динамической фазы (в противоречии с т.н. адиабатической гипотезой Эренфеста, по которой отличия вообще быть не должно). Значение дополнительной фазы не зависит от продолжительности периода и может приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам.

Подобное исследование было проведено Ханни для классических систем (см. [50]), которым было установлено, что в неголономных механических системах имеет место дополнительное изменение угловой переменной.

Ааронов и Анандан доказали (см. [51]), что геометрическая фаза возникает и в случае неадиабатического изменения внешнего воздействия. Рассмотрим для этого систему, над которой совершается периодическое внешнее воздействие. У такой системы существуют состояния, которые за период изменяются только лишь на фазовый множитель (это собственные векторы оператора эволюции за период):

$$|\Psi(t + T)\rangle = \hat{U}(t + T, t)|\Psi(t)\rangle = e^{i\phi}|\Psi(t)\rangle. \quad (4.1)$$

Здесь T -период внешнего воздействия, $\hat{U}(t + T, t)$ -оператор эволюции за период.

Величина ϕ часто представляется в виде $\phi = ET/\hbar$, и E называется квазиэнергией, т.к. она играет для этих состояний ту же роль, что и обычная энергия для стационарных состояний, т.е. она определяет их временную зависимость. Сами состояния $|\Psi\rangle$ называются состояниями с определенной ква-

зиэнергией.

Фазовый сдвиг ϕ естественным образом разлагается на сумму двух слагаемых:

$$\phi = \phi_0 + \phi_B, \quad (4.2)$$

где ϕ_0 является тривиальным фазовым сдвигом (он возникает и при отсутствии воздействия на систему), а ϕ_B связан с воздействием на систему и называется фазой Берри или топологической фазой.

В настоящее время появилась принципиальная возможность реализовать экспериментальную ситуацию и измерить фазу Берри благодаря развитию и совершенствованию одноатомных мазеров (см. [52]).

4.2 Модель Джейнса - Каммингса и фаза Берри

Далее исследуется фаза Берри для модели Джейнса-Каммингса при различных способах периодического внешнего воздействия.

Модель Джейнса-Каммингса [53], модель двухуровневого атома, взаимодействующего с одной квантованной модой электромагнитного излучения, является одной из самых известных моделей, изучаемых квантовой оптикой. Несмотря на то, что в ней делаются очень существенные упрощения по сравнению с реальными экспериментальными ситуациями, в ее рамках можно получить результаты, которые зачастую оказываются применимыми и в более сложных моделях взаимодействия света с веществом, которые по сути дела являются обобщениями этой простейшей модели. В этих более сложных моделях рассматриваются многоуровневые атомы, многомодовые поля, а также системы многих атомов.

Рассмотрим одиночный атом, находящийся в идеальном резонаторе, заполненном одномодовым электромагнитным полем. Атом будем считать неподвижным и поместим в его центре начало системы координат. Длину волны излучения возьмем большой по сравнению с размером атома (невозбужденный атом имеет размеры порядка 10^{-8} см, а длина волны света в оптическом диапазоне примерно 10^{-5} см). Предположим, что частота колебаний поля близка к частоте перехода между двумя уровнями энергии атома, которые будем считать невырожденными. Если дипольный момент перехода между этими уровнями не равен нулю, т.е. переход является разрешенным, то можно пренебречь наличием у атома других уровней энергии (если частоты переходов между ними сильно отличаются от частоты поля). Так получается идеализированная модель двухуровневого атома, взаимодействующего с одной модой фотонного излучения.

Состояние такой системы описывается вектором гильбертова пространства. В качестве базиса в этом пространстве удобно взять набор векторов

вида $|\pm, n\rangle = |\pm\rangle \otimes |n\rangle$, где вектор $|+\rangle$ описывает атом на верхнем уровне, $|-\rangle$ -атом на нижнем уровне, а $|n\rangle$ -вектор состояния моды поля с n фотонами.

Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{int}.$$

Здесь \hat{H}_A -гамильтониан свободного атома, $\hat{H}_F = \omega(a^+a + 1/2)$ -гамильтониан свободного поля (постоянную Планка \hbar считаем равной 1), \hat{H}_{int} -гамильтониан взаимодействия поля и атома. По принципу соответствия его можно взять в виде

$$\hat{H}_{int} = -\widehat{\vec{d}}\widehat{\vec{E}},$$

где $\widehat{\vec{d}}$ -оператор дипольного момента и $\widehat{\vec{E}}$ -оператор напряженности электромагнитного поля.

В выбранном базисе оператор \hat{H}_A диагонален:

$$\hat{H}_A|+, n\rangle = \epsilon_+|+, n\rangle, \quad \hat{H}_A|-, n\rangle = \epsilon_-|-, n\rangle,$$

ϵ_+ и ϵ_- -верхний и нижний уровни энергии. Если начало отсчета энергий выбрать посередине между уровнями энергии атома, то

$$\hat{H}_A = \frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_3,$$

где ω_0 -частота атомного перехода, $\hat{\sigma}_3$ -матрица Паули.

Гамильтониан взаимодействия, как известно, можно выразить через атомные и полевые операторы повышения и понижения a, a^+, R_-, R_+ , которые действуют на векторы базиса следующим образом:

$$a|\pm, n\rangle = \sqrt{n}|\pm, n-1\rangle, \quad a^+|\pm, n\rangle = \sqrt{n+1}|\pm, n+1\rangle,$$

$$R_+|-, n\rangle = |+, n\rangle, \quad R_-|+, n\rangle = |-, n\rangle, \quad R_-|-, n\rangle = R_+|+, n\rangle = 0.$$

Через эти операторы гамильтониан взаимодействия выражается так ([54, 55, 56]):

$$\hat{H}_{int} = g(R_+ + R_-)(a + a^+),$$

где g -константа связи: $g = \sqrt{\frac{2\pi}{V\omega}}\omega_0 \vec{e} \cdot \vec{d}$, V -объем резонатора, \vec{e} -орт поляризации фотонной моды, \vec{d} -дипольный момент перехода между атомными уровнями. При записи этого выражения используется то обстоятельство, что размер атома намного меньше длины волны. Кроме того, оно описывает лишь дипольные переходы в атоме.

В картине Гейзенберга $a \sim e^{-i\omega t}$, $a^+ \sim e^{i\omega t}$, $R_- \sim e^{-i\omega_0 t}$, $R_+ \sim e^{i\omega_0 t}$. Т.к. $\omega \approx \omega_0$, слагаемые R_+a^+ и R_-a являются быстро осциллирующими, и поэтому в среднем не оказывают влияния на эволюцию системы. Такое приближение называется приближением вращающейся волны (ПВВ).

Гамильтониан взаимодействия в этом приближении имеет вид

$$\hat{H}_{int} = g(R_+ a + a^+ R_-).$$

Полный гамильтониан системы в ПВВ

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_3 + \omega(a^+ a + 1/2) + g(a R_+ + a^+ R_-).$$

Такой гамильтониан называется гамильтонианом Джейнса-Каммингса. Он был введен в работе [53]. При рассмотрении процессов с поглощением m фотонов в гамильтониане взаимодействия a меняется на a^m , а a^+ -на a^{+m} . Полный гамильтониан в этом случае

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_3 + \omega(a^+ a + 1/2) + g(a^m R_+ + a^{+m} R_-).$$

Рассмотрим также случай, когда атом испытывает нелинейную поляризацию во внешнем поле. В этом случае в гамильтониане возникает дополнительное слагаемое $\hat{H}_{kerr} = \mu a^{+2} a^2$, соответствующее керровскому воздействию на систему.

В дальнейшем константа взаимодействия g и параметр керровского воздействия μ будут считаться функциями времени. Рассмотрим действие гамильтониана на векторы $|-, n\rangle$ и $|+, n - m\rangle$. Легко получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}|-, n\rangle &= \left\{ -\frac{\omega_0}{2} + \omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \mu(t)n(n-1) \right\} |-, n\rangle + \\ &\quad + g(t) \sqrt{n \dots (n-m+1)} |+, n-m\rangle \\ \hat{H}|+, n-m\rangle &= \left\{ \frac{\omega_0}{2} + \omega\left(n-m + \frac{1}{2}\right) + \mu(t)(n-m)(n-m-1) \right\} |+, n-m\rangle + \\ &\quad + g(t) \sqrt{n \dots (n-m+1)} |-, n\rangle. \end{aligned}$$

Видно, что двумерное подпространство пространства состояний, натянутое на эти векторы, инвариантно относительно полного гамильтониана. Поэтому если вектор начального состояния лежит в этом подпространстве, то и в последующие моменты времени он будет лежать в том же подпространстве. Векторам $|+, n-m\rangle$ и $|-, n\rangle$ поставим в соответствие двумерные столбцы

$$|+, n-m\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-, n\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда гамильтониан представится матрицей 2×2 :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \left\{ \omega\left(n - \frac{m-1}{2}\right) + \frac{\mu(t)}{2} [(n-m)(n-m-1) + n(n-1)] \right\} \hat{I} + \\ &\quad + \left\{ \frac{\omega_0 - m\omega}{2} + \frac{\mu(t)}{2} [(n-m)(n-m-1) - n(n-1)] \right\} \sigma_3 + \end{aligned}$$

$$+g(t)\sqrt{n\dots(n-m+1)}(\sigma_+ + \sigma_-).$$

Здесь

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $N = n\dots(n-m+1)$, $q_{\pm} = (n-m)(n-m-1) \pm \pm n(n-1)$, $\Omega = m\omega - \omega_0$, $W = \mu q_- - \Omega$. В этих обозначениях

$$\hat{H} = \left[\omega \left(n - \frac{m-1}{2} \right) + \frac{\mu q_+}{2} \right] + \frac{1}{2} W \sigma_3 + g \sqrt{N} (\sigma_+ + \sigma_-).$$

4.3 Группа $SU(2)$ и расчет фазы Берри для постоянного воздействия

Для того, чтобы найти фазу Берри в нашей модели, исследуем оператор эволюции системы. Хотя найти общее выражение для нее не удастся, можно получить о ней некоторое геометрическое представление, которое будет обсуждаться в следующем пункте. В этом пункте мы получим дифференциальные уравнения, определяющие оператор эволюции и найдем фазу Берри в простейшем случае постоянного воздействия на систему. Этот результат мы затем используем при исследовании общего случая.

Из структуры гамильтониана видно, что он линейно выражается через матрицы Паули и единичную матрицу, которые, как известно, являются генераторами фундаментального представления группы $U(2)$, иными словами, гамильтониан является элементом алгебры Ли группы $U(2)$. В течение бесконечно малого промежутка времени Δt его можно считать постоянным, и эволюции за этот промежуток он равен $\hat{U} = \exp(-i\hat{H}(t)\Delta t)$, т.е. он является элементом группы $U(2)$. Пользуясь групповым свойством оператора эволюции, получаем, что и на конечных временах он будет элементом группы $U(2)$.

Введем в группе $U(2)$ канонические координаты второго рода κ, α, β и γ . Тогда оператор эволюции можно представить в виде

$$\hat{U} = e^{-i\kappa(t)} e^{-i\alpha(t)\sigma_+} e^{-i\beta(t)\sigma_3} e^{-i\gamma(t)\sigma_-}$$

В нашей задаче нужно рассматривать периодическое изменение g и μ . Период обозначим T . Как было показано в п. 1.4 (см. формулы (4.1) и (4.2)), для нахождения фаз Берри нужно вычислить собственные значения оператора эволюции за период. В нашем случае этот оператор представляется матрицей 2×2 . Его можно записать следующим образом:

$$\hat{U}(t+T, t) = e^{-\kappa(T)} \hat{U}_0,$$

где матрица \hat{U}_0 унимодулярна, т.е. принадлежит фундаментальному представлению группы $SU(2)$. Множитель $e^{-\kappa(T)}$ дает тривиальный фазовый сдвиг, возникающий даже при отсутствии в резонаторе атома (см формулу 4.2). Фазы Берри являются собственными значениями матрицы U_0 и находятся из уравнения

$$e^{2i\phi_B} - \text{tr}\hat{U}_0 e^{i\phi_B} + 1 = 0,$$

т.е. даются выражением

$$\phi_B = \pm \arccos \frac{\text{tr}\hat{U}_0}{2}.$$

Зависимость оператора эволюции от времени сводится к зависимости от времени функций κ , α , β и γ . Чтобы найти эти функции, используем уравнение Шредингера, записанное для оператора эволюции

$$i \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}$$

Дифференцируя \hat{U} , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = -i \left\{ \dot{\kappa} + (\dot{\alpha} + 2i\alpha\dot{\beta} + \dot{\gamma}e^{2i\beta}\alpha^2)\sigma_+ + \right. \\ \left. + (\dot{\beta} - i\alpha\dot{\gamma}e^{2i\beta})\sigma_3 + \dot{\gamma}e^{2i\beta}\sigma_- \right\} \hat{U} \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при генераторах в уравнении Шредингера, получаем систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa} &= \omega \left(n - \frac{m-1}{2} \right) + \frac{\mu q_+}{2} \\ \dot{\alpha} + 2i\alpha\dot{\beta} + \dot{\gamma}e^{2i\beta}\alpha^2 &= g\sqrt{N} \\ \dot{\beta} - i\alpha\dot{\gamma}e^{2i\beta} &= W/2 \\ \dot{\gamma}e^{2i\beta} &= g\sqrt{N} \end{aligned} \right\}$$

с начальными условиями $\kappa(0) = \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0$. Из этой системы сразу находится $\kappa(t)$. Уравнения для α , β и γ зацеплены. Но легко видеть, что они расцепляются, и для $\alpha(t)$ получается уравнение Рикатти

$$\dot{\alpha} + iW\alpha - g\sqrt{N}\alpha^2 = g\sqrt{N}$$

Найдя из этого уравнения $\alpha(t)$, можно последовательно найти $\beta(t)$ и $\gamma(t)$.

Эта система легко решается для постоянных g и μ . Для этого случая матрица \hat{U}_0 для эволюции в течение промежутка времени t_0 имеет вид

$$\hat{U}_0(t + t_0, t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{At_0}{2} + \frac{W}{A} \sin \frac{At_0}{2} & -\frac{2ig\sqrt{N}}{A} \sin \frac{At_0}{2} \\ -\frac{2ig\sqrt{N}}{A} \sin \frac{At_0}{2} & \cos \frac{At_0}{2} - \frac{W}{A} \sin \frac{At_0}{2} \end{pmatrix},$$

где $A = \sqrt{W^2 + 4Ng^2}$. Фаза Берри в этом случае, очевидно, $\phi_B = \pm \frac{At_0}{2}$.

Теперь, используя этот результат, рассмотрим общий случай переменного воздействия и дадим геометрическую интерпретацию для фазы Берри.

4.4 Геометрическая интерпретация фазы Берри

В силу хорошо известной связи групп $SU(2)$ и $SO(3)$ любую матрицу, принадлежащую фундаментальному представлению $SU(2)$, можно выразить через вектор трехмерного вращения:

$$\hat{A} = \exp(i\vec{\tau}\vec{\sigma}/2) = \cos\frac{\tau}{2} + \frac{i\vec{\tau}\vec{\sigma}}{\tau}\sin\frac{\tau}{2}. \quad (4.3)$$

В этой формуле $\vec{\tau}$ -вектор трехмерного пространства, направленный по оси вращения и по модулю равный углу поворота, τ -его модуль, $\vec{\sigma}$ -вектор, составленный из матриц Паули. След такой матрицы

$$\text{tr}\hat{A} = 2\cos\frac{\tau}{2}$$

Найдем также след произведения двух матриц такого вида:

$$\begin{aligned} & \text{tr}\left(\cos\frac{\tau_2}{2} + \frac{i\vec{\tau}_2\vec{\sigma}}{\tau_2}\sin\frac{\tau_2}{2}\right)\left(\cos\frac{\tau_1}{2} + \frac{i\vec{\tau}_1\vec{\sigma}}{\tau_1}\sin\frac{\tau_1}{2}\right) = \\ & = \text{tr}\left(\cos\frac{\tau_2}{2}\cos\frac{\tau_1}{2} - \frac{\vec{\tau}_2\vec{\tau}_1}{\tau_2\tau_1}\sin\frac{\tau_2}{2}\sin\frac{\tau_1}{2}\right)\hat{I} = \\ & = 2\cos\frac{|\vec{\tau}|}{2}, \end{aligned}$$

где $\vec{\tau}$ -вектор поворота, являющегося композицией поворотов, задаваемых векторами $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$.

Будем интерпретировать оператор эволюции в случае постоянного воздействия на систему \hat{U}_0 , вычисленный в предыдущем пункте, как оператор поворота вокруг некоторой оси в трехмерном пространстве. Вектор $\vec{\tau}$ для него имеет следующие компоненты:

$$\vec{A} = (-2gt_0, 0, Wt_0).$$

Если функции $g(t)$ и $\mu(t)$ являются кусочно-постоянными в течение периода, то оператор эволюции будет произведением нескольких операторов, каждый из которых имеет вид \hat{U}_0 . След такого произведения равен удвоенному модулю вектора, задающего суммарный поворот. Это следует из того, что в любой момент времени в течение периода оператор эволюции за время от начала периода до этого момента имеет вид (4.3).¹ Фаза Берри при этом с точностью до знака совпадает с модулем вектора поворота, соответствующего эволюции за весь период.

Это соображение дает способ нахождения фазы Берри для случая произвольного изменения величин $g(t)$ и $\mu(t)$. Действительно, любую функцию

¹При этом у вектора поворота, вообще говоря, все компоненты будут отличны от 0.

можно со сколь угодно высокой точностью аппроксимировать кусочно-постоянной. При этом вектор $\vec{\tau}$, задающий поворот, в течение периода будет непрерывно изменяться по величине и по направлению. Получим дифференциальное уравнение, описывающее это изменение.

Пусть в момент t вектор поворота равен $\vec{\tau}_0$. Предположим, что далее совершается поворот на вектор $\Delta\vec{\phi}$, в результате чего получается вектор $\vec{\tau}$, так что имеет место соотношение

$$\cos\frac{\tau}{2} + \frac{i\vec{\tau}\vec{\sigma}}{\tau}\sin\frac{\tau}{2} = \left(\cos\frac{\Delta\phi}{2} + \frac{i\vec{\Delta\phi}\vec{\sigma}}{\Delta\phi}\sin\frac{\Delta\phi}{2}\right)\left(\cos\frac{\tau_0}{2} + \frac{i\vec{\tau}_0\vec{\sigma}}{\tau_0}\sin\frac{\tau_0}{2}\right)$$

Имеем

$$\cos\frac{\tau}{2} = \cos\frac{\Delta\phi}{2}\cos\frac{\tau_0}{2} - \frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{\tau_0\Delta\phi}\sin\frac{\Delta\phi}{2}\sin\frac{\tau_0}{2} \approx \cos\frac{\tau_0}{2} - \frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{2\tau_0}\sin\frac{\tau_0}{2},$$

Отсюда получим

$$\tau \approx \tau_0 + \frac{\tau_0\Delta\phi}{\tau_0}.$$

Далее нам понадобится $1/\sin\frac{\tau}{2}$. Найдем эту величину заранее.

$$\sin\frac{\tau}{2} \approx \sin\frac{\tau_0}{2} + \cos\frac{\tau_0}{2}\frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{2\tau_0} = \sin\frac{\tau_0}{2}\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\tau_0}{2}\frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{2\tau_0}\right),$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\tau}{2}} = \frac{1 - \operatorname{ctg}\frac{\tau_0}{2}\frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{2\tau_0}}{\sin\frac{\tau_0}{2}}.$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}\left\{\frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta\phi}\cos\frac{\tau_0}{2}\sin\frac{\Delta\phi}{2} + \frac{\vec{\tau}_0}{\tau_0}\sin\frac{\tau_0}{2}\cos\frac{\Delta\phi}{2} + \frac{\vec{\tau}_0 \times \Delta\vec{\phi}}{\tau_0\Delta\phi}\sin\frac{\tau_0}{2}\sin\frac{\Delta\phi}{2}\right\} \approx \\ &\approx \frac{\tau_0 + \frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{\tau_0}}{\sin\frac{\tau_0}{2}}\left(1 - \frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{2\tau_0}\operatorname{ctg}\frac{\tau_0}{2}\right)\left\{\frac{\vec{\tau}_0}{\tau_0}\sin\frac{\tau_0}{2} + \frac{\Delta\vec{\phi}}{2}\cos\frac{\tau_0}{2} + \frac{\vec{\tau}_0 \times \Delta\vec{\phi}}{2\tau_0}\sin\frac{\tau_0}{2}\right\} \approx \\ &\approx \vec{\tau}_0 + \frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{\tau_0^2}\vec{\tau}_0 - \frac{\vec{\tau}_0\vec{\Delta\phi}}{2\tau_0}\operatorname{ctg}\frac{\tau_0}{2}\vec{\tau}_0 + \frac{\tau_0}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau_0}{2}\Delta\vec{\phi} + \frac{\vec{\tau}_0 \times \Delta\vec{\phi}}{2} \end{aligned}$$

Введем скорость изменения вектора поворота

$$\vec{\nu} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}, \quad \vec{\nu} = (-2g(t), 0, W(t)).$$

Тогда получаем дифференциальное уравнение для вектора поворота $\vec{\tau}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\vec{\tau}\vec{\nu}}{\tau^2}\vec{\tau} - \frac{\vec{\tau}\vec{\nu}}{2\tau}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\vec{\tau} + \frac{\tau}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}\vec{\nu} + \frac{\vec{\tau} \times \vec{\nu}}{2}$$

Это уравнение достаточно сложное, и с его помощью находить фазы Берри в конкретных случаях нелегко. Но интересен сам факт его существования: фаза Берри в произвольном случае равна модулю вектора поворота некоторой сферы, или иначе ее можно представить как длину дуги большого круга на этой сфере², которая замыкает некоторую криволинейную траекторию. Эта траектория получается как совокупность бесконечно большого числа бесконечно малых дуг, соответствующих инфинитезимальным поворотам сферы на углы $\vec{v}dt$.

4.5 Квазиклассический предел

Согласно общему принципу соответствия квантовой и классической теорий квантовые уравнения должны переходить в классические при возрастании квантовых чисел. Так и в нашей модели можно рассмотреть атом в сильном поле. В этом случае в полевой моде содержится большое количество фотонов. Можно ожидать, что фаза Берри, сосчитанная для атома в квантованном поле, при росте числа фотонов должна переходить в фазу Берри атома в классическом поле. Но полученное выражение не имеет предела при $n \rightarrow \infty$. Здесь нет противоречия с принципом соответствия, т.к. в реальных полях число фотонов всегда конечно.

Ограничимся рассмотрением атома в классическом поле без дополнительного керровского воздействия. Гамильтониан атома, помещенного в сильное монохроматическое классическое имеет вид

$$\hat{H}_{cl} = \hat{H}_A + E_F + b \cos\omega t (R_+ + R_-).$$

Здесь \hat{H}_0 -гамильтониан свободного атома, $E_F = \int_V \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{2} dV$ - энергия полевой моды, а последнее слагаемое-гамильтониан взаимодействия (см, например, [56]). Точное решение уравнения Шредингера с таким гамильтонианом получить не удастся (решение в виде ряда см [58]). Поэтому мы снова рассмотрим приближение вращающейся волны. Для этого перепишем гамильтониан в виде

$$\hat{H}_{cl} = \hat{H}_A + E_F + g_{cl} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})(R_+ + R_-).$$

Здесь g_{cl} -классическая константа связи. Отбрасывая в гамильтониане взаимодействия быстро осциллирующие слагаемые, получаем

$$\hat{H}_{cl} = \hat{H}_A + E_F + g_{cl}(e^{i\omega t} R_- + e^{-i\omega t} R_+).$$

Уравнение Шредингера для рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}_0 |\Psi\rangle + E_F |\Psi\rangle + g_{cl}(e^{i\omega t} R_- + e^{-i\omega t} R_+) |\Psi\rangle.$$

²Радиус сферы в этой интерпретации должен быть равен 1.

Состояние атома будем описывать, как и раньше, двухкомпонентным столбцом $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. В этом представлении уравнение Шредингера распадается на 2 уравнения:

$$\begin{cases} i\dot{x} = (\frac{\omega_0}{2} + E_F)x + g_{cl}e^{-i\omega t}y \\ i\dot{y} = g_{cl}e^{i\omega t}x + (E_F - \frac{\omega_0}{2})y \end{cases}$$

Такое уравнение легко решается (см. [57]). Решение

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2A} \left\{ (A + \Delta\omega)e^{-i(E_F - \frac{A_-}{2})t} + (A - \Delta\omega)e^{-i(E_F + \frac{A_+}{2})t} \right\} x_0 + \\ &\quad + \frac{g_{cl}}{A} \left\{ e^{-i(E_F + \frac{A_+}{2})t} - e^{-i(E_F - \frac{A_-}{2})t} \right\} y_0 \\ y &= \frac{1}{2A} \left\{ (A - \Delta\omega)e^{-i(E_F - \frac{A_+}{2})t} + (A + \Delta\omega)e^{-i(E_F + \frac{A_-}{2})t} \right\} y_0 + \\ &\quad + \frac{g_{cl}}{A} \left\{ e^{-i(E_F + \frac{A_-}{2})t} - e^{-i(E_F - \frac{A_+}{2})t} \right\} x_0 \end{aligned}$$

Здесь $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $A = \sqrt{\Delta\omega^2 + 4g_{cl}^2}$, $A_{\pm} = A \pm \omega$, x_0 и y_0 - значения x и y при $t = 0$. Отсюда сразу получаем оператор эволюции для этой системы

$$\hat{U}_{cl} = e^{-ie_F t} \hat{U}_{0cl},$$

и матрица \hat{U}_{0cl} унимодулярна:

$$\hat{U}_{0cl} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} \left(\cos \frac{At}{2} + i \frac{\Delta\omega}{A} \sin \frac{At}{2} \right) & -\frac{2ig_{cl}}{A} \sin \frac{At}{2} e^{-i\omega t/2} \\ -\frac{2ig_{cl}}{A} \sin \frac{At}{2} e^{i\omega t/2} & e^{i\omega t/2} \left(\cos \frac{At}{2} - i \frac{\Delta\omega}{A} \sin \frac{At}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

Видно, что в этом простейшем случае оператор эволюции для классического поля отличается от оператора эволюции системы с квантованным полем тем, что величина $g\sqrt{N} = g\sqrt{n}$ заменяется на g_{cl} , и дополнительными фазовыми множителями в матричных элементах. Фазовые множители появились из-за того, что в случае классического поля невозможно учесть тот факт, что при переходе с нижнего уровня на верхний атом поглощает фотон и излучает его при обратном переходе. Мы вынуждены считать, что при таких переходах энергия поля не изменяется. Далее, классическая константа взаимодействия равна произведению дипольного момента атома на напряженность электрического поля, напряженность же поля пропорциональна квадратному корню из энергии, т.е. квадратному корню из числа фотонов. Отсюда ясно, что принцип соответствия в этом простейшем случае выполняется. Из-за того, что операторы эволюции в двух рассматриваемых случаях имеют одинаковую структуру, следует, что и в общем случае переменных воздействий операторы эволюции будут совпадать.

Глава 5

Динамические супергруппы и суперкогерентные состояния в квантовой оптике и теории систем многих частиц

Идея введения в физику суперсимметричных моделей возникла в физике в начале 70-х г. XX века и была первоначально связана с попыткой нетривиального объединения релятивистской симметрии группы Пуанкаре и внутренних симметрий.

В этой главе показана полезность суперсимметричных расширений динамических групп для модельных гамильтонианов квантовой оптики и в теории систем многих частиц.

5.1 Преобразование Хаббарда - Стратоновича и интегралы по траекториям для фермион - бозонных гамильтонианов

Хорошо известно, что наряду с расчетом амплитуд переходов имеется важная проблема вычисления статистической суммы $Z(\beta)$ термодинамически равновесной квантовой системы, здесь $\beta = 1/k_B T$. Если гамильтониан линеен по генераторам динамической алгебры, то вычисление $Z(\beta)$ сводится к нахождению аналитического продолжения свертки диагональных матричных элементов операторов представления динамической группы. Однако, для большинства реалистических гамильтонианов квантовой оптики и теории систем многих частиц зависимость от генераторов динамической группы более сложная и групповой поход не удастся применить в полном объеме.

Здесь, следуя работам [59, 60, 61], исследована проблема расчёта статистической суммы для системы взаимодействующих бозонов и фермионов. Использование техники и интегрального преобразования Хаббарда - Стра-

тоновича позволяет "линеаризовать" гамильтониан на соответствующей динамической (супер)алгебре и представить физические величины, характеризующие термодинамически равновесную систему в виде гауссовых средних (континуальных интегралов) по случайным комплексным и (или) грассмановым вспомогательным полям и, в принципе, получить результаты за рамками приближения среднего поля, расширив, тем самым, границы применимости алгебраических методов. Новизна подхода, по сравнению с имеющимися в литературе публикациями, основана на грассмановой версии преобразования Хаббарда - Стратоновича (ПХС), наряду с обычным, заданным над вещественным или комплексным полем чисел, и распутывании эффективного оператора эволюции на супергруппе Гейзенберга - Вейля $SW(N)$. Когерентные состояния на этой группе использованы для вычисления следа. Разобраны примеры применения данного подхода к фермионной модели Липкина - Мешкова на группе $SU(2)$.

5.1.1 Взаимодействующие бозоны и фермионы и преобразования Хаббарда - Стратоновича

Рассмотрим общий гамильтониан некоторой системы взаимодействующих бозонов и фермионов

$$H = \mathcal{F}(b_\alpha^\dagger, b_\beta; f_i^\dagger, f_j) = H_0 + H_{int}, \quad (5.1)$$

где явный вид операторнозначной функции \mathcal{F} зависит от изучаемой системы, и

$$H_0 = H_0^{(B)} + H_0^{(F)}$$

сумма гамильтонианов свободных бозонов и фермионов и H_{int} гамильтониан взаимодействия.

Будем исследовать статистическую сумму нашей системы, предполагая задачу термодинамически равновесной:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\beta) &= Tr \exp(-\beta H) = \\ &= Tr \left\{ \exp(-\beta H_0) \hat{T}_D \exp\left(-\int_0^\beta H_{int}(\tau) d\tau\right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь \hat{T}_D представляет Дайсоновский оператор хронологического упорядочивания, а

$$H_{int}(\tau) = \exp(\tau H_0) H_{int} \exp(-\tau H_0)$$

- гамильтониан взаимодействия в картине взаимодействия.

В то время как операторы $H_0^{(B, F)}$ являются билинейными по соответствующим бозонным $b_\alpha^\#$ и фермионным $f_i^\#$ операторам рождения и уничтожения, гамильтониан взаимодействия обычно является произведением линейных комбинаций бозонных операторов на билинейные комбинации фермионных операторов. Этот гамильтониан может также включать отдельно комбинации фермионных операторов четвертого порядка (самодействие фермионов). В моделях нелинейной оптики, которые в данном разделе не рассматриваются, гамильтониан взаимодействия содержит слагаемые, описывающие самодействие бозонов (фотонов) в нелинейной среде. Отсюда видно, что реалистические гамильтонианы не имеют линейной динамической алгебры. Известные реализации генераторов групп и супергрупп Ли через бозонные и фермионные операторы рождения и уничтожения выражаются, как правило, через их линейные и билинейные комбинации.

Для того, чтобы представить главную идею дальнейшего рассмотрения, рассмотрим два варианта ПХС, которые могут быть использованы при "линеаризации" гамильтониана в выражении (5.2):

$$\exp(-A \cdot B) = \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2\pi i} \exp(-\bar{z}z - zA + \bar{z}B), \quad (5.3)$$

справедливое если операторы A и B коммутируют, $[A, B] = 0$, и ограничены в гильбертовом пространстве состояний, и

$$\exp(F_1 \cdot F_2) = \int d\xi^* d\xi \exp(-\xi^* \xi + F_1 \xi + \xi^* F_2), \quad (5.4)$$

если операторы F_1 и F_2 антикоммутируют: $\{F_1, F_2\} = 0$. Грассмановы переменные ξ, ξ^* также антикоммутируют $\{\xi, \xi^*\} = 0 = \xi^2 = \xi^{*2}$. Они антикоммутируют также с фермионными операторами F_1 и F_2 и не могут быть выражены в терминах обычных (вещественных или комплексных) чисел.

Хорошо известно [2], что билинейные комбинации только бозонных и (или) только фермионных операторов рождения и уничтожения генерируют т.н. осцилляторноподобные представления групп Ли. Смешанные билинейные комбинации бозонных и фермионных операторов порождают аналогичные представления супергрупп, при этом бозон - бозонные и фермион - фермионные билинейные комбинации соответствуют генераторам обычных групп Ли (четные генераторы), а фермион - бозонные билинейные комбинации соответствуют нечетным генераторам супергруппы. Известно также существование реализаций генераторов супергрупп с линейными, билинейными и трилинейными комбинациями фермионных операторов, которые актуальны при алгебраическом описании систем взаимодействующих фермионов.

Для целей сведения статсуммы (5.2) к более удобному виду, разделим интервал $[0, \beta]$ на t равных частей и превратим её в произведение выражений

типа (5.2) на интервалах $[\beta_{l-1}, \beta_l]$, $l = 0, \dots, m$. Разбиение на интервалы приводит к тому, что операторы в показателях экспонент сомножителей будут иметь коммутатор (антикоммутатор) пропорциональный произведению соответствующих величин интервалов и малый для достаточно большого разбиения.

Далее, выполним ПХС (5.3) -(5.4) для каждого сомножителя и перейдем к пределу $m \rightarrow \infty$. После некоторых вычислений мы получим следующий результат для $\mathcal{Z}(\beta)$:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \left\langle Tr \left\{ \hat{T}_D \exp \left(- \int_0^\beta H_{eff}(\tau) d\tau \right) \right\} \right\rangle_{GA}, \quad (5.5)$$

здесь $\langle \dots \rangle_{GA}$ обозначает гауссово усреднение - континуальный интеграл по вспомогательным комплексным и грассмановым полям. $H_{eff}(\tau)$ "эффективный" гамильтониан, который описывает "взаимодействие" между линеаризованной бозон - фермионной системой и фиктивными комплексными и грассмановыми флуктуирующими полями.

Для получения формулы (5.5) для \mathcal{Z} нам нужна только соответствующая схема ПХС, чтобы свести задачу к линеаризованной модели на подходящей (супер)алгебре Ли. Легко понять, что такая схема линеаризации не единственна, поскольку операторы A и B в исходном выражении можно, в принципе, выбрать по разному. Критерием правильного выбора схемы ПХС является возможность представить Дайсоновскую экспоненту в (5.5) в "распутанном" виде путем решения уравнения типа Шредингера

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{T}_D \exp(\dots) = H_{eff}(\tau) \hat{T}_D \exp(\dots). \quad (5.6)$$

Последнее связано с проблемой нахождения явного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений для параметров динамической (супер)группы, которое возможно в общем случае только для разрешимых и нильпотентных групп Ли (определения можно найти, например, в[2]). Из-за этого нам нужно во многих ситуациях применять двойное преобразование Хаббарда - Стратоновича [60, 59]. Так, для модели Хаббарда приходим к эффективному "зависящему от времени" гамильтониану линейному по генераторам супергруппы $U(1|1) \oplus U(1|1)$, для квантовооптической модели Джейнса - Каммингса - по генераторам супергруппы $Osp(2|2) \oplus SW(1) \supset U(1|1) \oplus SW(1)$ [41]. В этих случаях уравнения для элементов супергрупп выводятся в явном виде и континуальный интеграл для \mathcal{Z} вычисляется с использованием когерентных состояний для соответствующей супергруппы. Интересно, что разный тип ПХС связан с разными существующими термодинамическими фазами. Разные схемы линеаризации гамильтониана под знаком

вычисления следа оператора эволюции сосуществуют с ненулевым значением некоторого оператора порядка, который появляется совершенно естественно и выражается через инварианты динамической (супер)группы.

5.1.2 Расчет интеграла по траекториям для статистической суммы многофермионной системы

Будем изучать квантовую систему фермионов, взаимодействующих посредством парного потенциала V . Для определённости и следуя работам [59, 60], будем рассматривать достаточно общую модель с гамильтонианом вида:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\alpha}(\vec{k}) \hat{X}_{\alpha\alpha}(\vec{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\alpha\alpha'\beta\beta'}(\vec{k}, \vec{k}') \hat{X}_{\alpha\beta}(\vec{k}) \hat{X}_{\alpha'\beta'}(\vec{k}'), \quad (5.7)$$

здесь $\hat{X}_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \hat{f}_{\alpha}^{\dagger}(\vec{k}) \hat{f}_{\beta}(\vec{k})$ - произведение фермионных операторов рождения и уничтожения, \vec{k} - квазиимпульс, а α, β - индексы проекции спина фермиона (здесь и далее по повторяющимся проекциям спинов подразумевается суммирование, которое мы будем опускать, чтобы не загромождать формулы). Операторы $\hat{X}_{\alpha\beta}(\vec{k})$ удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры Ли $gl(M, R)$:

$$\left[\hat{X}_{\alpha\beta}(\vec{k}), \hat{X}_{\alpha'\beta'}(\vec{k}') \right] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(\delta_{\beta\alpha'} \hat{X}_{\alpha\beta'}(\vec{k}) - \delta_{\alpha\beta'} \hat{X}_{\alpha'\beta}(\vec{k}') \right), \quad (5.8)$$

здесь $\alpha, \beta = 1, \dots, M$ (число M зависит от рассматриваемой модели). В формуле (5.7) $\epsilon_{\alpha}(\vec{k})$ энергия возбуждения свободного фермионного осциллятора сорта α , которая может отличаться знаком от соответствующей одночастичной энергии.

Матричный элемент оператора возмущения \hat{V} можно представить в виде разложения

$$\frac{1}{2} V_{\alpha\alpha'\beta\beta'}(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{\nu} \mathcal{V}_{\alpha\beta}^{\nu}(\vec{k}) \bar{\mathcal{V}}_{\alpha'\beta'}^{\nu}(\vec{k}'). \quad (5.9)$$

Будем далее рассматривать простой случай т.н. сепарабельных потенциалов, для которого $\nu = 1$. В правой части выражения (5.9) останется только одно слагаемое, которое мы запишем в виде:

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta}(\vec{k}) \bar{\mathcal{V}}_{\alpha'\beta'}(\vec{k}').$$

Тогда наш гамильтониан примет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (5.10)$$

где

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\alpha}(\vec{k}) \hat{X}_{\alpha\alpha}$$

и

$$\widehat{V} = \left(\sum_{\vec{k}} \mathcal{V}_{\alpha\beta}(\vec{k}) \widehat{X}_{\alpha\beta}(\vec{k}) \right) \cdot \left(\sum_{\vec{k}'} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha'\beta'}(\vec{k}') \widehat{X}_{\alpha'\beta'}(\vec{k}') \right) \equiv \widehat{A} \cdot \widehat{B}.$$

Статистическая сумма для гамильтониана (5.10) может быть записана как:

$$Z(\beta) = Tr \left\{ \exp \left(-\beta \widehat{H}_0 \right) \widehat{T}_D \exp \left(- \int_0^\beta \widehat{V}(\tau) d\tau \right) \right\}, \quad (5.11)$$

$\widehat{V}(\tau) = \exp \left(\tau \widehat{H}_0 \right) \widehat{V} \exp \left(-\tau \widehat{H}_0 \right)$ – оператор взаимодействия в картине взаимодействия. Далее проводим уже упомянутую процедуру разбиения интервала $[0, \beta]$ на m частей: $[0, \beta] = \bigcup_{l=1}^m [\beta_{l-1}, \beta_l]$, $\beta_l = (\beta l/m)$ и используем ПХС для каждого сомножителя:

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{\beta}{m} \widehat{V}(\tau_l) \right) &\equiv \exp \left(\frac{\beta}{m} \widehat{A}(\tau_l) \widehat{B}(\tau_l) \right) = \\ &= \int \frac{dRe z(\tau_l) dIm \bar{z}(\tau_l)}{\pi m / \beta} \exp \left(-\frac{\beta}{m} \bar{z}(\tau_l) z_l(\tau_l) \right) \exp \left\{ -\frac{\beta}{m} z_l \widehat{A}(\tau_l) + \frac{\beta}{m} \bar{z}_l \widehat{B}(\tau_l) \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Формула (5.12) справедлива с точностью до членов $\sim O[(\beta/m)^2]$. "Зависящие от времени" операторы в (5.12) $\widehat{X}_{\alpha\alpha}(\vec{k}, \tau_l)$ являются линейными комбинациями "независящие от времени" операторов $\widehat{X}_{\alpha\alpha}(\vec{k})$, с сохранением структуры алгебры Ли (5.8). В случае модели (5.10):

$$\widehat{X}_{\alpha\alpha}(\vec{k}, \tau_l) = \widehat{X}_{\alpha\alpha}(\vec{k}) \exp \left[\tau_l \left(\epsilon_\alpha(\vec{k}) - \epsilon_\beta(\vec{k}) \right) \right].$$

Будем далее опускать явную зависимость от квазиимпульса \vec{k} , чтобы не загромождать последующие достаточно громоздкие формулы несущественными деталями. Выполнив формальный переход к пределу $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \prod_{\vec{k}} \int \mathcal{D}(\bar{z}(\tau), z(\tau)) \exp \left(- \int_0^\beta \bar{z}(\tau) z(\tau) d\tau \right) \cdot \\ &\quad \cdot Tr \left\{ \exp \left(-\beta \epsilon_\alpha \widehat{X}_{\alpha\alpha} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} &\widehat{T}_D \exp \left(- \int_0^\beta (z(\tau) \mathcal{V}_{\alpha\beta} - \bar{z}(\tau) \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta}) \exp \left[\tau (\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) \widehat{X}_{\alpha\beta} \right] d\tau \right) \Bigg\} \equiv \\ &\equiv \prod_{\vec{k}} \left\langle \chi^G(\vec{k}, \beta) \right\rangle_{Gauss}, \end{aligned}$$

где мера интегрирования имеет вид

$$\mathcal{D}(\bar{z}(\tau), z(\tau)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^m \left[d \operatorname{Re} z(\tau_l) d \operatorname{Im} z(\tau_l) \cdot \left(\frac{\pi m}{\beta} \right) \right]$$

χ^G — характер приводимого представления группы Ли $G = GL(M, R)$ или некоторой ее подгруппы, определяемой спецификой изучаемой модели.

К сожалению, вычислить характеры χ^G не удастся, поскольку функции $\bar{z}(\tau)$, $z(\tau)$ не заданы в явном виде и являются общими флуктуирующими функциями от τ . Очень часто в литературе используется приближение "статистических" траекторий $z(\tau) \equiv \text{const}$, которое приводит к результатам эквивалентным теории среднего поля.

Для преодоления этого ограничения вернемся к формуле (5.12) и применим для нее ПХС (5.4), при этом из последующих вычислительных соображений, используем несимметричное определение операторов F_1 и F_2 :

$$F_1 = \sqrt{\frac{\beta}{m}} (\bar{z}(\tau_l) \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta} - z(\tau_l) \mathcal{V}_{\alpha\beta}) e^{\tau_l \epsilon_\alpha} \hat{f}_\alpha^\dagger, \quad F_2 = \sqrt{\frac{\beta}{m}} e^{-\tau_l \epsilon_\beta} \hat{f}_\beta.$$

Таким образом, используя двойное ПХС, приведем статистическую сумму к виду:

$$\begin{aligned} Z(\beta) = & \prod_{\vec{k}} \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Tr} \left\{ \exp \left[-\beta \epsilon_\alpha \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha \right] \times \right. \\ & \times \int \cdots \int \prod_{l=1}^m \left\{ \frac{d \operatorname{Re} z(\tau_l) d \operatorname{Im} z(\tau_l)}{\pi m / \beta} \prod_{\alpha\beta} \frac{d \xi_{\alpha\beta}^*(\tau_l) d \xi_{\alpha\beta}(\tau_l)}{\beta / m} \exp \left[-\frac{\beta}{m} \bar{z}(\tau_l) z(\tau_l) \right] \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \exp \left[-\frac{\beta}{m} \xi_{\alpha\beta}^*(\tau_l) \xi_{\alpha\beta}(\tau_l) \right] \exp \left[-\frac{\beta}{m} \left(\hat{f}_\alpha^\dagger \zeta_\alpha(\tau_l) - \tilde{\zeta}_\alpha(\tau_l) \hat{f}_\alpha \right) \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

В формуле (5.14) введены обозначения

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(\tau_l) &= \exp(\tau_l \epsilon_\alpha) \sum_{\beta} (z(\tau_l) \mathcal{V}_{\alpha\beta} - \bar{z}(\tau_l) \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta}) \xi_{\alpha\beta}(\tau_l), \\ \tilde{\zeta}_\alpha(\tau_l) &= \exp(-\tau_l \epsilon_\alpha) \sum_{\beta} \xi_{\alpha\beta}^*(\tau_l). \end{aligned}$$

После перехода к пределу $m \rightarrow \infty$ статистическая сумма приводится к виду континуального интеграла, являющегося двойным гауссовым усреднением по комплексным полям $\bar{z}(\tau)$, $z(\tau)$ и грассмановым полям $\xi_{\alpha\beta}^*$, $\xi_{\alpha\beta}$:

$$Z(\beta) = \prod_{\vec{k}} \operatorname{Tr} \left\{ \exp \left(-\beta \epsilon_\alpha \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha \right) \int \mathcal{D}(\bar{z}, z; \xi^*, \xi) \exp \left(- \int_0^\beta \bar{z}(\tau) z(\tau) d\tau \right) \right\}.$$

$$\cdot \exp \left(- \int_0^\beta \xi_{\alpha\beta}^*(\tau) \xi_{\alpha\beta}(\tau) d\tau \right) \widehat{T}_D \exp \left(\sum_\alpha \int_0^\beta \left(\hat{f}_\alpha^\dagger \zeta_\alpha(\tau) - \tilde{\zeta}_\alpha \hat{f}_\alpha \right) d\tau \right) \Big\}, \quad (5.15)$$

где

$$\mathcal{D}(\bar{z}, z; \xi^*, \xi) \equiv \mathcal{D}(\bar{z}, z) \mathcal{D}(\xi^*, \xi) = \mathcal{D}(\bar{z}, z) \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^m \prod_{\alpha\beta} d\xi_{\alpha\beta}^*(\tau_l) d\xi_{\alpha\beta}(\tau_l) \left(\frac{\beta}{m} \right)^{-1}.$$

В формулах (5.14), (5.15) введено $2 \times N \times N$ грассманных переменных соответственно числу билинейных операторов $\hat{X}_{\alpha\beta} = \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\beta$. В частных случаях это число может быть существенно меньшим.

Дайсоновская экспонента в правой части уравнения (5.15) удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \widehat{T}_D \exp(\dots) = \widehat{\mathcal{H}}(\tau) \widehat{T}_D \exp(\dots), \quad (5.16)$$

где гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}(\tau)$ является линейной комбинацией операторов \hat{f}_α^* , \hat{f}_α с зависящими от "времени" грассманными переменными.

Заметим, что операторы \hat{f}_α^* , \hat{f}_α вместе с единичным оператором \hat{I} генерируют супергруппу $SW(N)$ (супергруппу Вейля - Гейзенберга), которая является динамической супергруппой промежуточного гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}}(\tau)$. Это позволяет искать экспоненту $\widehat{T}_D \exp(\dots)$ в распутанном виде:

$$\widehat{T}_D \exp(\dots) = \exp \left(\lambda(\tau) \hat{I} \right) \cdot \prod_\alpha \exp \left(\hat{f}_\alpha^\dagger \eta_\alpha(\tau) \right) \cdot \prod_{\alpha'} \exp \left(\tilde{\eta}_{\alpha'} \hat{f}_{\alpha'} \right). \quad (5.17)$$

Подставляя (5.17) в (5.16) получаем систему уравнений для коэффициента λ и грассманных переменных η_α , $\tilde{\eta}_\alpha$, решение которых находится в явном виде:

$$\eta_\alpha(\tau) = \int_0^\tau \zeta_\alpha(\tau') d\tau', \quad \tilde{\eta}_\alpha(\tau) = - \int_0^\tau \tilde{\zeta}_\alpha(\tau') d\tau';$$

$$\lambda(\tau) = \sum_{\alpha=1}^N \int_0^\tau \int_0^\tau \theta(\tau' - \tau'') \zeta_\alpha(\tau') \tilde{\zeta}_\alpha(\tau'') d\tau' d\tau'',$$

где $\theta(\tau)$ — ступенчатая функция Хевисайда, удовлетворяющая граничному условию $\theta(+0) = 0$.

Для того, чтобы вычислить след в континуальном интеграле (5.15), введем систему фермионных когерентных состояний для супергруппы $SW(N)$:

$$|\theta_1, \dots, \theta_N\rangle = \exp\left(-\theta_1 \hat{f}_1^\dagger\right) \cdots \exp\left(-\theta_N \hat{f}_N^\dagger\right) |0, \dots, 0\rangle, \quad (5.18)$$

где $|0, \dots, 0\rangle$ – фермионный вакуумный вектор, $\theta_1, \dots, \theta_N$ – грассмановы антикоммутирующие переменные.

Для следа некоторой операторной функции $\hat{R} = R(\{\hat{f}^\dagger\}, \{\hat{f}\})$ от фермионных операторов справедлива формула:

$$\text{Tr} \hat{R} = \int \langle \theta_1, \dots, \theta_N | \hat{R} | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle \exp(\theta_1^* \theta_1 + \dots + \theta_N^* \theta_N) d\theta_1 d\theta_1^* \cdots d\theta_N d\theta_N^*. \quad (5.19)$$

Кроме того, как и для глауберовских когерентных состояний, легко проверить, что

$$\prod_{\alpha=1}^N \exp\left(\mu_\alpha \hat{f}_\alpha^\dagger \hat{f}_\alpha\right) | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle = | e^{\mu_1} \theta_1, \dots, e^{\mu_N} \theta_N \rangle. \quad (5.20)$$

Используя формулу для следа (5.19), вычисляя матричные элементы "оператора эволюции" между фермионными КС, применив формулы (5.18) и (5.20), получаем точное выражение для следа в (5.15) и находим после достаточно громоздких, но несложных преобразований, следующее представление в виде интеграла по траекториям для статистической суммы, в котором уже нет фермионных операторов:

$$\begin{aligned} Z(\beta)/Z_0(\beta) &= \prod_{\vec{k}} \int \mathcal{D}(\bar{z}, z; \xi^*, \xi) \exp\left(-\int_0^\beta \bar{z}(\tau) z(\tau) d\tau\right) \cdot \\ &\cdot \exp\left(-\int_0^\beta \xi_{\alpha\beta}^*(\tau) \xi_{\alpha\beta}(\tau) d\tau\right) \cdot \\ &\cdot \exp\left(\sum_{\alpha=1}^N \int_0^\beta \int_0^\beta (\theta(\tau - \tau') - n_\alpha) \zeta_\alpha(\tau) \tilde{\zeta}_\alpha(\tau') d\tau d\tau'\right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

здесь $Z_0(\beta) = \prod_{\vec{k}} Z_0(\beta, \vec{k})$ и $Z_0(\beta, \vec{k}) = \prod_{\alpha} \left(1 + \exp\left(-\beta \epsilon_\alpha(\vec{k})\right)\right)$ – статистическая сумма невзаимодействующих фермионных осцилляторов, а $n_\alpha(\vec{k}) = \left[1 + \exp\left(\beta \epsilon_\alpha(\vec{k})\right)\right]^{-1}$ – среднее число невзаимодействующих фермионов сорта "α".

Интегралы по траекториям в последней формуле (5.21) являются гауссовыми как по комплексным полям, так и по грассмановым. К сожалению,

интегрирование с использованием этого свойства можно выполнить аналитически только либо по комплексным, либо по грассмановым переменным. Выполним вначале интегрирование по комплексным полям \bar{z}, z . Для этого заметим, что данный интеграл в (5.21) имеет вид:

$$\int \mathcal{D}(\bar{z}, z) \exp \left[- \int_0^\beta \int_0^\beta \bar{z}(\tau) \delta(\tau - \tau') z(\tau') d\tau d\tau' + \int_0^\beta \left(J(\vec{k}, \tau) z(\tau) + \tilde{J}(\vec{k}, \tau) \bar{z}(\tau) \right) d\tau \right],$$

где функции J и \tilde{J} являются билинейными комбинациями $\xi_{\alpha\beta}^*$ и $\xi_{\alpha\beta}$:

$$J(\vec{k}, \tau) = \sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{V}_{\alpha\beta} \int_0^\beta \left[\theta(\tau - \tau_1) - n_\alpha(\vec{k}) \right] \exp \left[\epsilon_\alpha(\vec{k}) \cdot (\tau - \tau_1) \right] \xi_{\alpha\beta}(\tau) \xi_{\gamma\alpha}^*(\tau_1) d\tau_1,$$

$$\tilde{J}(\vec{k}, \tau) = - \sum_{\alpha\beta\gamma} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta} \int_0^\beta \left[\theta(\tau - \tau_1) - n_\alpha(\vec{k}) \right] \exp \left[\epsilon_\alpha(\vec{k}) \cdot (\tau - \tau_1) \right] \xi_{\alpha\beta}(\tau) \xi_{\gamma\alpha}^*(\tau_1) d\tau_1.$$

Выполнив интегрирование по \bar{z}, z , мы получим представление статистической суммы в виде континуального интеграла только по грассмановым переменным, а именно:

$$Z(\beta)/Z_0(\beta) = \prod_{\vec{k}} \int \mathcal{D}(\xi^*, \xi) \exp \left(- \int_0^\beta \int_0^\beta \xi_{\alpha\beta}^*(\tau) \delta(\tau - \tau') \xi_{\alpha\beta}(\tau) d\tau d\tau' \right) \cdot \exp \left(- \int_0^\beta \int_0^\beta \tilde{J}(\vec{k}, \tau) \delta(\tau - \tau') J(\vec{k}, \tau') d\tau d\tau' \right). \quad (5.22)$$

При выводе формулы (5.22) не использовано никаких предположений за исключение тех, которые были сделаны при установлении явного вида фермион - бозонного гамильтониана (5.10), поэтому она является точной. Однако, интеграл по вспомогательным грассмановым полям в (5.10), конечно, не является гауссовым и в общем случае выполнить его точное вычисление не представляется возможным. Тем не менее, именно в данной форме из-за свойств грассмановых переменных континуальный интеграл для статистической суммы удобен для последующего приближенного расчета.

Ограничимся применением развитого формализма к модели Липкина - Мешкова - Глика, которая описывает систему фермионов N – типов, населяющих два разных энергетических уровня. Введем оператор числа фермионов $\hat{n}_{\alpha\nu} = \hat{f}_{\alpha\nu}^\dagger \hat{f}_{\alpha\nu}$, $\alpha = (1, 2); \nu = 1, \dots, N$. Гамильтониан модели запишем в виде:

$$\hat{H} = 2\epsilon \hat{J}_z - 4\lambda \hat{J}_x^2, \quad (5.23)$$

где

$$\hat{J}_z = -(1/2) \sum_{\nu=1}^N (\hat{n}_{1\nu} - \hat{n}_{2\nu}), \quad \hat{J}_x = (1/2) \sum_{\nu=1}^N (\hat{n}_{1\nu} + \hat{n}_{2\nu}), \quad \hat{J}_y = i [\hat{J}_x, \hat{J}_z].$$

Здесь \hat{J}_i , $i = x, y, z$ - генераторы группы $SU(2)$, $\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$ - разность уровней, а константа λ пропорциональна матричному элементу потенциала фермион - фермионного взаимодействия \hat{V} .

При $N \gg 1$ имеется два разных режима в пространстве параметров модели:

1. $\lambda < \epsilon/2N$,
2. $\lambda > \epsilon/2N$.

В первой области гамильтониан (5.23) можно, очевидно, заменить гамильтонианом, записанном в приближении среднего поля $\hat{H}_{MF}^{(1)} = 2\epsilon \hat{J}_z$, тогда как во второй области $\hat{H}_{MF}^{(2)} = 2\epsilon \hat{J}_z + 8\lambda \langle \hat{J}_x \rangle \hat{J}_x$. Здесь $\langle \hat{J}_x \rangle \neq 0$ - параметр порядка, который может быть рассчитан с использованием хорошо известной вариационной процедуры.

Для того, чтобы продемонстрировать наш метод, введем два типа грасмановых переменных ξ_α^* , ξ_α . Используя формулу (5.22), после некоторых несложных вычислений [59] находим:

$$Z(\beta) = \{2[1 + ch(\epsilon\beta)]\}^N \left[1 + \frac{\lambda\beta}{1 + ch(\epsilon\beta)} + \dots \right]^N, \quad (5.24)$$

и для энергии основного состояния $\mathcal{E}_0 = -\frac{d}{d\beta} \ln Z(\beta)|_{\beta=0}$ получаем результат, совпадающий с расчетом по обычной теории возмущений:

$$\mathcal{E}_0 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(-N \frac{\lambda}{2} - N \frac{\epsilon^2 \beta}{2} + O(\beta^2) \right), \quad N \gg 1.$$

В работе [54] показано, что использование метода двойного преобразования Хаббарда - Стратоновича позволяет провести эффективный расчет т.н. модели Хаббарда, используемой в теории магнитных явлений. Эффективной

динамической супералгеброй здесь является $U(1|1) \oplus U(1|1)$. В простейшем случае одномерной спиновой цепочки удалось найти точную статистическую сумму в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Кроме того, в развитие метода распутывания операторных экспонент [31] оказалось полезным для расчетов вероятностей вибронных переходов в молекулах, совершенно естественно обобщая хорошо известный метод интегралов Франка - Кондона [3,4]. Кроме того, континуальные интегралы, построенные с помощью двойного преобразования Хаббарда - Стратоновича полезны при проведении расчетов недавно экспериментально открытых атомных конденсатов [62]. К сожалению, мы не будем рассматривать здесь эти интересные применения из-за того, что они слабо связаны с темой данного пособия. Вместо этого мы приступим к изучению суперсимметричного варианта модели Джейнса - Каммингса.

5.2 Суперсимметричные модели Джейнса - Каммингса

5.2.1 Супергруппа $OSp(2|2)$ и модель Джейнса - Каммингса

Двухуровневая система, взаимодействующая с полем излучения, является популярной моделью в физике благодаря тому, что она проста и, вместе с тем, описывает весьма широкий класс явлений (см., например, [54-56]). Она успешно используется при рассмотрении ядерного магнитного резонанса, когда магнитный диполь взаимодействует с радиочастотным электромагнитным полем. Можно сказать, что такая модель лежит в основе квантовой оптики и лазерной физики. При этом частота полевой моды находится в резонансе (или близка к нему) с атомной частотой перехода между парой энергетических уровней. Остальные пары атомных уровней удалены от резонанса, и переходы между ними можно не учитывать.

При описании двухуровневого атома удобно использовать матрицы Паули - в силу формальной (и естественной) аналогии со спином $1/2$ в магнитном поле. Используемые операторы равны соответствующим матрицам Паули с множителем $(1/2)$, и их обычно называют операторами энергетического спина. Тогда гамильтониан, описывающий взаимодействие одной моды квантованного электромагнитного поля и двухуровневого атома:

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + (\hat{H}_{int}^{(1)} + \hat{H}_{int}^{(2)}), \quad (5.25)$$

$$\hat{H}_F = \nu \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right), \quad (5.26)$$

$$\hat{H}_A = \omega \hat{S}_Z, \quad (5.27)$$

$$\hat{H}_{int}^{(1)} = g \hat{b} \hat{S}_+ + g \hat{b}^+ \hat{S}_+ + h.c., \quad (5.28)$$

$$\hat{H}_{int}^{(2)} = k (\hat{b}^+ + \hat{b})^2, \quad (5.29)$$

где ν - круговая частота поля, ω - расстояние между атомными уровнями энергии, (здесь $\hbar = 1$), g и k - константы взаимодействия; ($g = \sqrt{\frac{2\pi}{V\nu}}(\vec{e}\vec{d})\omega$ (\vec{d} - матричный элемент переходного дипольного момента), $k = \frac{e^2\pi}{mV\nu}$).

\hat{b}^+ и \hat{b} - бозонные (фотонные) операторы рождения и уничтожения соответственно, \hat{S}_Z и \hat{S}_{\pm} - операторы энергетического спина, образующие алгебру $SU(2)$.

Учитывая, что константа k мала по сравнению с g , это (последнее) слагаемое, как правило, отбрасывают и изучают гамильтониан

$$\hat{H}' = \omega\hat{S}_Z + \nu \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \bar{g}\hat{b}^+ \hat{S}_- + g\hat{b}\hat{S}_+ + g\hat{b}^+ \hat{S}_+ + \bar{g}\hat{b}\hat{S}_-. \quad (5.30)$$

Слагаемые $g\hat{b}^+ \hat{S}_+$ и $\bar{g}\hat{b}\hat{S}_-$ являются быстроосциллирующими и дают незначительный вклад за макроскопическое время (по сравнению с медленноосциллирующими $\bar{g}\hat{b}^+ \hat{S}_-$ и $g\hat{b}\hat{S}_+$), и ими обычно можно пренебречь. Такое приближение называют резонансным или приближением вращающейся волны. Действительно, для невзаимодействующих атома и поля легко получить решения уравнений Гейзенберга для соответствующих операторов: $\hat{b}(t) = \hat{b}(t_0) \exp(-i\nu(t - t_0))$ и $\hat{S}_-(t) = \hat{S}_-(t_0) \exp(-i\omega(t - t_0))$. Ясно, что в одном случае имеет место сложение частот, в другом - вычитание.

Переходя к приближению вращающейся волны, получаем стандартную модель Джейнса - Каммингса (МДК):

$$\hat{H}_{JC} = \omega\hat{S}_Z + \nu \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \bar{g}\hat{b}^+ \hat{S}_- + g\hat{b}\hat{S}_+, \quad (5.31)$$

которая давно и хорошо известна в оптике. Подробное описание МДК можно найти, например, в [54]. В частности, еще в пионерской работе [53] было показано, что для МДК существует точное выражение для вероятности перехода атома с уровня на уровень при условии, что поле изначально приготовлено в чистом квантовом состоянии с n фотонами в моде. В рамках этой модели могут быть изучены все основные закономерности взаимодействия излучения с веществом.

Модель Джейнса - Каммингса в большинстве случаев является достаточно хорошим приближением. Тем не менее, если константа связи g достаточно велика, нужно учитывать и вклад оператора \hat{H}' , включающий в себя высокочастотные нерезонансные слагаемые. Такая обобщенная МДК обычно называется "одетой" ("dressed") моделью Джейнса - Каммингса. Отметим, что последние эксперименты, связанные с практической реализацией одноатомного лазера и микролазера [52], делают актуальным исследование модели при достаточно больших g .

Необходимость учета вклада членов подобных $\hat{H}_{int}^{(2)}$ может возникнуть, например, при параметрическом возбуждении системы. Физически это соответствует случаю, когда атом находится в резонаторе заполненном нелинейной неизотропной средой. Тогда слагаемое в векторе поляризации среды, пропорциональное тензору нелинейной восприимчивости третьего ранга, описывает такие процессы как генерация второй гармоники и "распад" лазерных фотонов, запрещенные в изотропных средах с центром инверсии. (В роли атома может выступить, например, изолированный примесный центр в KDP - кристалле.) Константа взаимодействия k в этом случае должна быть заменена множителем вида $\gamma \cdot \cos(\Omega t)$, где γ пропорциональна напряженности внешнего классического электромагнитного поля и восприимчивости среды, а Ω - частота, близкая к удвоенной частоте полевой моды (это следует из требования фазового синхронизма).

Представляют интерес обобщения гамильтониана (5.25).

Так, можно рассмотреть многофотонные переходы между уровнями атома:

$$\begin{aligned} \hat{H}'' = \omega \hat{S}_Z + \nu \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \bar{g} (\hat{b}^+)^m \hat{S}_- + g (\hat{b})^m \hat{S}_+ + \\ + g (\hat{b}^+)^m \hat{S}_+ + \bar{g} (\hat{b})^m \hat{S}_- + k (\hat{b}^+ + \hat{b})^2, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$.

Последние достижения экспериментальной квантовой оптики [52] позволяют исследовать единственный двухуровневый атом в резонаторе и экспериментально проверить основные положения квантовой электродинамики. Продолжает существовать и теоретический интерес к этой модели, связанный, в частности, с возможностью ее суперсимметричного описания. Идеи суперсимметрии первоначально возникли и применялись в физике высоких энергий. Однако детальное их рассмотрение на примере именно этой элементарной системы представляется полезным, поскольку результаты можно сравнивать с "классическими" полученными традиционным путем. В работе [63] было показано, что группой динамической симметрии модели Джейнса - Каммингса является супергруппа $OSp(2|2)$. Сверх того, линейным по генераторам $OSp(2|2)$ оказывается гамильтониан самого общего вида, учитывающий высокочастотные слагаемые, которые в стандартной ДКМ отбрасывают, используя приближение вращающейся волны.

Легко проверить, что гамильтониан модели Джейнса - Каммингса невозможно представить как элемент линейной оболочки какой - либо замкнутой алгебры Ли. Однако, в качестве динамической супералгебры рассматриваемой модели может быть предложена супералгебра $U(1|1)$ ([63]). Действительно, переход к однофермионной реализации спиновых операторов (коммутационные соотношения при этом сохраняются!)

$$\hat{S}_+ = (\hat{S}_-)^+ = \hat{f}^+, \quad (5.33)$$

$$\hat{S}_Z = \frac{1}{2} (2 \hat{f}^+ \hat{f} - \hat{I}), \quad (5.34)$$

где $\{\hat{f}, \hat{f}^+\} \equiv \hat{f} \hat{f}_+ + \hat{f}_+ \hat{f} = 1$, позволяет переписать гамильтониан \hat{H}_{JC} "суперсимметричным" образом:

$$\hat{H}_{JC} = 2\nu \hat{K}_0 + 2\omega \hat{B} + \Gamma \hat{V}_- + \hat{W}_+ \bar{\Gamma}. \quad (5.35)$$

Здесь введены обозначения:

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2} (\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \hat{I}), \quad (5.36)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2} (\hat{f}^+ \hat{f} - \frac{1}{2} \hat{I}), \quad (5.37)$$

$$\hat{W}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}^+ \hat{f}, \quad (5.38)$$

$$\hat{V}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b} \hat{f}^+, \quad (5.39)$$

Γ и $\bar{\Gamma}$ принадлежат нечетной части грассмановой алгебры:

$$\{\Gamma, \bar{\Gamma}\} = \{\Gamma, \Gamma\} = \{\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}\} = 0 \quad (5.40)$$

и связаны с комплексной константой взаимодействия следующим образом: $\Gamma \bar{\Gamma} = 2g \bar{g}$. Пять коммутационных и одно антикоммутационное соотношение (между \hat{W}_+ и \hat{V}_-) задают вышеуказанную супералгебру.

Строго говоря, традиционно используемые генераторы $U(1|1)$ являются линейными комбинациями приведенных здесь операторов, однако, в целях единообразия изложения будем придерживаться системы обозначений, принятой для $OSp(2|2)$.

Отметим, что супералгебра $U(1|1)$ может быть расширена до $OSp(2|2)$ добавлением еще четырех операторов:

$$\hat{W}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b} \hat{f}, \quad (5.41)$$

$$\hat{V}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{b}^+ \hat{f}^+, \quad (5.42)$$

$$\hat{K}_+ = \frac{1}{2} \hat{b}^+ \hat{b}^+, \quad (5.43)$$

$$\hat{K}_- = \frac{1}{2} \hat{b} \hat{b}. \quad (5.44)$$

Они вместе с уже описанными выше операторами удовлетворяют следующим коммутационным и антикоммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] &= \pm \hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = -2\hat{K}_0, \\ [\hat{B}, \hat{K}_\pm] &= [\hat{B}, \hat{K}_0] = 0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$[\hat{K}_0, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2}\hat{V}_\pm, \quad [\hat{K}_0, \hat{W}_\pm] = \pm \frac{1}{2}\hat{W}_\pm, \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} [\hat{K}_\pm, \hat{V}_\pm] &= [\hat{K}_\pm, \hat{W}_\pm] = 0, \\ [\hat{K}_\pm, \hat{V}_\mp] &= \mp \hat{V}_\pm, \quad [\hat{K}_\pm, \hat{W}_\mp] = \mp \hat{W}_\pm, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$[\hat{B}, \hat{V}_\pm] = \frac{1}{2}\hat{V}_\pm, \quad [\hat{B}, \hat{W}_\pm] = -\frac{1}{2}\hat{W}_\pm, \quad (5.48)$$

$$\{\hat{V}_\pm, \hat{V}_\pm\} = \{\hat{V}_\pm, \hat{V}_\mp\} = \{\hat{W}_\pm, \hat{W}_\pm\} = \{\hat{W}_\pm, \hat{W}_\mp\} = 0, \quad (5.49)$$

$$\{\hat{V}_\pm, \hat{W}_\pm\} = \hat{K}_\pm, \quad \{\hat{V}_\pm, \hat{W}_\mp\} = \hat{K}_0 \mp \hat{B}. \quad (5.50)$$

Тогда из (5.25) ясно, что гамильтониан общего вида, описывающий взаимодействие моды квантованного электромагнитного поля и двухуровневого атома, может рассматриваться как элемент линейной оболочки супералгебры $OSp(2|2)$:

$$\hat{H}^S = \hat{H}_{JC} + (\gamma \hat{K}_+ + \gamma^* \hat{K}_-) + (\Lambda \hat{V}_+ + \hat{W}_- \bar{\Lambda}), \quad (5.51)$$

где γ и γ^* - комплексные, а Λ и $\bar{\Lambda}$ - грассманы константы. В случае $\Lambda = \Gamma$ принято говорить об "одетой" модели Джейнса - Каммингса.

5.2.2 Континуальный интеграл в представлении когерентных состояний супергруппы $OSp(2|2)$

Построение когерентных состояний для супергруппы $OSp(2|2)$ было осуществлено в [64].

В качестве исходного выбирается вектор $|\tau q; \tau \tau q\rangle$, где первые два квантовых числа определяют представление собственно супергруппы $OSp(2|2)$, следующие два - представление $Sp(2, R) (\sim SU(1, 1))$ и последнее - представление $SO(2)$ ($OSp(2|2) \supset Sp(2, R) \otimes SO(2)$).

Когерентные состояния общего вида описываются тремя параметрами - одним комплексным и двумя грассмановыми. Однако спектр состояний изучаемой модели исчерпывается двумя "вырожденными" случаями: $\tau = q$ и $\tau = -q$,

$$|\theta, \sigma\rangle = N \exp(\sigma \hat{K}_+ + \theta \hat{V}_+) |\tau q; \tau \tau q = -\tau\rangle, \quad (5.52)$$

$$N = [Sdet M(\sigma, \bar{\sigma}; \theta, \bar{\theta})]^{-\tau}; \quad (5.53)$$

$$|\chi, \beta\rangle = N \exp(\beta \hat{K}_+ + \chi \hat{W}_+) |\tau q; \tau \tau q = \tau\rangle, \quad (5.54)$$

$$N = [Sdet M(\beta, \bar{\beta}; \chi, \bar{\chi})]^{-\tau}; \quad (5.55)$$

где $M(\gamma, \bar{\gamma}; \psi, \bar{\psi}) = \begin{bmatrix} 1 & \psi \\ \bar{\psi} & 1 - \gamma \bar{\gamma}' \end{bmatrix}$

и $Sdet \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = det(A - BD^{-1}C)/detD$.

Когерентные состояния супергруппы $OSp(2|2)$ обладают обычными свойствами: они неортогональны, а система КС полна и переполнена, поскольку существует разложение единицы.

Построенные когерентные состояния достаточно легко сопоставить с фокковским базисом $|n, \nu \rangle$, где ν - число "фермионов" а n - число бозонов ($m = 0, 1, 2, \dots$) :

$$\left. \begin{array}{l} |0, 0 \rangle \quad |\tau \tau q \rangle, \quad |2m + 2, 0 \rangle \quad |\tau \quad \tau + m + 1 \quad q \rangle \\ |2m + 1, 1 \rangle \quad |\tau + 1/2 \quad \tau + m + 1/2 \quad q + 1/2 \rangle \end{array} \right\} \tau = -q = \frac{1}{4},$$

$$\left. \begin{array}{l} |2m + 1, 0 \rangle \quad |\tau + 1/2 \quad \tau + m + 1/2 \quad q - 1/2 \rangle \\ |2m, 1 \rangle \quad |\tau \quad \tau + m \quad q \rangle \end{array} \right\} \tau = q = \frac{1}{4}.$$

Как видим, "четным" состояниям (т.е. состояниям, у которых суммарное число возбуждений в фермионной и бозонной модах четное) соответствует случай $\tau = -q$, а "нечетным" - случай $\tau = q$.

Как известно, матричные элементы оператора эволюции содержат всю информацию о динамике квантовой системы. Можно записать фейнмановский пропагатор в виде интеграла по траекториям в пространстве параметров КС [?]. Пространство этих параметров является фазовым пространством классического аналога квантовой задачи. Это позволяет говорить о полученных результатах как о квазиклассической динамике.

Для построения интеграла по траекториям рассмотрим матричный элемент оператора эволюции между двумя произвольными когерентными состояниями:

$$\langle KC | U(t, t_0) | KC' \rangle, \quad (5.56)$$

где $U(t, t_0) = \exp(-i(t - t_0)\hat{H})$

и используем метод Швебера. Суть метода заключается в последовательной линеаризации оператора эволюции на каждом из малых промежутков времени

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{N}, \quad N \rightarrow \infty.$$

$$\langle KC | \exp(-i(t - t_0)\hat{H}) | KC' \rangle \equiv \langle KC_N | [\exp(-i(t - t_0)\hat{H}/N)]^N | KC_0 \rangle =$$

$$\begin{aligned}
& = \langle KC_N | (\exp(-i(t-t_0)\hat{H}/N))^N | KC_0 \rangle = \\
& = \underbrace{\int \cdots \int}_{(N-1)} \langle KC_N | \exp(-i(t-t_0)\hat{H}/N) | KC_{N-1} \rangle d\mu(KC_{N-1}) \times \\
& \quad \langle KC_{N-1} | \exp(-i(t-t_0)\hat{H}/N) | KC_{N-2} \rangle d\mu(KC_{N-2}) \times \cdots \\
& \quad \cdots \times d\mu(KC_1) \langle KC_1 | \exp(-i(t-t_0)\hat{H}/N) | KC_0 \rangle. \tag{5.57}
\end{aligned}$$

Поскольку N велико,

$$\begin{aligned}
\langle KC_{j+1} | e^{-i(t-t_0)\hat{H}/N} | KC_j \rangle & \simeq \langle KC_{j+1} | 1 - i(t-t_0)\hat{H}/N | KC_j \rangle \simeq \\
& \simeq \langle KC_{j+1} | KC_j \rangle \exp(-i(t-t_0)h(KC_{j+1}|KC_j)), \tag{5.58}
\end{aligned}$$

где

$$h(KC_{j+1}|KC_j) \equiv \frac{\langle KC_{j+1} | \hat{H} | KC_j \rangle}{\langle KC_{j+1} | KC_j \rangle}$$

- символ оператора гамильтониана.

Когерентные состояния $|\theta, \sigma\rangle$ и $|\chi, \beta\rangle$ устроены одинаково, поэтому приведенные далее результаты верны для обоих случаев.

Итак, для $|KC\rangle = |\theta, \sigma\rangle$, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим:

$$\langle \theta \sigma | \exp(-i(t-t_0)\hat{H}) | \theta' \sigma' \rangle = \int DM_\infty e^{iS}, \tag{5.59}$$

где

$$\begin{aligned}
DM_\infty & = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} d\mu(\theta_j \sigma_j), \\
S & = \int L dt = \frac{1}{i} \int [\tau SdetM(\sigma, \bar{\sigma}; \theta, \bar{\theta}) \{(\sigma\dot{\bar{\sigma}} - \theta\dot{\bar{\theta}}) - \\
& \quad - (\dot{\sigma}\bar{\sigma} - \dot{\theta}\bar{\theta})\} - ih(\theta\sigma|\theta\sigma)] dt.
\end{aligned}$$

Здесь S и L - аналоги функции действия и лагранжиана соответственно.

Тогда квазиклассические гамильтоновы уравнения движения имеют вид:

$$2\tau\bar{\sigma}(\sigma\dot{\bar{\sigma}} - \theta\dot{\bar{\theta}})(SdetM)^2 + 2\tau\dot{\bar{\sigma}} SdetM = i\frac{\partial}{\partial\sigma}h(\theta\sigma|\theta\sigma), \tag{5.60}$$

$$2\tau\sigma(\dot{\sigma}\bar{\sigma} - \dot{\theta}\bar{\theta})(SdetM)^2 + 2\tau\dot{\sigma} SdetM = -i\frac{\partial}{\partial\bar{\sigma}}h(\theta\sigma|\theta\sigma), \tag{5.61}$$

$$2\tau\bar{\theta}(\sigma\dot{\bar{\sigma}} - \theta\dot{\bar{\theta}})(SdetM)^2 + 2\tau\dot{\bar{\theta}} SdetM = -i\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta}h(\theta\sigma|\theta\sigma), \tag{5.62}$$

$$2\tau\theta(\dot{\sigma}\bar{\sigma} - \dot{\theta}\bar{\theta})(SdetM)^2 + 2\tau\dot{\theta} SdetM = ih(\theta\sigma|\theta\sigma)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\bar{\theta}}, \tag{5.63}$$

$$M \equiv M(\sigma, \bar{\sigma}; \theta, \bar{\theta}), \quad (5.64)$$

где $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial}$ и $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial}$ - так называемые левые и правые производные по грассмановым переменным.

В точности такие же уравнения получаются и для параметров β и χ и им сопряженных. Разумеется, символ гамильтониана необходимо вычислять явно в каждом случае, поскольку генераторы супергруппы могут входить в гамильтониан несимметричным образом.

5.2.3 Эволюция параметров когерентных состояний

Если гамильтониан выбран самого общего вида

$$\hat{H} = \hat{H}_{JC} + (\Lambda \hat{V}_+ + \hat{W}_- \bar{\Lambda}) + (\gamma \hat{K}_+ + \gamma^* \hat{K}_-) \quad ,$$

то после несложных вычислений получаем следующие системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\sigma}} = i[2\nu\bar{\sigma} - \Lambda\bar{\theta}\bar{\sigma} + \gamma\bar{\sigma}\bar{\sigma} - \bar{\Gamma}\bar{\theta} + \gamma^*(1 + \theta\bar{\theta})], \\ \dot{\sigma} = -i[2\nu\sigma - \sigma\theta\bar{\Lambda} + \gamma^*\sigma\sigma - \theta\bar{\Gamma} + \gamma(1 + \theta\bar{\theta})], \\ \dot{\bar{\theta}} = i[(\nu + \omega)\bar{\theta} + \bar{\Lambda} + \bar{\Gamma}\bar{\sigma} + \gamma\bar{\sigma}\bar{\theta}], \\ \dot{\theta} = -i[(\nu + \omega)\theta + \Lambda + \sigma\Gamma + \gamma^*\sigma\theta]; \end{array} \right. \quad (5.65)$$

в случае $\tau = -q$ и

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\beta}} = i[2\nu\bar{\beta} + \bar{\Gamma}\bar{\chi}\bar{\beta} + \gamma\bar{\beta}\bar{\beta} + \bar{\Lambda}\bar{\chi} + \gamma^*(1 + \chi\bar{\chi})], \\ \dot{\beta} = -i[2\nu\beta + \chi\Gamma\beta + \gamma^*\beta\beta + \chi\Lambda + \gamma(1 + \chi\bar{\chi})], \\ \dot{\bar{\chi}} = i[(\nu - \omega)\bar{\chi} - \Gamma - \Lambda\bar{\beta} + \gamma\bar{\beta}\bar{\chi}] \\ \dot{\chi} = -i[(\nu - \omega)\chi - \Gamma - \bar{\Lambda}\beta + \gamma^*\beta\chi]; \end{array} \right. \quad (5.66)$$

в случае $\tau = q$.

Решение этих систем уравнений в конечном счете сводится к решению общего уравнения типа Риккати. Однако, если слагаемое с константой взаимодействия γ в гамильтониане интерпретировать как слагаемое, описывающее параметрическое взаимодействие со средой и заменить постоянную γ на $\gamma(t) \cdot \cos(\Omega \cdot t)$, где $\Omega = 2\nu$, то уравнение Риккати легко интегрируется и оказывается возможным выписать решения в квадратурах (некоторые интегралы не берутся, но сводятся к специальным функциям). Это ограничение с

формально математической точки зрения, но не с точки зрения физики, поскольку требование $\Omega \approx 2\nu$ вытекает из требования фазового синхронизма.

Применяя метод разложения по образующим, можно получить точные решения уравнений для суперсимметричного обобщения модели \hat{H}' , которая содержит слагаемые, отбрасываемые в приближении вращающейся волны.

Если же ограничиться $\hat{H} = \hat{H}_{JC}$, уравнения заметно упрощаются:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\sigma}} = i(2\nu\bar{\sigma} - \Gamma\bar{\theta}) \\ \dot{\sigma} = -i(2\nu\sigma - \theta\bar{\Gamma}) \\ \dot{\bar{\theta}} = i[(\nu + \omega)\bar{\theta} + \bar{\Gamma}\bar{\sigma}] \\ \dot{\theta} = -i[(\nu + \omega)\theta + \sigma\Gamma], \end{array} \right. \quad (5.67)$$

при $\tau = -q$ и

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\beta}} = i(2\nu + \bar{\Gamma}\bar{\chi})\bar{\beta}, \\ \dot{\beta} = -i(2\nu + \chi\Gamma)\beta, \\ \dot{\bar{\chi}} = i[(\nu - \omega)\bar{\chi} - \Gamma] \\ \dot{\chi} = -i[(\nu - \omega)\chi - \bar{\Gamma}], \end{array} \right. \quad (5.68)$$

при $\tau = q$.

Тогда при самых общих начальных условиях

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(t') &= \bar{\theta}' & \bar{\sigma}(t') &= \bar{\sigma}' \\ \theta(t_0) &= \theta_0 & \sigma(t_0) &= \sigma_0 \end{aligned}$$

приходим к

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(t) &= \bar{\theta}' \exp\left[i((\nu + \omega) + \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega})(t - t')\right] + \\ &+ \frac{1}{\nu - \omega} \left(\bar{\sigma}'\bar{\Gamma} - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega}\bar{\theta}'\right) (\exp(2i\nu(t - t')) - \exp(i(\nu + \omega)(t - t'))) \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \bar{\sigma}' \exp\left(2i\nu - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega}(t - t')\right) + \\ &+ \frac{1}{\nu - \omega} \left(\Gamma\bar{\theta}' - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega}\bar{\sigma}'\right) (\exp(i(\nu + \omega)(t - t')) - \exp(2i\nu(t - t'))) \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \exp[-i((\nu + \omega) - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega})(t - t_0)] + \\ &+ \frac{1}{\nu - \omega} (\Gamma\sigma_0 + \theta_0 \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega}) (\exp(-2i\nu(t - t_0)) - \exp(-i(\nu + \omega)(t - t_0))) \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 \exp(-2i\nu - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega}(t - t_0)) + \\ &+ \frac{1}{\nu - \omega} (\theta_0\bar{\Gamma} - \sigma_0 \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega}) (\exp(-i(\nu + \omega)(t - t_0)) - \exp(2i\nu(t - t_0))) \end{aligned} \quad (5.72)$$

и при

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(t') &= \bar{\chi}' & \bar{\beta}(t') &= \bar{\beta}' \\ \chi(t_0) &= \chi_0 & \beta(t_0) &= \beta_0 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(t) &= \bar{\chi}' \exp(i(\nu - \omega)(t - t')) + \\ &\frac{\Gamma}{\nu - \omega} (1 - \exp(i(\nu - \omega)(t - t'))) \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(t) &= \bar{\beta}' \exp[\frac{1}{\nu - \omega} (\bar{\chi}'\bar{\Gamma} - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega})(1 - \exp(i(\nu - \omega)(t - t')))] + \\ &+ i(2\nu - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega})(t - t') \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \chi_0 \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) + \\ &+ \frac{\bar{\Gamma}}{\nu - \omega} (1 - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))) \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \beta_0 \exp[\frac{1}{\nu - \omega} (\Gamma\chi_0 - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega})(1 - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))) - \\ &- i(2\nu - \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\nu - \omega})(t - t_0)] \end{aligned} \quad (5.76)$$

в случаях $\tau = -q$ и $\tau = q$ соответственно.

5.2.4 Решение гамильтоновых уравнений для суперсимметричных обобщений модели Джейнса - Каммингса

Точное решение уравнений гамильтоновых уравнений с грассмановыми переменными возможно и в более общем случае, чем суперсимметричное обобщение стандартной модели Джейнса - Каммингса. Рассмотрим систему с гамильтонианом (5.51). Чтобы найти временные зависимости параметров когерентных состояний, воспользуемся тем, что они принадлежат грассмановой

алгебре с конечным базисом, состоящим из единицы и одночленов не более чем 6-го порядка:

$$1, \Gamma, \Lambda, \chi_0, \bar{\chi}_0, \bar{\Lambda}, \bar{\Gamma}, \Gamma\Lambda, \dots, \Gamma\Lambda\chi_0\bar{\chi}_0\bar{\Lambda}\bar{\Gamma},$$

где $\chi_0, \bar{\chi}_0$ - начальные значения параметров когерентных состояний. Тогда, разложив все переменные по этому базису:

$$\beta = z \cdot 1 + z\{\Gamma\Lambda\} \cdot \Gamma\Lambda + z\{\Gamma\chi_0\} \cdot \Gamma\chi_0 + \dots + z\{\Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Gamma}\} \cdot \Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Gamma} + \dots \\ \dots + z\{\Gamma\Lambda\chi_0\bar{\chi}_0\bar{\Lambda}\bar{\Gamma}\} \cdot \Gamma\Lambda\chi_0\bar{\chi}_0\bar{\Lambda}\bar{\Gamma},$$

и

$$\chi = y\{\chi_0\} \cdot \chi_0 + y\{\Gamma\} \cdot \Gamma + y\{\Lambda\} \cdot \Lambda + \dots + \\ + \dots + y\{\Gamma\Lambda\chi_0\} \cdot \Gamma\Lambda\chi_0 + \dots + y\{\Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Lambda}\bar{\Gamma}\} \cdot \Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Lambda}\bar{\Gamma},$$

где $z\{\dots\}$ и $y\{\dots\}$ - комплексные коэффициенты при соответствующих одночленах, приходим к новой системе уравнений для каждого из этих коэффициентов. Так, для z :

$$\dot{z} = -i(2\nu z + \bar{\gamma}z^2 + \gamma).$$

Все последующие уравнения (как для $z\{\dots\}$, так и для $y\{\dots\}$) содержат в правой части комбинации коэффициентов предыдущих порядков, например:

$$\dot{y}\{\Gamma\} = -i((\nu - \omega)y\{\Gamma\} + \bar{\gamma}z(t)y\{\Gamma\}).$$

По мере возрастания порядка одночленов уравнения становятся весьма громоздкими, и поскольку их получение из исходной системы уравнений является тривиальной задачей, мы не будем их приводить и сразу перейдем к обсуждению возможности решения этих уравнений в аналитическом виде.

Уравнение Риккати, возникающее для z , можно проинтегрировать лишь в некоторых частных случаях. Очевидно, что решение легко находится, когда $\gamma \equiv 0$ (вообще говоря, $\gamma \ll g$, и такое приближение часто используют, исключая соответствующее слагаемое из рассмотрения). Также несложно найти решение этого уравнения при $\gamma = \gamma(t) = a(t) \exp(-2i\nu(t - t_0))$, где $a(t)$ - вещественная функция, что соответствует интерпретации γ как коэффициента взаимодействия с внешним классическим полем в случае точного резонанса.

Итак, если $\gamma \equiv 0$, то:

$$z = z_0 \exp(-2i\nu(t - t_0)), \\ y\{\chi_0\} = \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)), \\ y\{\bar{\Gamma}\} = \frac{1}{\nu - \omega} \{1 - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))\}, \\ y\{\bar{\Lambda}\} = \frac{z_0}{\nu + \omega} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - \exp(-2i\nu(t - t_0))\},$$

$$\begin{aligned}
z\{\Gamma\bar{\Gamma}\} &= i\frac{z_0}{\nu - \omega} \exp(-2i\nu(t - t_0))(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{z_0}{(\nu - \omega)^2} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - 1\}, \\
z\{\Gamma\bar{\Lambda}\} &= \frac{z_0^2}{\nu + \omega} \exp(-2i\nu(t - t_0)) \left[\frac{1}{\nu - \omega} \{1 - \right. \\
&\quad \left. - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))\} + \frac{1}{2\nu} \{\exp(-2i\nu(t - t_0)) - 1\} \right], \\
z\{\Gamma\chi_0\} &= \frac{z_0}{\nu - \omega} \exp(-2i\nu(t - t_0)) \{1 - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))\}, \\
z\{\bar{\Gamma}\Lambda\} &= \frac{1}{\nu - \omega} \left[\frac{1}{\nu + \omega} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - \right. \\
&\quad \left. - \exp(-2i\nu(t - t_0))\} - \frac{1}{2\nu} \{1 - \exp(-2i\nu(t - t_0))\} \right], \\
z\{\Lambda\bar{\Lambda}\} &= \frac{z_0}{\nu + \omega} \exp(-2i\nu(t - t_0)) \left[\frac{1}{\nu + \omega} \{\exp(i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\} - \right. \\
&\quad \left. - i(t - t_0) \right], \\
z\{\Lambda\chi_0\} &= \frac{1}{\nu + \omega} \exp(-2i\nu(t - t_0)) \{\exp(i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\}, \\
y\{\Gamma\bar{\Gamma}\Lambda\} &= -i\frac{z_0}{\nu^2 - \omega^2} \exp(-2i\nu(t - t_0))(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{2\omega z_0}{(\nu^2 - \omega^2)^2} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) \{1 - \exp(-i(\nu + \omega)(t - t_0))\} - \\
&\quad - \frac{z_0}{(\nu - \omega)^2} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) \{\exp(i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\}, \\
y\{\Lambda\bar{\Lambda}\bar{\Gamma}\} &= i\frac{1}{\nu^2 - \omega^2} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{1}{\nu - \omega} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{(\nu + \omega)^2} \frac{\nu - \omega}{2\nu} \{\exp(-i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\nu(\nu - \omega)} \{\exp(-2i\nu(t - t_0)) - 1\} \right] \\
y\{\Lambda\chi_0\bar{\Lambda}\} &= i\frac{1}{\nu + \omega} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))(t - t_0) + \\
&\quad + \frac{1}{(\nu + \omega)^2} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) \{\exp(-i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y\{\Gamma\chi_0\bar{\Lambda}\} &= \frac{z_0}{\nu - \omega} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) \left[\frac{1}{2\nu} \{\exp(-2i\nu(t - t_0)) - 1\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu + \omega} \{\exp(-i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\} \right], \\
z\{\Gamma\Lambda\bar{\Lambda}\bar{\Gamma}\} &= \\
&= \exp(-2i\nu(t - t_0)) \left[-2i \frac{z_0}{\nu^2 - \omega^2} \frac{1}{\nu - \omega} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))(t - t_0) - \right. \\
&\quad - 2 \frac{z_0}{\nu^2 - \omega^2} \frac{1}{(\nu - \omega)^2} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - 1\} - \\
&\quad - \frac{z_0}{2\nu(\nu + \omega)^2} \left(\frac{1}{2\nu} \{\exp(-2i\nu(t - t_0)) - 1\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu - \omega} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - 1\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\nu + \omega} \{\exp(i(\nu + \omega)(t - t_0)) - 1\} + i \right) \right], \\
z\{\Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Lambda}\} &= \exp(-2i\nu(t - t_0)) \left[-2i \frac{z_0}{\nu + \omega} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))(t - t_0) - \right. \\
&\quad - 2 \frac{2\omega z_0}{(\nu^2 - \omega^2)^2} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - 1\} - \\
&\quad \left. - \frac{z_0}{2\nu(\nu + \omega)^2} \{\exp(-2i\nu(t - t_0)) - 1\} \right], \\
z\{\Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Gamma}\} &= \exp(-2i\nu(t - t_0)) \left[-i \frac{1}{\nu^2 - \omega^2} (t - t_0) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\nu(\nu + \omega)^2} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - 1\} - \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\nu(\nu - \omega)^2} \{\exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0)) - 1\} \right], \\
y\{\Gamma\Lambda\chi_0\bar{\Lambda}\bar{\Gamma}\} &= i \frac{1}{\nu^2 - \omega^2} (t - t_0) + i \frac{1}{2\nu(\nu - \omega)^2} \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))(t - t_0) - \\
&\quad - \frac{1}{(2\nu)^2(\nu + \omega)^2} \{\exp(i(\nu + \omega)(t - t_0)) - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))\} - \\
&\quad - \frac{2}{2\nu(\nu - \omega)^3} \{1 - \exp(-i(\nu - \omega)(t - t_0))\},
\end{aligned}$$

а все остальные коэффициенты обращаются в нуль.

Если же $\gamma = \gamma(t) = a(t) \exp(-2i\nu(t - t_0))$, то решения уравнений для коэффициентов можно выписать в квадратурах.

5.2.5 Вероятности перехода и статистическая сумма в суперсимметричной модели Джейнса - Каммингса

Полученные решения для параметров когерентных состояний можно использовать для вычисления вероятности перехода атома из возбужденного состояния в невозбужденное (или наоборот).

Действительно, в рамках квазиклассического приближения для матричного элемента оператора эволюции можно написать

$$\langle KC' | U(t - t_0) | KC \rangle = \langle KC'(t_0) | KC(t) \rangle, \quad (5.77)$$

где $|KC(t)\rangle$ определяется из уравнений движения.

Выберем начальное $|i\rangle$ и конечное $|f\rangle$ состояния следующими:

$$|i\rangle = |\tau \quad \tau + m \quad q\rangle,$$

$$|f\rangle = \left| \tau + \frac{1}{2} \quad \tau + m + \frac{1}{2} \quad q - \frac{1}{2} \right\rangle;$$

$$(\tau = q = \frac{1}{4}).$$

Тогда для матричного элемента оператора эволюции суперсимметричной ДКМ получаем

$$\begin{aligned} & \langle f | \exp[-i(t - t_0) \hat{H}_{JC}] | i \rangle = \\ & \int d\mu(\chi'\beta') d\mu(\chi\beta) \langle f | \chi'\beta' \rangle \langle \chi'\beta' | \exp[-i(t - t_0) H_{JC}] | \chi\beta \rangle \langle \chi\beta | i \rangle = \\ & \int d\mu(\chi'\beta') d\mu(\chi\beta) \langle f | \chi'\beta' \rangle \langle \chi'\beta'(t_0) | \chi\beta(t) \rangle \langle \chi\beta | i \rangle. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Если же

$$|i\rangle = \left| \tau + \frac{1}{2} \quad \tau + m + \frac{1}{2} \quad q + \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$|f\rangle = |\tau \quad \tau + m + 1,$$

$$(\tau = -q = \frac{1}{4}),$$

то

$$\begin{aligned} & \langle f | \exp[-i(t - t_0) \hat{H}_{JC}] | i \rangle = \\ & \int d\mu(\theta'\sigma') d\mu(\theta\sigma) \langle f | \theta'\sigma' \rangle \langle \theta'\sigma' | \exp[-i(t - t_0) H_{JC}] | \theta\sigma \rangle \langle \theta\sigma | i \rangle = \\ & \int d\mu(\theta'\sigma') d\mu(\theta\sigma) \langle f | \theta'\sigma' \rangle \langle \theta'\sigma'(t_0) | \theta\sigma(t) \rangle \langle \theta\sigma | i \rangle. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Выполнив интегрирование и суммирование, после несложных, но достаточно громоздких вычислений, можно придти к следующему выражению для вероятности перехода:

$$p = | \langle f | \exp [-i (t - t_0) \hat{H}_{JC}] | i \rangle |^2 =$$

$$= \begin{cases} \frac{2\Gamma\bar{\Gamma}}{(\nu-\omega)^2} (2(2\tau + m)) \left[\frac{\tau+m}{2\tau+m} \right]^2 \sin^2 \left(\frac{(\nu-\omega)(t-t_0)}{2} \right), & \tau = q \\ \frac{2\Gamma\bar{\Gamma}}{(\nu-\omega)^2} (2m) \left[\frac{m}{m+1} \right] \sin^2 \left(\frac{(\nu-\omega)(t-t_0)}{2} \right), & \tau = -q. \end{cases} \quad (5.80)$$

Хорошо известен результат для вероятности перехода атома из возбужденного в невозбужденное состояние при фиксированном числе фотонов n в моде излучения (см., например, [54]):

$$p_{+-} = \frac{q^2(n+1)}{(\nu-\omega)^2 + (n+1)q^2} \sin^2 \left[\sqrt{(\nu-\omega)^2 + q^2(n+1)} \frac{(t-t_0)}{2} \right], \quad (5.81)$$

Для сравнения формул (5.80) и (5.81) нужно положить $q^2 = 2\Gamma\bar{\Gamma}$.

Учитывая то, что в расчетах использовалась грассмановость Γ и $\bar{\Gamma}$ (квадраты этих величин обращаются в нуль, можно объяснить отсутствие соответствующих слагаемых в знаменателе и в подкоренном выражении. При больших $n(m)$ (когда и имеет смысл говорить о квазиклассике) результаты согласуются.

Более корректным, однако, является сравнение не формул (5.80) и (5.81), поскольку они выведены, по существу, для разных моделей, а квазиклассического и последовательно квантового результатов. В случае суперсимметричной модели Джейнса - Каммингса последний достаточно легко получить, если применить технику распутывания операторной экспоненты на супергруппе $U(1|1)$, воспользовавшись линейностью гамильтониана по ее генераторам. Как показывают вычисления, квантовый и квазиклассический ответы совпадают с точностью до множителей, стоящих в квадратных скобках выражения (5.80), которые в области высоких значений квантовых чисел близки к единице [65].

Одной из важнейших величин в теории равновесных термодинамических процессов является статистическая сумма, поскольку через нее могут быть выражены такие термодинамические потенциалы, как свободная энергия, число частиц, химический потенциал. Известно, что когерентные состояния, построенные для обычных групп Ли, часто позволяют существенно упростить вычисление статистической суммы. Используем для этих целей базис когерентных состояний супергруппы $OSp(2|2)$.

В общем виде статистическая сумма записывается как

$$Z = Tr \exp(-\tilde{\beta} \hat{H}) = \int \langle KC | \exp(-\tilde{\beta} \hat{H}) | KC \rangle d\mu(KC), \quad (5.82)$$

где

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{kT} \quad -$$

обратная температура, а след взят по всем переменным матрицы плотности в равновесном состоянии системы.

Вычисления удобнее проводить с диагонализированным гамильтонианом:

$$\hat{H}_{JC}^d = (2\nu + \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega - \nu})\hat{K}_0 + (2\omega + \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega - \nu})\hat{B} \quad (5.83)$$

Тогда

$$Z = Tr \exp(-\tilde{\beta} \hat{H}_{JC}^d) = \int \langle \theta \sigma | \exp(-\tilde{\beta} \hat{H}_{JC}^d) | \theta \sigma \rangle \times \\ \times d\mu(\theta, \sigma) + \int \langle \chi \beta | \exp(-\tilde{\beta} \hat{H}_{JC}^d) | \chi \beta \rangle d\mu(\chi, \beta). \quad (5.84)$$

Используя явный вид когерентных состояний, приходим к следующему выражению:

$$Z = \frac{\cosh(\frac{1}{2}\omega\tilde{\beta} + \frac{1}{4}\frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega-\nu}\tilde{\beta})}{\sinh(\frac{1}{2}\nu\tilde{\beta} + \frac{1}{4}\frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega-\nu}\tilde{\beta})}. \quad (5.85)$$

Как легко видеть, при отключении взаимодействия ($\Gamma = 0$), получаем известный результат для статистической суммы системы, состоящей из свободных фермионного и бозонного осцилляторов.

Исходя из полученного для статистической суммы результата, можно получить энергетический спектр изучаемой системы, основываясь на формальном сходстве оператора эволюции и подынтегрального выражения в определении статистической суммы. Воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии, (5.85) можно преобразовать к виду:

$$\exp((b-a)/4) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-na/2) + \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-b/2) \exp(-na/2) \right),$$

где

$$\frac{b}{4} = \left(\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}\frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega - \nu} \right) \tilde{\beta},$$

$$\frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega - \nu} \right) \tilde{\beta}.$$

Таким образом, получаем две серии энергетических уровней:

$$\mathcal{E}_{1n} = -\frac{\omega}{2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \nu + \frac{n}{2} \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega - \nu}, \quad (5.86)$$

$$\mathcal{E}_{2n} = \frac{\omega}{2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \nu + \frac{1}{2}(n+1) \frac{\Gamma\bar{\Gamma}}{\omega - \nu}. \quad (5.87)$$

Подводя итог, отметим что наличие линейной группы динамической симметрии $OSp(2|2)$ позволило провести полный анализ суперсимметричной модели Джейнса - Каммингса. Однако, как показывает расчет вероятности переходов и энергетических уровней, эта модель имеет лишь косвенное отношение к исходной, реалистической модели двухуровневого атома. Вопрос о существовании физической системы, описываемой гамильтонианами (5.35) или (5.51) остается открытым. Интересно отметить, что при $\Gamma \equiv 0$ подобная система хорошо известна - это электрон Ландау в магнитном поле [66].

Глава 6

Когерентная релаксация квантовых систем с конечным числом уровней

6.1 Квантовое кинетическое уравнение, релаксация и декогеренция

Когерентная (унитарная) динамика, рассмотренная в предыдущих главах, является скорее исключением, чем правилом. Любая реальная физическая система всегда связана с внешним окружением и поэтому эволюционирует неунитарным образом, что приводит к необратимому разрушению когерентности. В лазерной спектроскопии, квантовой оптике и радиофизике одной из центральных является задача описания малой динамической подсистемы, находящейся в контакте с термодинамически равновесной подсистемой — термостатом, с которой она слабо взаимодействует. В данной главе рассматривается применение КС для сведения операторных управляющих уравнений, описывающих поведение динамической подсистемы, к "классическим" уравнениям типа Фоккера-Планка и находятся их точные решения. Важность разработки методов точного решения уравнения Фоккера-Планка (УФП) обусловлена их широким применением в теории броуновского движения, статистических теориях газа и жидкости, в теории лазеров, квантовой электронике, в моделях химических реакций и в теории фазовых переходов.

Общие вопросы теории релаксации квантовых систем, стандартная техника получения операторных кинетических уравнений и их приложения в квантовой оптике и физике лазеров изложены, например, в монографиях [67] - [71].

Детальному исследованию релаксации квантового осциллятора и квантовых систем с эквидистантным спектром посвящены работы [72, 73, 74], в которых рассматриваются методы решения квантовых операторных уравнений и, в частных случаях, находится их точное решение; для случая больших квантовых чисел рассматривается метод сведения кинетических уравнений к УФП, а также вычисление формы контура линии излучения. Обзор раз-

личных методов в теории спонтанного излучения дан в [75], где на основе операторных и кинетических уравнений, а также уравнений Ланжевена, рассматривается излучение от систем невзаимодействующих идентичных двухуровневых и трехуровневых (с эквидистантным или вырожденным спектром) атомов, для случая, когда температура термостата $T = 0$. Методам решения уравнения Фоккера-Планка посвящена монография [76].

Современное состояние проблемы описания динамики квантовых открытых систем с применениями в квантовой оптике и квантовой информатике изложено в монографии [77].

Излагаемый далее метод сведения операторных кинетических уравнений к УФП основан на "удобном" представлении с помощью дифференциальных операторов членов кинетического уравнения¹ вида $\hat{A}_+ \hat{A}_- \hat{\rho}$, в случае когда редуцированная матрица плотности $\hat{\rho}$ записана в представлении Глаубера – Сударшана (1.18), т.е. сводится к установлению соответствия

$$\hat{A}_+ \hat{A}_- |CS\rangle\langle CS| = (\text{дифференциальный оператор})|CS\rangle\langle CS|.$$

Рассмотрим далее квантовую систему (например, n -уровневый атом), взаимодействующую с большой диссипативной системой (фотонным термостатом). Модельный гамильтониан всей системы запишем в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{int}, \quad (6.1)$$

где \hat{H}_A – гамильтониан свободного атома, выраженный через $n - 1$ одновременно диагонализующихся генераторов группы $SU(n)$ (коэффициенты линейной комбинации определяются уровнями энергии); \hat{H}_B – гамильтониан термостата; \hat{H}_{int} – оператор взаимодействия между атомом и термостатом. Поскольку взаимодействие "атом - термостат" предполагается малым, оператор взаимодействия содержит лишь слагаемые соответствующие "приближению вращающейся волны". Тепловой резервуар при этом моделируется бесконечно большим числом гармонических осцилляторов с частотами, находящимися в резонансе с частотами переходов в атоме.

Для получения кинетического уравнения используем известное приближение необратимости для оператора плотности полной системы $\hat{\mathcal{R}}(t)$

$$\hat{\mathcal{R}}(t) = \hat{\rho}_A(t) \otimes \hat{\rho}_B(0). \quad (6.2)$$

Кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности $\hat{\rho}(t) = tr_B[\hat{\mathcal{R}}(t)]$ n -уровневого атома записывается в виде ($\hbar = 1$):

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_{a=1}^M \frac{1}{2} \gamma_a [(\mathcal{N}_a + 1) (2 \hat{E}_a^- \hat{\rho} \hat{E}_a^+ - \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^-) +$$

¹Квантовое кинетическое уравнение получено далее

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{N}_a (2 \hat{E}_a^+ \hat{\rho} \hat{E}_a^- - \hat{E}_a^- \hat{E}_a^+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^- \hat{E}_a^+) - \\
& - \mathcal{S}_a (2 \hat{E}_a^+ \hat{\rho} \hat{E}_a^+ - \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^+ \hat{E}_a^+) - \\
& - \bar{\mathcal{S}}_a (2 \hat{E}_a^- \hat{\rho} \hat{E}_a^- - \hat{E}_a^- \hat{E}_a^- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{E}_a^- \hat{E}_a^-)].
\end{aligned} \tag{6.3}$$

В этом уравнении \hat{E}_a^\pm обозначают операторы переходов между энергетическими уровнями атома и, вместе с тем, лестничные генераторы n - мерного фундаментального представления группы $SU(n)$, индекс "а" находится в соответствии с нумерацией базисных элементов алгебры $SU(n)$, $M \leq n(n-1)/2$ число разрешенных переходов в атоме, γ_a — константа затухания для перехода типа "а" \mathcal{N}_a среднее число фотонов в термостате и \mathcal{S}_a — комплексный параметр сжатия в фотонной моде с частотой перехода типа "а".

При выводе уравнения (7.3) учтена возможность существования сжатых флуктуаций термостата. Так, для термостата, "построенного" над сжатым вакуумным состоянием

$$|0 \rangle_{sq} = \exp [(\bar{\zeta} \hat{b}^2 - \zeta \hat{b}^{+2})/2] |0 \rangle,$$

где $\zeta = r e^{i\theta}$ — параметр сжатия Столера, получаем

$$\mathcal{N}_a = [(\langle n \rangle + \frac{1}{2}) ch(2r_j) - \frac{1}{2}]|_{\omega_j=\omega_a}, \quad \mathcal{S}_a = [(\langle n \rangle + \frac{1}{2}) e^{i\theta_j} sh(2r_j)]|_{\omega_j=\omega_a},$$

здесь $\langle n \rangle$ обозначает среднее число квантов в моде "обычного" термостата (без сжатия), но с той же температурой.

Важно отметить, что точно такое же кинетическое уравнение справедливо и в случае так называемой когерентной (кооперативной) релаксации N многоуровневых атомов, но при этом операторы \hat{E}_a^\pm имеют смысл генераторов (приводимого) представления N -кратного произведения фундаментальных представлений группы $SU(n)$.

Используем далее для редуцированной матрицы плотности диагональное представление по КС группы $SU(n)$

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z, \bar{z}) \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) |z \rangle \langle z|, \tag{6.4}$$

где $\mathcal{X} = SU(n)/G_0$ фактор-пространство группы $SU(n)$ с инвариантной мерой $d\mu$, $G_0 \subset SU(n)$. Подгруппа G_0 определяется выбором стандартного вектора $|\psi_0 \rangle$ в определении КС на группе Ли (простейший выбор $|\psi_0 \rangle$, как состояния с наименьшей энергией изолированного n - уровневого атома, приводит к $G_0 = U(n-1) \subset SU(n)$).

Используя явное действие операторов E_a^\pm на проекторы $|z \rangle \langle z|$, приведем (7.3) к уравнению вида Фоккера - Планка для функции $\mathcal{P}(z, \bar{z}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) = \hat{\mathbf{L}} \mathcal{P}(z, \bar{z}, t), \tag{6.5}$$

где оператор $\hat{\mathbf{L}}$ является линейным дифференциальным оператором в частных производных второго порядка, зависящим от представления группы $SU(n)$. (Ниже будут рассмотрены частные случаи уравнения (6.5), имеющие место для $(2J+1)$ -мерных представлений группы $(SU(2))$ и атомных систем с динамической симметрией полносимметричных представлений $D(N, 0)$ группы $SU(3)$, $N = 1, 2, \dots$).

Легко видеть, что общее (формальное) решение последнего уравнения может быть представлено в виде

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}; t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z', \bar{z}') \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}'; t_0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}'; t_0), \quad (6.6)$$

где \mathcal{P}_0 представляет собой P -символ начальной матрицы плотности $\rho_A(t_0)$; \mathcal{K} — является функцией Грина (пропагатором) уравнения Фоккера - Планка; $z = (z_1, \dots, z_r)$, r — (комплексная) размерность пространства \mathcal{X} .

Из общих соображений ясно, что пропагатор является решением уравнения (6.5) с сингулярными начальными условиями.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}'; 0) = \delta(z, \bar{z}; z', \bar{z}'), \quad (6.7)$$

здесь δ -функция определена в пространстве функций на однородном многообразии $SU(n)/G_0$.

Для отыскания явного вида пропагатора можно использовать, например, метод разложения по сферическим функциям, связанный с задачей о собственных значениях оператора Лапласа - Бельтрами на пространстве \mathcal{X} , а также технику $1/N$ -разложения или "квазиклассических" асимптотик для уравнения (6.5). Параметр $N \gg 1$ ассоциирован здесь с собственными числами инвариантных операторов Казимира, определяющих атомную подсистему (например, в условиях кооперативной релаксации тождественных n -уровневых атомов, N - квантовое число полносимметричного представления $D(N, 0, \dots)$, пропорциональное количеству атомов).

Предположим, что мы тем или иным методом нашли явный вид пропагатора \mathcal{K} . Как это использовать для расчета физических величин?

Исходя из общего определения среднего значения некоторого гейзенберговского оператора атомной подсистемы $\hat{A}(t)$ после некоторых вычислений получаем следующую формулу

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \int \langle z | \hat{A}^0(t) | z \rangle \mathcal{P}(z, \bar{z}; t) d\mu(z, \bar{z}). \quad (6.8)$$

Здесь интегрирование осуществляется по однородному пространству динамической группы \mathcal{X} .

Вместе с тем двухвременной коррелятор атомных операторов \hat{A} и \hat{B} представляется двойным интегралом

$$\begin{aligned} & \langle \hat{A}(t) \hat{B}(0) \rangle = \\ & = \int \int \langle z | \hat{A}^0 | z \rangle \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}'; 0) \mathcal{P}_{\hat{B} \cdot \hat{\rho}(0)}(z', \bar{z}'; 0) d\mu(z, \bar{z}) d\mu(z', \bar{z}'), \end{aligned} \quad (6.9)$$

здесь $\hat{A}^0(t) = \hat{U}_0^{-1}(t) \hat{A} \hat{U}_0(t)$, $\hat{U}_0(t)$ — оператор эволюции свободной атомной подсистемы, $\mathcal{P}_{\hat{B} \cdot \hat{\rho}(0)}$ обозначает P — символ произведения операторов $\hat{B} \cdot \hat{\rho}(0)$ в начальный момент времени $t = 0$.

Вывод формул (6.8), (6.9) мы здесь опускаем (см. далее). Подобные, но более громоздкие выражения существуют и для многовременных корреляторов. Полезность выражения (6.9) состоит в том, что оно позволяет вычислить двухточечный коррелятор прямым путем без обращения к квантовой теореме регрессии.

Рассмотрев Фурье - образ коррелятора $\langle \hat{E}_a^+(t) \hat{E}_a^-(0) \rangle$, вычисленного согласно (6.9), мы можем найти вид контура линии на переходе "а" в атоме

$$g_a(\omega) \sim Re \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \langle \hat{E}_a^+(t) \hat{E}_a^-(0) \rangle dt. \quad (6.10)$$

Возвращаясь к задаче об описании разрушения когерентности, отметим, что квантовое суперпозиционное состояние $|\Psi\rangle$ описывается матрицей плотности вида:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|,$$

у которой по отношению к обычному (например, энергетическому) базису всегда существуют недиагональные матричные элементы, отражающие квантовые корреляции (когерентность). Влияние теплового резервуара заключается не только в установлении равновесных значений диагональных матричных элементов, но и в уничтожении недиагональных матричных элементов (декогеренция). Их зависимости от времени легко могут быть найдены с использованием выражений (6.4, 6.6):

$$\rho_{ij}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z, \bar{z}) \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) \langle i | z \rangle \langle z | j \rangle.$$

Нами были рассчитаны распады когерентных состояний $|z_0\rangle$ и их суперпозиций вида

$$|\Psi\rangle = (|z_0\rangle + e^{i\theta} | - z_0 \rangle) / \mathcal{N},$$

для ансамблей из двух- и трехуровневых атомов (здесь \mathcal{N} — очевидный нормировочный множитель).

В простейшем случае одного двухуровневого атома и термостата без сжатых флуктуаций полученные решения воспроизводят хорошо известную связь между продольным и поперечным временами релаксации (см. далее).

В заключение данного раздела остановимся на одном принципиальном вопросе. Известно, что динамика квантовой системы в общем случае управляется уравнением для матрицы плотности

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{int}(t), \rho \right] + \hat{\mathcal{L}}_{diss} \rho, \quad (6.11)$$

где $\hat{H}_{int}(t)$ — оператор взаимодействия с внешним (классическим) полем, а $\hat{\mathcal{L}}_{diss}$ — диссипативный оператор, действие которого на матрицу плотности ρ определяется выражением аналогичным правой части уравнения (7.3).

На первый взгляд из-за присутствия неустранимого взаимодействия системы с диссипативным окружением создание чистых (суперпозиционных) состояний кажется невозможным, так как согласно уравнению (6.11) система всегда будет находиться в смешанном состоянии. Однако более внимательный анализ показывает, что это не так. Влияние термостата проявляется на временах $\sim 1/\gamma$, где γ — характерная константа затухания. Если внешнее поле "включать" кратковременно в виде импульсов длительности $\tau_0 \ll 1/\gamma$, то на таких временах воздействие термостата становится несущественным, т.е. может быть "подавленным", и временная эволюция становится "унитарной", определяемой упорядоченным произведением операторов

$$\hat{U}_k(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \tau_0 \hat{H}_{int}(t_k)\right],$$

где t_k — момент времени, в который включено внешнее поле. В результате, квантовую систему можно перевести в суперпозиционное состояние, или в смешанное состояние, статистические свойства которого будут очень близки к свойствам некоторого чистого состояния.

6.2 Когерентная релаксация системы двухуровневых атомов и уравнение Фоккера - Планка

Следуя [6], изложим метод построения решения задачи о релаксации квантовой системы, состоящей из набора N идентичных атомов, находящихся первоначально в одинаковых условиях (например, все в верхнем энергетическом состоянии), которую будем называть динамической подсистемой, слабо взаимодействующей с большой диссипативной подсистемой, имеющей бесконечно большое число степеней свободы - термостатом. При этом мы детализируем положения, изложенные в предыдущем параграфе.

Гамильтониан полной системы "атом + термостат" запишем в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_T + \hat{H}_{int}, \quad (6.12)$$

где

$$\hat{H}_A = \sum_{\alpha=1}^N \hbar \omega_0 \hat{J}_0^{(\alpha)} \quad (6.13)$$

– гамильтониан системы N свободных двухуровневых атомов,

$$\hat{H}_T = \sum_j \hbar \omega_j \hat{b}_j^+ \hat{b}_j \quad (6.14)$$

– гамильтониан термостата, который в случае радиационного механизма релаксации моделируется бесконечным набором гармонических осцилляторов с частотой ω_j .

$$\hat{H}_{int} = \hbar \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_j \hat{J}_+^{(\alpha)} \hat{b}_j + \bar{f}_j \hat{J}_-^{(\alpha)} \hat{b}_j^+ \right) \quad (6.15)$$

– оператор взаимодействия между атомом и термостатом, записанный в приближении вращающейся волны (ПВВ), где f_j – константа взаимодействия j -го осциллятора с атомом на переходе $1 \rightarrow 2$, а $\hat{J}_0^{(\alpha)}$, $\hat{J}_{\pm}^{(\alpha)}$ – генераторы неприводимого представления группы $SU(2)$. Таким образом, полный гамильтониан системы (6.12) реализован в виде линейной комбинации инфинитезимальных операторов группы динамической симметрии, которой в данном случае является группа $SU(2)$. Переходя в представление взаимодействия по свободной атомной подсистеме и термостату, получаем

$$\begin{aligned} \hat{V}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_A + \hat{H}_T)t} \hat{H}_{int} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_A + \hat{H}_T)t} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ f_j \hat{J}_+ \hat{b}_j e^{-i(\omega_j - \omega_0)t} + \bar{f}_j \hat{J}_- \hat{b}_j^+ e^{i(\omega_j - \omega_0)t} \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $\hat{J}_+ = \sum_{\alpha=1}^N \hat{J}_+^{(\alpha)}$, $\hat{J}_- = \sum_{\alpha=1}^N \hat{J}_-^{(\alpha)}$, $\hat{J}_0 = \sum_{\alpha=1}^N \hat{J}_0^{(\alpha)}$ – генераторы приводимого представления $\prod_{\alpha=1}^N \otimes D^{\alpha}(1.0)$ группы $SU(2)$.

Эволюция матрицы плотности такой системы определяется уравнением Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{aT}}{\partial t} = [\hat{V}(t), \hat{\rho}_{aT}], \quad (6.17)$$

формальное интегрирование которого дает

$$\hat{\rho}_{aT}(t) = \hat{\rho}_{aT}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\hat{V}(t'), \hat{\rho}_{aT}(t')] dt'. \quad (6.18)$$

Используя метод итераций и подставляя (6.16) в (6.18), получим

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{aT}(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{V}(t), \hat{\rho}_{aT}(0)] + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t [\hat{V}(t), [\hat{V}(t'), \hat{\rho}_{aT}(t')]] dt'. \quad (6.19)$$

До включения взаимодействия в момент $t = 0$ состояния атомной подсистемы и термостата не коррелированы, поэтому

$$\hat{\rho}_{aT}(0) = \hat{\rho}_a(0) \cdot \hat{\rho}_T(0). \quad (6.20)$$

После включения взаимодействия, учитывая его малость и то, что диссипативная система велика, можно пренебречь влиянием атомной подсистемы на термостат. В этом случае $\hat{\rho}_T(t) = \hat{\rho}_T(0)$ и

$$\hat{\rho}_{aT}(t) = \hat{\rho}_a(t) \cdot \hat{\rho}_T(0) \quad \text{при } t > 0. \quad (6.21)$$

Усредняя (6.19) по переменным термостата, используя (6.20) и (6.21) в марковском приближении, учитывающем, что атомная подсистема из-за взаимодействия "забывает" свою предысторию с момента $t' = 0$ до момента $t' = t$, что выражается условием $\hat{\rho}_a(t') \approx \hat{\rho}_a(t)$, получим кинетическое уравнение для матрицы плотности $\hat{\rho}_a(t)$ атомной системы или редуцированной матрицы плотности $\hat{\rho}_a(t) \equiv \hat{\rho}(t) = Sp_T \hat{\rho}_{aT}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} & \left[(\langle \nu \rangle + 1)(2\hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) \right. \\ & \left. + \langle \nu \rangle (2\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+) \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Здесь $\gamma = 2\pi |f_j|^2 g(\omega_j)|_{\omega_j=\omega_0}$ - константа, определяющая затухание в динамической (атомной) подсистеме, $g(\omega_j)$ - плотность состояний в термостате, $\langle \nu \rangle = \mathcal{N} = (\exp(\hbar\omega_0/kT) - 1)^{-1}$ - среднее число фотонов в термостате на частоте $\omega = \omega_0$. Матрица плотности $\hat{\rho}(t)$ атомной подсистемы действует в подпространстве неприводимого полносимметричного представления $\prod_{\alpha=1}^N \otimes D^{(\alpha)}(1.0) = D(N, 0) \otimes D(P_N)$; $D(P_N)$ - полносимметричное представление группы перестановки. В этом случае диагональное представление Глаубера - Сударшана запишется в виде

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z, \bar{z}) \mathcal{P}(z, \bar{z}, t) |z\rangle \langle z|, \quad (6.23)$$

где $\mathcal{P}(z, \bar{z}, t)$ - контравариантный символ матрицы плотности, $|z\rangle$ - КС группы $SU(2)$, а $d\mu(z, \bar{z})$ - инвариантная мера на однородном пространстве $SU(2)/U(1)$, определяемые согласно выражениям (1.29) и (1.39).

Действие операторов группы на проектор $|z\rangle\langle z|$, составленный из КС, определяется формулами [6]:

$$\begin{aligned}\hat{J}_+|z\rangle\langle z| &= \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2j\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)|z\rangle\langle z|, \\ \hat{J}_-|z\rangle\langle z| &= \left(-z^2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2jz}{1+z\bar{z}}\right)|z\rangle\langle z|, \\ \hat{J}_0|z\rangle\langle z| &= \left(z\frac{\partial}{\partial z} - j\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right)|z\rangle\langle z|.\end{aligned}\tag{6.24}$$

Это позволяет свести операторное кинетическое уравнение (6.22) к уравнению Фоккера-Планка

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left[(\langle \nu \rangle + 1)\left(2jz + \frac{\partial}{\partial z}z^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}z^2\bar{z}^2\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \langle \nu \rangle\left(-2jz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] + k.c.\right)f\end{aligned}\tag{6.25}$$

для функции

$$f(z, \bar{z}; t) = \frac{\mathcal{P}(z, \bar{z}; t)}{(1+z\bar{z})^2}.$$

Если j невелико, то эффективным методом отыскания точного решения уравнения (6.25) является разложение по сферическим функциям $Y_{lm}(z, \bar{z})$:

$$f(z, \bar{z}; t) = \sum_{l=0}^{2j} \sum_{m=-l}^l F_{lm}(t)Y_{lm}(z, \bar{z}).\tag{6.26}$$

Функции $Y_{lm}(z, \bar{z})$ образуют полную и ортонормированную систему функций на \bar{C} с мерой (1.39). Они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\left[(1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}} + l(l+1)\right]Y_{lm}(z, \bar{z}) &= 0, \\ \left(\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - z\frac{\partial}{\partial z}\right)Y_{lm}(z, \bar{z}) &= mY_{lm}(z, \bar{z}),\end{aligned}\tag{6.27}$$

где $(1+z\bar{z})^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$ — оператор Лапласа-Бельтрами на $\bar{C} \approx S_2$. Подстановкой $z = e^{-i\phi}tg\frac{\theta}{2}$ уравнения (6.27) сводятся к уравнениям для сферических функций в угловой параметризации $Y_{lm}(\theta, \phi)$.

Уравнение (6.25) является уравнением параболического типа, поэтому P -символ матрицы плотности может быть представлен в интегральном виде

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}; t) = \int_x d\mu(z', \bar{z}') \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}'; 0), \quad (6.28)$$

где $\mathcal{P}_0(z', \bar{z}'; t_0)$ обозначает P -символ начальной матрицы плотности $\rho(0)$. $\mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; t_0)$ — пропагатор или функция Грина УФП (6.25) с сингулярными начальными условиями:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) = \delta(z, \bar{z}; z', \bar{z}'), \quad (6.29)$$

здесь δ -функция определена в пространстве функций на $\bar{C} = SU(2)/U(1)$ и может быть реализована в виде

$$\delta(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \sum_{l=0}^{2j} Y_{lm}(z, \bar{z}) \bar{Y}_{lm}(z', \bar{z}'). \quad (6.30)$$

6.2.1 Релаксация двухуровневого атома ($j = 1/2$)

Для случая изолированного двухуровневого атома ($j = 1/2$) пропагатор УФП (6.25) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) = & \quad (6.31) \\ = F_{00}(t) Y_{00}(z, \bar{z}) + F_{1-1}(t) \bar{Y}_{1-1}(z, \bar{z}) + F_{10}(t) Y_{10}(z, \bar{z}) + F_{1,1}(t) Y_{11}(z, \bar{z}), \end{aligned}$$

коэффициенты F_{lm} которого удовлетворяют системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{F}_{00}(t) = 0, \\ \dot{F}_{1-1}(t) = -(\eta + \delta) F_{1-1}(t), \\ \dot{F}_{10}(t) = 2\sqrt{3}(\eta - \delta) F_{00}(t) - 2(\eta + \delta) F_{10}(t), \\ \dot{F}_{11}(t) = -(\eta + \delta) F_{11}(t), \end{cases} \quad (6.32)$$

где приняты следующие обозначения

$$\delta = \frac{\gamma}{2} \langle \nu \rangle = \frac{\gamma}{2} \mathcal{N}; \quad \eta = \frac{\gamma}{2} (\langle \nu \rangle + 1) = \frac{\gamma}{2} (\mathcal{N} + 1).$$

Система (6.32) получается при подстановке (6.26) в уравнение (6.25) и использовании свойства ортонормированности функций $Y_{lm}(z, \bar{z})$. Учитывая (6.30), начальные условия для коэффициентов $F_{lm}(t)$ системы уравнений (6.32) имеют вид

$$F_{lm}(0) = \bar{Y}_{lm}(z', \bar{z}').$$

Явный вид функций $Y_{lm}(z, \bar{z})$, входящих в выражение (6.31), приведен в [6]:

$$Y_{00}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \quad Y_{11}(z, \bar{z}) = -\sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}};$$

$$Y_{10}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}; \quad Y_{1-1}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{z}{1+z\bar{z}}; \quad (6.33)$$

что приводит к окончательному виду для пропагатора двухуровневого атома

$$\mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{1-z'\bar{z}'}{1+z'\bar{z}'} e^{-2(\eta+\delta)t} + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{\eta-\delta}{\eta+\delta} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - e^{-2(\eta+\delta)t}\right) + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{\bar{z}'}{1+z'\bar{z}'} e^{-(\eta+\delta)t} + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{z'}{1+z'\bar{z}'} e^{-(\eta+\delta)t} \quad (6.34)$$

При $t \rightarrow \infty$ (6.34) приводит к P -символу равновесной матрицы плотности

$$\mathcal{P}_{eq}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{\eta-\delta}{\eta+\delta} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} = \frac{1}{\pi} \left[1 + 3th \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right]. \quad (6.35)$$

Если в начальный момент $t = 0$ динамическая подсистема — изолированный двухуровневый атом — находилась в чистом когерентном состоянии $|z_0\rangle$, то $\hat{\rho}(0) = |z_0\rangle\langle z_0|$ и

$$\mathcal{P}(z', \bar{z}', t = 0) = \delta(z' - z_0)\delta(\bar{z}' - \bar{z}_0) = \sum_{l=0}^{2j} Y_{lm}(z', \bar{z}') \bar{Y}_{lm}(z_0, \bar{z}_0).$$

В этом случае точное решение уравнение Фоккера-Планка, описывающее спонтанную релаксацию двухуровневого атома, находится просто

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}; t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z', \bar{z}') \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}'; 0)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} d\mu(z', \bar{z}') \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) \delta(z' - z_0)\delta(\bar{z}' - \bar{z}_0) = \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z_0, \bar{z}_0; 0), \quad (6.36)$$

и определяется по формуле (6.34) с учетом замены $z' \rightarrow z_0$, $\bar{z}' \rightarrow \bar{z}_0$.

Если двухуровневый атом релаксирует из начального состояния $|z_0\rangle$, то $\hat{\rho}(0) = |z_0\rangle\langle z_0|$ и

$$\mathcal{P}_{\hat{\rho}(0)} = \frac{3}{\pi} \frac{z'}{1+z'\bar{z}'} + \frac{3}{\pi} \frac{z'(3-5z'\bar{z}')}{(1+z'\bar{z}')^2} \frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0}$$

$$+ \frac{6}{\pi} \frac{z'\bar{z}'(3-z'\bar{z}')}{(1+z'\bar{z}')^2} \frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0} + \frac{6}{\pi} \frac{4z'^2}{(1+z'\bar{z}')^2} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0}. \quad (6.37)$$

Вычисление дает следующее значение корреляционной функции

$$\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(t) \rangle = \frac{z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{i\omega_0 t - (\eta + \delta)t}.$$

Это дает возможность вычислить форму контура линии излучения [72]

$$g(\omega) = \text{Re} \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle, \quad (6.38)$$

которая с учетом нормировки

$$\int_{-\infty}^\infty g(\omega) d\omega = 1$$

определяется следующим выражением

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta + \delta}{(\omega - \omega_0)^2 + (\eta + \delta)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma}{2}(2\mathcal{N} + 1)}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}(2\mathcal{N} + 1)\right)^2}. \quad (6.39)$$

Видно, что контур является лоренцевым, ширина которого зависит от константы затухания γ и числа фотонов в моде на частоте перехода. Если температура термостата $T = 0$ ($\delta = 0, \eta = \frac{\gamma}{2}$), то (6.39) приводит к хорошо известной в теории естественной ширины линии излучения формуле

$$g(\omega) = \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

6.2.2 Релаксация эквидистантной системы с $j = 1$

Здесь мы изучим особенности релаксации "атома" с тремя эквидистантными уровнями, который также имеет динамическую симметрию группы $SU(2)$. В этом случае также можно применить метод разложения пропагатора УФП по сферическим функциям, при этом в разложении (6.26) следует учесть слагаемые с $l = 0, 1, 2$. В комплексных переменных явный вид функций с $l = 2$ является следующим:

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{\bar{z}^2}{(1 + \bar{z}z)^2}, \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{\bar{z}(1 - \bar{z}z)}{(1 + \bar{z}z)^2}, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{1 - 4\bar{z}z + \bar{z}^2 z^2}{(1 + \bar{z}z)^2}$$

$$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{z(1 - \bar{z}z)}{(1 + \bar{z}z)^2}, \quad Y_{2-2} = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{z^2}{(1 + \bar{z}z)^2}.$$

В итоге для коэффициентов разложения $Q_{lm}(t)$ имеем систему из 9 уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_{00}(t) = 0, \\ \dot{Q}_{1-1}(t) = -(\eta + \delta)Q_{1-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\eta - \delta)Q_{2-1}, \\ \dot{Q}_{10}(t) = \frac{8}{\sqrt{3}}(\eta - \delta)Q_{00} - 2(\eta + \delta)Q_{10} - \frac{2}{\sqrt{15}}(\eta - \delta)Q_{20}, \\ \dot{Q}_{11}(t) = -(\eta + \delta)Q_{11} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\eta - \delta)Q_{21}, \\ \dot{Q}_{2-2}(t) = -2(\eta + \delta)Q_{2-2}, \\ \dot{Q}_{2-1}(t) = 3\sqrt{5}(\eta - \delta)Q_{1-1} - 5(\eta + \delta)Q_{2-1}, \\ \dot{Q}_{20}(t) = 2\sqrt{15}(\eta - \delta)Q_{10} - 6(\eta + \delta)Q_{20}, \\ \dot{Q}_{21}(t) = 3\sqrt{5}(\eta - \delta)Q_{11} - 5(\eta + \delta)Q_{21}, \\ \dot{Q}_{22}(t) = -2(\eta + \delta)Q_{22}. \end{array} \right. \quad (6.40)$$

Решение системы (6.40) находится в явном виде и имеет вид:

$$\begin{aligned} Q_{00}(t) &= Q_{00}(0), \\ Q_{10}(t) &= Q_{00}(0) \frac{\sqrt{3}(\eta^2 - \delta^2)}{\eta^2 + \eta\delta + \delta^2} + A_0\sqrt{3} \left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\delta} \right) e^{-\alpha_1 t} + B_0\sqrt{3} \left(\sqrt{\eta} - \sqrt{\delta} \right) e^{-\beta_1 t}, \\ Q_{20}(t) &= Q_{00}(0) \frac{\sqrt{5}(\eta - \delta)^2}{\eta^2 + \eta\delta + \delta^2} + A_0 3\sqrt{5} \left(\sqrt{\eta} - \sqrt{\delta} \right) e^{-\alpha_1 t} + B_0 3\sqrt{5} \left(\sqrt{\eta} + \sqrt{\delta} \right) e^{-\beta_1 t}, \\ Q_{1-1}(t) &= A_1 \frac{\eta - \delta}{\sqrt{5}} e^{-\alpha_2 t} + B_1 \frac{\eta - \delta}{\sqrt{5}} e^{-\beta_2 t}, \\ Q_{2-1}(t) &= A_1 \left(2(\eta + \delta) - \sqrt{\eta^2 + 14\eta\delta + \delta^2} \right) e^{-\alpha_2 t} + \\ &\quad + B_1 \left(2(\eta + \delta) + \sqrt{\eta^2 + 14\eta\delta + \delta^2} \right) e^{-\beta_2 t}, \\ Q_{11}(t) &= A_2 \frac{\eta - \delta}{\sqrt{5}} e^{-\alpha_2 t} + B_2 \frac{\eta - \delta}{\sqrt{5}} e^{-\beta_2 t}, \\ Q_{21}(t) &= A_2 \left(2(\eta + \delta) - \sqrt{\eta^2 + 14\eta\delta + \delta^2} \right) e^{-\alpha_2 t} + \\ &\quad + B_2 \left(2(\eta + \delta) + \sqrt{\eta^2 + 14\eta\delta + \delta^2} \right) e^{-\beta_2 t}, \\ Q_{2-2}(t) &= Q_{2-2}(0) e^{-2(\eta + \delta)t}, \\ Q_{22}(t) &= Q_{22}(0) e^{-2(\eta + \delta)t}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4(\eta + \delta - \sqrt{\eta\delta}), \quad \beta_1 = 4(\eta + \delta + \sqrt{\eta\delta}), \\ \alpha_2 &= 3(\eta + \delta) - \sqrt{\eta^2 + 14\eta\delta + \delta^2}, \quad \beta_2 = 3(\eta + \delta) + \sqrt{\eta^2 + 14\eta\delta + \delta^2}, \end{aligned}$$

а постоянные $Q_{00}(0)$, $Q_{2\pm 2}(0)$, A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 определяются из начальных условий:

$$Q_{lm}(0) = \int \frac{d^2 z}{(1 + \bar{z}z)^2} P_0(\bar{z}, z) \bar{Y}_{lm}(\bar{z}, z), \quad (6.42)$$

Пропагатор УФП для $j = 1$ имеет вид:

$$\mathcal{K}(\bar{z}, z) = \sum_{l=0}^2 \sum_{m=-l}^{m=l} Q_{lm}(t) Y_{lm}(\bar{z}, z) (1 + \bar{z}z)^{-2},$$

где коэффициенты $Q_{lm}(0)$ определены формулами (6.41). Явное выражение очень громоздко и мы не будем его здесь приводить.

Опираясь на вид пропагатора можно вычислить изменение со временем вероятности нахождения атома в состоянии с фиксированным значением проекции энергетического спина

$$w_m^j(t) = \langle jm | \hat{\rho} | jm \rangle = \int d\mu(z) P(\bar{z}, z; t) | \langle jm | z \rangle |^2.$$

В частном случае, когда при $t = 0$ атом находился в состоянии $|z_0 = 0 \rangle = |1, -1 \rangle$, получаем

$$w_1^1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} Q_{10}(t) + \frac{1}{6} Q_{20}(t).$$

Зная пропагатор, можно по формуле вида (6.9) рассчитать двухвременные корреляторы и определить форму контура линии излучения. К сожалению, соответствующие выражения достаточно громоздки и мы их здесь не приводим. Вопрос о контуре линии излучения системы с большими значениями j будет более детально разобран в главе 8.

6.3 Релаксация двухуровневой системы в "сжатом" термостате

Сжатый свет является одним из наиболее ярких явлений в квантовой электродинамике, не имеющим классического аналога и обещающим исключительно важные применения в системах связи с предельно низким уровнем шума и в детектировании гравитационных волн.

В этом разделе, изучается специфика воздействия сжатого термостата на кинетику распада двухуровневых атомов. Мы будем рассматривать релаксацию ансамбля двухуровневых атомов в таком термостате, где наряду с обычным тепловым шумом, который связан с отличными от нуля корреляторами $\langle \hat{b}_j^+ \hat{b}_j \rangle$ и $\langle \hat{b}_j \hat{b}_j^+ \rangle$ существуют и ненулевые "сжатые" флуктуации $\langle \hat{b}_j^+ \hat{b}_j^+ \rangle \neq 0$, $\langle \hat{b}_j \hat{b}_j \rangle \neq 0$.

Качественно, это отвечает такой ситуации, когда в термостате кроме обычных некоррелированных тепловых фотонов присутствуют фотоны, рождающиеся, например, в двухфотонных процессах генерации нелинейной средой стенок термостата.

Рассмотрим термостат — "фотонный тепловой резервуар" вакуумный вектор в гильбертовом пространстве состояний которой является сжатым

$$|0\rangle_{sq} = |\xi_j\rangle = \hat{\mathcal{S}}(\xi_j)|0\rangle,$$

где $|0\rangle$ — вакуумный вектор,

$\hat{S}(\xi_j) = e^{\frac{1}{2}(\bar{\xi}_j \hat{b}_j^2 - \xi_j \hat{b}_j^{+2})}$ — оператор Столера [78], осуществляющий "сжатие" вакуумного вектора $|0\rangle$ в j - моде, $\xi_j = r_j e^{i\theta_j}$ — комплексный параметр сжатия. Вычисляя явный вид матрицы плотности термостата

$$\hat{\rho}_T(0) = \exp[-\hat{H}/kT] / Sp \exp[-\hat{H}/kT],$$

где $\hat{H} = \hat{S}^+(\xi) \hat{H}_T \hat{S}(\xi)$, $\hat{S}(\xi) = \prod_j \hat{S}(\xi_j)$, можно определить корреляционные функции операторов рождения и уничтожения фотонов в "сжатом" термостате [6]:

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_j^+ \hat{b}_l \rangle &= [(\langle \nu \rangle + \frac{1}{2}) ch 2r_j - \frac{1}{2}] \delta_{jl}, \\ \langle \hat{b}_j \hat{b}_l^+ \rangle &= [(\langle \nu \rangle + \frac{1}{2}) ch 2r_j + \frac{1}{2}] \delta_{jl}, \\ \langle \hat{b}_j^+ \hat{b}_l^+ \rangle &= [(\langle \nu \rangle + \frac{1}{2}) e^{-i\theta_j} sh 2r_j] \delta_{jl}, \\ \langle \hat{b}_j \hat{b}_l \rangle &= [(\langle \nu \rangle + \frac{1}{2}) e^{i\theta_j} sh 2r_j] \delta_{jl}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Здесь $\langle \nu \rangle = [\exp(\hbar\omega_0/kT) - 1]^{-1}$ — среднее число фотонов в моде "обычного" термостата (без сжатия) на частоте перехода ω_0 и той же температуры T .

Изложенный в предыдущем разделе метод получения операторного кинетического уравнения для матрицы плотности атомной подсистемы, с учетом (6.43), приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} & \left[(\mathcal{N} + 1)(2\hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \mathcal{N}(2\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+) - \right. \\ & \left. - \mathcal{S}(2\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_+) - \bar{\mathcal{S}}(2\hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_-) \right], \end{aligned} \quad (6.44)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left[(\langle \nu \rangle + \frac{1}{2}) ch(2r_j) - \frac{1}{2} \right]_{\omega_j = \omega_0}, \\ \mathcal{S} &= \left[(\langle \nu \rangle + \frac{1}{2}) e^{i\theta_j} sh(2r_j) \right]_{\omega_j = \omega_0}. \end{aligned}$$

Если сжатие отсутствует $r = 0$, то $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{N} = \langle \nu \rangle$ и уравнение (6.44) переходит в уравнение (??) для релаксации в обычном термостате. Уравнение (6.44) с помощью соотношений (6.24) сводится к УФП:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [(\mathcal{N} + 1)(2jz + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2) + \right. \\ & \left. + \mathcal{N}(-2jz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{S}(\frac{\partial}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2) + \bar{\mathcal{S}} z^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2 \right] + \text{к.с.} \} f. \end{aligned} \quad (6.45)$$

УФП (6.45) также описывает когерентную релаксацию ансамбля невзаимодействующих между собой $N = 2j$ двухуровневых атомов. (Здесь через к.с. обозначены слагаемые комплексно сопряженные явно выписанным.)

Рассмотрим случай изолированного атома ($j = \frac{1}{2}$). Уравнения для коэффициентов $F_{lm}(t)$

$$\begin{cases} \dot{F}_{00}(t) = 0, \\ \dot{F}_{10}(t) = \sqrt{3}\gamma F_{00} - \Gamma F_{10}, \\ \dot{F}_{1-1}(t) = -\frac{\Gamma}{2}F_{1-1} - \gamma\bar{S}F_{11}, \\ \dot{F}_{11}(t) = -\frac{\Gamma}{2}F_{11} - \gamma SF_{1-1} \end{cases} \quad (6.46)$$

приводят к следующему виду пропагатора:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z', \bar{z}'; 0) = & \frac{1}{\pi} + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{\bar{z}'}{1+z'\bar{z}'} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} ch(\gamma|\mathcal{S}|t) + \\ & + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{z'}{1+z'\bar{z}'} e^{-\frac{\Gamma}{2}t-i\Psi} sh(\gamma|\mathcal{S}|t) + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} e^{-\Gamma t} + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{\gamma}{\Gamma} (1-e^{-\Gamma t}) + \\ & + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{z'}{1+z'\bar{z}'} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} ch(\gamma|\mathcal{S}|t) + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \cdot \frac{\bar{z}'}{1+z'\bar{z}'} e^{-\frac{\Gamma}{2}t+i\Psi} sh(\gamma|\mathcal{S}|t), \end{aligned} \quad (6.47)$$

где $e^{i\Psi} = \frac{S}{|\mathcal{S}|}$, $\Gamma = \gamma(2\mathcal{N} + 1)$.

При $t \rightarrow \infty$ (6.47) приводит к P - символу равновесной матрицы плотности

$$\mathcal{P}_{eq}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{\gamma}{\Gamma} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{3}{2\mathcal{N} + 1} \cdot \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \right), \quad (6.48)$$

и, если, параметр сжатия $r = 0$, то

$$(2\mathcal{N} + 1)^{-1} = th \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right).$$

Если атом первоначально находился в когерентном состоянии $|z_0\rangle$, то корреляционная функция

$$\langle \hat{J}_+(t)\hat{J}_-(0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{(i\omega_0 - \frac{\Gamma}{2} - \gamma|\mathcal{S}|)t} + \frac{1}{2} \frac{z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{(i\omega_0 - \frac{\Gamma}{2} + \gamma|\mathcal{S}|)t}, \quad (6.49)$$

что дает следующую форму контура линии излучения:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\frac{\Gamma}{2} + \gamma|\mathcal{S}|}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} + \gamma|\mathcal{S}| \right)^2} + \frac{\frac{\Gamma}{2} - \gamma|\mathcal{S}|}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} - \gamma|\mathcal{S}| \right)^2} \right]. \quad (6.50)$$

Таким образом, наличие сжатых флуктуаций приводит к тому, что контур линии излучения равен сумме двух лоренцевых контуров разной ширины.

На рис.4.1 представлены результаты численного расчета контура линий излучения от параметра сжатия и сравнение с контуром при релаксации в обычном термостате.

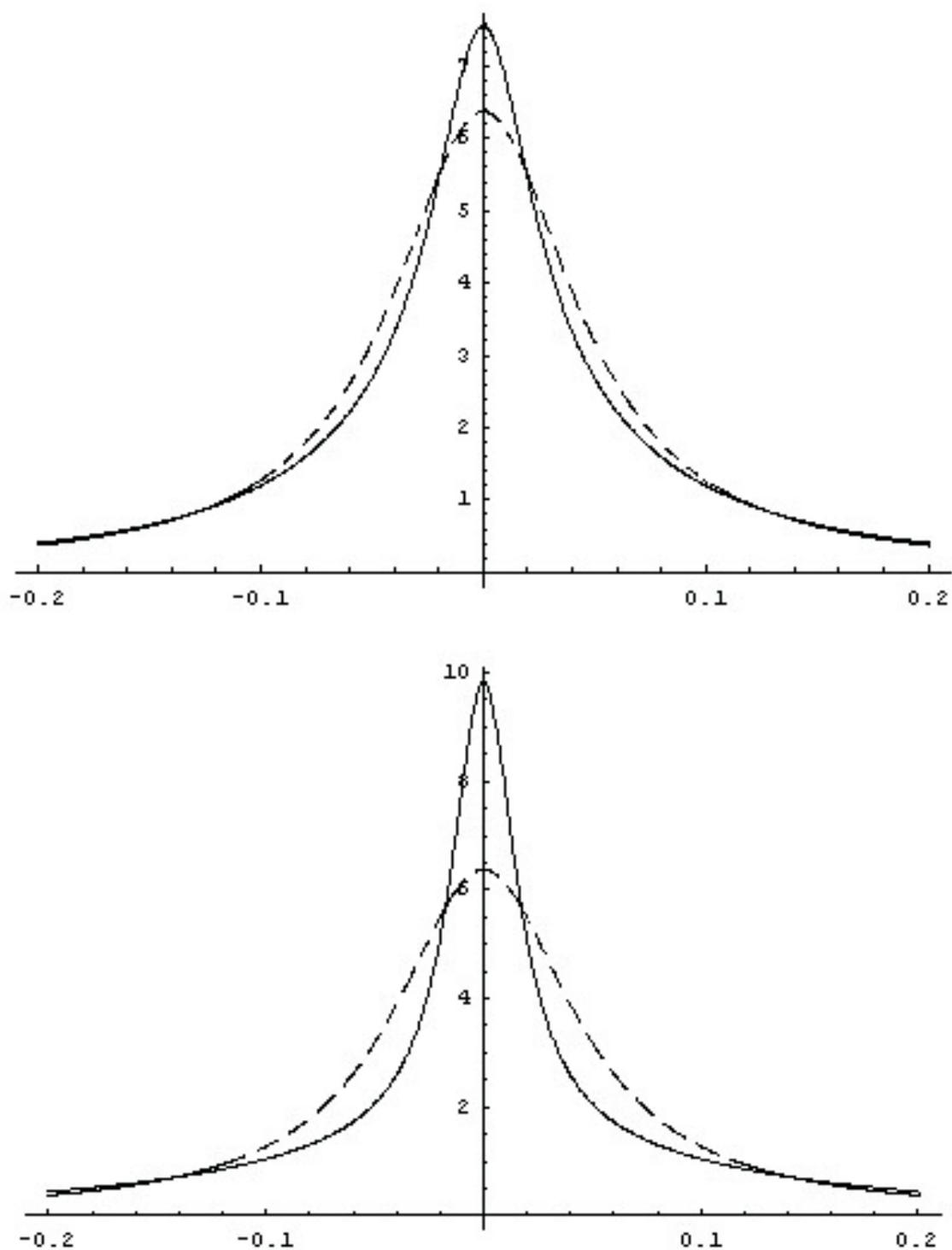


Рис. 6.1. Контур линии излучения двухуровневой системы в сжатом термостате. $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 5, r = 0.3$ (для верхнего рисунка); $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 5, r = 0.5$ (для нижнего рисунка). Пунктирная линия соответствует контуру излучения двухуровневой системы в обычном термостате при тех же условиях. По оси абсцисс отложена безразмерная частота $(\omega/\omega_0 - 1)$.

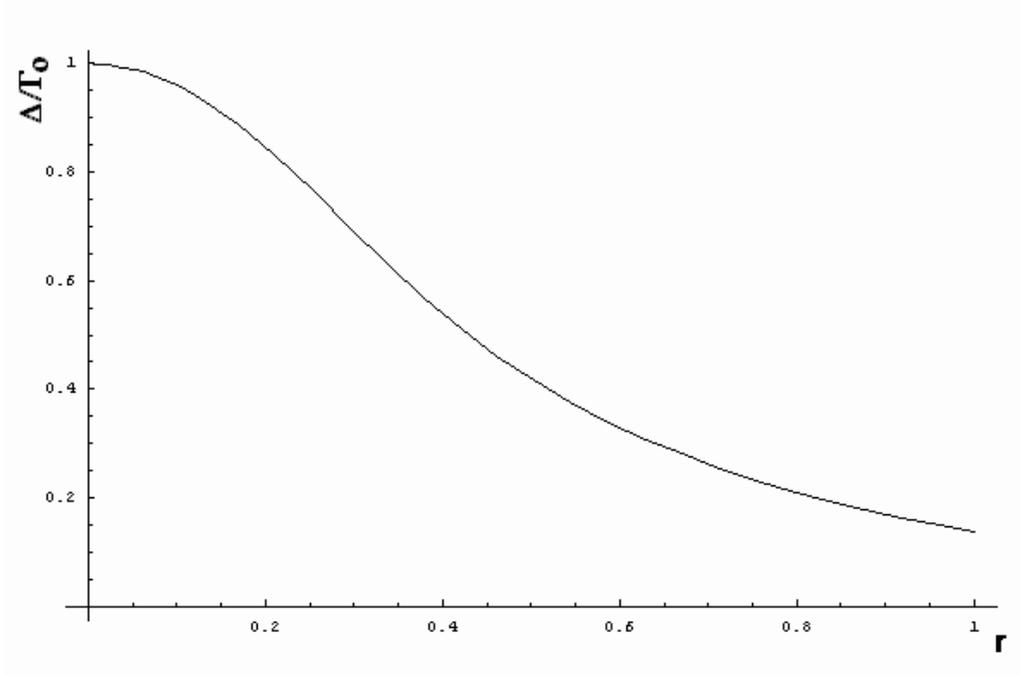


Рис. 6.2. Отношение ширины линии Δ двухуровневого атома при релаксации в "сжатом" термостате к ширине линии в обычном термостате Γ_0 в зависимости от параметра сжатия r .

Выведенные формулы позволяют определить отношение ширины линии излучения Δ двухуровневого атома при релаксации в "сжатом" термостате к ширине линии $\Gamma_0 = \eta + \delta$ того же атома при релаксации в обычном термостате:

$$\frac{\Delta}{\Gamma_0} = \sqrt{\sqrt{1 + 4sh^4 2r} - 2sh^2(2r)}.$$

Интересной особенностью полученного отношения является его независимость от температуры термостата. Результаты расчета, представленные на рис.4.2, позволяют оценить уменьшение ширины контура линии излучения. Так, при параметре сжатия $r = 0.3$ ширина линии излучения $\Delta = 0.65\Gamma_0$, а при $r = 0.5$, она составляет $\Delta = 0.42\Gamma_0$. Эти оценки показывают возможность экспериментальной проверки эффекта сужения линии излучения при релаксации атома в "сжатом" термостате.

6.4 Релаксация системы трехуровневых атомов

Во многих физических задачах, где процессы релаксации играют существенную роль, приближение реального атома только двумя выделенными уровнями недостаточно. Так, последовательный подход, где в рамках модели необходимо определение констант релаксации, приводит к необходимости введения третьего уровня. Самостоятельное значение трехуровневый атом имеет для развивающегося в последние годы на основе прогресса в экспериментальной технике, исследовании спектроскопии изолированных атомов и молекул. Это делает актуальным рассмотрение релаксации трехуровневого атома с неэквидистантным спектром в рамках метода динамических групп и когерентных состояний. Здесь группой динамической симметрии атома (атомов), взаимодействующих с термостатом и между собой, является группа $SU(3)$.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из набора трехуровневых идентичных атомов, взаимодействующих между собой, но взаимодействующих с термостатом. Полный гамильтониан системы

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_T + \hat{H}_{int},$$

где

$$\hat{H}_a = \sum_{\alpha=1}^N \hbar(\omega_0 \hat{H}_1^{(\alpha)} + \Omega_0 \hat{H}_2^{(\alpha)}) \quad (6.51)$$

— гамильтониан системы N свободных трехуровневых атомов, гамильтониан термостата

$$\hat{H}_T = \sum_j \hbar \omega_j \hat{b}_j^+ \hat{b}_j.$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \left[(f_{1j} \hat{J}_+^{(\alpha)} + f_{2j} \hat{K}_+^{(\alpha)} + f_{3j} \hat{L}_+^{(\alpha)}) \hat{b}_j + (\bar{f}_{1j} \hat{J}_-^{(\alpha)} + \bar{f}_{2j} \hat{K}_-^{(\alpha)} + \right. \\ \left. + \bar{f}_{3j} \hat{L}_-^{(\alpha)}) \hat{b}_j^+ \right] \end{aligned} \quad (6.52)$$

— оператор взаимодействия между атомом и термостатом, записанный в приближении вращающейся волны (ПВВ), здесь f_{1j} — константа взаимодействия j -го осциллятора с атомом на переходе $1 \rightarrow 2$, и, аналогично, на других переходах, а $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{J}_{\pm}, \hat{K}_{\pm}, \hat{L}_{\pm}$ — генераторы группы $SU(3)$.

Переходя в представление взаимодействия, получаем

$$\hat{V}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_a + \hat{H}_T)t} \hat{H}_{int} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_a + \hat{H}_T)t} = \quad (6.53)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[\left(f_{1j} \hat{J}_+ e^{-i(\omega_j - \frac{\omega_0}{2} - \Omega_0)t} + f_{2j} \hat{K}_+ e^{-i(\omega_j - \frac{\omega_0}{2})t} + f_{3j} \hat{L}_+ e^{-i(\omega_j - \omega_0 - \Omega_0)t} \right) \hat{b}_j + \text{э.с.} \right],$$

где

$$\hat{J}_+ = \sum_{\alpha=1}^N \hat{J}_+^{(\alpha)}, \quad \hat{L}_+ = \sum_{\alpha=1}^N \hat{L}_+^{(\alpha)}, \quad \hat{K}_+ = \sum_{\alpha=1}^N \hat{K}_+^{(\alpha)} -$$

генераторы представления $\prod_{\alpha=1}^N \otimes D^{(\alpha)}(1.0)$ группы $SU(3)$.

Опуская подробности вывода кинетического уравнения, изложенные выше, запишем окончательный вид операторного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = & \frac{\gamma_1}{2} [(\langle \nu_1 \rangle + 1)(2\hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \\ & + \langle \nu_1 \rangle (2\hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+)] + \\ & + \frac{\gamma_2}{2} [(\langle \nu_2 \rangle + 1)(2\hat{K}_- \hat{\rho} \hat{K}_+ - \hat{K}_+ \hat{K}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{K}_+ \hat{K}_-) + \\ & + \langle \nu_2 \rangle (2\hat{K}_+ \hat{\rho} \hat{K}_- - \hat{K}_- \hat{K}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{K}_- \hat{K}_+)] + \\ & + \frac{\gamma_3}{2} [(\langle \nu_3 \rangle + 1)(2\hat{L}_- \hat{\rho} \hat{L}_+ - \hat{L}_+ \hat{L}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{L}_+ \hat{L}_-) + \\ & + \langle \nu_3 \rangle (2\hat{L}_+ \hat{\rho} \hat{L}_- - \hat{L}_- \hat{L}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{L}_- \hat{L}_+)], \end{aligned} \quad (6.54)$$

где

$$\gamma_1 = \pi |f_1|^2 g(\omega_j)|_{\omega_j = \frac{\omega_0}{2} + \Omega_0}, \quad \gamma_2 = \pi |f_2|^2 g(\omega_j)|_{\omega_j = \frac{\omega_0}{2}}, \quad \gamma_3 = \pi |f_3|^2 g(\omega_j)|_{\omega_j = \omega_0 + \Omega_0}$$

— константы, определяющие затухание динамической (атомной) подсистемы, $g(\omega_j)$ — плотность состояния в термостате,

$$\begin{aligned} \langle \nu_1 \rangle = \mathcal{N}_1 &= \left[\exp \left(\frac{\hbar(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0)}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}; \\ \langle \nu_2 \rangle = \mathcal{N}_2 &= \left[\exp \left(\frac{\hbar \frac{\omega_0}{2}}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}; \\ \langle \nu_3 \rangle = \mathcal{N}_3 &= \left[\exp \left(\frac{\hbar(\omega_0 + \Omega_0)}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} \end{aligned}$$

— среднее число фотонов в термостате, соответственно на переходах $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$, $1 \leftrightarrow 3$.

Следует отдельно отметить, что одна из констант γ_l , ($l = 1, 2, 3$) пренебрежимо мала, вследствие учета правил отбора (один из трех обычно рассматриваемых возможных электрических дипольных переходов запрещен). Так, для V — атома нужно положить равной нулю константу γ_2 .

Уравнение (6.54) является обобщением кинетического уравнения, описывающего релаксацию эквидистантной системы, такой как квантовый гармонический осциллятор или частица со спином j во внешнем магнитном поле

[72, 73, 74]. Его также можно "свести" к уравнению Фоккера-Планка методом КС на группе $SU(3)$.

Матрица плотности $\hat{\rho}(t)$ атомной системы действует в пространстве неприводимого полносимметричного представления $D(N, 0) = \prod_{j=1}^N \otimes D^{(j)}(1.0)$, для которой диагональное представление Глаубера - Сударшана имеет вид:

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(z_1, z_2) \mathcal{P}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2 | t) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \quad (6.55)$$

где $\mathcal{P}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2 | t)$ – контравариантный символ матрицы плотности, $|z_1, z_2\rangle$ – КС группы $SU(3)$, а $d\mu(z_1, z_2)$ – инвариантная мера на однородном пространстве $SU(3)/U(2)$, определяемые соответственно выражениями (3.14).

Используя явный вид КС (3.14) и их свойства, можно получить

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \mu \frac{\bar{z}_1}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \right) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \\ \hat{J}_+ |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| &= \left(\frac{\partial}{\partial z_2} + \mu \frac{\bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \right) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \\ \hat{K}_+ |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| &= \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \mu \frac{\bar{z}_1 z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} \right) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \\ \hat{L}_- |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| &= \left(\mu \frac{z_1}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} - z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \\ \hat{J}_- |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| &= \left(\mu \frac{z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} - z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \\ \hat{K}_- |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2| &= \left(\mu \frac{z_1 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) |z_1, z_2\rangle \langle z_1, z_2|, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где $\mu = 2\mu_1 - 3\mu_2$.

Подставляя (6.55) в (6.54) и используя (6.56), для функции

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2 | t) \equiv \frac{\mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2 | t)}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^3}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \hat{L} f \equiv \\ &\equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\gamma_1}{2} \left(\mu \frac{z_1 z_2 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + (\mathcal{N}_1 + 1) z_1 z_2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_2^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \right) \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \mathcal{N}_1 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + \frac{\gamma_2}{2} \left(\mu \frac{z_1 z_2 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} - (\mathcal{N}_2 + 1) z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \mathcal{N}_2 z_2 \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \right\} + \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_3}{2} \left(\mu \frac{z_1(1+z_1\bar{z}_1)}{1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2} + (\mathcal{N}_3+1) z_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_1\bar{z}_2 \right) + \right. \\
& \left. + (\mathcal{N}_3+1) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} z_1^2 + \frac{\partial}{\partial z_2} z_1 z_2 \right) + \mathcal{N}_3 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z_2} \left[\frac{\gamma_1}{2} \left(\mu \frac{z_2(1+z_2\bar{z}_2)}{1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2} + (\mathcal{N}_1+1) z_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_2^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1\bar{z}_2 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\mathcal{N}_1+1) \left(\frac{\partial}{\partial z_2} z_2^2 + \frac{\partial}{\partial z_1} z_1 z_2 \right) + \mathcal{N}_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} + z_2^2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_2}{2} \left((\mathcal{N}_2+1) z_1\bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - \mathcal{N}_2 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - \mu \frac{z_1\bar{z}_1 z_2}{1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_3}{2} \left(\mu \frac{z_1\bar{z}_1 z_2}{1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2} + (\mathcal{N}_3+1) z_1 z_2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \bar{z}_1^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \bar{z}_1\bar{z}_2 \right) + \mathcal{N}_3 z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right] + \\
& \left. + \text{к.с.} \right\} f.
\end{aligned}$$

При выводе уравнения (6.57) было учтено граничное условие

$$\frac{\mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|t)}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^3} \rightarrow 0, \quad \text{когда } |z_1| \rightarrow \infty, \quad |z_2| \rightarrow \infty.$$

Из (6.57) видно, что $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка на двумерном комплексном проективном пространстве $CP_2 \approx S_4$.

6.5 Точное решение уравнения Фоккера - Планка для изолированного атома

Уравнение (6.57) не имеет линейной группы динамической симметрии, однако тот факт, что пространством решений является компактное многообразие — однородное пространство $SU(3)/U(2) \approx CP_2 \approx S_4$, позволяет находить точное решение в виде разложения по сферическим функциям, которые являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами, определенном на этом пространстве:

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|t) = \sum_{n=0}^{\mu} \sum_{|m_1+m_2| \leq n} F_{nm_1 m_2}(t) \frac{Y_{nm_1 m_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(1+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^3}. \quad (6.58)$$

Сферические функции $Y_{nm_1 m_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$ на однородном пространстве $SU(3)/U(2) \approx CP_2$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -\nabla^2 Y_{nm_1m_2} = n(n+2)Y_{nm_1m_2}, \\ \hat{M}_1 Y_{nm_1m_2} = m_1 Y_{nm_1m_2}, \\ \hat{M}_2 Y_{nm_1m_2} = m_2 Y_{nm_1m_2}, \end{cases}, \quad (6.59)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\nabla^2 = (1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) \times \\ \times \left[(1 + z_1 \bar{z}_1) \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + z_1 \bar{z}_2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} + \bar{z}_1 z_2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_1 \partial z_2} + (1 + z_2 \bar{z}_2) \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right]$$

— инвариантный оператор Лапласа-Бельтрами,

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \quad \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right).$$

Условие нормировки для сферических функций имеет вид

$$\int Y_{nm_1m_2} \bar{Y}_{n'm'_1m'_2} \frac{dRe z_1 dIm z_1 dRe z_2 dIm z_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^3} = \delta_{nn'} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}.$$

Рассмотрим релаксацию изолированного атома ($\mu = 1$). Тогда для нахождения $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2 | t)$ понадобятся следующие 9 функций:

$$Y_{000} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad Y_{1\frac{1}{2}0} = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \frac{z_1}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \quad Y_{10\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \frac{z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \\ Y_{1-\frac{1}{2}0} = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \frac{\bar{z}_1}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \quad Y_{10-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \frac{\bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \\ Y_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \frac{z_1 z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \quad Y_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \\ Y_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \frac{z_1 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}, \quad Y_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \frac{\bar{z}_1 z_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}.$$

Подставляя (6.58) в (6.57) и учитывая ортонормированность функций $Y_{nm_1m_2}$, получаем, что коэффициенты $F_{nm_1m_2}(t)$ удовлетворяют линейной системе зацепленных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{F}_{nm_1m_2}(t) = \sum_{\mu=1} \sum_{n'=0} \sum_{|m'_1+m'_2| \leq n'} L_{nm_1m_2}^{n'm'_1m'_2} F_{n'm'_1m'_2}(t), \quad (6.60)$$

где

$$L_{nm_1m_2}^{n'm'_1m'_2} = \int dRe z_1 dIm z_1 dRe z_2 dIm z_2 \bar{Y}_{nm_1m_2} \hat{L} \frac{Y_{n'm'_1m'_2}}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^3}$$

— матричные элементы оператора \hat{L} из правой части уравнения (6.57).

Постоянные интегрирования находятся из условия

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|0) = \frac{\mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|0)}{(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^3}, \quad (6.61)$$

здесь $\mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|0)$ - контравариантный символ начальной матрицы плотности $\hat{\rho}(t=0)$. Из (6.58) и (6.61) получаем

$$F_{nm_1m_2}(0) = \int \frac{dRe z_1 dIm z_1 dRe z_2 dIm z_2 \bar{Y}_{nm_1m_2}}{(1 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^3} \mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2|0) \times \\ \times Y_{nm_1m_2}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2).$$

Для $\mu = 1$ явный вид матричных элементов следующий:

$$L_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{000} = L_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{000} = \frac{\sqrt{6}}{3}(\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3)$$

$$L_{1\frac{1}{2}0}^{1\frac{1}{2}0} = L_{1-\frac{1}{2}0}^{1-\frac{1}{2}0} = -(\delta_1 + \eta_2 + \delta_3 + \eta_3), \quad L_{10\frac{1}{2}}^{10\frac{1}{2}} = L_{10-\frac{1}{2}}^{10-\frac{1}{2}} = -(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \eta_1),$$

$$L_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = L_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \delta_2), \quad L_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = L_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -(\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 + 2\delta_2).$$

Остальные матричные элементы равны нулю. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\frac{\gamma_i}{2}(\langle \nu_i \rangle + 1) = \frac{\gamma_i}{2}(\mathcal{N}_i + 1) = \eta_i, \quad \frac{\gamma_i}{2} \langle \nu_i \rangle = \frac{\gamma_i}{2}\mathcal{N}_i = \delta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (6.60) приводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{F}_{000} = 0, \\ \dot{F}_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = L_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{000} F_{000} + L_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}} F_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \\ \dot{F}_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = L_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{000} F_{000} + L_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} F_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \\ \dot{F}_{1\frac{1}{2}0} = L_{1\frac{1}{2}0}^{1\frac{1}{2}0} F_{1\frac{1}{2}0}, \quad \dot{F}_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = L_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} F_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \\ \dot{F}_{1-\frac{1}{2}0} = L_{1-\frac{1}{2}0}^{1-\frac{1}{2}0} F_{1-\frac{1}{2}0}, \quad \dot{F}_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = L_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} F_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}, \\ \dot{F}_{10\frac{1}{2}} = L_{10\frac{1}{2}}^{10\frac{1}{2}} F_{10\frac{1}{2}}, \quad \dot{F}_{10-\frac{1}{2}} = L_{10-\frac{1}{2}}^{10-\frac{1}{2}} F_{10-\frac{1}{2}}. \end{array} \right. \quad (6.62)$$

Эта система решается точно и с учетом начальных условий для коэффициентов

$$F_{nm_1m_2}(0) = \bar{Y}_{nm_1m_2}(z_1^0, \bar{z}_1^0, z_2^0, \bar{z}_2^0) \quad (6.63)$$

ее решение имеет вид:

$$F_{000}(t) = F_{000}(0) = \bar{Y}_{000}(z_1^0, z_2^0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

$$F_{1\frac{1}{2}0}(t) = \bar{Y}_{1\frac{1}{2}0}(z_1^0, z_2^0)e^{-(\delta_1+\delta_3+\eta_2+\eta_3)t},$$

$$F_{1-\frac{1}{2}0}(t) = \bar{Y}_{1-\frac{1}{2}0}(z_1^0, z_2^0)e^{-(\delta_1+\delta_3+\eta_2+\eta_3)t},$$

$$F_{10\frac{1}{2}}(t) = \bar{Y}_{10\frac{1}{2}}(z_1^0, z_2^0)e^{-(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\eta_1)t},$$

$$F_{10-\frac{1}{2}}(t) = \bar{Y}_{10-\frac{1}{2}}(z_1^0, z_2^0)e^{-(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\eta_1)t},$$

$$F_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(t) = \bar{Y}_{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(z_1^0, z_2^0)e^{-(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\delta_2)t},$$

$$F_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(t) = \bar{Y}_{1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(z_1^0, z_2^0)e^{-(\eta_1+\eta_2+\eta_3+\delta_2)t},$$

$$F_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(t) = \bar{F}_{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(t) = \bar{Y}_{1\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(z_1^0, z_2^0)\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (6.64)$$

где

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3\eta_1 + 3\eta_3 + 2\eta_2 + 2\delta_2}{2} \pm \left(\frac{(3\eta_1 + 3\eta_3 + 2\eta_2 + 2\delta_2)^2}{4} - 2((\eta_1 + \eta_3)(\eta_1 + \eta_3 + 2\eta_2 + 2\delta_2) - (\eta_3 - \eta_1)(\eta_3 - \eta_1 + \gamma_2)) \right)^{1/2}.$$

С учетом (6.58), (6.61) и (6.64) пропагатор (функция Грина) УФП (6.57) находится (для случая $\mu = 1$) в явном виде. Не будем его здесь приводить из-за очень громоздкого выражения.

Пусть произвольной начальной матрице плотности отвечает контравариантный символ $\mathcal{P}(z^0, \bar{z}^0)$, тогда решение уравнения Фоккера-Планка (6.57) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; t) = \\ & = \int \frac{dRe z_1^0 dIm z_1^0 dRe z_2^0 dIm z_2^0}{(1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0)^3} \mathcal{K}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; t | z_1^0, \bar{z}_1^0, z_2^0, \bar{z}_2^0; 0) \mathcal{P}(z_1^0, \bar{z}_1^0, z_2^0, \bar{z}_2^0; 0). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Из (??) при $t \rightarrow \infty$ можно получить равновесные значения контравариантного символа матрицы плотности, например, для V - атома (запрещены переходы $2 \rightleftharpoons 3$)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{eq}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) &= \frac{2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{N}_1 + 1} \frac{z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2} + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\mathcal{N}_1 + 1} + \frac{1}{\mathcal{N}_3 + 1} \right) \frac{1 - z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2}{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}. \end{aligned}$$

6.6 Одновременные и двухвременные корреляционные функции

В рамках единого подхода к описанию процессов динамики и релаксации модельных квантовых систем, метод КС оказывается эффективным и для вычисления наблюдаемых. Одновременные и двухвременные корреляционные функции полевых и атомных операторов определяют, например, интенсивность излучения и его спектр флуктуаций (форму контура линии излучения), спектр числа фотонов и спектр флуктуаций интенсивностей (корреляция интенсивностей в экспериментах Х. Брауна и Твисса), поэтому в квантовой радиофизике, квантовой оптике и спектроскопии разработаны экспериментальные методы их измерения [78], точность которых за последнее время существенно возросла. Для вычисления одновременных корреляторов средних значений операторов перехода в трехуровневой системе введем характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha, \beta, \gamma, \eta, \tau, \xi, h_1, h_2) &= \int \frac{dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2}{(1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^3} \mathcal{P}(z_1, z_2, t) \\ &\times \langle z_1 z_2 | e^{\eta \hat{J}_+} e^{\tau \hat{K}_+} e^{\xi \hat{L}_+} e^{h_1 \hat{H}_1} e^{h_2 \hat{H}_2} e^{\alpha \hat{L}_-} e^{\beta \hat{K}_-} e^{\gamma \hat{J}_-} | z_1 z_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.66)$$

где $dzd\bar{z}$ здесь и дальше понимается в смысле $dzd\bar{z} = d\text{Re}z d\text{Im}z$, $\mathcal{P}(z_1, z_2, t)$ – P - символ матрицы плотности, определенный согласно (6.65).

Заметим, что для реального трехуровневого атома с электродипольными переходами характеристическая функция (6.66) имеет более простой вид, из-за того, что один из переходов запрещен правилами отбора.

Рассмотрим в качестве примера V - атом. Для него характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(\alpha, \gamma, \eta, \xi, h_1, h_2) \\ &= \int d\mu(z_1, z_2) \mathcal{P}(z_1, z_2, t) \langle z_1 z_2 | e^{\eta \hat{J}_+} e^{\xi \hat{L}_+} e^{h_1 \hat{H}_1} e^{h_2 \hat{H}_2} e^{\alpha \hat{L}_-} e^{\gamma \hat{J}_-} | z_1 z_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.67)$$

и, с учетом (6.65),

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha, \gamma, \eta, \xi, h_1, h_2) &= \int \int d\mu(z_1, z_2) d\mu(z'_1, z'_2) \mathcal{K}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; t | z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2; 0) \\ &\times \mathcal{P}_0(z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2, 0) \langle z_1 z_2 | e^{\eta \hat{J}_+} e^{\xi \hat{L}_+} e^{h_1 \hat{H}_1} e^{h_2 \hat{H}_2} e^{\alpha \hat{L}_-} e^{\gamma \hat{J}_-} | z_1 z_2 \rangle. \end{aligned}$$

В случае, если начальное состояние атома было когерентное $|z_1^0 z_2^0\rangle$ и $\hat{\rho}(0) = |z_1^0 z_2^0\rangle \langle z_1^0 z_2^0|$ P - символ начальной матрицы плотности

$$\mathcal{P}_0(z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2, 0) = \delta^2(z'_1 - z_1^0) \delta^2(z'_2 - z_2^0).$$

Можно проинтегрировать по $z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha, \gamma, \eta, \xi, h_1, h_2) &= \int_x d\mu(z_1, z_2) \mathcal{K}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; t | z_1^0, \bar{z}_1^0, z_2^0, \bar{z}_2^0; 0) \times \quad (6.68) \\ &\times \langle z_1 z_2 | e^{\eta \hat{J}_+} e^{\xi \hat{L}_+} e^{h_1 \hat{H}_1} e^{h_2 \hat{H}_2} e^{\alpha \hat{L}_-} e^{\gamma \hat{J}_-} | z_1 z_2 \rangle. \end{aligned}$$

Выражение $\langle z_1 z_2 | e^{\eta \hat{J}_+} e^{\xi \hat{L}_+} e^{h_1 \hat{H}_1} e^{h_2 \hat{H}_2} e^{\alpha \hat{L}_-} e^{\gamma \hat{J}_-} | z_1 z_2 \rangle$ проще вычислять в матричной реализации: операторов, используя (3.9), и вектора КС, как следует из (3.14) и (3.10), в виде

$$|z_1 z_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для характеристической функции изолированного V -атома получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha, \gamma, \eta, \xi, h_1, h_2) &= e^{-\frac{h_1}{2} - \frac{2}{3} h_2} \left[\frac{1}{3} + e^{h_1 + h_2} + \alpha \xi + \gamma \eta + e^{\frac{h_1}{2} + h_2} + \right. \\ &+ \xi \frac{\bar{z}_1^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} e^{-(\delta_1 + \delta_3 + \eta_3)t} + \eta \frac{\bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} e^{-(\delta_1 + \delta_3)t} + \\ &+ \alpha \frac{\bar{z}_1^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} e^{-(\delta_1 + \delta_3 + \eta_3)t} + \gamma \frac{\bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} e^{-(\delta_1 + \delta_3 + \eta_1)t} + \\ &+ \gamma \xi \frac{\bar{z}_1^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} e^{-(\eta_1 + \eta_3)t} + \alpha \eta \frac{z_1^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} e^{-(\eta_1 + \eta_3)t} + \quad (6.69) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} (\alpha \xi - \gamma \eta + e^{h_1 + h_2} - e^{\frac{h_1}{2} + h_2}) \frac{1 - z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} \cdot [1] \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha \xi + \gamma \eta + e^{h_1 + h_2} + e^{\frac{h_1}{2} + h_2}) \frac{z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} \cdot [5] + \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha \xi - \gamma \eta + e^{h_1 + h_2} - e^{\frac{h_1}{2} + h_2}) \frac{z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} \cdot [2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{24}} (\alpha\xi - \gamma\eta + e^{h_1+h_2} - e^{\frac{h_1}{2}+h_2}) - [3] - \\
& - \frac{1}{2} (\alpha\xi + \gamma\eta + e^{h_1+h_2} + e^{\frac{h_1}{2}+h_2}) \frac{1 - z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} \cdot [4] - \\
& - \frac{1}{\sqrt{12}} (\alpha\xi + \gamma\eta + e^{h_1+h_2} + e^{\frac{h_1}{2}+h_2}) \Big] \cdot [6].
\end{aligned}$$

Зная характеристическую функцию, нетрудно вычислить одновременные корреляционные функции $\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(t) \rangle$ и $\langle \hat{L}_+(t) \hat{L}_-(t) \rangle$, которые определяют

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(t) \rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \chi(\alpha, \gamma, \eta, \xi, h_1, h_2) \right)_{\alpha, \xi, h_1, h_2=0} = \quad (6.70) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 - z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [1] - \frac{1}{2} \frac{z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [2] - \frac{1}{\sqrt{24}} [3] - \\
& - \frac{1}{2} \frac{1 - z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [4] - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [5] - \frac{1}{\sqrt{12}} [6],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{L}_+(t) \hat{L}_-(t) \rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \chi(\alpha, \gamma, \eta, \xi, h_1, h_2) \right)_{\gamma, \eta, h_1, h_2=0} = \quad (6.71) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 - z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [1] + \frac{1}{2} \frac{z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [2] + \frac{1}{\sqrt{24}} [3] \\
& - \frac{1}{2} \frac{1 - z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [4] - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z_1^0 \bar{z}_1^0 - z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} [5] - \frac{1}{\sqrt{12}} [6].
\end{aligned}$$

Часто бывает достаточно знать равновесные значения корреляторов, тогда в последних выражениях надо положить $t \rightarrow \infty$, что приводит к простым выражениям

$$\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(t) \rangle_{eq} = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_1 + 1} \quad \text{и} \quad \langle \hat{L}_+(t) \hat{L}_-(t) \rangle_{eq} = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{N}_3}{\mathcal{N}_3 + 1}. \quad (6.72)$$

Важное значение в квантовой оптике и электронике имеют двухвременные корреляционные функции операторов рождения и уничтожения квантов поля и операторов перехода между уровнями атома или молекулы, т.к. они несут информацию как о механизмах взаимодействия атома и термостата, так и об их характеристиках. Фурье-преобразование этих функций определяет форму контура линии излучения (или поглощения), измеряемую в спектроскопических экспериментах с высокой степенью точности.

Вычисление разновременных корреляторов для операторов поля с использованием формализма уравнения Фоккера-Планка и глауберовских КС можно найти [85], с использованием интегралов по траекториям в [38] и функции от операторов атомной системы с использованием КС группы $SU(2)$ в [75].

Последовательное применение символов операторов для вычисления двухвременных корреляционных функций атомных операторов с применением КС групп $SU(2)$ и $SU(3)$ дано в работе [6], которой мы ниже следуем.

Пусть $\hat{\rho}_{aT}(t)$ – матрица плотности полной системы атом + термостат в представлении Шредингера, \hat{H} – гамильтониан, \hat{A} и \hat{B} – операторы атомной подсистемы.

Тогда двухвременная корреляционная функция

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(t + \tau) \hat{B}(t) \rangle &= Sp \left\{ \hat{A}(t + \tau) \hat{B}(t) \hat{\rho}_{aT}(t) \right\} = Sp \left\{ \hat{U}^{-1}(\tau) \hat{A} \hat{U}(\tau) \hat{B} \hat{\rho}_{aT}(t) \right\} \\ &= Sp \left\{ \hat{A} \hat{U}(\tau) \hat{B} \hat{\rho}_{aT}(t) \hat{U}^{-1}(\tau) \right\} = Sp_a \left\{ \hat{A} Sp_T \left\{ \hat{U}(\tau) \hat{B} \hat{\rho}_{aT}(t) \hat{U}^{-1}(\tau) \right\} \right\} \end{aligned}$$

где $\hat{U}(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \tau}$, и $Sp_a \{ \dots \}$, $Sp_T \{ \dots \}$ означают операцию взятия следа по переменным, соответственно, атомной подсистемы и системы термостата. В [?] показано, что выражение $Sp_T \left\{ \hat{U}(\tau) \hat{B} \hat{\rho}_{aT}(t) \hat{U}^{-1}(\tau) \right\}$ может быть преобразовано к виду $e^{\hat{L} \tau} \hat{B} \hat{\rho}(t)$, где \hat{L} – оператор соответствующего уравнения Фоккера-Планка $\frac{\partial P}{\partial \tau} = \hat{L} P$, записанный для P – символа редуцированной матрицы плотности

$$\hat{\rho}(t) = Sp_T \hat{\rho}_{aT}(t) \equiv \hat{\rho}_a(t).$$

Используя диагональное представление для матрицы плотности и общий вид решения УФП в виде (2.17), получаем

$$\langle \hat{A}(t + \tau) \hat{B}(t) \rangle = \int \int_{\mathcal{X}} d\mu(z) d\mu(z') \langle z | \hat{A}(t) | z \rangle \mathcal{K}(z, \bar{z}, t + \tau | z', \bar{z}', t) \mathcal{P}_{\hat{B} \hat{\rho}(t)}(z', \bar{z}', t), \quad (6.73)$$

здесь $\mathcal{P}_{\hat{B} \hat{\rho}(t)}(z', \bar{z}', t)$ обозначает P – символ произведения операторов $\hat{B} \hat{\rho}(t)$ в момент времени t .

В представлении взаимодействия и с учетом изменения начала отсчета времени, двухвременная корреляционная функция принимает вид

$$\langle \hat{A}(t) \hat{B}(0) \rangle = \int \int_{\mathcal{X}} d\mu(z, \bar{z}) d\mu(z', \bar{z}') \langle z | \hat{A}^0 | z \rangle \mathcal{K}(z, \bar{z}, t | z', \bar{z}', 0) \mathcal{P}_{\hat{B} \hat{\rho}(0)}(z', \bar{z}', 0), \quad (6.74)$$

где $\hat{A}^0(t) = \hat{U}_0^{-1}(t) \hat{A} \hat{U}_0(t)$, $\hat{U}_0(t)$ – оператор эволюции свободной атомной подсистемы. $\mathcal{P}_{\hat{B} \hat{\rho}(0)}(z', \bar{z}', 0)$ можно найти, если подействовать оператором \hat{B} на начальную матрицу плотности $\hat{\rho}(0)$, записанную в диагональном представлении

$$\hat{B} \hat{\rho}(0) = \int \mathcal{P}(z', \bar{z}', 0) \hat{B} | z' \rangle \langle z' | d\mu(z').$$

Учитывая действие оператора \hat{B} на $| z' \rangle \langle z' |$, которое можно записать в виде

$$\hat{B} | z' \rangle \langle z' | = [b(z', \bar{z}') - B(\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}'})] | z' \rangle \langle z' |$$

где $b(z', \bar{z}')$ — алгебраическая функция переменных z', \bar{z}' и $B(\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}'})$ — дифференциальный оператор, в который $\frac{\partial}{\partial z'}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}'}$ входят линейно (для интересующих нас корреляционных функций и операторных алгебр динамических групп), интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{\rho}(0) &= \int [b(z', \bar{z}') - B(\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}'})] \mathcal{P}(z', \bar{z}', 0) |z' \rangle \langle z'| d\mu(z') = \\ &= \int \mathcal{P}_{\hat{B}\hat{\rho}(0)}(z', \bar{z}', 0) |z' \rangle \langle z'| d\mu(z'). \end{aligned}$$

С учетом указанных выше допущений, искомое выражение будет иметь вид

$$\mathcal{P}_{\hat{B}\hat{\rho}(0)}(z', \bar{z}', 0) = [b(z', \bar{z}') - B(\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}'})] \mathcal{P}(z', \bar{z}', 0). \quad (6.75)$$

Вычислим разновременные корреляционные функции операторов перехода изолированного трехуровневого V -атома с неэквидистантным спектром и по ним рассчитаем формы контуров линий излучения.

Пусть атом в момент времени $t = 0$ находится в когерентном состоянии $|z_1^0, z_2^0\rangle$ и $\hat{\rho}(0) = |z_1^0 z_2^0\rangle \langle z_1^0 z_2^0|$. В этом случае P -символ начальной матрицы плотности, учитывая (2.41), (2.44) и (2.46), можно записать в виде

$$\mathcal{P}(z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2, 0) = \sum_{n=0}^1 \sum_{|m_1+m_2|=n} Y_{nm_1m_2}(z'_1, z'_2) \bar{Y}_{nm_1m_2}(z_1^0, z_2^0). \quad (6.76)$$

Непосредственное интегрирование показывает, что (??) обладает важным, аналогичным δ -функции, свойством:

$$\int_x \frac{dz'_1 \bar{d}z'_1 dz'_2 \bar{d}z'_2}{1 + z'_1 \bar{z}'_1 + z'_2 \bar{z}'_2} \Psi(z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2) \mathcal{P}(z'_1, \bar{z}'_1, z'_2, \bar{z}'_2, 0) = \Psi(z_1^0, \bar{z}_1^0, z_2^0, \bar{z}_2^0).$$

Используя формулы (6.56), (??), (6.75), (6.76) и значение выражения

$$\langle z_1 z_2 | e^{i(\omega_0 \hat{H}_1 + \Omega_0 \hat{H}_2)t} \hat{J}_+ e^{-i(\omega_0 \hat{H}_1 + \Omega_0 \hat{H}_2)t} | z_1 z_2 \rangle = e^{i(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0)t} \frac{\bar{z}'_2}{1 + z'_1 \bar{z}'_1 + z'_2 \bar{z}'_2}$$

по (2.58) можно найти корреляционную функцию

$$\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle = e^{i(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0)t} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{1 - 2z_2^0 \bar{z}_2^0}{1 + z_1^0 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} \right) e^{-(\delta_1 + \delta_3 + \eta_1)t}. \quad (6.77)$$

Аналогично находится корреляционная функция

$$\langle \hat{L}_+(t) \hat{L}_-(0) \rangle = e^{i(\omega_0 + \Omega_0)t} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{1 - 2z_1^0 \bar{z}_1^0}{1 + z_1 \bar{z}_1^0 + z_2^0 \bar{z}_2^0} \right) e^{-(\delta_1 + \delta_3 + \eta_3)t}. \quad (6.78)$$

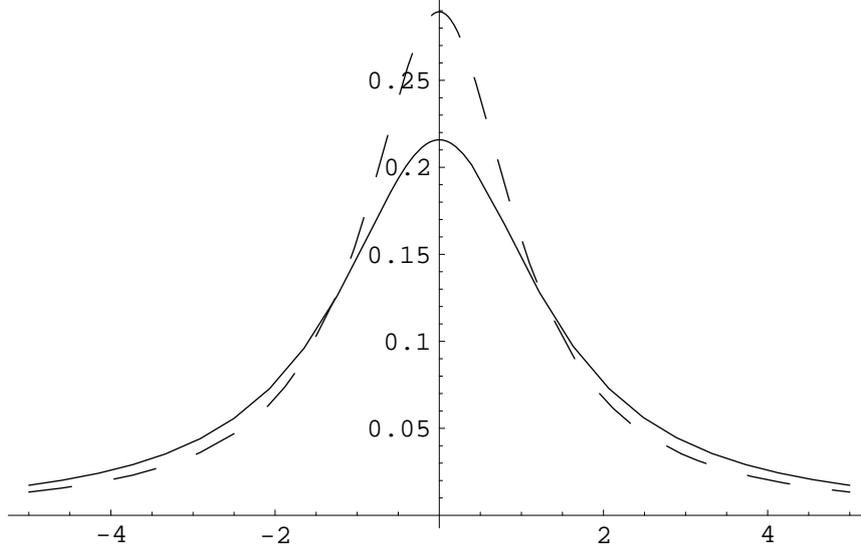


Рис. 6.3. Контур линии излучения спонтанной релаксации трехуровневого V- атома на переходе $1 \leftrightarrow 2$. $\gamma_1/(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0) = 0.1$, $\gamma_3/(\frac{\omega_0}{2} + \Omega_0) = 0.5$, $\mathcal{N}_1 = 1$, $\mathcal{N}_3 = 1.5$. Пунктирной линии соответствует контур линии двухуровневого атома при тех же условиях.

Выражения (6.77) и (6.78) определяют форму контуров линий излучения на соответствующих переходах

$$g_{12}(\omega) = Re \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{\delta_1 + \eta_1 + \delta_3}{(\omega - \omega_0 - \Omega_0)^2 + (\delta_1 + \eta_1 + \delta_3)^2}, \quad (6.79)$$

$$g_{13}(\omega) = Re \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \hat{L}_+(t) \hat{L}_-(0) \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{\delta_3 + \eta_3 + \delta_1}{(\omega - \omega_0/2 - \Omega_0)^2 + (\delta_3 + \eta_3 + \delta_1)^2}. \quad (6.80)$$

Формулы (6.82) и (6.80) показывают, что форма контура линии излучения в трехуровневом атоме остается лоренцевой. Однако, по сравнению с линией излучения двухуровневого атома (на том же переходе без учета третьего уровня) линии перехода трехуровневого атома уширены, за счет возмущения уровня "1" смежным переходом $1 \rightleftharpoons 3$. В этом проявляется ограниченность модели двухуровневого атома. Величина этого уширения равна $\delta_3 = \frac{\gamma_3}{2} \mathcal{N}_3$ и зависит от константы взаимодействия атома с термостатом $\gamma_3 = 2\pi |f_3|^2 g(\omega_j)|_{\omega_j=\omega_0+\Omega_0}$ и характеристик термостата (числа фотонов \mathcal{N}_3) на переходе $1 \rightleftharpoons 3$. Величина этого дополнительного уширения зависит от температуры термостата. Это отчетливо проявляется в том, что (6.82) и (6.80) при температуре термостата $T = 0$ приводятся к виду

$$g_{12}(\omega) = \frac{\frac{\gamma_1}{2}}{(\omega - \omega_0/2 - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2}, \quad (6.81)$$

$$g_{13}(\omega) = \frac{\frac{\gamma_3}{2}}{(\omega - \omega_0/2 - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_3}{2}\right)^2}, \quad (6.82)$$

Краткие выводы. Исследована релаксация ансамбля N двухуровневых атомов в термостате (в том числе и с учетом так называемых "сжатых" флуктуаций), для которой получено операторное кинетическое уравнение. Методом КС это уравнение приводится к уравнению Фоккера-Планка, для которого, в случае изолированного атома, найдено точное решение. Получены формулы, с использованием символов операторов, удобные для вычисления двухвременных корреляционных функций на основе решения УФП. При учете сжатых флуктуаций термостата вычислен контур линии излучения изолированного атома, который является суммой двух лоренцевых контуров разной ширины, зависящих от параметра "сжатия". Показано, что отношение ширины линии излучения атома в "сжатом" термостате к ширине линии излучения того же атома в обычном термостате меньше единицы, уменьшается с ростом параметра "сжатия" и, что особенно интересно, не зависит от температуры термостата. Рассмотрена также релаксация ансамбля трехуровневых атомов с неэквидистантным спектром в термостате при $T \neq 0$ и выведено соответствующее УФП. Найдено его точное решение для случая изолированного V — атома. Показано, что контур линии излучения является лоренцевым и вклад в ее ширину дает также и константа затухания смежного перехода.

Глава 7

Двухуровневая система во внешних стохастических полях

7.1 Уравнение Фоккера-Планка

В оптике и физике лазеров большое значение имеют процессы взаимодействия динамической системы с внешним стохастическим полем. Исследование отклика двухуровневой системы на случайное поле рассматривалось в [79] как возможность создания "шумовой" оптической спектроскопии. Например, по измерениям корреляционных функций двухуровневой системы, возбужденной стационарным шумом, определится время поперечной релаксации T_2 .

В [72] было получено кинетическое уравнение для описания релаксации гармонического осциллятора при наличии внешней классической силы, а в [73] развиты методы его решений. Заметим, что это же уравнение может описывать релаксацию гармонического осциллятора и в том случае, когда внешнее поле имеет случайный характер. (Здесь мы не будем касаться большого количества работ и различных подходов, связанных с броуновским движением квантового осциллятора.)

Во многих вопросах фундаментальной спектроскопии центральной является задача учета влияния характера взаимодействия атомов при соударении на форму и ширину спектральных линий. Это приводит к рассмотрению динамики процесса релаксации квантовой системы, взаимодействующей одновременно с термостатом и случайным полем.

Такая задача рассматривалась в [80] методом неравновесной матрицы плотности, где были получены уравнения для элементов этой матрицы. Во взаимодействии динамической системы с термостатом выделялись продольная и поперечная части взаимодействия, причем точный учет поперечного взаимодействия сводился к формальной замене его на взаимодействие динамической системы со стационарным случайным полем.

Развивая общий подход к релаксации квантовых систем, основанный на

УФП, опишем кинетику процесса релаксации. Рассмотрим такую ситуацию, когда динамическая система – двухуровневый атом, процесс релаксации которого описывается взаимодействием, например, диполь-дипольным образом с атомами "того же" или "другого" сорта. Таким образом, изучаемый атом будет находиться в поле, создаваемом всеми другими атомами. Величина этого поля зависит от взаимной ориентации дипольного момента атома, дипольных моментов остальных атомов и расстояний между ними. Случайность этих параметров будет порождать стохастичность поля. Решение задачи для конкретной реализации параметров, определяющих это стохастическое поле практически не выполнимо, но в большинстве задач оптики и спектроскопии интересуются усредненным за время регистрации величинами. Поэтому, естественно, при вычислении наблюдаемых величин, таких, как форма контура линии излучения, вероятности состояния, вместо конкретных реализаций переходить к статистическим средним по всему ансамблю возможных реализаций.

Будем описывать стохастическое поле как классическое, тогда задача о релаксации атома в фотонном термостате, с учетом процессов столкновения с другими атомами, математически эквивалентна задаче о релаксации атома во внешнем классическом стохастическом поле [81].

Взаимодействие двухуровневого атома со стохастическим полем зададим в следующем виде

$$\hat{H}_{st} = \hbar \Omega(t) \hat{J}_3 + \hbar \left(\xi(t) \hat{J}_+ + \bar{\xi}(t) \hat{J}_- \right), \quad (7.1)$$

где $\Omega(t)$ – определяет случайный сдвиг уровней атома, а $\xi(t)$, $\bar{\xi}(t)$ – случайные функции, пропорциональные интенсивности внешнего стохастического поля и определяющие переходы между уровнями. Первый член в этом равенстве описывает процессы, приводящие к поперечной релаксации, а два последних, описывающих переходы между уровнями атома, вызываемые стохастическим полем, описывают процессы, приводящие к продольной релаксации.

Гамильтониан такой системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{st} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{st}, \quad (7.2)$$

где гамильтонианы свободного атома \hat{H}_A , термостата \hat{H}_B и оператора взаимодействия между атомом и термостатом \hat{H}_{int} определяются, соответственно, выражениями (2.2), (2.3) и (2.4) при условии $N = 1$.

Методами, изложенными в главе 6, получим операторное кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{V}_{st}(t), \hat{\rho} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{2} \left[(\langle \nu \rangle + 1) (2 \hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \right. \\
& \left. + \langle \nu \rangle (2 \hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+) \right]. \tag{7.3}
\end{aligned}$$

Здесь $\widehat{V}_{st}(t) = \left\{ \Omega(t) \widehat{J}_0 + \xi(t) e^{i\omega_0 t} \widehat{J}_+ + \bar{\xi}(t) e^{-i\omega_0 t} \widehat{J}_- \right\}$ – оператор взаимодействия атома с внешним стохастическим полем.

Отметим, что первый член в правой части (7.3) учитывает это взаимодействие точно.

УФП для функции $f(z, \bar{z}; t)$ имеет следующий вид ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} = & i \left[\Omega(t) \left(\frac{\partial}{\partial z} z - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) + \xi(t) e^{i\omega_0 t} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 \right) - \bar{\xi}(t) e^{-i\omega_0 t} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z} z^2 \right) \right] f + \\
& + \eta \left[\frac{\partial}{\partial z} (2jz + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + z^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (2j\bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2) \right] f + \\
& + \delta \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2jz \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2j\bar{z} \right) \right] f. \tag{7.4}
\end{aligned}$$

7.2 Пропагатор уравнения Фоккера - Планка. Метод теории возмущений

Для вычисления наблюдаемых необходимо знать пропагатор уравнения (7.4). Для этого, как и ранее, воспользуемся представлением решения в виде разложения по полной системе ортонормированных сферических функций на однородном пространстве $SU(2)/U(1) \approx S_2$, которое является пространством состояний изучаемой динамической системы. Ограничимся случаем двухуровневой системы, тогда $j = \frac{1}{2}$ и пропагатор будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0; 0) = & F_{00}(t) Y_{00}(z \bar{z}) + F_{1-1}(t) Y_{1-1}(z \bar{z}) + \\
& F_{10}(t) Y_{10}(z \bar{z}) + F_{11}(t) Y_{11}(z \bar{z}), \tag{7.5}
\end{aligned}$$

и коэффициенты F_{lm} будут удовлетворять следующей системе четырех уравнений первого порядка

$$\left\{ \begin{aligned}
& \dot{F}_{00}(t) = 0, \\
& \dot{F}_{1-1}(t) = - [(\eta + \delta) - i\Omega(t)] F_{1-1}(t) + i\sqrt{2} \bar{\xi}(t) e^{-i\omega_0 t} F_{10}(t), \\
& \dot{F}_{10}(t) = 2\sqrt{3}(\eta - \delta) F_{00}(t) - 2(\eta + \delta) F_{10}(t) + i\sqrt{2} \xi(t) e^{i\omega_0 t} F_{1-1}(t) + \\
& \quad i\sqrt{2} \bar{\xi}(t) e^{-i\omega_0 t} F_{11}(t), \\
& \dot{F}_{11}(t) = - [(\eta + \delta) + i\Omega(t)] F_{11}(t) + i\sqrt{2} \xi(t) e^{i\omega_0 t} F_{10}(t).
\end{aligned} \right. \tag{7.6}$$

Решение этой системы находим, применяя теорию возмущений по полю $\xi(t)$ с точностью до второго порядка малости, а поле $\Omega(t)$ учитывая точно. Обозначим вектор-столбец из неизвестных функций

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_{00}(t) \\ F_{1-1}(t) \\ F_{10}(t) \\ F_{11}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

и записывая уравнения (7.6) в виде

$$\dot{F} = \widehat{E}_0 F + \widehat{W} \bar{F}, \quad (7.8)$$

а неизвестные функции F_{lm} будем искать в виде

$$F_{lm}(t) = F_{lm}^{(0)}(t) + \lambda F_{lm}^{(1)}(t) + \lambda^2 F_{lm}^{(2)}(t) + \dots, \quad (7.9)$$

где $l, m = 1, 2$ и $\lambda \leq 1$ (в окончательном варианте принимается, что $\lambda = 1$).

Невозмущенный оператор системы уравнений (7.6) запишется в виде

$$\widehat{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\eta + \delta) + i\Omega(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(\eta + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\eta + \delta) - i\Omega(t) \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

а оператор возмущения

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2}\bar{\xi}(t)e^{-i\omega_0 t} & 0 \\ 2\sqrt{3}(\eta - \delta) & i\sqrt{2}\xi(t)e^{i\omega_0 t} & 0 & i\sqrt{2}\bar{\xi}(t)e^{-i\omega_0 t} \\ 0 & 0 & i\sqrt{2}\xi(t)e^{i\omega_0 t} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Выражение для $F(t)$ с учетом (7.9) будет иметь вид

$$F(t) = F^{(0)}(t) + F^{(1)}(t) + F^{(2)}(t) + \dots, \quad (7.12)$$

"невозмущенное" уравнение и уравнения для поправок (учитываем только 2 порядок) следующие

$$\dot{F}^{(0)} = \widehat{E}_0 F^{(0)}, \dot{F}^{(1)} = \widehat{E}_0 F^{(1)} + \widehat{W} \bar{F}^{(0)}, \dot{F}^{(2)} = \widehat{E}_0 F^{(2)} + \widehat{W} \bar{F}^{(1)}. \quad (7.13)$$

"Невозмущенные" решения находятся тривиально

$$\begin{aligned} F_{00}^{(0)}(t) &= F_{00}(0), \\ F_{1-1}^{(0)}(t) &= e^{-(\eta+\delta)t + i \int_0^t \Omega(t_1) dt_1} F_{1-1}^{(0)}, \\ F_{10}^{(0)}(t) &= e^{-2(\eta+\delta)t} F_{10}^{(0)}, \\ F_{11}^{(0)}(t) &= e^{-(\eta+\delta)t - i \int_0^t \Omega(t_1) dt_1} F_{11}^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Система уравнений для поправок первого порядка:

$$\begin{aligned}
\dot{F}_{00}^{(1)}(t) &= 0, \\
\dot{F}_{1-1}^{(1)}(t) &= [-(\eta + \delta)t + i\Omega(t)] F_{1-1}^{(1)} + i\sqrt{2}\bar{\xi}(t)e^{-i\omega_0 t} F_{10}^{(0)}, \\
\dot{F}_{10}^{(1)}(t) &= -2(\eta + \delta)F_{10}^{(1)} + 2\sqrt{3}(\eta - \delta)F_{00}^{(0)} + i\sqrt{2}\xi(t)e^{i\omega_0 t} F_{1-1}^{(0)} + \\
&+ i\sqrt{2}\bar{\xi}(t)e^{-i\omega_0 t} F_{11}^{(0)}, \\
\dot{F}_{11}^{(1)}(t) &= [-(\eta + \delta)t - i\Omega(t)] F_{11}^{(1)} + i\sqrt{2}\xi(t)e^{i\omega_0 t} F_{10}^{(0)}.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Согласно (7.13), такая же система уравнений будет и для поправок второго порядка, если произвести замену $F^{(1)} \rightarrow F^{(2)}$ и $F^{(0)} \rightarrow F^{(1)}$.

Приведем явный вид решений для поправок

$$\begin{aligned}
F_{00}^{(1)}(t) &= F_{00}^{(1)}(0) = 0, F_{1-1}^{(1)}(t) = i\sqrt{2}F_{10}(0)e^{-(\eta+\delta)t+i\int_0^t \Omega(\tau)d\tau} \times \\
&\times \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{-(\eta+\delta)t_1 - i\omega_0 t_1 - i\int_0^{t_1} \Omega(\tau)d\tau}, \\
F_{11}^{(1)}(t) &= i\sqrt{2}F_{10}(0)e^{-(\eta+\delta)t - i\int_0^t \Omega(\tau)d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{-(\eta+\delta)t_1 + i\omega_0 t_1 + i\int_0^{t_1} \Omega(\tau)d\tau}, \\
F_{10}^{(1)}(t) &= \sqrt{3} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} F_{00}^{(0)} \left(1 - e^{-2(\eta+\delta)t}\right) + \\
&+ i\sqrt{2}F_{1-1}(0)e^{-2(\eta+\delta)t} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{(\eta+\delta)t_1 + i\omega_0 t_1 + i\int_0^{t_1} \Omega(\tau)d\tau} + \\
&+ i\sqrt{2}F_{11}(0)e^{-2(\eta+\delta)t} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{(\eta+\delta)t_1 - i\omega_0 t_1 - i\int_0^{t_1} \Omega(\tau)d\tau}, \\
F_{00}^{(2)}(t) &= 0, \\
F_{1-1}^{(2)}(t) &= i\sqrt{6} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} F_{00}^{(0)} e^{-(\eta+\delta)t + i\int_0^t \Omega(\tau)d\tau} \times \\
&\times \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) (1 - e^{-2(\eta+\delta)t_1}) e^{-i\omega_0 t_1 + (\eta+\delta)t_1 - i\int_0^{t_1} \Omega(\tau)d\tau} - \\
&- 2F_{1-1}(0) e^{-(\eta+\delta)t + i\int_0^t \Omega(\tau)d\tau} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{-i\omega_0 t_1 - (\eta+\delta)t_1 - i\int_0^{t_1} \Omega(\tau)d\tau} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_2) e^{i\omega_0 t_2 + (\eta + \delta)t_2 + i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& -2F_{11}(0) e^{-(\eta + \delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{-i\omega_0 t_1 - (\eta + \delta)t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_2) e^{-i\omega_0(t_2) + (\eta + \delta)t_2 - i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau}, \\
F_{11}^{(2)}(t) &= i\sqrt{6} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} F_{00}(0) e^{-(\eta + \delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^t dt_1 \xi(t_1) (1 - e^{-2(\eta + \delta)t_1}) e^{i\omega_0 t_1 + (\eta + \delta)t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& -2F_{1-1}(0) e^{-(\eta + \delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{i\omega_0 t_1 - (\eta + \delta)t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_2) e^{i\omega_0(t_2) + (\eta + \delta)t_2 + i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& -2F_{11}(0) e^{-(\eta + \delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{i\omega_0 t_1 - (\eta + \delta)t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_2) e^{-i\omega_0 t_2 + (\eta + \delta)t_2 - i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau}, \\
F_{10}^{(2)}(t) &= -2F_{10}(0) e^{-2(\eta + \delta)t} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{i\omega_0(t_1) + (\eta + \delta)t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_2) e^{-i\omega_0 t_2 - (\eta + \delta)t_2 - i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& -2F_{10}(0) e^{-2(\eta + \delta)t} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{-i\omega_0 t_1 + (\eta + \delta)t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_2) e^{i\omega_0 t_2 - (\eta + \delta)t_2 + i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau}.$$

Явный вид пропагатора для УФП (7.4), полученный по теории возмущений, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0; 0) &= \frac{1}{\pi} + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta + \delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} + \quad (7.16) \\ &+ i \frac{6}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta + \delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{-(\eta + \delta)t_1 - i\omega_0 t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} + \\ &+ i \frac{6}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} e^{-(\eta + \delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) (1 - e^{-2(\eta + \delta)t_1}) e^{(\eta + \delta)t_1 - i\omega_0 t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} - \\ &- \frac{12}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta + \delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{-i\omega_0 t_1 - (\eta + \delta)t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\ &\quad \times \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_2) e^{i\omega_0 t_2 + (\eta + \delta)t_2 + i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} + \\ &+ \frac{12}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta + \delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{-i\omega_0 t_1 - (\eta + \delta)t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\ &\quad \times \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_2) e^{-i\omega_0 t_2 + (\eta + \delta)t_2 - i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} + \\ &+ \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta + \delta)t} + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta + \delta)t}\right) + \\ &+ i \frac{6}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta + \delta)t} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{(\eta + \delta)t_1 + i\omega_0 t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} - \\ &- i \frac{6}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta + \delta)t} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{(\eta + \delta)t_1 - i\omega_0 t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} - \\ &- \frac{6}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta + \delta)t} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{(\eta + \delta)t_1 + i\omega_0 t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_2) e^{-(\eta+\delta)t_2 - i\omega_0 t_2 - i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& - \frac{6}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} \int_0^t dt_1 \bar{\xi}(t_1) e^{(\eta+\delta)t_1 - i\omega_0 t_1 - i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_2) e^{-(\eta+\delta)t_2 + i\omega_0 t_2 + i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} + \\
& + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} - \\
& - i \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{-(\eta+\delta)t_1 + i\omega_0 t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& - i \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} e^{-(\eta+\delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) (1 - e^{-2(\eta+\delta)t_1}) e^{(\eta+\delta)t_1 + i\omega_0 t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} + \\
& + \frac{12}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{i\omega_0 t_1 - (\eta+\delta)t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_2) e^{i\omega_0 t_2 + (\eta+\delta)t_2 + i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau} - \\
& - \frac{12}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \int_0^t dt_1 \xi(t_1) e^{i\omega_0 t_1 - (\eta+\delta)t_1 + i \int_0^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \times \\
& \times \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_2) e^{-i\omega_0 t_2 + (\eta+\delta)t_2 - i \int_0^{t_2} \Omega(\tau) d\tau}.
\end{aligned}$$

7.3 Конкретные реализации стохастических процессов и вычисление наблюдаемых

Выражение для пропагатора (7.16) значительно упрощается при проведении конкретных вычислений. В разделе 5.1, указывалось, что для вычисления наблюдаемых достаточно знать не детальное поведение исследуемой системы, а статистические средние по ансамблю реализаций стохастических процессов.

В (7.1) рассматривалась только флуктуирующая часть случайной функции $\xi(t)$, $\bar{\xi}(t)$ и $\Omega(t)$, для которых средние по времени равны нулю:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \bar{\xi}(t) \rangle = 0, \quad \langle \Omega(t) \rangle = 0. \quad (7.17)$$

Будем предполагать, что процессы, описываемые этими функциями являются эргодическими и тогда, если обозначить символом $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ усреднение по реализациям стохастического процесса, будут выполняться условия

$$\begin{aligned} \langle\langle \xi(t) \rangle\rangle &= \langle\langle \bar{\xi}(t) \rangle\rangle = \langle \xi(t) \rangle = \langle \bar{\xi}(t) \rangle = 0, \\ \langle\langle \Omega(t) \rangle\rangle &= \langle \Omega(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

7.3.1 Оптический белый шум

Будем моделировать процесс воздействия других атомов на исследуемый как оптический белый шум. Это соответствует экспериментальной ситуации, когда взаимодействие между сталкивающимися атомами происходит только в момент столкновения, или моделированию потенциала взаимодействия в виде прямоугольного профиля. Статистика таких процессов известна и она описывается корреляционными функциями [79].

$$\langle\langle \Omega(t_1)\Omega(t_2) \rangle\rangle = 2 \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} \delta(t_1 - t_2), \quad (7.19)$$

$$\langle\langle \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2) \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2) \rangle\rangle = 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi} \delta(t_1 - t_2),$$

$$\langle\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\xi}(t_1)\bar{\xi}(t_2) \rangle\rangle = 0,$$

где $\sigma_\xi^2, \sigma_\Omega^2$ — дисперсии соответствующих процессов (интенсивность шума) и ν_Ω, ν_ξ — частоты внешних воздействий на исследуемую систему.

Такие процессы называют дельта-коррелированными. Усреднение в выражении для пропагатора (7.16) вклада поля $\Omega(t)$ с точностью до корреляторов второго порядка, дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
\langle\langle e^{\pm i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \rangle\rangle &= 1 + (\pm i) \int_0^t \langle\langle \Omega(t_1) \rangle\rangle dt_1 - \\
&\quad - \frac{(i)^2}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} \langle\langle \Omega(t_1)\Omega(t_2) \rangle\rangle dt_1 dt_2 + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} \langle\langle \Omega(t_1)\Omega(t_2) \rangle\rangle dt_1 dt_2 + \dots = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} \langle\langle \Omega(t_1)\Omega(t_2) \rangle\rangle dt_1 dt_2} \quad (7.20) \\
&= e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} 2 \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2} = e^{-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} t}
\end{aligned}$$

С учетом (7.19) и (7.20), усредненное по реализациям стохастических полей, выражение для пропагатора (7.16) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\langle\langle \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0; 0) \rangle\rangle &= \frac{1}{\pi} + \\
&\quad + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} t} + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} t} + \\
&\quad + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{\eta-\delta}{\eta+\delta} (1 - e^{-2(\eta+\delta)t}) - \quad (7.21) \\
&\quad - \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi} t \left[\frac{12}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} t} + \frac{12}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} t} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{12}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} \right].
\end{aligned}$$

Отметим, что выражение (7.21) уже не является решением уравнения (7.4), но оно "эффективно" для нахождения наблюдаемых в эксперименте величин. Выражение для двухвременного коррелятора в случае, если начальное состояние когерентное, имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle &= \quad (7.22) \\
&= e^{i\omega_0 t} \int \int d\mu(z, \bar{z}) d\mu(z', \bar{z}') \langle z | \hat{J}_+^0 | z' \rangle \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0, 0) \mathcal{P}_{\hat{J}_-, \hat{\rho}(0)}(z_0, \bar{z}_0) = \\
&= e^{i\omega_0 t} \left\{ \frac{z_0 \bar{z}_0}{1+z_0 \bar{z}_0} e^{-\left[(\eta+\delta) + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} \right] t} - 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi} t e^{-\left[(\eta+\delta) + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} \right] t} \right\}.
\end{aligned}$$

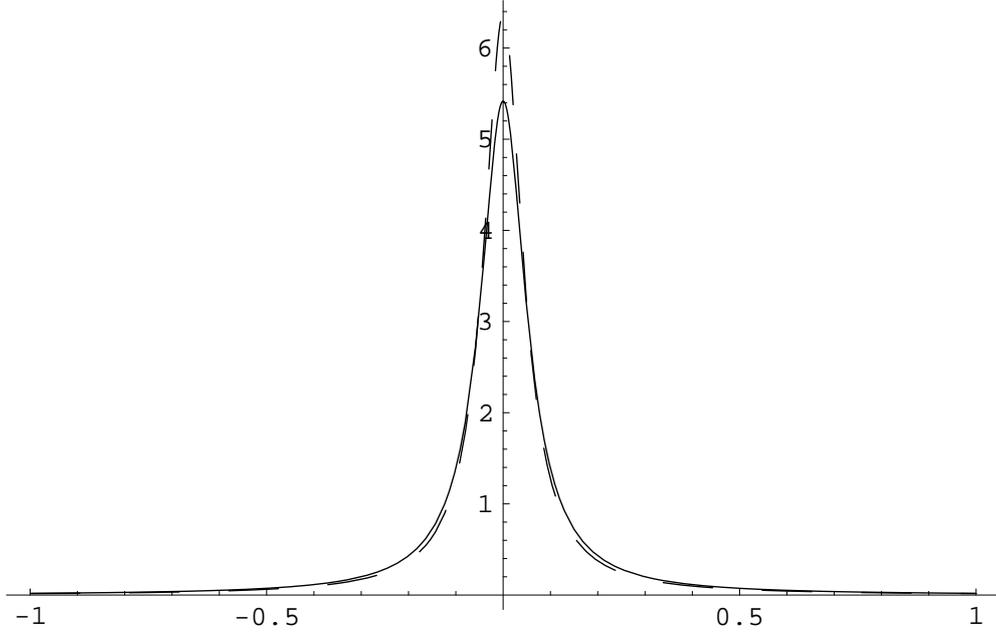


Рис. 7.1. Контур линии излучения двухуровневого атома, взаимодействующего с оптическим белым шумом, вычисленный по теории возмущений. $\sigma_{\Omega} = 0.01$, $\nu_{\Omega}/\omega_0 = 0.012$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 4.5$, $\sigma_{\xi} = 0.001$, $\nu_{\xi}/\omega_0 = 0.005$. Пунктирной линии соответствует контур линии излучения двухуровневой системы в том же термостате в отсутствие внешнего поля.

Форма контура линии излучения, определяемая коррелятором (7.22)

$$g(\omega) = \text{Re} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle \cong \quad (7.23)$$

$$\cong \frac{1}{\pi} \left[\frac{\eta + \delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\eta + \delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} \right)^2} + 2 \frac{\sigma_{\xi}^2}{\nu_{\xi}} \frac{(\omega - \omega_0)^2 - \left(\eta + \delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} \right)^2}{\left((\omega - \omega_0)^2 + \left(\eta + \delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} \right)^2 \right)^2} \right].$$

Вычисление вероятности обнаружить систему в состоянии $|a\rangle$ можно выполнить, используя диагональное представление матрицы плотности:

$$W_a(t) = \langle a | \hat{\rho}(t) | a \rangle = \int d\mu(z, \bar{z}) \langle a | z \rangle \langle z | a \rangle \mathcal{P}(z, \bar{z}; t) = \quad (7.24)$$

$$= \int \int d\mu(z, \bar{z}) d\mu(z', \bar{z}') |\langle z | a \rangle|^2 \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z', \bar{z}', 0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}')$$

$$= \int d\mu(z, \bar{z}) |\langle z | a \rangle|^2 \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0, 0),$$

для начального состояния $|z_0\rangle$.

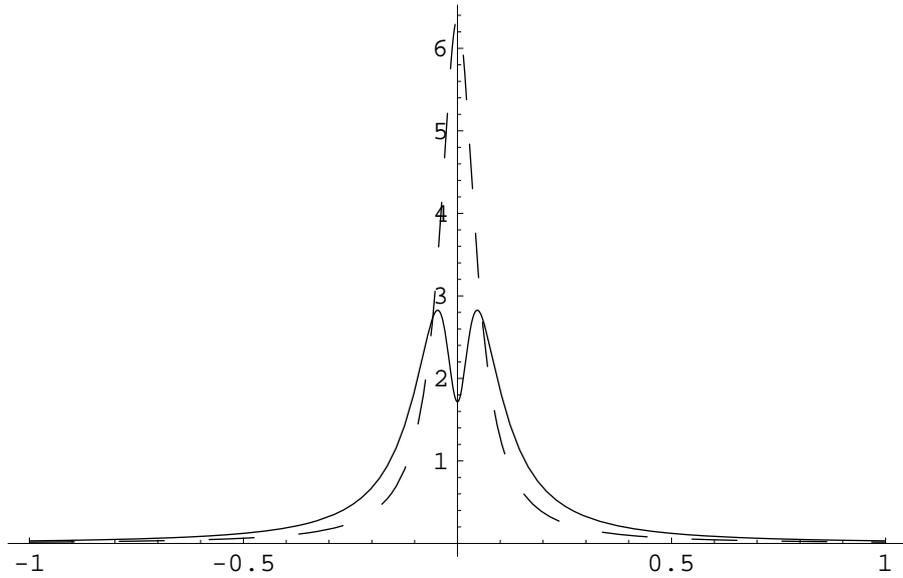


Рис. 7.2. Контур линии излучения двухуровневого атома, взаимодействующего с оптическим белым шумом, вычисленный по теории возмущений. $\sigma_{\Omega} = 0.01$, $\nu_{\Omega}/\omega_0 = 0.012$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 4.5$, $\sigma_{\xi} = 0.01$, $\nu_{\xi}/\omega_0 = 0.005$. Пунктирной линии соответствует контур линии излучения двухуровневой системы в том же термостате в отсутствие внешнего поля.

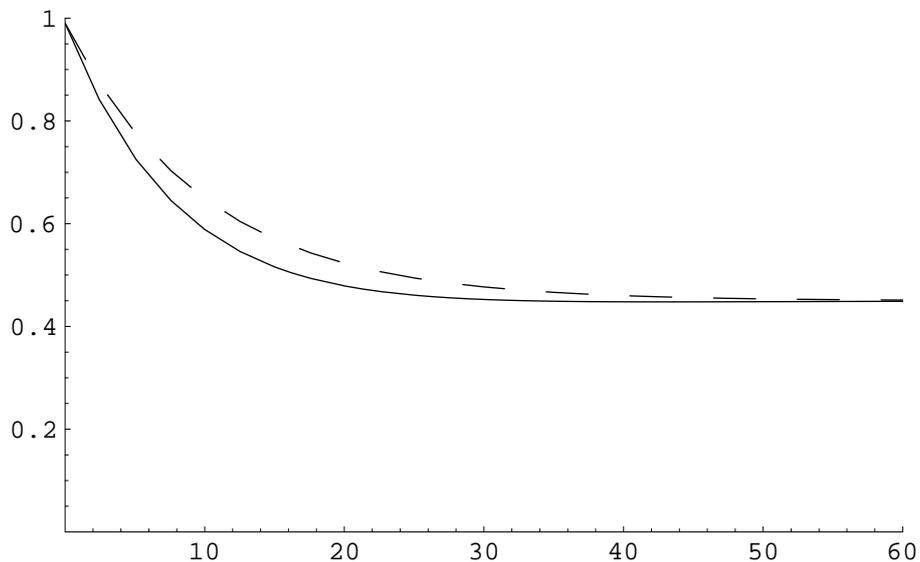


Рис. 7.3. Вероятность нахождения атома в верхнем состоянии при взаимодействии с оптическим белым шумом, вычисленная по теории возмущений. $\sigma_{\Omega} = 0.01$, $\nu_{\Omega}/\omega_0 = 0.012$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 4.5$, $\sigma_{\xi} = 0.01$, $\nu_{\xi}/\omega_0 = 0.005$. Пунктирной линии соответствует вероятность нахождения атома в верхнем состоянии в том же термостате в отсутствие внешнего поля.

В частности, вероятности обнаружения системы в верхнем и нижнем состояниях определяются

$$W_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} - \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} (1 - e^{-2(\eta+\delta)t}) + \quad (7.25)$$

$$+ 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t},$$

$$W_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} + \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} (1 - e^{-2(\eta+\delta)t}) - \quad (7.26)$$

$$- 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t}.$$

7.3.2 Процессы Кубо - Андерсона

Популярность моделирования воздействий окружающей среды на динамическую систему с помощью оптического белого шума, объясняется возможностью получения точных решений, что важно при анализе как результатов конкретных экспериментов, так и в общетеоретическом плане. Будем моделировать процесс взаимодействия динамической системы (атома) с другими атомами потенциалом взаимодействия, отличным от прямоугольного. Это соответствует процессам с конечным временем корреляции взаимодействия. Такие процессы относятся к так называемым процессам Кубо-Андерсона (в математике за ними закрепилось название процессов Орнштейна-Уленбека).

Корреляционные функции таких процессов имеют следующий вид:

$$\langle\langle \Omega(t)\Omega(t') \rangle\rangle = \sigma_\Omega^2 e^{-\nu_\Omega |t-t'|}, \quad (7.27)$$

$$\langle\langle \xi(t)\xi(t') \rangle\rangle = \sigma_\xi^2 e^{-\nu_\xi |t-t'|}. \quad (7.28)$$

Используя стандартную процедуру разложения в ряд, с обратным переходом к экспоненте, и ограничиваясь случаем слабых стохастических полей, получим выражение для средних по реализациям этих полей

$$\langle\langle e^{\pm i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \rangle\rangle = e^{-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} (t + \frac{1}{\nu_\Omega} e^{-\nu_\Omega t} - \frac{1}{\nu_\Omega})}. \quad (7.29)$$

Рассмотрим подробнее усреднение по реализациям более сложного члена пропагатора (7.16), например:

$$e^{-(\eta+\delta)t} \langle\langle e^{i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \rangle\rangle \int_0^t \int_0^{t_1} \langle\langle \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2) \rangle\rangle e^{-(\eta+\delta+i\omega_0)(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \times$$

$$\begin{aligned} & \times \ll e^{-i \int_{t_2}^{t_1} \Omega(\tau) d\tau} \gg = e^{-(\eta+\delta+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})t} e^{-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} e^{-\nu_\Omega t} + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} \int_0^t \int_0^{t_1} dt_1 dt_2 \sigma_\xi^2} \times \\ & \times \exp \left[-(\eta + \delta + \nu_\xi + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})(t_1 - t_2) - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega^2} e^{-\nu_\Omega(t_1-t_2)} - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega^2} - i\omega_0(t_1 - t_2) \right]. \end{aligned}$$

В случае слабого шума (σ_Ω достаточно мало) и достаточно частых столкновений ($\nu_\Omega, \nu_\xi \gg 1$), в последнем выражении пренебрежем членами порядка $\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega^2} \ll 1$. С учетом таких допущений для усредненного по реализациям стохастических полей пропагатора находим:

$$\begin{aligned} & \ll \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0; 0) \gg = \frac{1}{\pi} + \\ & + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}t} + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}t} + \\ & + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} + \frac{3}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{\eta-\delta}{\eta+\delta} (1-e^{-2(\eta+\delta)t}) - \quad (7.30) \\ & - \frac{12}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} \sigma_\xi^2 \left[\frac{te^{-(\eta+\delta+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})t}}{\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0} + \frac{e^{-(2(\eta+\delta)+\nu_\xi+2\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0)t}}{(\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0)^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{e^{-(\eta+\delta)t-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}t}}{(\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0)^2} \right] - \\ & - \frac{12}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0} \sigma_\xi^2 \left[\frac{te^{-(\eta+\delta+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})t}}{\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}-i\omega_0} + \frac{e^{-(2(\eta+\delta)+\nu_\xi+2\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}-i\omega_0)t}}{(\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}-i\omega_0)^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{e^{-(\eta+\delta)t-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}t}}{(\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}-i\omega_0)^2} \right] - \\ & - \frac{6}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} \sigma_\xi^2 \left[\frac{te^{-2(\eta+\delta)t}}{-(\eta+\delta-\nu_\xi-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})-i\omega_0} + \frac{e^{-(\eta+\delta+\nu_\xi+2\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}-i\omega_0)t}}{(\eta+\delta-\nu_\xi-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0)^2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{e^{-2(\eta+\delta)t}}{(\eta+\delta-\nu_\xi-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0)^2} \right] - \\ & - \frac{6}{\pi} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{1-z_0\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} \sigma_\xi^2 \left[\frac{te^{-2(\eta+\delta)t}}{-(\eta+\delta-\nu_\xi-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})+i\omega_0} + \frac{e^{-(\eta+\delta+\nu_\xi+2\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}+i\omega_0)t}}{(\eta+\delta-\nu_\xi-\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}-i\omega_0)^2} - \right. \end{aligned}$$

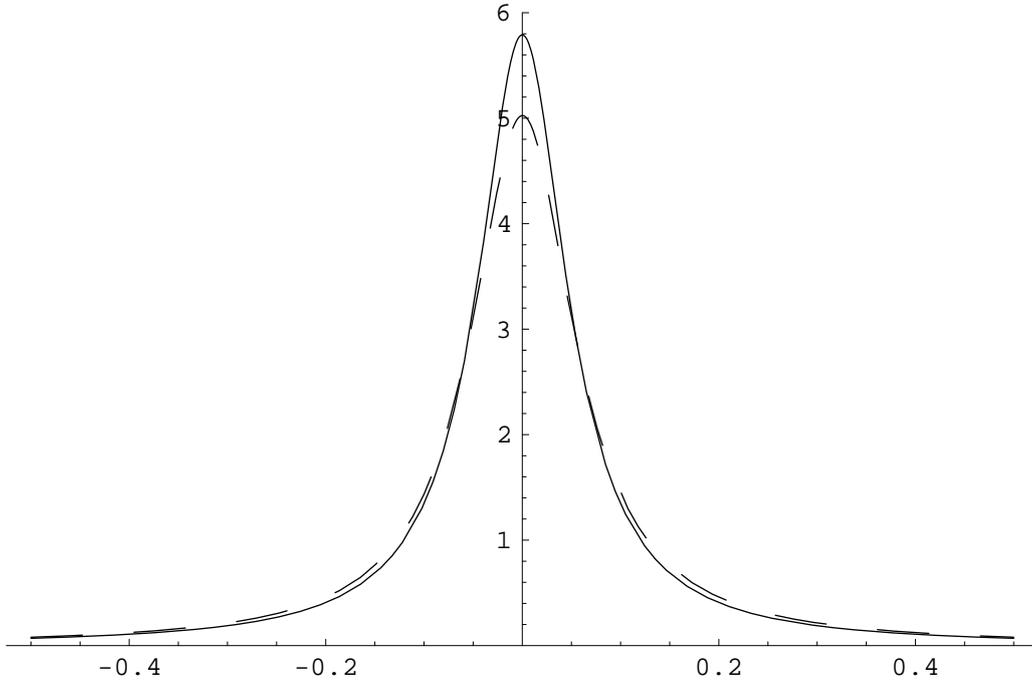


Рис. 7.4. Контур линии излучения двухуровневого атома для процесса Кубо - Андерсона. $\sigma_{\Omega} = 0.01$, $\nu_{\Omega}/\omega_0 = 0.012$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 4.5$, $\sigma_{\xi} = 0.01$, $\nu_{\xi}/\omega_0 = 0.005$. Сплошной линии соответствует контур линии излучения двухуровневого атома в отсутствие внешнего поля.

$$\left. - \frac{e^{-2(\eta+\delta)t}}{(\eta + \delta - \nu_{\xi} - \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} - i\omega_0)^2} \right].$$

Если динамическая система находилась в чистом когерентном состоянии $|z_0\rangle$, которому соответствует $\hat{\rho}(0) = |z_0\rangle\langle z_0|$, то выражения для разновременных корреляторов, форма контура излучения и вероятности нахождения системы (двухуровневый атом) в верхнем и нижнем состоянии определяются следующими выражениями:

$$\langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle = \frac{z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{i\omega_0 t} \left\{ e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} t} - \right. \quad (7.31)$$

$$\left. - 2\sigma_{\xi}^2 \left[\frac{t e^{-(\eta+\delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}})t}}{\eta + \delta + \nu_{\xi} + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} + i\omega_0} + \frac{e^{-(2(\eta+\delta) + \nu_{\xi} + 2\frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} + i\omega_0)t}}{(\eta + \delta + \nu_{\xi} + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} + i\omega_0)^2} - \frac{e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} t}}{(\eta + \delta + \nu_{\xi} + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}} + i\omega_0)^2} \right] \right\}.$$

$$g(\omega) \cong \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\eta + \delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}}}{(\eta + \delta + \frac{\sigma_{\Omega}^2}{\nu_{\Omega}})^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \right. \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned}
& -2\sigma_\xi^2 \frac{(\eta + \delta + \nu_\xi + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})[(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 - (\omega - \omega_0)^2] - 2(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})\omega_0(\omega - \omega_0)}{[(\eta + \delta + \nu_\xi + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2][(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + (\omega - \omega_0)^2]} \\
& -2\sigma_\xi^2 \frac{(2(\eta + \delta) + \nu_\xi + 2\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})[(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} - \omega_0)^2 - 2(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})\omega\omega_0]}{[(\eta + \delta + \nu_\xi + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2][(2(\eta + \delta) + \nu_\xi + 2\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega^2]} + \\
& + 2\sigma_\xi^2 \frac{(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})[(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 - \omega_0^2] - 2(\eta + \delta + \nu_\xi + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})\omega_0(\omega - \omega_0)}{[(\eta + \delta + \nu_\xi + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2]^2[(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + (\omega - \omega_0)^2]} \Bigg\},
\end{aligned}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} - \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} (1 - e^{-2(\eta+\delta)t}) + \quad (7.33)$$

$$+ \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} \cdot 2\sigma_\xi^2 \left\{ - \frac{\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}}{(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2} t e^{-2(\eta+\delta)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{((\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 - \omega_0^2) \cos \omega_0 t + 2(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})\omega_0 \sin \omega_0 t}{((\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2)^2} e^{-(\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})t} - \right. \\
\left. - \frac{(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 - \omega_0^2}{(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2} e^{-2(\eta+\delta)t} \right\},$$

$$W_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} - \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} (1 - e^{-2(\eta+\delta)t}) - \quad (7.34)$$

$$- \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} \cdot 2\sigma_\xi^2 \left\{ - \frac{\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}}{(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2} t e^{-2(\eta+\delta)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{((\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 - \omega_0^2) \cos \omega_0 t + 2(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})\omega_0 \sin \omega_0 t}{((\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2)^2} e^{-(\eta+\delta+\nu_\xi+\frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})t} - \right. \\
\left. - \frac{(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 - \omega_0^2}{(\eta + \delta - \nu_\xi - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + \omega_0^2} e^{-2(\eta+\delta)t} \right\}.$$

7.4 Марковские дихотомические процессы. Метод дифференцирования статистических средних

В последнее время широко развивается подход к изучению динамических систем, находящихся под воздействием стохастических процессов на основе анализа формул дифференцирования статистических средних [82]. Эти формулы имеют простой вид для марковских дихотомических процессов. Такие

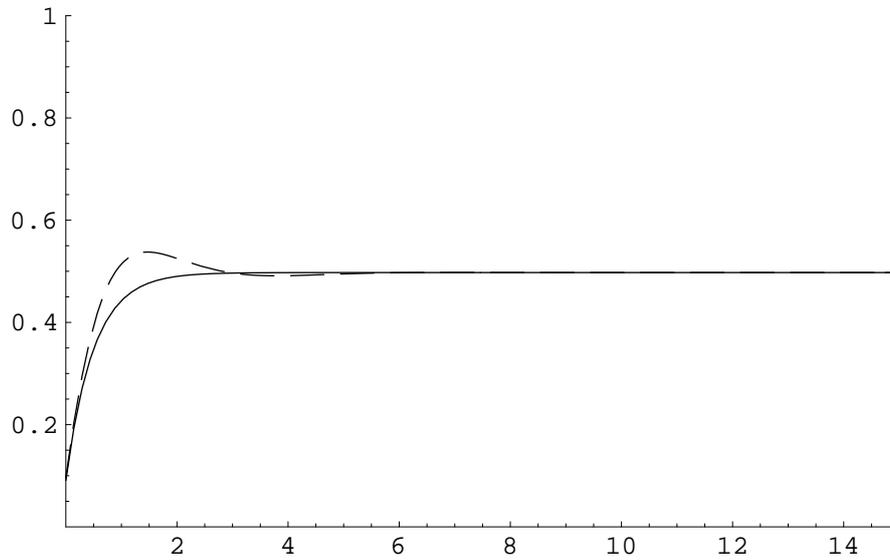


Рис. 7.5. Вероятность нахождения двухуровневого атома в верхнем состоянии для процессов Кубо - Андерсона. $|z_0|^2 = 1, \sigma_\Omega = 0.01, \nu_\Omega/\omega_0 = 0.012, \gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 4.5, \sigma_\xi = 0.1, \nu_\xi/\omega_0 = 0.005$. Сплошной линии соответствует вероятность нахождения атома в верхнем состоянии атома в отсутствие внешнего поля.

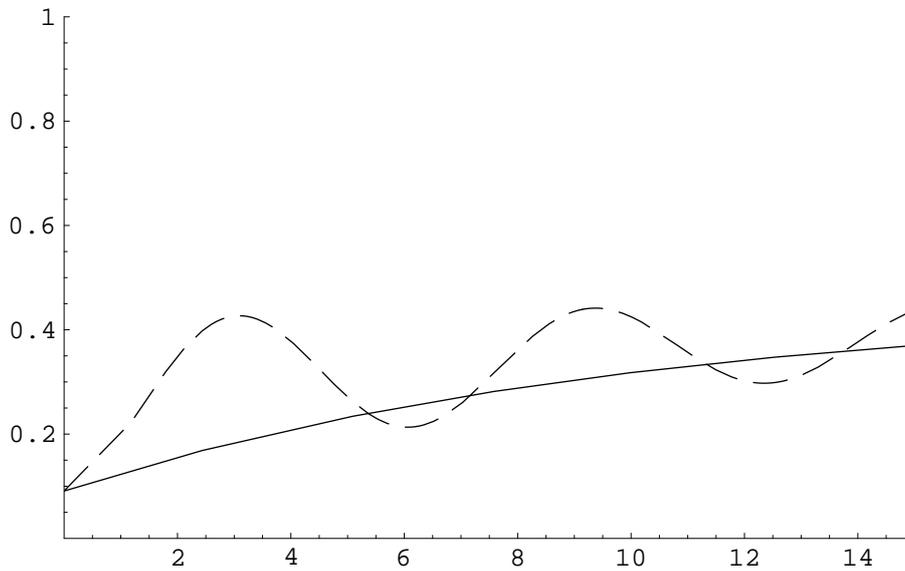


Рис. 7.6. Вероятность нахождения двухуровневого атома в верхнем состоянии для процессов Кубо - Андерсона. $|z_0|^2 = 1, \sigma_\Omega = 0.01, \nu_\Omega/\omega_0 = 0.012, \gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 4.5, \sigma_\xi = 0.5, \nu_\xi/\omega_0 = 0.005$. Сплошной линии соответствует вероятность нахождения атома в верхнем состоянии атома в отсутствие внешнего поля.

процессы представляют собой случайную функцию $\alpha(t)$, которая попеременно принимает значения a и $-a$, причем скачки от одного значения к другому происходят случайно и независимо со средней частотой ν . Состояния $\pm a$ считаются равновероятными.

Более общим классом процессов, включающим в себя дихотомические, являются процессы Кубо-Андерсона. Они представляют собой ступенчатые функции $\alpha(t)$, принимающие значения из некоторого множества a_1, a_2, \dots, a_n . Переходы от одного значения к другому случайны, независимы и распределены однородно по времени с плотностью ν , причем эта плотность ν не зависит от того, из какого состояния и в какое происходит скачок. В [80] на основе метода неравновесной матрицы плотности изучался процесс релаксации двухуровневого атома в термостате и внешнем стохастическом поле, которое рассматривалось как марковский дихотомический процесс.

Покажем эффективность применения УФП для описания релаксации в том случае, когда двухуровневый атом находится под воздействием марковского дихотомического процесса, применяя технику дифференцирования статистических средних.

Для этого перейдем в системе уравнений (7.6) для коэффициентов $F_{lm}(t)$ к средним по реализациям стохастического процесса, который будем считать дихотомическим. Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\langle\langle \dot{F}_{00}(t) \rangle\rangle &= 0, \\
\langle\langle \dot{F}_{1-1}(t) \rangle\rangle &= -(\eta + \delta) \langle\langle F_{1-1}(t) \rangle\rangle + \\
&\quad + i \langle\langle \Omega(t) F_{1-1}(t) \rangle\rangle + \\
&\quad + i\sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \langle\langle \bar{\xi}(t) F_{10}(t) \rangle\rangle, \\
\langle\langle \dot{F}_{10}(t) \rangle\rangle &= 2\sqrt{3}(\eta - \delta) \langle\langle F_{00}(t) \rangle\rangle - 2(\eta + \delta) \langle\langle F_{10}(t) \rangle\rangle + \\
&\quad + i\sqrt{2}e^{i\omega_0 t} \langle\langle \xi(t) F_{1-1}(t) \rangle\rangle + i\sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \langle\langle \bar{\xi}(t) F_{11}(t) \rangle\rangle, \\
\langle\langle \dot{F}_{11}(t) \rangle\rangle &= -(\eta + \delta) \langle\langle F_{11}(t) \rangle\rangle - i \langle\langle \Omega(t) F_{11}(t) \rangle\rangle + \quad (7.35) \\
&\quad + i\sqrt{2}e^{i\omega_0 t} \langle\langle \xi(t) F_{10}(t) \rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Центральной в этом подходе является проблема вычисления средних вида $\langle\langle \xi F \rangle\rangle, \langle\langle \Omega F \rangle\rangle$. Для марковских дихотомических процессов формулы дифференцирования статистических средних, применительно к рассматриваемой нами задаче имеют вид [82]

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \xi F \rangle\rangle = -\nu_\xi \langle\langle \xi F \rangle\rangle + \langle\langle \xi \dot{F} \rangle\rangle, \quad (7.36)$$

$$\frac{d}{dt} \langle\langle \Omega F \rangle\rangle = -\nu_\Omega \langle\langle \Omega F \rangle\rangle + \langle\langle \Omega \dot{F} \rangle\rangle. \quad (7.37)$$

Используя свойство марковских дихотомических процессов, для которых выполняются следующие соотношения для корреляционных функций

$$\langle\langle \xi \bar{\xi} F \rangle\rangle = \sigma_\xi^2 \langle\langle F \rangle\rangle, \quad (7.38)$$

$$\langle\langle \Omega^2 F \rangle\rangle = \sigma_\Omega^2 \langle\langle F \rangle\rangle \quad (7.39)$$

и, считая процессы Ω и ξ статистически независимыми, что дает дополнительные упрощающие условия

$$\langle\langle \Omega \xi F \rangle\rangle = \langle\langle \xi \xi F \rangle\rangle = \langle\langle \bar{\xi} \bar{\xi} \bar{F} \rangle\rangle = 0,$$

можно систему уравнений (7.35) дополнить уравнениями для членов, входящих в их правые части, и получить замкнутую систему линейных дифференциальных с зависящими от времени коэффициентами:

$$\begin{aligned} \langle\langle \dot{F}_{00} \rangle\rangle &= 0, \\ \langle\langle \dot{F}_{1-1} \rangle\rangle &= -(\eta + \delta) \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle + i \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \langle\langle \bar{\xi} F_{10} \rangle\rangle, \\ \langle\langle \dot{F}_{10}(t) \rangle\rangle &= 2\sqrt{3}(\eta - \delta) \langle\langle F_{00}(t) \rangle\rangle - 2(\eta + \delta) \langle\langle F_{10}(t) \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sqrt{2}e^{i\omega_0 t} \langle\langle \xi(t) F_{1-1}(t) \rangle\rangle + i\sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \langle\langle \bar{\xi}(t) F_{11}(t) \rangle\rangle, \\ \langle\langle \dot{F}_{11}(t) \rangle\rangle &= -(\eta + \delta) \langle\langle F_{11}(t) \rangle\rangle - i \langle\langle \Omega(t) F_{11}(t) \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sqrt{2}e^{i\omega_0 t} \langle\langle \xi(t) F_{10}(t) \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle &= -\nu_\Omega \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle - (\eta + \delta) \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sigma_\Omega^2 \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \Omega F_{11} \rangle\rangle &= -\nu_\Omega \langle\langle \Omega F_{11} \rangle\rangle - (\eta + \delta) \langle\langle \Omega F_{11} \rangle\rangle - \\ &\quad - i\sigma_\Omega^2 \langle\langle F_{11} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \xi F_{1-1} \rangle\rangle &= -\nu_\xi \langle\langle \xi F_{1-1} \rangle\rangle - (\eta + \delta) \langle\langle \xi F_{1-1} \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \sigma_\xi^2 \langle\langle F_{10} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \bar{\xi} F_{11} \rangle\rangle &= -\nu_\xi \langle\langle \bar{\xi} F_{1-1} \rangle\rangle - (\eta + \delta) \langle\langle \bar{\xi} F_{1-1} \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sqrt{2}e^{i\omega_0 t} \sigma_\xi^2 \langle\langle F_{10} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \xi F_{10} \rangle\rangle &= -\nu_\xi \langle\langle \xi F_{10} \rangle\rangle - 2(\eta + \delta) \langle\langle \xi F_{10} \rangle\rangle + \\ &\quad + i\sqrt{2}e^{-i\omega_0 t} \sigma_\xi^2 \langle\langle F_{11} \rangle\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\langle \bar{\xi} F_{10} \rangle\rangle = & -\nu_{\xi} \langle\langle \bar{\xi} F_{10} \rangle\rangle - 2(\eta + \delta) \langle\langle \bar{\xi} F_{10} \rangle\rangle + \\ & + i\sqrt{2}e^{i\omega_0 t} \sigma_{\xi}^2 \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Для решения этой системы в общем виде, также необходимо применять методы теории возмущений, но, если ограничиться только процессами, приводящими к случайному сдвигу уровней и не рассматривать процессы, приводящие к переходам между ними, система уравнений (7.40) упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle\langle F_{00} \rangle\rangle &= 0, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle &= -(\eta + \delta) \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle + i \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle F_{10} \rangle\rangle &= 2\sqrt{3}(\eta - \delta) \langle\langle F_{00} \rangle\rangle - 2(\eta + \delta) \langle\langle F_{10} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle F_{11} \rangle\rangle &= -(\eta + \delta) \langle\langle F_{11} \rangle\rangle - i \langle\langle \Omega F_{11} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle &= -(\nu_{\Omega} + \eta + \delta) \langle\langle \Omega F_{1-1} \rangle\rangle + i\sigma_{\Omega}^2 \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle\langle \Omega F_{11} \rangle\rangle &= -(\nu_{\Omega} + \eta + \delta) \langle\langle \Omega F_{11} \rangle\rangle - i\sigma_{\Omega}^2 \langle\langle F_{11} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Отметим, что уравнение для $F_{10}(t)$ является обычным, в том смысле что $\langle\langle F_{10} \rangle\rangle = F_{10}$. Учитывая свойства дихотомических процессов (7.37), получим уравнения для коэффициентов

$$\begin{aligned} \langle\langle \ddot{F}_{1-1} \rangle\rangle + (\nu_{\Omega} + 2(\eta + \delta)) \langle\langle \dot{F}_{1-1} \rangle\rangle + \\ + (\nu_{\Omega}(\eta + \delta) + (\eta + \delta)^2 + \sigma_{\Omega}^2) \langle\langle F_{1-1} \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle \ddot{F}_{11} \rangle\rangle + (\nu_{\Omega} + 2(\eta + \delta)) \langle\langle \dot{F}_{11} \rangle\rangle + \\ + (\nu_{\Omega}(\eta + \delta) + (\eta + \delta)^2 + \sigma_{\Omega}^2) \langle\langle F_{11} \rangle\rangle = 0, \end{aligned} \quad (7.42)$$

которые имеют следующие решения:

$$\begin{aligned} \langle\langle F_{1-1}(t) \rangle\rangle &= F_{1-1}(0) e^{-(\eta + \delta + \frac{\nu_{\Omega}}{2})t} \operatorname{ch} \left(t \sqrt{\frac{\nu_{\Omega}^2}{4} - \sigma_{\Omega}^2} \right), \\ \langle\langle F_{11}(t) \rangle\rangle &= F_{11}(0) e^{-(\eta + \delta + \frac{\nu_{\Omega}}{2})t} \operatorname{ch} \left(t \sqrt{\frac{\nu_{\Omega}^2}{4} - \sigma_{\Omega}^2} \right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

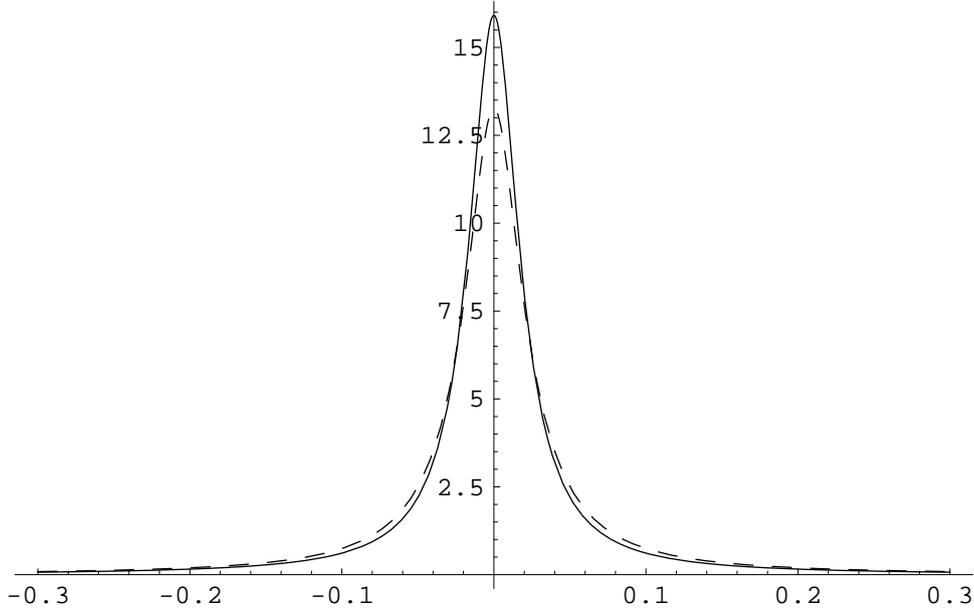


Рис. 7.7. Контур линии излучения двухуровневого атома для дихотомического процесса. Случай слабого шума. $\sigma_\Omega = 0.01, \nu_\Omega/\omega_0 = 0.01, \gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 2, \sigma_\xi = 0.5, \nu_\xi/\omega_0 = 0.005$. Сплошной линии соответствует контур линии излучения атома в отсутствие внешних полей.

Рассмотрим предельные случаи.

Приближение слабого шума ($\sigma_\Omega \ll \nu_\Omega$). Форма контура линии излучения имеет вид:

$$g(\omega) \cong \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}}{(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\eta + \delta + \nu_\Omega - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}}{(\eta + \delta + \nu_\Omega - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega})^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right]. \quad (7.44)$$

Приближение сильного шума ($\sigma_\Omega \gg \nu_\Omega$). В этом случае форма контура линии излучения имеет вид:

$$g(\omega) \cong \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\eta + \delta}{(\eta + \delta)^2 + (\omega - \omega_0 + \sigma_\Omega)^2} + \frac{\eta + \delta}{(\eta + \delta)^2 + (\omega - \omega_0 - \sigma_\Omega)^2} \right]. \quad (7.45)$$

Формы контуров линий излучения (7.44) и (7.45) согласуются с полученными в [?]. Отметим, что вероятности обнаружения системы в верхнем или нижнем уровнях зависят только от члена $F_{10}(t)$ в пропагаторе, и, следовательно, не зависят от процессов $\Omega(t)$.

7.5 Точно решаемые модели

В параграфе 7.2 было получено операторное кинетическое уравнение (7.3) для редуцированной матрицы плотности, в котором влияние внешних стохастических полей $\Omega(t)$ и $\xi(t)$ учитывалось точно членом

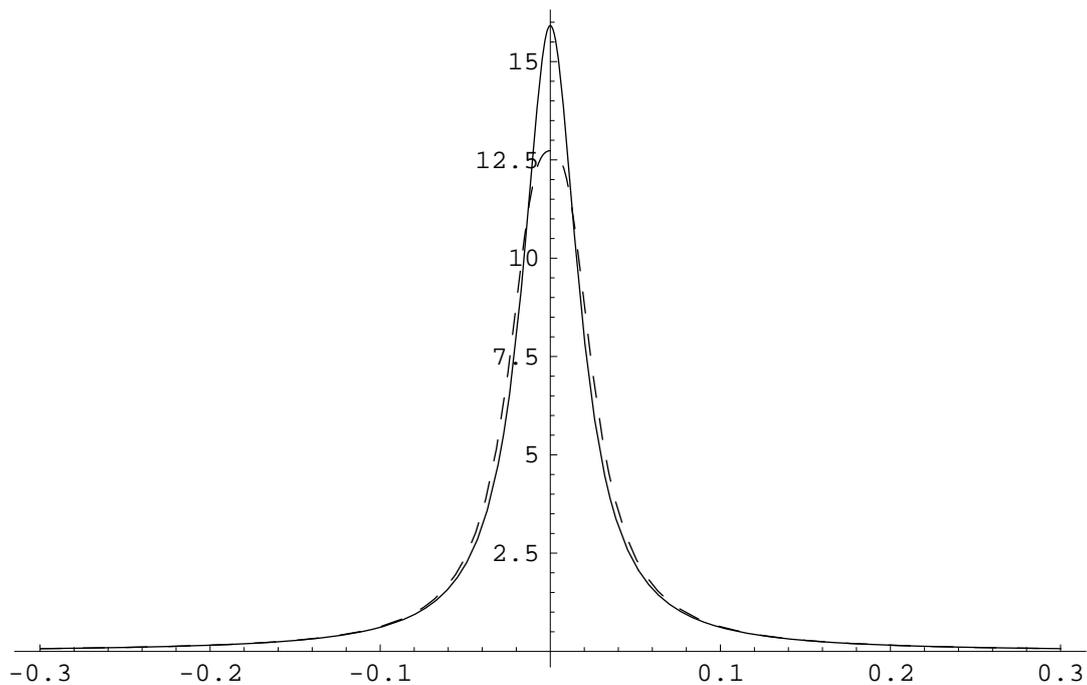


Рис. 7.8. Контур линии излучения двухуровневого атома для дихотомического процесса. Случай сильного шума. $\sigma_{\Omega} = 0.01$, $\nu_{\Omega}/\omega_0 = 0.01$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 2$, $\sigma_{\xi} = 0.5$, $\nu_{\xi}/\omega_0 = 0.005$. Сплошной линии соответствует контур линии излучения атома в отсутствие внешних полей.

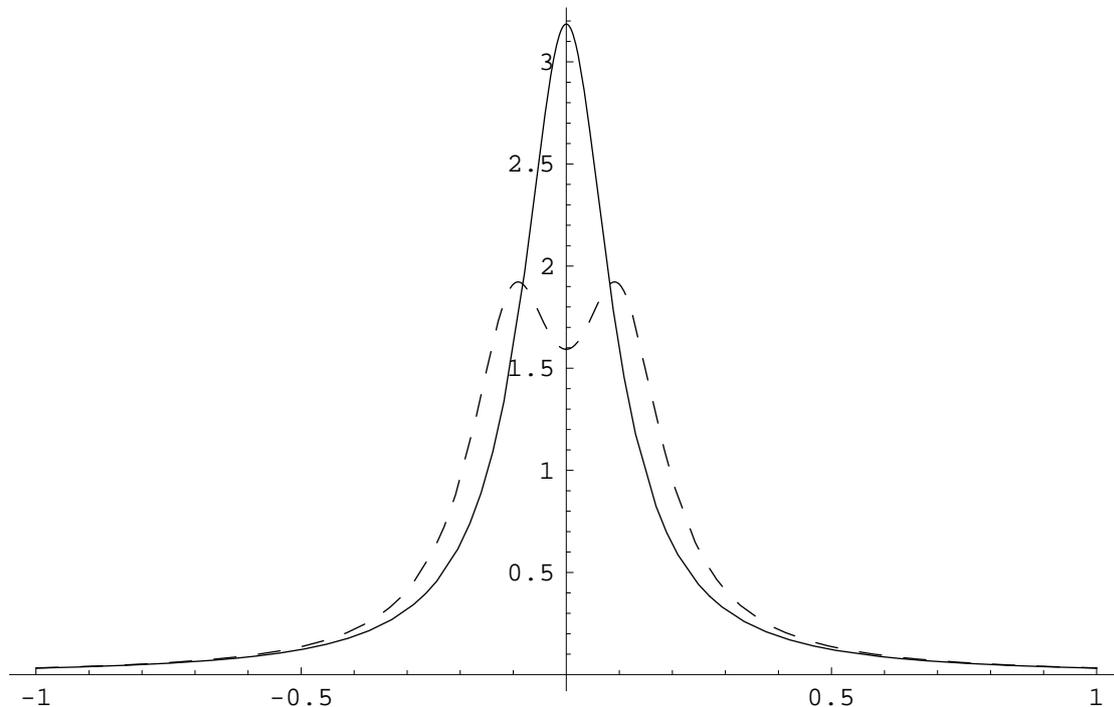


Рис. 7.9. Контур линии излучения двухуровневого атома для дихотомического процесса. Случай сильного шума. $\sigma_{\Omega} = 0.01$, $\nu_{\Omega}/\omega_0 = 0.01$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 10$, $\sigma_{\xi} = 0.5$, $\nu_{\xi}/\omega_0 = 0.005$. Сплошной линии соответствует контур линии излучения атома в отсутствие внешних полей.

$-i [\widehat{V}_{st}(t), \widehat{\rho}]$. После перехода от (7.3) к соответствующему УФП (7.4), решение последнего находилось методом теории возмущений по полю $\xi(t)$ и точно по $\Omega(t)$. Возникает вопрос: как соотносятся между собой решения уравнения (7.3) и операторного кинетического уравнения, когда в гамильтониане учитывается как взаимодействие динамической системы с термостатом, так и с внешним стохастическим полем. При этом член $-i [\widehat{V}_{st}(t), \widehat{\rho}]$ первого порядка итерации не влияет на динамику процесса релаксации. Это связано с тем, что учет этого члена приводит к появлению дополнительных слагаемых в решениях уравнений для коэффициентов $F_{lm}(t)$, которые исчезают при усреднении по реализациям стохастических полей. С учетом вышеизложенного операторное кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} = & \frac{\gamma}{2} \left[(\langle \nu \rangle + 1) (2 \widehat{J}_- \widehat{\rho} \widehat{J}_+ - \widehat{J}_+ \widehat{J}_- \widehat{\rho} - \widehat{\rho} \widehat{J}_+ \widehat{J}_-) + \right. \\ & \left. + \langle \nu \rangle (2 \widehat{J}_+ \widehat{\rho} \widehat{J}_- - \widehat{J}_- \widehat{J}_+ \widehat{\rho} - \widehat{\rho} \widehat{J}_- \widehat{J}_+) \right] \\ & + K_{\Omega}(t) (2 \widehat{J}_3 \widehat{\rho} \widehat{J}_3 - \widehat{J}_3^2 \widehat{\rho} - \widehat{\rho} \widehat{J}_3^2) \\ & + K_{\xi}(t) (\widehat{J}_+ \widehat{\rho} \widehat{J}_- + \widehat{J}_- \widehat{\rho} \widehat{J}_+ - \widehat{\rho} \widehat{J}_- \widehat{J}_+ - \widehat{J}_+ \widehat{J}_- \widehat{\rho}) \\ & + \bar{K}_{\xi}(t) (\widehat{J}_+ \widehat{\rho} \widehat{J}_- + \widehat{J}_- \widehat{\rho} \widehat{J}_+ - \widehat{\rho} \widehat{J}_+ \widehat{J}_- - \widehat{J}_- \widehat{J}_+ \widehat{\rho}), \end{aligned} \quad (7.46)$$

где $K_{\Omega}(t) = \int_0^t \Omega(t) \Omega(t_1) dt_1$, $K_{\xi}(t) = \int_0^t \xi(t) \bar{\xi}(t_1) e^{-\omega_0(t_1-t)} dt_1$. Уравнение (7.46) сводится к УФП для функции $f(z, \bar{z}; t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \eta \left[\frac{\partial}{\partial z} (2jz + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + z^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (2j\bar{z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}^2 + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2) \right] f + \\ & + \delta \left[\frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 2jz) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - 2j\bar{z}) \right] f + \\ & + K_{\Omega}(t) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z \bar{z} - z \frac{\partial}{\partial z} z \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial z} z \bar{z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) \right] f + \\ & + \left\{ K_{\xi}(t) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} z^2 z + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2 \right) \right] \right. \\ & \left. + k.c. \right\} f. \end{aligned} \quad (7.47)$$

В случае одного атома ($j = \frac{1}{2}$) система уравнений для коэффициентов $F_{lm}(t)$ имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{F}_{00}(t) = 0, \\ \dot{F}_{1-1}(t) = -(\eta + \delta + K_{\Omega}(t) + 2\bar{K}_{\xi}(t)) F_{1-1}(t), \\ \dot{F}_{11}(t) = -(\eta + \delta + K_{\Omega}(t) + 2K_{\xi}(t)) F_{11}(t), \\ \dot{F}_{10}(t) = 2\sqrt{3}(\eta - \delta) F_{00}(t) - 2(\eta + \delta + \bar{K}_{\xi}(t) + K_{\xi}(t)) F_{10}(t). \end{array} \right. \quad (7.48)$$

Основным достоинством данного подхода является то, что систему (3.48) можно проинтегрировать точно:

$$\begin{aligned} F_{00}(t) &= F_{00}(0), F_{10}(t) = F_{00}(0)\sqrt{3}\frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} (1 - e^{-2(\eta + \delta)t}) + F_{10}(0) \exp[-2(\eta + \delta)t - \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1 dt_2], \\ F_{1-1}(t) &= F_{1-1}(0) \exp \left[-(\eta + \delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} (\Omega(t_1)\Omega(t_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)}) dt_1 dt_2 \right], \\ F_{11}(0) &= F_{11}(0) \exp \left[-(\eta + \delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} (\Omega(t_1)\Omega(t_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)}) dt_1 dt_2 \right]. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Точное выражение для пропагатора УФП (7.47) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z_0, \bar{z}_0; 0) &= \quad (7.50) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta + \delta)t} \right) + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} \times \\ &\times \exp \left[-2(\eta + \delta)t - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \left(\xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)} + \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right] + \\ &\quad + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} \times \\ &\times \exp \left[-(\eta + \delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} \left(\Omega(t_1)\Omega(t_2) + 2\xi(t_1)\bar{\xi}(t_2)e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} \times \\
& \times \exp \left[-(\eta + \delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} \left(\Omega(t_1)\Omega(t_2) + 2\bar{\xi}(t_1)\xi(t_2)e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right) dt_1 dt_2 \right].
\end{aligned}$$

Теперь можно вернуться к вопросу о соотношении решений УФП (7.4) и (7.47), что эквивалентно вопросу о соотношении пропагатора (7.50) уравнения (7.47) и приближенного выражения для пропагатора (7.16), в котором удержаны члены, описывающие все физически реализуемые ситуации. Пропагатор (7.16) уравнения (7.4) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z_0, \bar{z}_0; 0) &= \frac{1}{\pi} + \tag{7.51} \\
& + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t + i \int_0^t \Omega(\tau) d\tau} \left\{ 1 - 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2) \times \right. \\
& \times \exp \left[-(\eta + \delta)(t_1 - t_2) - i\omega_0(t_1 - t_2) - i \int_{t_2}^{t_1} \Omega(\tau) d\tau \right] + k.c. \left. \right\} + \\
& + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t} \left\{ 1 - 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2) \times \right. \\
& \times \exp \left[(\eta + \delta)(t_1 - t_2) + i\omega_0(t_1 - t_2) + i \int_{t_2}^{t_1} \Omega(\tau) d\tau \right] + k.c. \left. \right\} + \\
& + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta+\delta)t} \right),
\end{aligned}$$

а в пропагаторе (7.50) уравнения (7.47) в последних слагаемых разложим экспоненты в ряд по малым величинам стохастических полей $\xi(t)$ и $\bar{\xi}(t)$ и ограничимся первым членом разложения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z_0, \bar{z}_0; 0) &= \tag{7.52} \\
& \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta+\delta)t} \right) + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t} \times \\
& \times \left[1 - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2) e^{i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2) e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} \frac{z_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} \Omega(t_1)\Omega(t_2)dt_1dt_2} \times \\
& \times \left[1 - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2) e^{i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1dt_2 - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2) e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1dt_2 \right] + \\
& + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1+z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1+z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \int_0^t \int_0^{t_1} \Omega(t_1)\Omega(t_2)dt_1dt_2} \times \\
& \times \left[1 - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \xi(t_1)\bar{\xi}(t_2) e^{i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1dt_2 - 2 \int_0^t \int_0^{t_1} \bar{\xi}(t_1)\xi(t_2) e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} dt_1dt_2 \right]
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при переходе в (7.51) и (7.52) к усреднению по реализациям стохастических полей, с учетом выражения

$$\begin{aligned}
\langle\langle e^{\pm \int_0^t \Omega(t_1)dt_1} \rangle\rangle & \approx 1 - i \int_0^t \langle\langle \Omega(t_1) \rangle\rangle dt_1 \\
& + \frac{(-i)^2}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} \langle\langle \Omega(t_1)\Omega(t_2) \rangle\rangle dt_1dt_2,
\end{aligned}$$

если ограничиваемся корреляционными функциями второго порядка для дельта - коррелированных процессов, выражения (7.51) и (7.52) совпадают. Следовательно, решение (7.50) можно рассматривать как предельное для решения (7.51) и в этом смысле понимать его как точное решение.

Найдем для дельта-коррелированных процессов и процессов Кубо-Андерсона наблюдаемые величины и сравним их с полученными в параграфе 6.3.

Выражение для усредненного по реализациям стохастических процессов $\Omega(t)$ и $\xi(t)$ пропагатора, с учетом (7.50) и (7.19), примет вид

$$\begin{aligned}
K(z, \bar{z}; t|z_0, \bar{z}_0; 0) & = \langle\langle \mathcal{K}(z, \bar{z}; t|z_0, \bar{z}_0; 0) \rangle\rangle \quad (7.53) \\
& = \frac{1}{\pi} + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta+\delta)t} \right) + \frac{3}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{1 - z_0\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-2(\eta+\delta)t - 4\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi}t} + \\
& + \frac{6}{\pi} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \frac{z_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}t - 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi}t} + \frac{6}{\pi} \frac{z}{1 + z\bar{z}} \frac{\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0} e^{-(\eta+\delta)t - \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}t - 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi}t}.
\end{aligned}$$

Используя последнее выражение, получим для формы контура линии излучения

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi}\right)^2}, \quad (7.54)$$

и вероятности обнаружить систему в верхнем и нижнем состояниях

$$W_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta - \delta)t}\right) - \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta + \delta + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi})t} \quad (7.55)$$

$$W_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta - \delta)t}\right) + \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2(\eta + \delta + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi})t}$$

Сравнивая выражения для вероятностей (7.55) и (7.25), можно заметить, что из (7.55) легко получить (7.25), если разложить последний член в ряд по малой интенсивности шума $\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi}$.

Для вычисления разновременных корреляторов по формуле (7.22) заметим, что отличный от нуля вклад дает только последнее слагаемое пропагатора (7.50). Усредняя его по реализациям стохастических полей с учетом (7.27) и (7.28), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} & \langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle = \quad (7.56) \\ & = \frac{z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} \exp \left\{ - \left[(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2\sigma_\xi^2 \left(\frac{\nu_\xi}{\nu_\xi^2 + \omega_0^2} - i \frac{\omega_0}{\nu_\xi^2 + \omega_0^2} \right)) t \right] \right\} e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Выражение для формы контура линии излучения определится как

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_0^t dt e^{-i\omega_0 t} \langle \hat{J}_+(t) \hat{J}_-(0) \rangle = \quad (7.57) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2\sigma_\xi^2 \frac{\nu_\xi}{\nu_\xi^2 + \omega_0^2}}{\left(\omega - \omega_0 - 2\sigma_\xi^2 \frac{\omega_0}{\nu_\xi^2 + \omega_0^2} \right)^2 + \left(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2\sigma_\xi^2 \frac{\nu_\xi}{\nu_\xi^2 + \omega_0^2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Из сравнения (7.57) и (7.54) видно, что учет конечности времени взаимодействия приводит к сдвигу контура линии излучения на малую величину $2\sigma_\xi^2 \frac{\omega_0}{\nu_\xi^2 + \omega_0^2}$, зависящую от параметров стохастических процессов, приводящих к переходу между уровнями динамической системы.

Выражение для вероятностей обнаружения системы в верхнем и нижнем состояниях

$$W_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta - \delta)t}\right) - \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2\left(\eta + \delta + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi + \frac{\omega_0^2}{\nu_\xi}}\right)t} \quad (7.58)$$

$$W_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta - \delta}{\eta + \delta} \left(1 - e^{-2(\eta - \delta)t}\right) + \frac{1}{2} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{1 + z_0 \bar{z}_0} e^{-2\left(\eta + \delta + 2\frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi + \frac{\omega_0^2}{\nu_\xi}}\right)t}.$$

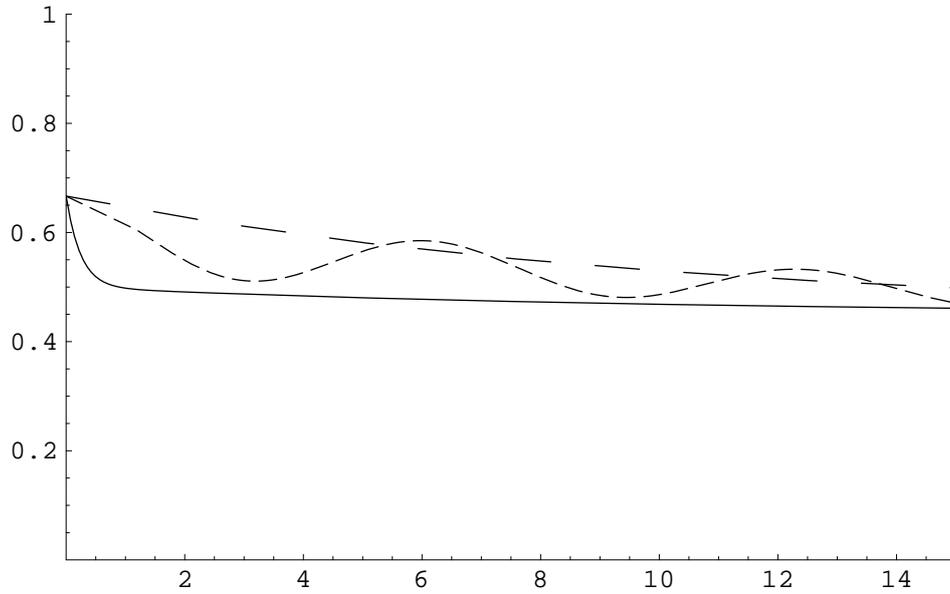


Рис. 7.10. Вероятность нахождения двухуровневого атома в верхнем состоянии в случае процесса Кубо-Андерсона. $|z_0|^2 = 2$, $\sigma_\Omega = 0.01$, $\nu_\Omega/\omega_0 = 0.012$, $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 5$, $\sigma_\xi = 0.1$, $\nu_\xi/\omega_0 = 0.005$. Сплошная линия соответствует расчету по формуле (7.58), пунктирная линия — по формуле (7.33). Для сравнения показана вероятность нахождения атома в верхнем состоянии для случая релаксации при тех же параметрах в отсутствии внешнего стохастического поля — верхняя кривая.

Для дельта - коррелированных процессов, как ранее отмечалось, частота соударений $\nu_{1,2}$, а $\frac{\sigma}{\nu}$ остается конечной величиной, что при таких модельных предположениях ($\nu_\xi \rightarrow \infty$) приводит к тому, что из (7.58) автоматически получаются вероятности обнаружения системы (7.55) для оптического белого шума.

Используя точное выражение для пропагатора (7.50), УФП (7.47) и значения для вероятностей нахождения динамической системы в верхнем и нижнем состояниях (7.58), в рамках модели Кубо-Андерсона можно определить времена продольной T_1 и поперечной T_2 релаксации.

Время продольной релаксации T_1 определяется переходами в динамической системе под действием процессов $\xi(t)$ и $\bar{\xi}(t)$. Известно, что

$$T_1 = (w_{1 \rightarrow 2} + w_{2 \rightarrow 1})^{-1},$$

где $w_{1 \rightarrow 2}$ и $w_{2 \rightarrow 1}$ — скорости переходов между уровнями атомов. Эти скорости переходов пропорциональны соответствующим вероятностям переходов $W_{1 \rightarrow 2}$ и $W_{2 \rightarrow 1}$, которые можно определить из (7.58):

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_2(t), \quad \text{если } z_0 = 0,$$

$$W_{2 \rightarrow 1} = W_1(t), \quad \text{если } |z_0| \rightarrow \infty.$$

В результате получим выражение для времени продольной релаксации

$$T_1 = \frac{1}{2 \left(\eta + \delta + 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi + \frac{\omega_0^2}{\nu_\xi}} \right)}. \quad (7.59)$$

Время поперечной релаксации часто определяют как время релаксации недиагональной компоненты матрицы плотности, который можно записать, используя представление Глаубера-Сударшана в виде

$$\langle 1 | \hat{\rho} | 2 \rangle = \int \int d\mu(z, \bar{z}) d\mu(z', \bar{z}') \langle 1 | z \rangle \langle z | 2 \rangle \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0, 0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}', 0), \quad (7.60)$$

и, если начальное состояние динамической системы когерентное и $\hat{\rho}(0) = |z_0\rangle\langle z_0|$, то в (7.60) можно проинтегрировать по $d\mu(z', \bar{z}')$ и получить следующее выражение для недиагонального элемента матрицы плотности

$$\langle 1 | \hat{\rho} | 2 \rangle = \int \int \frac{dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \mathcal{K}(z, \bar{z}; t | z_0, \bar{z}_0, 0). \quad (7.61)$$

Ненулевой вклад в (7.61) дает только последний член пропагатора (7.50)

$$\langle 1 | \hat{\rho} | 2 \rangle \sim e^{-\left(\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi + \frac{\omega_0^2}{\nu_\xi}} \right) t}. \quad (7.62)$$

Из (7.62) видно, что время поперечной релаксации T_2 определяется выражением

$$T_2 = \frac{1}{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} + 2 \frac{\sigma_\xi^2}{\nu_\xi + \frac{\omega_0^2}{\nu_\xi}}}. \quad (7.63)$$

Сравнение формул для T_1 и T_2 дает простую связь между ними

$$\frac{1}{2T_1} + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega} = \frac{1}{T_2}. \quad (7.64)$$

Времена продольной и поперечной релаксации для стохастических процессов в модели оптического белого шума получаются путем предельного перехода $\nu_\xi \rightarrow \infty$ в (7.59) и (7.63). Тогда для времен релаксации получаем

$$T_1 = \frac{1}{2(\eta + \delta)}, \quad (7.65)$$

$$T_2 = \frac{1}{\eta + \delta + \frac{\sigma_\Omega^2}{\nu_\Omega}}, \quad (7.66)$$

Из последних выражений видно, что процессы, приводящие к переходам между уровнями атома дают вклад как во время T_1 продольной, так и во время T_2 поперечной релаксации, а процессы, ведущие к сдвигу уровней, только вклад в T_2 . Если такие процессы отсутствуют, то для времен релаксации получается хорошо известное соотношение [68]

$$T_2 = 2T_1.$$

Краткие выводы. Показано, что в случае усреднения по реализациям стохастических полей во втором порядке итерации при выводе операторного кинетического уравнения, соответствующее ему УФП имеет точное решение. Контур линии излучения остается лоренцевым, вклад в ширину которого дают интенсивности σ_Ω^2 и σ_ξ^2 стохастических процессов. В отличие от модели белого шума, учет конечности времени корреляции в процессах Кубо-Андерсона, приводит к сдвигу центра линии на величину пропорциональную σ_ξ^2 в область более высоких частот. Получены формулы для времен продольной и поперечной релаксации в зависимости от параметров стохастических процессов. Решение УФП, полученное при точном учете процессов $\Omega(t)$ и по теории возмущений во втором порядке малости по интенсивности флуктуаций $\sigma_\xi^2 \xi(t)$ и $\xi(\bar{t})$, приводит к поправке в выражении для контура линии излучения, искажающей лоренцевский контур. Однако, численные расчеты показывают, что контуры линий излучения для оптического белого шума и модели Кубо - Андерсона, рассчитанные методом теории возмущений и в точно решаемой модели соответственно совпадают.

Глава 8

Когерентная релаксация ансамблей большого числа квантовых систем

8.1 Асимптотическое разложение для уравнения Фоккера - Планка

Построение точных решений уравнения Фоккера-Планка для двух- и трех-уровневых систем методом разложения по собственным функциям оператора Лапласа - Бельтрами, определенного на фазовом пространстве квантовой системы, эффективно только при малых значениях кооперативных квантовых чисел j и μ , т.е. для небольшого числа частиц. Обычно в задачах квантовой оптики и радиофизики интересуются релаксацией ансамбля, состоящего из большого числа атомов (модель Дике). Основным достоинством уравнений Фоккера - Планка (6.25) и (6.57) является то, что они справедливы для всех полносимметричных представлений группы динамической симметрии этих систем. Это соответствует такой ситуации, когда линейный размер системы, значительно меньше длины волны фотонов, излучаемых на рассматриваемых переходах и все атомы (или молекулы) системы находятся в одинаковых условиях. В этом случае гамильтониан системы коммутирует с оператором перестановки любой пары частиц. Заметим, что при этом индекс представления равен числу частиц N ($2j = N$ и $\mu = N$).

В общем случае уравнение релаксации можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{L}f, \quad (8.1)$$

где \hat{L} — дифференциальный оператор не выше второго порядка, соответствующего уравнения Фоккера - Планка. Метод КС позволяет оператор \hat{L} представить в виде суммы по степеням малости $\sim \frac{1}{N}$ в виде

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \quad (8.2)$$

и применить эффективный аппарат теории возмущений для нахождения приближенного значения пропагатора уравнения (8.1) [?]. Формальное решение уравнения (8.1) записывается в виде

$$f(t) = e^{t\hat{L}} f(0) \equiv \hat{V}(t)f(0), \quad (8.3)$$

где $\hat{V}(t) = e^{t\hat{L}}$, дифференцируя которое по времени, получаем

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} = \hat{L}e^{t\hat{L}} = \hat{L}\hat{V}(t) = \left(\hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \right) \hat{V}(t). \quad (8.4)$$

Пусть известно решение нулевого порядка теории возмущений

$$\hat{V}_0(t) \equiv e^{t\hat{L}_0},$$

соответствующее уравнению

$$\frac{\partial \hat{V}_0}{\partial t} = \hat{L}_0 \hat{V}_0(t). \quad (8.5)$$

Будем искать решение уравнения (8.1) в виде

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_0(t)\hat{V}_I(t).$$

Тогда

$$\frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{V}_0(t)}{\partial t} \hat{V}_I(t) + \hat{V}_0(t) \frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} = \left(\hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \right) \hat{V}_0(t)\hat{V}_I(t) \quad (8.6)$$

и, с учетом (8.5), получим

$$\frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} = \hat{V}_0^{-1}(t) \left(\frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \right) \hat{V}_0(t)\hat{V}_I(t). \quad (8.7)$$

Решение (8.7) записывается как разложение временной экспоненты

$$\begin{aligned} \hat{V}_I(t) = & \hat{I} + \frac{1}{N} \int_0^t \hat{V}_0^{-1}(t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t') dt' + \\ & + \frac{1}{N^2} \left[\int_0^t \hat{V}_0^{-1}(t') \hat{L}_2 \hat{V}_0(t') dt' + \int_0^t \int_0^{t'} \hat{V}_0^{-1}(t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t') V_0^{-1}(t'') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t'') dt' dt'' \right] + \dots, \end{aligned}$$

что позволяет записать решение уравнения (8.4), используя (8.6) в виде

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_0(t) + \frac{1}{N} \int_0^t \hat{V}_0(t-t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t') dt' + \quad (8.8)$$

$$+ \frac{1}{N^2} \left[\int_0^t \hat{V}_0(t-t') \hat{L}_2 \hat{V}_0(t') dt' + \int_0^t \int_0^{t'} \hat{V}_0(t-t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t'-t'') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t'') dt' dt'' \right] + \dots$$

Окончательное выражение для функции Грина, или пропагатора, уравнения (8.1) в представлении КС имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{V}(t) | \alpha_0 \rangle &\equiv \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) = \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) + \quad (8.9) \\ &+ \frac{1}{N} \int_0^t \int_0^{t'} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1, t') \langle \alpha_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_2, \bar{\alpha}_2, t' | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) dt' d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) + \\ &+ \frac{1}{N^2} \left(\int_0^t \int_0^{t'} \int_0^{t''} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1, t') \langle \alpha_1 | \hat{L}_2 | \alpha_2 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_2, \bar{\alpha}_2, t' | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) dt' d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t'} \int_0^{t''} \dots \int_0^{t'''} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1, t') \langle \alpha_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_2, \bar{\alpha}_2, t' | \alpha_3, \bar{\alpha}_3, t'') \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle \alpha_3 | \hat{L}_1 | \alpha_4 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_4, \bar{\alpha}_4, t'' | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) dt' dt'' d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) d\mu(\alpha_3) d\mu(\alpha_4) \right) + \dots \end{aligned}$$

Ограничимся в дальнейшем только членами порядка $\sim \frac{1}{N}$, не учитывая первый порядок теории возмущений для оператора \hat{L}_2 , члены которого $\sim \frac{1}{N^2}$ (первое слагаемое в круглых скобках) и применим (8.9) для описания релаксации ансамбля из большого числа двухуровневых систем.

8.2 Когерентная релаксация ансамбля двухуровневых атомов

Операторное кинетическое уравнение, описывающее кооперативную релаксацию двухуровневых атомов и соответствующее ему УФП:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[(\langle \nu \rangle + 1) \left(2jz + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle \nu \rangle \left(-2jz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] + k.c. \right) f = \hat{L}f, \quad (8.10) \end{aligned}$$

рассматривалось в главе 4.

Для того, чтобы оператор \hat{L} уравнения Фоккера-Планка (8.10) представить в виде (8.2), удобном для применения теории возмущения, надо воспользоваться тем фактом, что в пределе больших j КС переходят в глауберовские

КС. При этом выполняются следующие правила перехода:

$$\hat{J}_+ \rightarrow \sqrt{2j}\hat{a}^+; \quad \hat{J}_- \rightarrow \sqrt{2j}\hat{a}; \quad z \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2j}}; \quad \bar{z} \rightarrow \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2j}}, \quad (8.11)$$

что приводит к соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \sqrt{2j} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rightarrow \sqrt{2j} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}.$$

Уравнение Фоккера - Планка (8.10) с учетом (8.12) для больших чисел $N = 2j$ двухуровневых атомов рассматриваемого ансамбля запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{L}f = \left(\hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \right) f, \quad (8.12)$$

где

$$\hat{L}_0 = \frac{\gamma^*}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} + 2 \langle \nu \rangle \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \right), \quad (8.13)$$

$$\hat{L}_1 = \frac{\gamma^*}{4} (\langle \nu \rangle + 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} \bar{\alpha}^2 \right) + \langle \nu \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right), \quad (8.14)$$

$$\hat{L}_2 = \frac{\gamma^*}{2} (\langle \nu \rangle + 1) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \alpha^2 \bar{\alpha}^2, \quad (8.15)$$

$$\gamma^* = 2j\gamma = N\gamma. \quad (8.16)$$

Уравнение (8.5), оператор которого \hat{L}_0 определяется (8.13), описывает релаксацию гармонического осциллятора. Его пропагатор известен [?]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha', \bar{\alpha}'; 0) = & \quad (8.17) \\ = \frac{1}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})} \exp \left[- \frac{(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma^* t}{2}}) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 e^{-\frac{\gamma^* t}{2}})}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})} \right]. \end{aligned}$$

Для вычисления матричного элемента $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2, \bar{\alpha}_2 \rangle$, входящего во второе слагаемое правой части (8.9), удобно ввести базис $|w, \bar{w}\rangle$, обладающий следующими свойствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} |w, \bar{w}\rangle &= \bar{w} |w, \bar{w}\rangle, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} |w, \bar{w}\rangle &= -w |w, \bar{w}\rangle, \\ \langle \alpha, \bar{\alpha} | w, \bar{w} \rangle &= e^{\alpha \bar{w} - \bar{\alpha} w}, \\ d\mu(w, \bar{w}) &= \frac{d\Re(w) d\Im(w)}{\pi}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

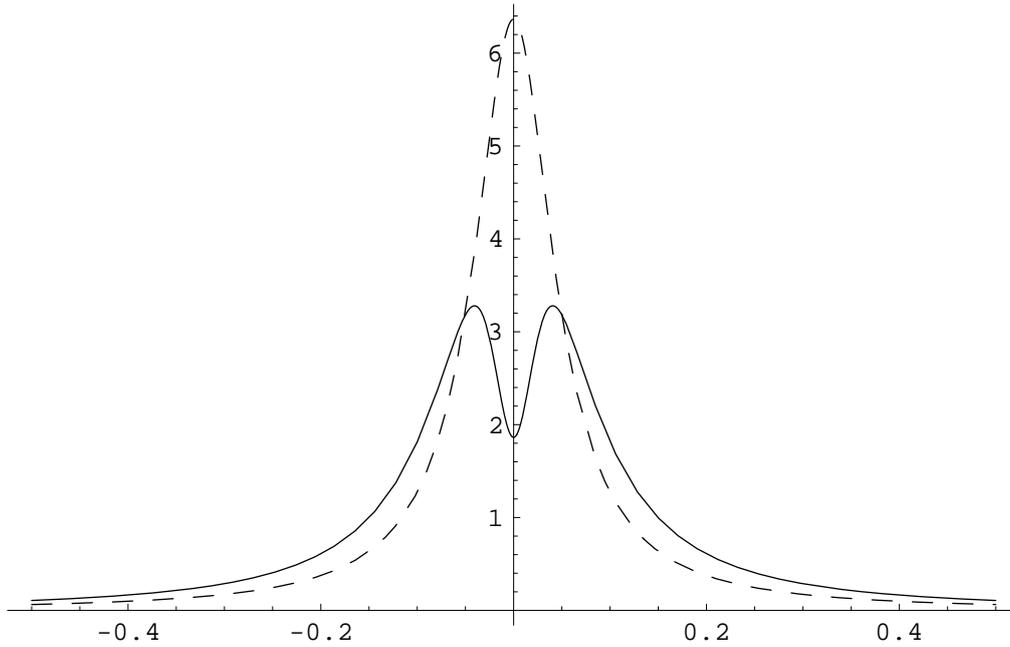


Рис. 8.1. Контур линии излучения $g(\omega)$ ансамбля N невзаимодействующих двухуровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 1, N = 10$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (8.22).

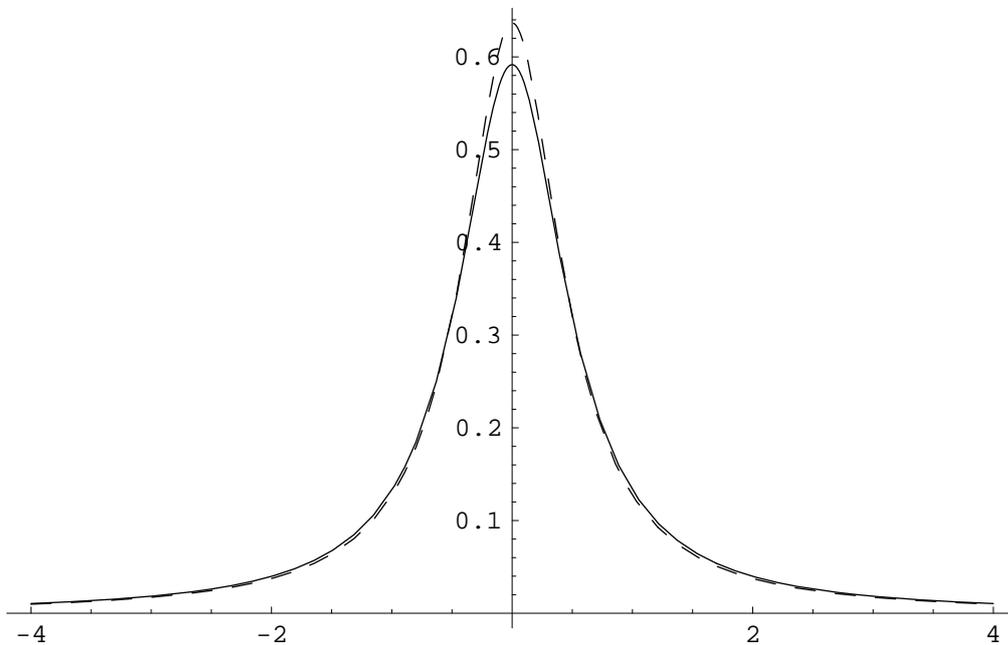


Рис. 8.2. Контур линии $g(\omega)$ излучения ансамбля N невзаимодействующих двухуровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle \nu \rangle = 1, N = 100$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (8.22).

тогда

$$\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2, \bar{\alpha}_2 \rangle = \int d\mu(w, \bar{w}) \langle \alpha_1, \bar{\alpha}_1 | \hat{L}_1 | w, \bar{w} \rangle \langle w, \bar{w} | \alpha_2, \bar{\alpha}_2 \rangle. \quad (8.19)$$

Опуская все очевидные, но громоздкие промежуточные вычисления, приведем значение пропагатора (8.9) с точностью до $\frac{1}{j}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) &= \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) + \quad (8.20) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\gamma^*}{4j} (2 \langle \nu \rangle + 1) \left\{ \frac{1}{\langle \nu \rangle^2 (1 - e^{-\gamma^* t})^4} \left[2\alpha^2 \bar{\alpha}^2 A_1 + (\bar{\alpha}^2 \alpha_0^2 + \alpha^2 \bar{\alpha}_0^2) A_2 - \right. \right. \\ &- 2(\alpha \bar{\alpha}^2 \alpha_0 + \alpha^2 \bar{\alpha} \bar{\alpha}_0 + \alpha \alpha_0 \bar{\alpha}_0^2 + \bar{\alpha} \alpha_0^2 \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{3}{2}\gamma^* t} A_3 + 8\alpha \bar{\alpha} \alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_4 + 2\alpha_0^2 \bar{\alpha}_0^2 e^{-2\gamma^* t} A_5 \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})^3} \left[-8\alpha \bar{\alpha} A_1 - 8\alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_4 + 4(\bar{\alpha} \alpha_0 + \alpha \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{3}{2}\gamma^* t} A_3 \right] + \\ &+ \frac{1}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})^2} \left[8\alpha \bar{\alpha} A_6 - 4(\bar{\alpha} \alpha_0 + \alpha \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{1}{2}\gamma^* t} A_3 + 8\alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_7 \right] + \\ &+ \left. \frac{4}{(1 - e^{-\gamma^* t})^2} A_1 - \frac{8}{1 - e^{-\gamma^* t}} A_6 \right\} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) - \\ &- \frac{\gamma^*}{4j} (3 \langle \nu \rangle + 2) \left\{ \frac{1}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})^2} \left[-2\alpha \bar{\alpha} A_6 + (\bar{\alpha} \alpha_0 + \alpha \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{\gamma^* t}{2}} A_3 - \right. \right. \\ &- 2\alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_7 \left. \right] + \frac{2}{1 - e^{-\gamma^* t}} A_6 \left. \right\} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) - \\ &- \frac{\gamma^*}{4j} 2 \langle \nu \rangle t \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0); \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= te^{-2\gamma^* t} + \frac{3}{2\gamma^*} e^{-2\gamma^* t} - \frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} + \frac{1}{2\gamma^*}, \\ A_2 &= te^{-\gamma^* t} + te^{-3\gamma^* t} + \frac{1}{\gamma^*} e^{-3\gamma^* t} - \frac{1}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t}, \quad A_3 = t + te^{-\gamma^* t} - \frac{2}{\gamma^*} + \frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t}, \\ A_4 &= te^{-\gamma^* t} + \frac{1}{2\gamma^*} e^{-2\gamma^* t} - \frac{1}{2\gamma^*}, \quad A_5 = t - \frac{3}{2\gamma^*} + \frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} - \frac{1}{2\gamma^*} e^{-2\gamma^* t}, \\ A_6 &= te^{-\gamma^* t} + \frac{1}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} - \frac{1}{\gamma^*}, \quad A_7 = t + \frac{1}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} - \frac{1}{\gamma^*}. \end{aligned}$$

Несмотря на громоздкий вид пропагатора (8.20), выражение для двухвременной корреляционной функции имеет простой вид

$$\langle \hat{a}^+(t) \hat{a}(0) \rangle = \alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma^* t}{2}} - \alpha \bar{\alpha}_0 \frac{\gamma^*}{4j} (7 \langle \nu \rangle + 3) t e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma^* t}{2}}, \quad (8.21)$$

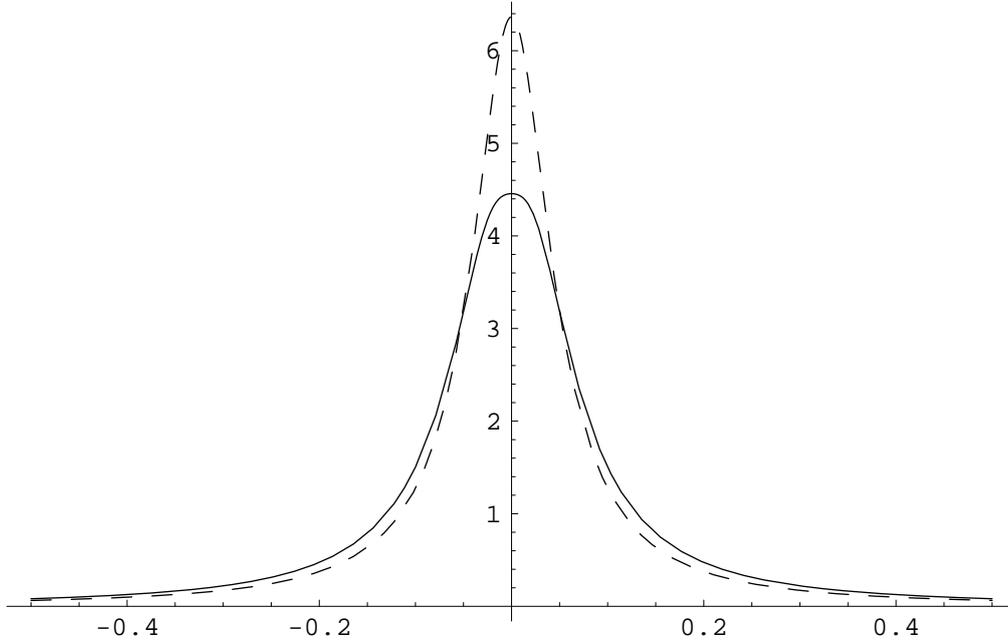


Рис. 8.3. Контур линии излучения $g(\omega)$ ансамбля N невзаимодействующих двухуровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 0.1$, $N = 10$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (8.22).

что дает следующее выражение для формы контура линии излучения

$$g(\omega) = \text{Re} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \hat{a}^+(t) \hat{a}(0) \rangle = \quad (8.22)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{N\frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + (N\frac{\gamma}{2})^2} + (7\langle \nu \rangle + 3) \frac{\gamma}{2} \frac{(\omega - \omega_0)^2 - (N\frac{\gamma}{2})^2}{\left((\omega - \omega_0)^2 + (N\frac{\gamma}{2})^2 \right)^2} \right],$$

здесь $N = 2j$ — число двухуровневых атомов в ансамбле.

Суть данного подхода как осцилляторного приближения и (поправок к нему) для ансамбля из N двухуровневых атомов, невзаимодействующих между собой, но находящихся в скоррелированном начальном состоянии хорошо отражает первое слагаемое в правой части (8.22), которое соответствует лоренцевой форме линии излучения осциллятора, уширенной в N раз. Это слагаемое соответствует ширине кооперативного распада N двухуровневых атомов, вычисленный в предположении о неограниченности спектра энергий. Второе слагаемое соответствует поправке, возникающей из-за конечности (ограниченности сверху) набора уровней атомов, приводящей к деформации лоренцева контура и эффективному уширению линии излучения.

На рис.6.1-6.4 представлены результаты расчета формы контура линии излучения ансамбля N двухуровневых невзаимодействующих между собой

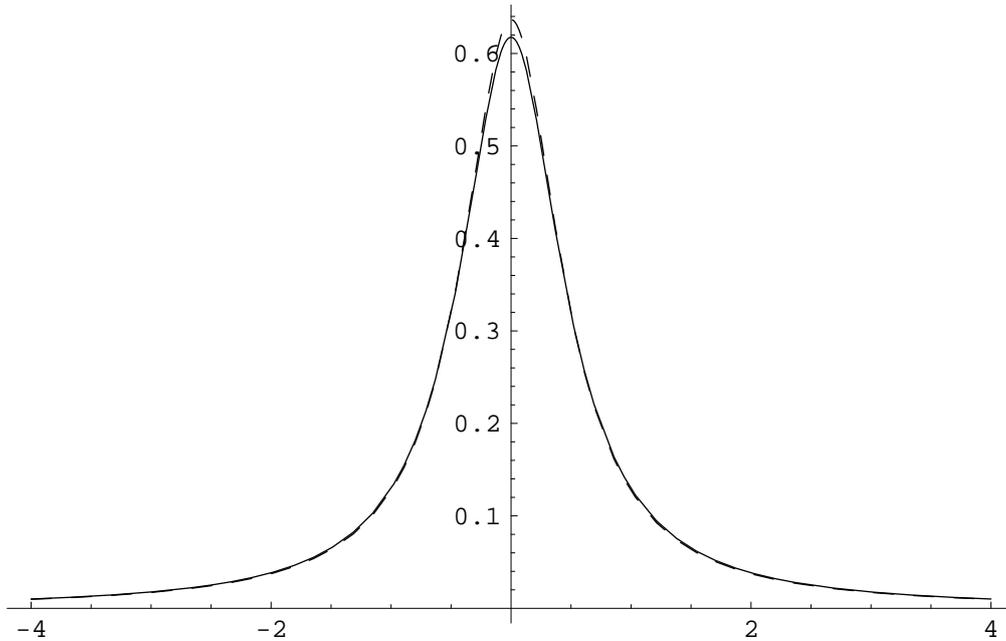


Рис. 8.4. Контур линии излучения $g(\omega)$ ансамбля N невзаимодействующих двухуровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 0.1$, $N = 100$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (8.22).

атомов, когда $N = 10$, $N = 100$. Для сравнения пунктирной линией приведен вклад в контур линии излучения от первого слагаемого формулы (8.22). При числе атомов $N > 100$ величина вклада от второго слагаемого мала, что определяет эффективную область применения данного приближения для числа атомов до нескольких десятков. Из численных расчетов видно, что контуры линии совпадают при температурах, соответствующих значениям от $\xi = 100$ до $\xi = 10$. При $\langle \nu \rangle = 1$ в центре контура линии возникает провал и она несколько уширена по сравнению с более низкими температурами.

В данном параграфе построена временная асимптотическая теория возмущения для УФП, описывающего спонтанную когерентную релаксацию ансамбля двухуровневых атомов, найден общий вид пропагатора уравнения Фоккера - Планка в виде разложения по параметру, обратному числу атомов в ансамбле. Предложенный метод непосредственно обобщается на случай релаксации в системе из большого количества уровней атомов. При этом задача сводится к описанию затухания модового гармонического осциллятора и расчету поправок к осцилляторному приближению.

8.3 Диполь-дипольно взаимодействующие атомы и квантовое управление

Исследуем далее модель двух атомов, которые взаимодействуют как с термостатом, так и между собой. Кроме того, при рассмотрении вопроса о возбуждении запутанных состояний будем учитывать воздействие на систему сильным внешним классическим электромагнитным (лазерным) полем [43].

Кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности системы, составленной из двух атомов, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar}[V_I(t), \rho] - \\ & - \sum_{i,k=1}^2 \gamma_{ik}(1 + \langle n \rangle) \left(J_+^{(i)} J_-^{(k)} \rho + \rho J_+^{(i)} J_-^{(k)} - 2J_-^{(k)} \rho J_+^{(i)} \right) - \\ & - \sum_{i,k=1}^2 \gamma_{ik} \langle n \rangle \left(J_-^{(i)} J_+^{(k)} \rho + \rho J_-^{(i)} J_+^{(k)} - 2J_+^{(k)} \rho J_-^{(i)} \right), \end{aligned} \quad (8.23)$$

где $V_I(t)$ – модельный оператор взаимодействия атомов с внешним электромагнитным полем и между собой

$$\begin{aligned} V_I(t) = & -\frac{\hbar g^{(12)}}{2} \left(J_+^{(1)} J_-^{(2)} + J_-^{(1)} J_+^{(2)} \right) - \\ & -\frac{\hbar}{2} \left\{ \left(\Omega_1 J_+^{(1)} + \Omega_2 J_+^{(2)} \right) \exp(i\Delta\omega t) + h.c. \right\}. \end{aligned}$$

Здесь: $J_{\pm}^{(i)}$, ($i = 1, 2$) – операторы переходов между уровнями отдельных атомов; γ_{ik} – соответствующие релаксационные константы [74]; $g^{(12)}$ – константа межатомного диполь-дипольного взаимодействия; $\Omega_{1,2} = \vec{d}_{1 \rightarrow 2} \vec{E}_0^{(1,2)}(t)$ – частоты Раби для атомов, $\vec{d}_{1 \rightarrow 2}$ – матричный элемент дипольного момента изолированного атома на переходе $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$; $\vec{E}_0^{(1,2)}(t)$ – огибающая амплитуды напряженности падающего электромагнитного поля для первого и второго атомов; $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ – разность частоты внешнего поля и частоты перехода между уровнями атома. Константы γ_{ij} , $g^{(12)}$ и частоты Раби известным образом [74] зависят от произведения KL , где $K = 2\pi/\lambda$ – волновое число, а L – расстояние между атомами.

При выводе выражения для V_I использовано приближение вращающейся волны, в последующих расчетах поле считается линейно поляризованным и падающим вдоль оси расположения атомов.

Для работы с приведенным выше уравнением необходимо выбрать адекватный исследуемой задаче базис. Система двух атомов описывается приводимым представлением группы энергетического спина $SU(2)$, равным прямому произведению ее неприводимых представлений $T^{1/2}$, соответствующих

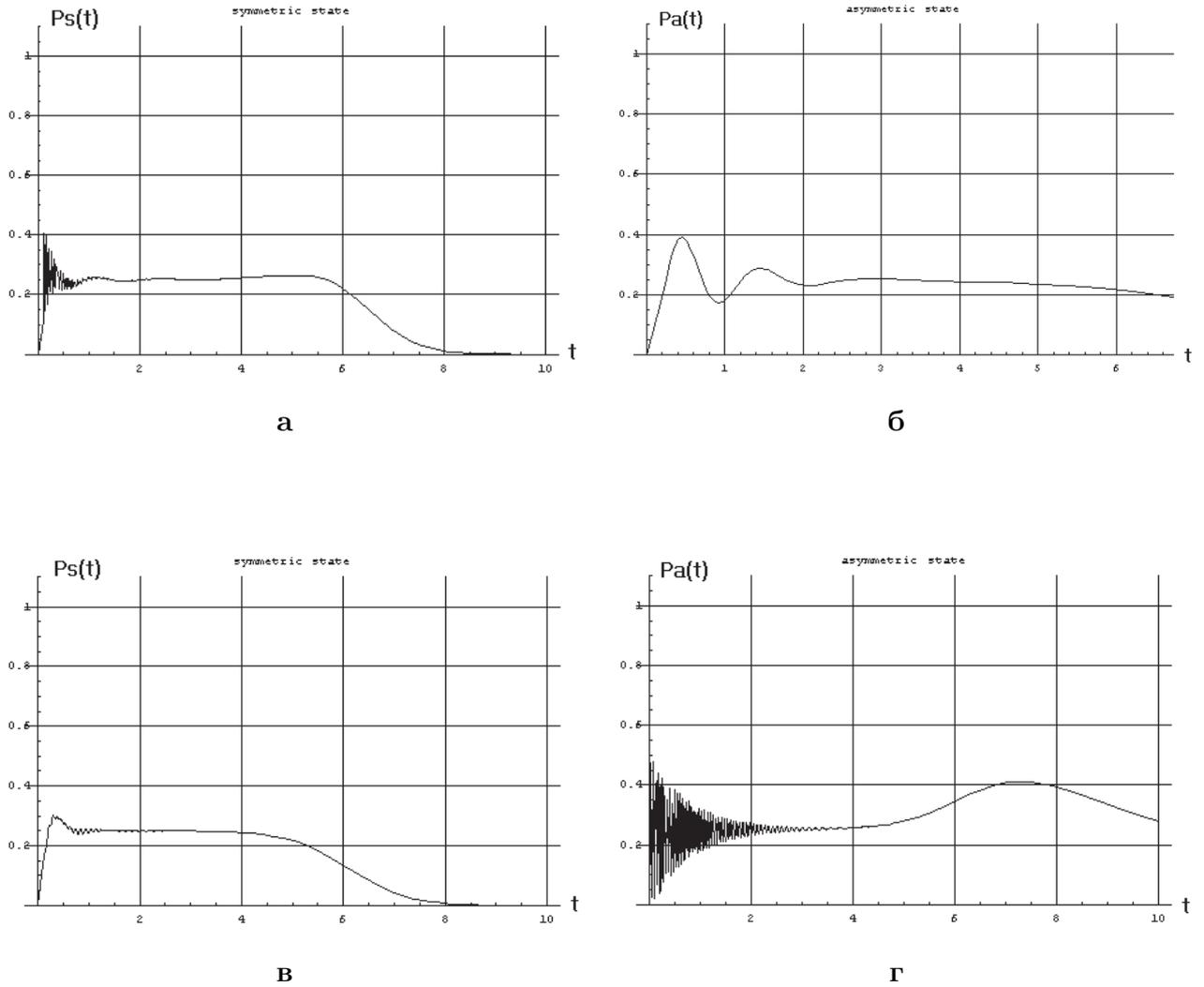


Рис. 8.5. Вероятности возбуждения симметричного $P_s(t)$ - (а, в) и антисимметричного $P_a(t)$ - (б, г) запутанных состояний в системе двух диполь-дипольно взаимодействующих атомов: а, б - $\cos(KL) = 1$, в, г - $\cos(KL) = -1$

спину $\frac{1}{2}$. Хорошо известно, что представление это сводится к прямой сумме неприводимых представлений T^0 и T^1 :

$$T^{\frac{1}{2}} \otimes T^{\frac{1}{2}} = T^0 \oplus T^1,$$

где T^0 отвечает коллективному энергетическому спину, равному нулю, а T^1 – коллективному спину, равному единице.

Рассматриваемая система имеет четыре базисных состояния: нижнее $|g\rangle$ (оба атома невозбуждены), запутанные симметричное $|s\rangle$ и антисимметричное $|a\rangle$ состояния, отвечающие одному возбужденному и невозбужденному атомам; и верхнее состояние $|u\rangle$ – два возбужденных атома. Данные состояния связаны с исходным базисом для двух (первоначально невзаимодейству-

ющих) двухуровневых атомов следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |g\rangle &= |1, 1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle, \\
 |s\rangle &= (|1, 2\rangle + |2, 1\rangle)/\sqrt{2}, \\
 |a\rangle &= (|1, 2\rangle - |2, 1\rangle)/\sqrt{2}, \\
 |u\rangle &= |2, 2\rangle \equiv |2\rangle \otimes |2\rangle.
 \end{aligned}$$

Без учета взаимодействия между атомами состояния $|s\rangle$ и $|a\rangle$ вырождены, т.е. соответствуют одному уровню энергии. Напомним, что состояние $|a\rangle$ отвечает одномерному представлению T^0 , а состояния $|g\rangle$, $|s\rangle$ и $|u\rangle$ – трехмерному представлению T^1 .

Вводя матричные элементы матрицы плотности по отношению к определенному выше базису, получаем систему 16 обыкновенных дифференциальных уравнений. Если отбросить диполь-дипольное взаимодействие и считать, что оба атома находятся в одинаковых условиях, то в данном базисе система 16 уравнений сводится к 1 + 3 независимым уравнениям, описывающим кооперативное поведение атомов.

При проведении расчетов была выбрана система единиц, в которой постоянная Планка и скорость света равны единице, кроме того, единичный частотный интервал выбран определяемым величиной константы релаксации $\gamma = \gamma_{11}$. Все остальные величины, входящие в уравнения для матрицы плотности, тогда являются безразмерными. В расчетах варьировались частота Раби $\Omega_R = |\vec{d}_{1\rightarrow 2} \vec{E}_0| = |\Omega_1| = |\Omega_2|$, расстояние между атомами L и длительность электромагнитного импульса τ (ограничивающая $E_0(t)$ выбиралась в виде гауссовой функции $E_0 \exp[-(t/\tau)^2]$). Численные значения при расчетах брались по порядку величины и основывались на соответствующих значениях, характерных для физики одноатомных мазеров [52].

Были рассчитаны временные зависимости вероятностей возбуждения симметричных и антисимметричных состояний для широкого круга значений физических параметров. На Рис. 6.5 (а-г) приведены расчеты соответствующих вероятностей только для двух случаев расположения атомов, когда $\cos(KL) = \pm 1$ и при следующих значениях параметров модели: $\Omega_R = 100$, $\Delta\omega = 0, 01$, $\tau = 3, 14$. Показан лишь результат для нулевой температуры термостата.

Из выполненных расчетов можно сделать следующие выводы:

Для заселения суперпозиционных (запутанных) состояний с достаточно высокой вероятностью необходимо обеспечить, как можно точнее, соблюдение "одинаковости" условий, в которые помещены атомы.

С ростом амплитуды поля (частоты Раби) заселение симметричного состояния предваряется режимом высокочастотных колебаний, тогда как для антисимметричного состояния таких колебаний нет, если $\cos(KL) = +1$; для

противоположного знака $\cos(KL)$ антисимметричное и симметричное состояния "меняются местами".

С увеличением длительности импульса поля время жизни созданных запутанных состояний (как симметричного, так и антисимметричного) растет приблизительно пропорционально длительности импульса. Симметричное состояние в асимптотике при $t \rightarrow \infty$ исчезает полностью, тогда как антисимметричное состояние распадается не полностью и вероятность обнаружить в нем квантовую систему выходит на некоторое стационарное значение.

Итак, установлено, что с помощью воздействия на атомы импульсом внешнего классического поля можно осуществлять достаточно эффективный мониторинг квантовых суперпозиционных состояний. Полученные результаты могут быть полезны для целей т.н. "квантовой инженерии" однако требуется дополнительное исследование вопроса о наиболее оптимальном генерировании и детектировании суперпозиционных и когерентных состояний. Для этого необходимо изучить "обратную задачу" нахождения параметров внешнего воздействия по заданному атомному когерентному состоянию с учетом присутствия диссипативного внешнего окружения.

Глава 9

Релаксация осцилляторных систем, статистика фотонов, сжатие и квантовые ковры

9.1 Релаксация гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами в "сжатом" термостате

В разделе, посвященном релаксации двухуровневых системы в фотонном резервуаре (термостате) со сжатыми флуктуациями, говорилось об актуальности таких задач. В этом разделе будут рассмотрены вопросы описания релаксации квантовых систем, имеющих некомпактную группу динамической симметрии, также на примере взаимодействия со сжатым термостатом.

Принципиальным моментом построения точных решений рассмотренных выше задач о когерентной релаксации был тот, что модельные динамические квантовые подсистемы имели конечное число состояний и, вследствие этого, гильбертово пространство состояний таких систем было конечномерным, что допускало описание с помощью представлений компактных групп $SU(n)$ [8]. Это приводило к тому, что при нахождении точного решения в виде разложения по базису этого пространства, число членов в разложении было конечным (см. (6.60)) и при $n \leq 3$ допускало точное аналитическое решение. Заметим также, что алгебра дифференциальных операторов, входящих в уравнения Фоккера - Планка (6.21) была незамкнутой, и $SU(n)$ являлась группой динамической симметрии свободных атомных подсистем, а не соответствующих уравнений Фоккера-Планка. КС этих групп были удобным базисом для нахождения представления генераторов этих групп дифференциальными операторами.

Противоположная ситуация при рассмотрении в качестве динамических подсистем осцилляторных моделей, имеющих важное значение в квантовой оптике. Осцилляторные модели и уравнение Фоккера-Планка, описывающие их релаксацию, имеют некомпактную группу динамической симметрии [4, 6]

и поэтому метод разложения по собственным функциям оператора Лапласа - Бельтрами (мы оставляем в стороне проблему нахождения таких функций в случае некомпактных пространств) для нахождения точного решения не применим, т.к. приводит к бесконечному числу членов в разложениях типа (6.60). Однако, в этом случае, алгебра операторов УФП является замкнутой и для нахождения пропагатора можно применить метод "распутывания" операторных экспонент.

Рассмотрим вначале гармонический осциллятор с одноквантовыми переходами, свободный гамильтониан которого

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\hat{a}^+\hat{a}, \quad (9.1)$$

помещен в термостат со "сжатыми" флуктуациями электромагнитного поля,

$$\hat{H}_T = \sum \hbar\omega_j\hat{b}_j^+\hat{b}_j, \quad (9.2)$$

с которым он слабо взаимодействует. Гамильтониан взаимодействия в приближении вращающейся волны дается выражением

$$\hat{H}_{int} = \sum_j \hbar(f_j\hat{a}^+\hat{b}_j + \bar{f}_j\hat{a}\hat{b}_j^+). \quad (9.3)$$

Запишем операторное кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности, описывающее релаксацию гармонического осциллятора с одноквантовыми переходами в термостате со сжатыми флуктуациями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left[(\mathcal{N} + 1)(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}) + \mathcal{N}(2\hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^+) - \right. \\ \left. - \mathcal{S}(2\hat{a}^+\hat{\rho}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^+\hat{a}^+) - \bar{\mathcal{S}}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}) \right], \end{aligned} \quad (9.4)$$

где \hat{a}^+, \hat{a} — операторы переходов между соседними уровнями осциллятора, разность энергии между которыми $\Delta E = \hbar\omega_0$, остальные обозначения совпадают с обозначениями уравнения (2.30).

Используя свойства глауберовских КС

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a} = \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}} + \alpha\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \\ |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^+ = \bar{\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad \hat{a}^+|\alpha\rangle\langle\alpha| = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \bar{\alpha}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|, \end{aligned}$$

уравнение (9.4) сводится к УФП для \mathcal{P} -символа матрицы плотности

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}\bar{\alpha} + 2\mathcal{N}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\bar{\alpha}} - \mathcal{S}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \bar{\mathcal{S}}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\alpha}^2} \right) \mathcal{P}. \quad (9.5)$$

Запишем (9.5) в виде

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \hat{L} \mathcal{P}, \quad (9.6)$$

где

$$\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2 = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} - \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} - \bar{\mathcal{S}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} \right).$$

Имеют место следующие коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \right] &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}; & \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \right] &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}; \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2}, \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} \right] &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2}; & \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

соответствующие алгебре Ли полупрямого произведения $W(1) \wedge Sp(2, R) \approx W(1) \wedge SU(1, 1)$, которая в данном случае и является группой динамической симметрии УФП. Так как оператор \hat{L} уравнение Фоккера-Планка (9.5) явно от времени не зависит и операторы \hat{L}_1 и \hat{L}_2 коммутируют (это следует из (9.7)), нахождение пропагатора уравнения (9.5)

$$\mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) \equiv \langle \alpha | e^{\frac{\gamma t}{2} \hat{L}} | \alpha_0 \rangle = \int \langle \alpha | e^{\frac{\gamma t}{2} \hat{L}_1} | \alpha_1 \rangle \frac{d\alpha_1 d\bar{\alpha}_1}{\pi} \langle \alpha_1 | e^{\frac{\gamma t}{2} \hat{L}_2} | \alpha_0 \rangle. \quad (9.8)$$

сводится к более простой задаче: нахождению пропагатора

$$\mathcal{K}_1(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1; 0) = \langle \alpha | e^{\frac{\gamma t}{2} \hat{L}_1} | \alpha_1 \rangle \quad (9.9)$$

уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} - \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \mathcal{P}_1. \quad (9.10)$$

(равенство $\hat{L}_1 = \hat{L}_2$ автоматически приводит к выражению для $\langle \alpha_1 | e^{\frac{\gamma t}{2} \hat{L}_2} | \alpha_0 \rangle$).

Представим оператор $e^{\frac{\gamma t}{2} \hat{L}_1}$ в "распутанном" виде

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{\gamma t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} - \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \right] &= \exp \left[\beta(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \right] \exp \left[\xi(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \\ &\exp \left[\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \right], \end{aligned} \quad (9.11)$$

дифференцируя которое по времени, получим равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} - \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) &= \dot{\beta}(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} e^{\beta(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}} e^{\xi(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}} e^{\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha} + \\ &+ e^{\beta(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}} \dot{\xi}(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} e^{\xi(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}} e^{\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha} + e^{\beta(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}}} e^{\xi(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}} \dot{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha e^{\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Используя (5.7) и формулу Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} \xi^2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (9.13)$$

выражение (5.12) приводится

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} - S \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) = \\ & = \dot{\beta}(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} + \dot{\xi}(t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \dot{\alpha}(t) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} + 2\xi \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Из (9.14) следует система уравнений для неизвестных

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{\gamma}{2}, \\ \dot{\beta} + \dot{\alpha}\beta = \frac{\gamma}{2} \mathcal{N}, \\ \dot{\xi} + 2\dot{\alpha}\xi = -\frac{\gamma}{2} S, \end{cases} \quad (9.15)$$

которая имеет следующее решение:

$$\alpha(t) = \frac{\gamma t}{2}; \quad \beta(t) = \mathcal{N} \left(1 - e^{-\frac{\gamma t}{2}} \right); \quad \xi(t) = -\frac{S}{2} \left(1 - e^{-\gamma t} \right). \quad (9.16)$$

Вычисление по (9.8), с учетом (9.11), (9.16) и использованием промежуточного базиса (7.19), приводит к следующему выражению для пропагатора УФП (9.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) = & \frac{1}{(1 - e^{-\gamma t}) \sqrt{\mathcal{N}^2 - S\bar{S}}} \exp \left[- \frac{(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}})}{(1 - e^{-\gamma t}) \left(\mathcal{N} - \frac{S\bar{S}}{\mathcal{N}} \right)} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{S}}{2} \frac{(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}})^2}{(1 - e^{-\gamma t}) (\mathcal{N}^2 - S\bar{S})} - \frac{S}{2} \frac{(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}})^2}{(1 - e^{-\gamma t}) (\mathcal{N}^2 - S\bar{S})} \right]. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Если сжатие в термостате отсутствует ($S = \bar{S} = 0$), (9.18) приводит к хорошо известному выражению для пропагатора гармонического осциллятора, релаксирующего в обычном термостате [6]

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) = \\ & = \frac{1}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t})} \exp \left[- \frac{(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}})}{\langle \nu \rangle (1 - e^{-\gamma t})} \right]. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Явный вид пропагатора (9.17) позволяет определить двухвременную корреляционную функцию $\langle \hat{a}^+(t)\hat{a}(0) \rangle$.

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ осциллятор находился в чистом когерентном состоянии $|\alpha_0\rangle$ с начальной матрицей плотности $\hat{\rho}(0) = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$, P -символ которой $\mathcal{P}(\alpha', \bar{\alpha}') = \delta_2(\alpha' - \alpha_0)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^+(t)\hat{a}(0) \rangle &= \int d\mu(\alpha) \langle \alpha | \hat{a}^+ | \alpha \rangle e^{i\omega_0 t} \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha', \bar{\alpha}'; 0) \mathcal{P}_{\hat{a}\hat{\rho}(0)}(\alpha', 0) d\mu(\alpha') = \\ &= \int \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{\pi} \frac{d\alpha' d\bar{\alpha}'}{\pi} e^{i\omega_0 t} \bar{\alpha} \alpha' \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha', \bar{\alpha}'; 0) \delta_2(\alpha' - \alpha_0) = \\ &= e^{i\omega_0 t} \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{\pi} \bar{\alpha} \alpha_0 \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) = \alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2} + i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

и форма контура линии излучения

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

не зависит от величины сжатия, что отличает полученный результат от результата (6.50) для двухуровневой системы.

9.2 Кинетика параметрического осциллятора в термостате со сжатыми флуктуациями

Квантовый параметрический осциллятор является простой моделью, позволяющей описать генерацию света с неклассическими свойствами. Особенно интересной является возможность исследовать на этом примере генерацию сжатых состояний, об исключительно важных применениях которых в оптических системах связи отмечалось ранее.

Чтобы показать, как возникают в этой модели сжатые состояния, рассмотрим простой случай — вырожденный параметрический усилитель, который задан гамильтонианом

$$\hat{H}(t) = \omega_0 \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \lambda \left(\hat{a} \hat{a} e^{2i\omega t} + \hat{a}^+ \hat{a}^+ e^{-2i\omega t} \right), \quad (9.20)$$

где $\omega \approx \omega_0$ и второе слагаемое описывает процесс генерации второй гармоники с параметром связи λ в среде с кубической нелинейностью. Поле накачки на частоте ω предполагается классическим.

Оператор эволюции этой системы за малый интервал времени Δt в представлении взаимодействия имеет вид оператора Столера

$$U(t + \Delta t, t) \approx \exp \left(\frac{1}{2} \xi \hat{a}^+ \hat{a}^+ - \frac{1}{2} \bar{\xi} \hat{a} \hat{a} \right), \quad (9.21)$$

$\xi = -2i\lambda\Delta t \exp[-2i(\omega - \omega_0)t]$. Поэтому, если в момент времени t система находилась в вакуумном состоянии, то в момент $t + \Delta t$ она перейдет в сжатое состояние.

В условиях реального эксперимента квантовая система всегда взаимодействует с другой большой системой — термостатом, который поглощает ее энергию, что приводит к возникновению шума, так как термостат часть энергии возвращает системе.

Поведение динамической подсистемы с гамильтонианом (9.20), находящейся в "сжатом" термостате, подчиняется УФП

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = & \left\{ \lambda \left[e^{-2i(\omega_0 - \omega)t} \left(2z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) + e^{2i(\omega_0 - \omega)t} \left(2\bar{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \mathcal{N} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{\mathcal{S}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] \right\} \mathcal{P} \equiv \hat{L} \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Дифференциальный оператор \hat{L} уравнения Фоккера-Планка (9.22) является линейной комбинацией операторов, образующих 7-мерную замкнутую разрешимую подалгебру Ли группы $Sp(4, R)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial z} z, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] = \left[\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] = \left[z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}, \frac{\partial}{\partial z} z \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} z, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] &= -2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] = -2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial z} z, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = -\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] &= -\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \left[\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] = -2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \left[z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] = -2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ \left[z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] &= -\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}, \quad \left[\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \left[\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} z \right] = \bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \left[z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right] &= z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \left[z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} z \right] = -z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \left[\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right] = -\bar{z} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \left[z \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \bar{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} z - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Решение уравнения (9.22) можно искать в виде

$$\mathcal{P}(t) = \hat{U}(t, t_0) \mathcal{P}(t_0), \quad (9.24)$$

где оператор эволюции $\hat{U}(t, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{L} \hat{U}, \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}. \quad (9.25)$$

Его удобно представить в "распутанном виде"

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) = & \exp \left[a(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{a}(t) \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + b(t) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right] \times \\ & \times \exp \left[d(t) \frac{\partial}{\partial z} z + \bar{d}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right] \exp \left[r(t) z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \bar{r}(t) \bar{z} \frac{\partial}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Подставляя (9.26) в (9.25) получаем систему из семи дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{a} + 2a\dot{d} + be^{\bar{d}-d} \dot{r} &= \frac{1}{2} \gamma \mathcal{S} + \lambda e^{2i(\omega_0-\omega)t}, \\ \dot{\bar{a}} + 2\bar{a}\dot{\bar{d}} + be^{d-\bar{d}} \dot{\bar{r}} &= \frac{1}{2} \gamma \bar{\mathcal{S}} + \lambda e^{-2i(\omega_0-\omega)t}, \\ \dot{b} + (\dot{d} + \dot{\bar{d}})b + 2\bar{a}e^{\bar{d}-d} \dot{r} + 2ae^{d-\bar{d}} \dot{\bar{r}} &= \frac{1}{2} \gamma \mathcal{N}, \\ \dot{r}e^{d-\bar{d}} = 2\lambda e^{2i(\omega_0-\omega)t}, \quad \dot{\bar{r}}e^{d-\bar{d}} &= 2\lambda e^{-2i(\omega_0-\omega)t}, \\ \dot{d} = \dot{\bar{d}} &= \frac{1}{2} \gamma. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Начальные условия $t_0 = 0 : a(0) = \bar{a}(0) = b(0) = d(0) = \bar{d}(0) = r(0) = \bar{r}(0) = 0$ следуют из начального условия для оператора эволюции $\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}$ и (5.26). Коэффициенты r, \bar{r}, d, \bar{d} находятся тривиально:

$$d(t) = \bar{d}(t) = \frac{1}{2} \gamma t, \quad (9.28)$$

$$r(t) = i\lambda \frac{1 - e^{2i(\omega_0-\omega)t}}{\omega_0 - \omega}, \quad \bar{r}(t) = -i\lambda \frac{1 - e^{-2i(\omega_0-\omega)t}}{\omega_0 - \omega}.$$

В результате система (9.27) сводится к трем линейным зацепленным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a} + \gamma a + 2\lambda e^{-2i(\omega_0-\omega)t} b &= \frac{1}{2} \gamma \mathcal{S} + \lambda e^{2i(\omega_0-\omega)t}, \\ \dot{\bar{a}} + \gamma \bar{a} + 2\lambda e^{2i(\omega_0-\omega)t} b &= \frac{1}{2} \gamma \bar{\mathcal{S}} + \lambda e^{-2i(\omega_0-\omega)t}, \\ \dot{b} + \gamma b + 4\lambda \left[e^{-2i(\omega_0-\omega)t} \bar{a} + e^{2i(\omega_0-\omega)t} a \right] &= \frac{1}{2} \gamma \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Если расстройка $\omega_0 - \omega$ равна нулю, то решение системы (9.29) легко находится

$$1) \lambda \neq \frac{1}{4} \gamma$$

$$a(t) = (\gamma^2 - 16\lambda^2)^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{2} \gamma^2 \mathcal{S} + \gamma\lambda - \gamma\lambda \mathcal{N} \right) (1 - e^{-\gamma t} \text{ch} 4\lambda t) + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \gamma^2 \mathcal{N} - 2\gamma \mathcal{S} - 4\lambda^2 \right) e^{-\gamma t} sh4\lambda t + \\ + \frac{1}{2} \gamma (\bar{\mathcal{S}} - \mathcal{S}) \left[\frac{8\lambda^2}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma t} (1 - ch4\lambda t) + \frac{\lambda}{2} e^{-\gamma t} sh4\lambda t \right] \Bigg\},$$

$$b(t) = (\gamma^2 - 16\lambda^2)^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{2} \gamma^2 \mathcal{N} - 2\gamma \lambda (\mathcal{S} + \bar{\mathcal{S}}) - 8\lambda^2 \right) (1 - e^{-\gamma t} ch4\lambda t) + \right. \\ \left. + \left(4\gamma \lambda - 2\gamma \lambda \mathcal{N} + \frac{1}{2} \gamma^2 (\bar{\mathcal{S}} + \mathcal{S}) \right) e^{-\gamma t} sh4\lambda t \right\},$$

$$2)\lambda = \frac{1}{4}\gamma$$

$$a(t) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4} \mathcal{N} + \frac{1}{2} \mathcal{S} + \frac{1}{4} \right) (1 - e^{-2\gamma t}) + \left(\mathcal{S} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathcal{N} \right) \gamma t + \right. \\ \left. + (\bar{\mathcal{S}} - \mathcal{S}) \left(e^{-\gamma t} - \frac{1}{4} e^{-2\gamma t} - \frac{3}{4} \right) \right],$$

$$b(t) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} (\mathcal{N} + \mathcal{S} + \bar{\mathcal{S}} + 1) (1 - e^{-2\gamma t}) + (\mathcal{N} - \mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}} - 1) \gamma t \right].$$

В общем случае система уравнений (9.29) легко решается численными методами. Поскольку уравнение (9.22) является параболическим, его решение можно записать как

$$\mathcal{P}(z, \bar{z}, t) = \int \mathcal{K}(z, \bar{z}, t | z', \bar{z}', 0) \mathcal{P}_0(z', \bar{z}') d^2 z', \quad (9.30)$$

где $\mathcal{P}_0(z', \bar{z}')$ — символ начальной матрицы плотности $\hat{\rho}(0)$, а $\mathcal{K}(z, \bar{z}, t | z', \bar{z}', 0)$ — пропагатор уравнения (9.22).

С другой стороны, пропагатор является матричным элементом оператора эволюции УФП и в соответствии с формулой (9.26) для $\rho_0 = |z_0 \rangle \langle z_0|$ и $\mathcal{P}_0(z', \bar{z}') = \delta(z' - z_0) \delta(\bar{z}' - \bar{z}_0)$ приводится к виду

$$\mathcal{K}(z, \bar{z}, t | z_0, \bar{z}_0, 0) = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^{-1} \exp \left[- \frac{|\alpha f + \beta \bar{f}|^2}{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2} \right], \quad (9.31)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - |a|^2}}, \quad \beta = -\frac{a}{\alpha},$$

$$f = z - z_0 e^{-d} ch|r| - \bar{z}_0 e^{-d} \frac{|r|}{r} sh|r|.$$

Если $\omega = \omega_0$, то

$$f = z - z_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} ch2\lambda t - \bar{z}_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} sh2\lambda t.$$

Из формулы (9.31) видно, что пропагатор имеет вид гауссова пакета на комплексной плоскости, причем в случае нулевой расстройки ($\omega = \omega_0$) все его параметры известны в аналитическом виде. Анализ выражения (9.31) при $\omega = \omega_0$ показывает, что центр пакета движется либо к центру плоскости, если $\lambda < \frac{1}{4}\gamma$ ("зона устойчивости" параметрические осцилляции затухают), либо уходит на бесконечность, если $\lambda > \frac{1}{4}\gamma$ ("зона резонанса" усиление параметрических осцилляций в системе). Параметру $\lambda = \frac{1}{4}\gamma$ соответствует граница зон устойчивости и резонанса. Центр пакета здесь также уходит на бесконечность.

Важно отметить, что пакет имеет разную ширину в зависимости от направления движения от его центра (т.е. сечение пакета представляет собой в общем случае эллипс, полуоси которого изменяются с течением времени, а не круг, как в случае релаксации обычного осциллятора). Последнее является проявлением генерации в системе сжатых состояний. Влияние сжатия термостата проявляется, в частности, в том, что сжатие (т.е. деформация пакета) усиливается (в том числе и ниже порога появления параметрических осцилляций $\lambda = \frac{1}{4}\gamma$), если фазу комплексного параметра \mathcal{S} выбрать равной π , 3π и т.д. С этой точки зрения использование термостата, обладающего сжатыми флуктуациями, представляется перспективным.

9.3 Квантовые суперпозиции и фракталы

Хорошо известно, что главное, что отличает квантовую механику от классической — наличие в ней принципа суперпозиции. Квантовые системы могут находиться в линейной суперпозиции собственных состояний, отвечающих, например, разным уровням энергии. Вследствие этого, в квантовом состоянии "замешаны" различные классические реальности: спин может быть одновременно потенциально "ориентирован" вдоль разных пространственных направлений; движущаяся частица может одновременно "находиться" в разных местах пространства и т.п. Когда выполняется измерение, только одна из возможностей актуализируется, и квантовое состояние проектируется на соответствующее ей собственное состояние (т. н. коллапс волновой функции). Новый всплеск интереса к генерации, динамике и разрушению суперпозиционных состояний вызван разработкой схем квантовых вычислений и проблемой создания квантовых компьютеров.

В этом параграфе изучены примеры построения фотонных фракталов Берри и Войчика. Исследовано поведение фрактальной размерности этих объектов при переходе от координатного представления к импульсному и когерентному представлениям. Вычислены среднее число квантов и дисперсия изолированного квантового гармонического осциллятора, приготовленного в фрактальном состоянии и взаимодействующего с другим осциллятором, находящемся в вакуумном состоянии. На основе выполненного компьютерного моделирования обнаружено – несохранение фрактальной размерности квантовых ковров при переходе от одного квантовомеханического представления к другому.

Фракталы известны в математике и физике как множества с нецелочисленной размерностью. Они возникают в динамических системах с хаотическим поведением, являются хорошими моделями многочисленных явлений в статистической механике, химии и биологии.

В работе М. Берри [86] были найдены решения уравнения Шредингера для частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, для которых временная развертка плотности вероятности $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ обладает необычными и неожиданными фрактальными свойствами. Берри показал, что если начальная плотность вероятности в пределах потенциальной ямы является константой, то почти для всех последующих моментов времени поверхность функции плотности вероятности характеризуется некоторой фрактальной размерностью. Двумерные построения пространственно - временной плотности вероятности Берри назвал *квантовыми коврами* или *квантовыми фракталами*. Оказалось, что квантовые фракталы Берри можно конструировать не только теоретически, но и наблюдать экспериментально.

Недавно в работе [88] были получены более общие конструкции фрактальных решений уравнения Шредингера справедливые для большого класса квантовых задач.

Здесь дан обзор работ по теории квантовых фракталов и проведено изучение их свойств, которое ограничено двумя задачами, первая из которых – исследование поведения фрактальной размерности при переходе от координатного представления к импульсному и глауберовскому когерентному представлениям, а вторая – в вычислении основных параметров гармонического осциллятора находящегося во фрактальном состоянии.

9.3.1 Квантовые ковры

Фракталы были найдены не только в классической, но и квантовой физике. Майкл Берри был первым, кто нашел фрактальные решения уравнения Шредингера [86]. Он сконструировал *квантовый фрактал в ящике* из решения уравнения Шредингера для частицы в бесконечной потенциальной

яме. Предполагая, что начальная плотность вероятности остается неизменной в потенциальной яме, $|\Psi(x, t = 0)|^2 = const$, он показал, что почти для всех последующих моментов времени, $t > 0$, функция плотности вероятности $P_t(x) = |\Psi(x, t)|^2$ имеет фрактальную природу и характеризуется фрактальной размерностью $D_x = D + 1/2 > 1$, где D – это (Евклидова) размерность пространства. Волновые функции Берри *изначально* разрывные на границах потенциальной ямы. Эта начальная разрывность является причиной того, что волновая функция становится фрактальной.

В [88] получена общая конструкция фрактальных решений уравнения Шредингера, справедливых для большого класса одно-, двух- и трехмерных квантовых задач. Здесь ниже будет продемонстрировано их использование на общеизвестных примерах (бесконечная потенциальная яма, линейный потенциал и гармонический осциллятор). Так как все эти задачи интегрируемы, предлагаемый метод не основан на хаотической динамике. Более того, полученные фрактальные волновые функции всюду непрерывны.

Рассмотрим решения уравнения Шредингера

$$i\partial_t\Psi(x, t) = -\nabla^2\Psi(x, t) \quad (9.32)$$

для частицы в одномерной бесконечной потенциальной яме. Общие решения удовлетворяющие граничным условиям $\Psi(0, t) = \Psi(\pi, t) = 0$, имеют вид

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-in^2t}, \quad (9.33)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) \Psi(x, 0) dx. \quad (9.34)$$

В [86] Майкл Берри рассмотрел решение уравнения Шредингера для частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, эволюционирующее от пространственно однородного начального состояния. Он догадался, что почти для всех времен график пространственной плотности вероятности $P(x, t = const)$ является фракталом с дробной размерностью $D_x = D + 1/2$. Почти для всех позиций $x = (x_1, \dots, x_D)$ временная плотность вероятности $P(x = const, t)$ это фрактал с фрактальной размерностью $D_t = 7/4$. В случае, когда клетка имеет фрактальные границы с размерностью $D - 1 + \gamma$ ($\leq \gamma < 1$), он предположил, что соответствующие размерности $D_x = D + (1 + \gamma)/2$ и $D_t = (7 + \gamma)/4$.

В одномерной яме (9.33) функции Берри имеют вид

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{для } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{для } x \notin (0, \pi). \end{cases} \quad (9.35)$$

Из (9.34) получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(nx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \begin{cases} 0 & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi\sqrt{\pi n}} & n = 2k + 1. \end{cases} \quad (9.36)$$

Следовательно,

$$\Psi_{Berry}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}(2k+1)} \sin[(2k+1)x] e^{-i(2k+1)^2 t}. \quad (9.37)$$

На рисунке 9.1b. показана пространственно-временная плотность, построенная из плотности вероятности $P(x, t)$, которая по предложению Шляйха [87] называется *фрактальный квантовый ковер* по аналогии с термином квантовый ковер, используемым Берри. Трехмерное построение плотности вероятности $P(x, 0)$ показано на рисунке 9.1a. Сечение плотности вероятности по пространству (при $t = 1$) и по времени (при $x = 1$) представлены на рис. 9.1c. и 9.1d., показывающих схожее поведение пространственного и временного сечений.

Однако Войчик и др. обнаружили серьезные проблемы в примере Берри.

Во-первых, квантовая система, находящаяся в состоянии $\Psi(x, t)$ имеет бесконечную энергию, при этом $\Psi(x, t)$ разрывна всюду на плотном подмножестве моментов времени. Но настоящий фрактал должен удерживать самоподобие до сколь угодно мелких масштабов. Это означает, что волновая функция должна осциллировать при любом разрешении, поэтому она должна содержать собственные функции неограниченно больших энергий с весами достаточными для того, чтобы Ψ стала не дифференцируемой, это ведет к стремлению средней энергии, запасенной в системе, к бесконечности. Поэтому интересно построить непрерывные фрактальные волновые функции.

Во-вторых, размерность физически важной плотности вероятности выведена из размерностей действительной и мнимой частей волновой функции, без учета того, что они составляют единый объект, так, что нельзя проверить как это повлияет на размерность графика $|\Psi|^2$.

Для того, чтобы исправить эти недостатки Войчик и др. выбрали иной класс примеров волновых функций. Для вычисления размерностей графиков функций они используют метод δ -осцилляций или вариаций [91].

Одним из особенностей примера Берри является разрывность его волновой функции. В работе [88] построены фрактальные решения уравнения Шредин-

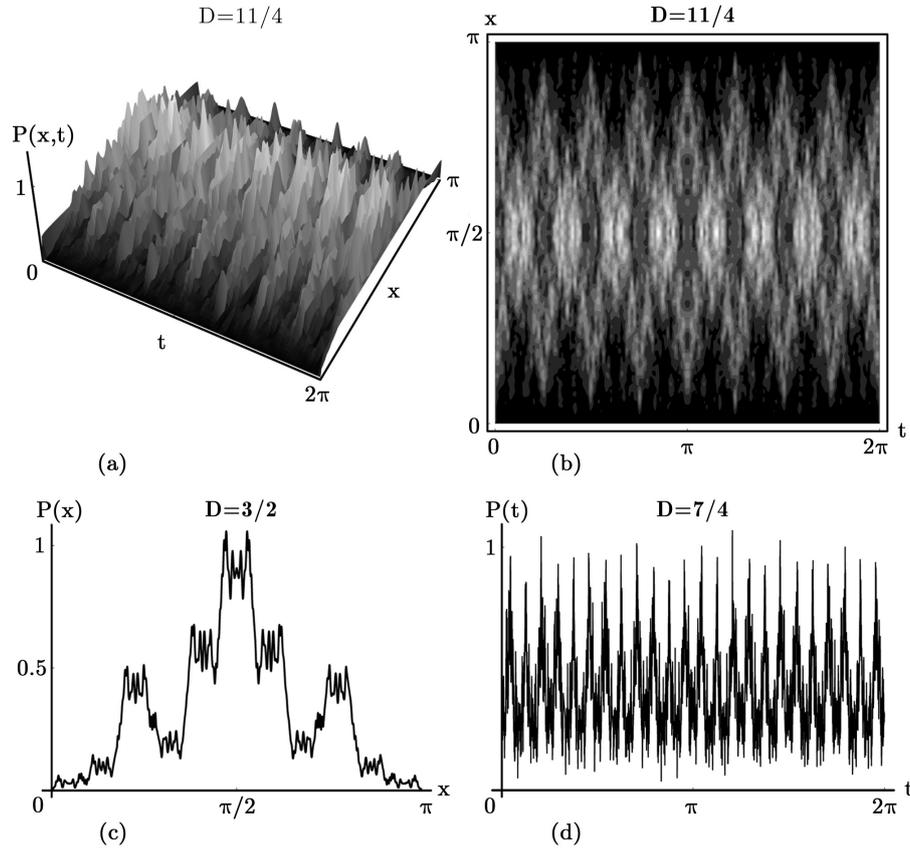


Рис. 9.1. Фрактальный квантовый ковер для частицы в прямоугольной потенциальной яме (а) и (b) (большая освещенность означает большую вероятность), пространственное ($t = 1$) (c) и временное ($x = 1$) (d) сечения, полученные суммированием 200 слагаемых в (9.37)

гера (9.32), которые всюду непрерывны и могут быть обобщены на случай нетривиальных потенциалов с двумя классическими поворотными точками.

Приведем в краткой форме основные результаты из [88].

Начнем с известной в математике функции Вейерштрасса:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sin(a^n x), \quad a > 1 > b > 0, \quad ab \geq 1 \quad (9.38)$$

которая часто используется в качестве примера непрерывной, нигде не дифференцируемой функции. Она проявляет фрактальные свойства, а клеточная размерность ее графика $D_W = 2 - \left| \frac{\ln a}{\ln b} \right|$. Неаналитичность $W(x)$ связана с медленным изменением числа ее осцилляций osc_W на интервале τ . Известно, что если $osc_W \approx \tau^k$ для малых τ , где k называется *коэффициентом Холдера*, то фрактальная размерность это $\dim W(x) = 2 - k$. Для функции Вейерштрасса $osc_W \approx \tau^{-\ln b / \ln a}$.

Построим, по аналогии с функцией Вейерштрасса, фрактальные волновые функции в виде

$$\Psi_M(x, t) = N_M \sum_{n=0}^M q^{n(s-2)} \sin(q^n x) e^{-iq^{2n}t}, \quad (9.39)$$

где $q = 2, 3, \dots, s \in (0, 2)$.

Случай, когда M конечно является физически интересным, поскольку тогда волновая функция Ψ_M является решением уравнения Шредингера. В пределе

$$\Psi(x, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \Psi_M(x, t) = N \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(s-2)} \sin(q^n x) e^{-iq^{2n}t}, \quad (9.40)$$

непрерывна, но нигде не дифференцируема. Она представляет вектор в пространстве Гильберта, не принадлежащий области Гамильтониана H . В то же время, он не принадлежит и области унитарного оператора эволюции. Так же эта функция может быть рассмотрена как решение уравнения Шредингера в слабом смысле: для любого фиксированного ортонормированного базиса $\{|\varphi_n\rangle\}$ мы имеем

$$\langle H\varphi_n | \Psi(t) \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_n | \Psi(t) \rangle.$$

Заметим, что (9.40) сходится, если

$$|q^{s-2}| < 1 \equiv s < 2.$$

Позже будет показано, что плотность вероятности (9.40) проявляет признаки фрактала при $s > 0$. Тогда для s интерес представляет область $(0, 2)$. Нормировочная константа равна

$$N = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1 - q^{2(s-2)})}.$$

Войчик показал, что не только волновая функция, но и физически важная плотность вероятности проявляет фрактальные свойства. Это не очевидно, так как $|\Psi(x, t)|^2$ – сумма квадратов действительной и мнимой частей, графики которых обычно имеют одинаковые размерности D , а размерность графика суммы функций может быть чем-то от 1 до D [91].

Полученные Войчиком результаты можно кратко суммировать в виде следующей теоремы:

Пусть $P(x, t)$ определяет плотность вероятности волновых функций вейерштрассовой формы(9.40). Тогда

1. в начальный момент времени $t = 0$ плотность вероятности, $P_0(x) = P(x, 0)$, образует фрактальный график по пространственной переменной (то есть пространственный фрактал) размерности $D_x = \max\{s, 1\}$;

2. размерность D_x графика $P_t(x)$ не меняется со временем;
3. почти для всех x внутри потенциальной ямы плотность вероятности, $P_x(x) = P(x = \text{const}, t)$, образует фрактальный график по переменной времени (то есть фрактал времени) размерности $D_t(x) = D_t = 1 + s/2$;
4. для дискретного, плотного множества точек x_d , $P_{x_d}(t) = P(x_d, t)$ сглаживается, а значит $D_t(x_d) = 1$;
5. для четных q средняя скорость $\frac{d\langle x \rangle}{dt}(t)$ – фрактал с размерностью графика равной $D_v = \max\{(s + 1)/2, 1\}$;
6. поверхность $P(x, t)$ имеет размерность $D_{xt} = 2 + s/2$.

Доказательство этой теоремы представлено в работе [91].

На рис. 9.2b показан типичный фрактальный квантовый ковер (светлые области означают более высокую вероятность), полученный для $q = 2$, $s = 3/2$, и его срез по времени и пространству. Периодичность во времени с периодом $2\pi/3$, видимая на ковре, связана со структурой спектра частот $\omega_{m,k} = 3(4^{m-1} + \dots + 4^{m-k})$, $m = 1, \dots, \infty$, $k = 1, \dots, m$, фрактальной плотности вероятности $P(x, t)$ (см. [91]).

Размерности D_x и D_t – это размерности сечений ковра $P(x, t)$ по пространству (рис. 9.2c и 9.2d) и времени (рис. 9.2e).

Показатель Хелдера в направлении x равен $s - 2$ и в направлении времени t – $(2 - s)/2$, начиная с того момента, когда частота временных осцилляций $\exp(-iq^{2n}t)$ растет как q^{2n} . Для этого необходимо, чтобы ряды в выражении (9.40) были бесконечными. Это условие не выполняется в точках $x_d = k\pi/q^m$, ($k = 0, 1, \dots, q^m$), для которых ряды (9.39) состоят в основном из m слагаемых, и зависящая от времени $P_x(t)$ сглаживается ($D_t = 1$). Таким образом, $D_t(x) = \dim_B \text{graph} |\Psi(x = \text{const}, t)|^2$ образует разрывную функцию на $[0, \pi]$; почти для всех аргументов $D_t(x) = D_t = 1 + s/2$, она равна 1 для всюду плотного множества точек в интервале $\{k\pi/q^m\}$.

Фрактальные функции Войчика (9.40) суперпозицией бесконечного числа фоковских состояний, которое необходимое для генерации математических фракталов с бесконечным самоподобием. На практике всего несколько слагаемых могут привести к физически интересным эффектам. Вычислим среднее значение $\langle x \rangle$ и найдем среднюю скорость $v = d\langle x \rangle / dt$, не равную $\langle p \rangle / m$ для бесконечных рядов (9.40). Для физических фракталов также справедлива теорема Эренфеста и соотношение $\langle v \rangle = \langle p \rangle / m$. Прямым вычислением можно получить непрерывную функцию, которая для четных q равна

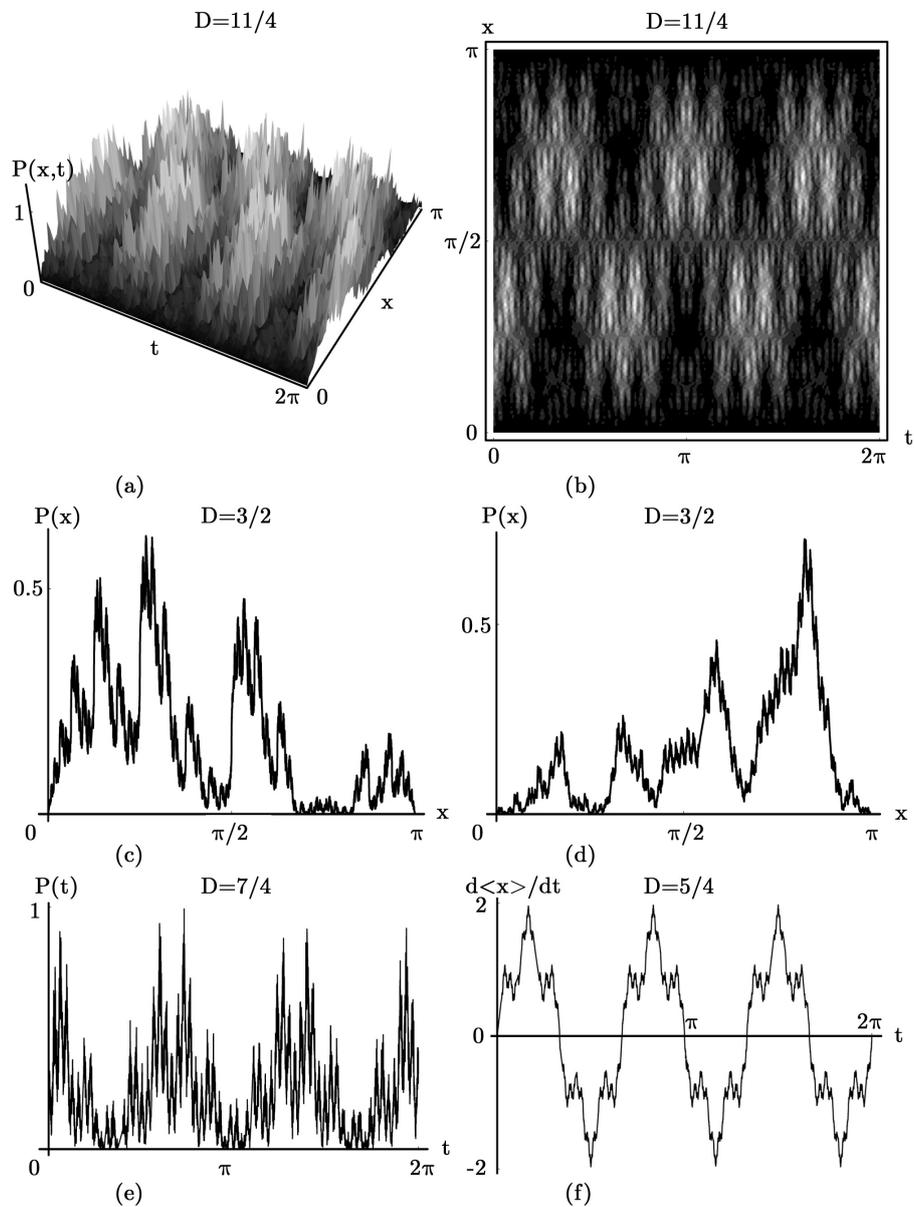


Рис. 9.2. Фрактальный квантовый ковер для частицы в прямоугольной потенциальной яме (a) и (b), пространственное ($t = 1$ (c) и $t = 1$ (d)) и временное ($x = 1$ (e)) сечения, средняя скорость (f), полученные суммированием 20 слагаемых в (9.39) при $q = 2$, $s = 3/2$

$$\langle x \rangle = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{\pi} (1 - q^{2(s-2)}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k(s-1)}}{(q^{2k} - 1)^2} \cos(q^{2k} - 1)t. \quad (9.41)$$

Это — полуфрактал (см. [91]), который начиная с его первой производной v продуцирует фрактальный график размерности

$D_v = \max \{(1 + s)/2, 1\}$ (рис. 9.2f). Для нечетных q , $\langle x \rangle = \pi/2$ и $D_v = 1$.

Причина этой специфической зависимости фрактальности средней скорости от четности q связана с очень необычным выбором начальной волновой функции. Необходимым условием того, чтобы график средней скорости был фракталом, является присутствие обоих четных собственных состояний. Для нечетных q все эти волновые функции нечетны (симметрия относительно $x = \pi/2$). Очевидно, если пытаться экспериментально получить состояния подобные тем, что были описаны выше, то нужно ожидать некоторые отклонения от формулы (9.40). Выделение отдельных четных состояний из состояний с различной четностью немедленно внесет фрактальность в график $\langle v \rangle$. Значит, можно предположить, что это типичная ситуация для любого q : график средней скорости частицы, описываемый медленно изменяемой функцией (9.40), будет фракталом с размерностью графика равной $D_v = \max \{(1 + s)/2, 1\}$.

Все три размерности, характеризующие фрактальный ковер $P(x, t)$, независимы, но связаны соотношением

$$D_t + D_v = D_x + 3/2, \quad (9.42)$$

в той области, где они нецелые ($s \in (1, 2)$).

Всесторонний анализ поведения фрактальной волновой функции в потенциальной яме можно найти в [91].

9.3.2 Фрактальные решения для гармонического осциллятора

Построим фрактальные решения уравнения Шредингера для одномерного гармонического осциллятора

$$i\partial_t \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \Psi(x, t). \quad (9.43)$$

Пусть $\varphi_n(x)$ образуют собственные функции этого гамильтониана, выраженные через полиномы Эрмита $H_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} 2^n n!}} H_n(x/\sqrt{2}) \exp(-x^2/4), \quad (9.44)$$

где x измеряется в единицах $\sqrt{\hbar/2m\omega}$.

Создадим следующую суперпозицию собственных состояний

$$\Psi(x, t) = N \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(s-3/2)} \varphi_{q^{2n}} e^{-i(q^{2n}+1/2)t} \quad (9.45)$$

с натуральными q и действительными $s \in (1, 3/2)$. На каждом фиксированном отрезке $[-b, b]$ собственные состояния с достаточно высокой энергией могут быть хорошо аппроксимированы формулой

$$\varphi_n(x) \sim n^{-1/4} \sin[\sqrt{n+1/2}x - (n-1)\pi/2], \quad (9.46)$$

которая следует из ВКБ-приближения. Такой же результат можно получить с помощью асимптотической формы полиномов Эрмита.

В результате, при больших n волновая функция (9.45) плотности вероятности принимает следующий вид:

$$\tilde{\Psi}(x, t) \approx \sum_{n=p}^{\infty} q^{n(s-2)} \sin(q^n x - \theta_{q^n}) \exp[-i(q^{2n} + 1/2)t]. \quad (9.47)$$

Расчеты, схожие со случаем бесконечной потенциальной ямы, позволяют получить размерность типичного сечения фрактального ковра $|\Psi(x, t)|^2$

$$D_x = s, \quad D_t = 1 + s/2 = 1 + D_x/2. \quad (9.48)$$

Заметим, что эти рассуждения верны для сколь угодно больших b . В то же время, чем больше b , тем больше нужно взять шагов в сумме, чтобы заметить фрактальную структуру. Пример квантового фрактального ковра для гармонического осциллятора представлен на рис 9.3.

Идея создания фрактала с помощью подходящих суперпозиций волновых функций, взятых в разных порядках основных состояний, является очень общей и может быть использована для многих задач. В то же время ее нельзя так легко реализовать в непрерывном спектре энергий. Как пример Войчик рассматривает свободную частицу в одном измерении. Следуя выражениям (9.40) и (9.45), можно записать фрактальную суперпозицию плоских волн. Для того, чтобы локализовать их, вводится квадратично интегрируемая функция $f(x)$. В этом случае волновая функция это сумма следующего вида:

$$\Psi_{\pm}(x, t) = \sum_n q^{n(s-2)} e^{\pm i q^n x - i q^{2n} t} f(x \mp 2q^n t, t), \quad (9.49)$$

где $f(x, t)$ — решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее $f(x, 0) = f(x)$. Фрактальные свойства этого волнового пакета будут зависеть от поведения $f(x, t)$ при больших x . Фрактальность разрушается, если f уменьшает-

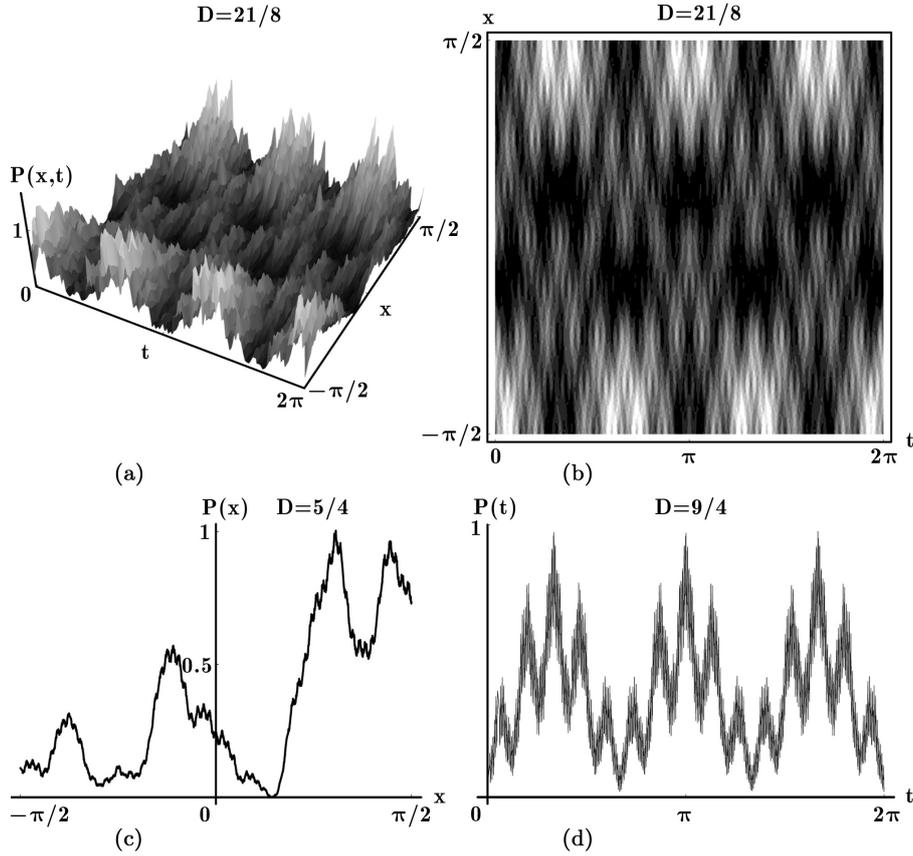


Рис. 9.3. Фрактальный квантовый ковер для гармонического осциллятора (а) и (b), пространственное ($t = 1$ (c)) и временное ($x = 1$ (d)) сечения, полученные суммированием 5 слагаемых в (9.47) при $q = 2$, $s = 5/4$

ся достаточно быстро. Это происходит, например, в случае гауссового пакета ширины σ^2 :

$$\Psi(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{1+it}} \exp\left[\frac{-x^2/4}{1+it}\right] \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(s-2)} \sin\left[\frac{xq^n}{1+it}\right] \exp\left[\frac{-iq^{2n}t}{1+it}\right], \quad (9.50)$$

где x измеряется в единицах σ , а t в единицах $2m\sigma^2/\hbar$.

Для любого не равного нулю значения t последний член убывает экспоненциально, уничтожая фрактальность.

Таким образом, состояние (9.50) является фракталом только при $t = 0$ (см. рис. 9.4).

Выше было показано, как строятся фрактальные решения уравнения Шредингера для широкого класса квантовых задач. Берри и Войчик доказали, что в этих моделях дробной размерностью обладают не только графики реальной и мнимой части волновой функции, но и график физически важной плотности вероятности. Другие свойства полученных волновых функций до сих пор не изучались. В этом разделе впервые обсуждаются такие интересные вопросы, как сохранение фрактальности графиков волновой функции

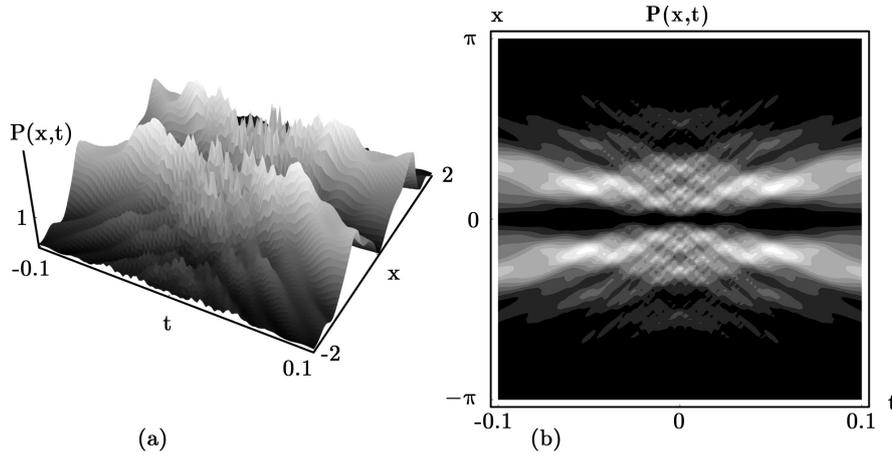


Рис. 9.4. Фрактальный квантовый ковер для свободной частицы (а) и (б), полученный суммированием 15 слагаемых в (9.50) при $q = 2$, $s = 3.2$, проявляет фрактальные свойства ($D_x = 3/2$) только при $t = 0$. При $t \neq 0$, $D_x = 1$

при переходе от одного представления к другому, и влияние фрактальности на свойства полученных моделей.

Оказывается, при переходе от координатного представления к импульсному представлению фрактальная размерность сечений графиков плотности вероятности по переменной импульса не сохраняется. Далее будет показано, как это происходит на примерах моделей Берри и Войчика. Более того, при переходе от координатного представления к представлению глауберовских когерентных состояний не сохраняется фрактальность сечений даже по времени.

Глауберовское представление удобно для изучения свойств квантового гармонического осциллятора. Мы используем его для исследования свойств "фрактального" осциллятора и системы связанных осцилляторов, один из которых в начальный момент времени находится во "фрактальном" состоянии – показан расчет дисперсии и числа частиц для этих моделей.

Все рассмотренные выше фрактальные волновые функции были получены в координатном представлении. Рассмотрим теперь импульсное представление, переход к которому осуществляется с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\Psi(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{2\pi} \Psi(x, t) dx \quad (\hbar = 1). \quad (9.51)$$

На следующих примерах исследуем вопрос о том, повлияет ли такой переход на фрактальность волновых функций.

Выпишем еще раз выражение (9.37) для фрактальных волновых функций, полученных Майклом Берри для частицы в одномерной прямоугольной

потенциальной яме с бесконечными стенками:

$$\Psi_{Berry}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}(2k+1)} \sin[(2k+1)x] e^{-i(2k+1)^2 t}. \quad (9.52)$$

Используя формулу (9.51), можно получить волновые функции Берри в импульсном представлении. Так как волновые функции Берри отличны от нуля только на отрезке $[0, \pi]$, то вместо бесконечных пределов в интеграле (9.51) можно взять пределы от 0 до π :

$$\Psi(p, t) = N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}(2k+1)} \text{Int}(p) e^{-i(2k+1)^2 t}, \quad (9.53)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Int}(p) &= \int_0^{\pi} \frac{e^{ipx}}{2\pi} \sin(2k+1)x dx = \\ &= \frac{1 + 2k + e^{ip\pi} [(1 + 2k) \cos 2k\pi - ip \sin 2k\pi]}{2(1 + 2k - p)(1 + 2k + p)\pi}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Нормировочная константа определяется стандартным образом по формуле

$$N = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{\pi} |\Psi(p, 0)|^2}}.$$

Пределы изменения импульса в выражении (9.53) определяются из соотношения неопределенностей $\Delta x \Delta p \geq 1$, то есть $\Delta p \sim 1/\Delta x$, или, в нашем случае, $p \in [-1/\pi, 1/\pi]$.

Пространственно-временное построение графиков плотности вероятности $P(p, t)$ полученных волновых функций представлено на рис. 9.5 (трехмерное — на рис. 9.5а, двумерное — на рис. 9.5б). Волновые функции (9.53) отличаются от волновых функций Берри (9.52), поэтому формулы Берри не применимы для расчета размерности этих графиков. Но из рис.9.5а и 9.5б видно, что поверхность $P(p, t)$ гладкая, это может быть обусловлено тем, что по одной из переменных фрактальность теряется. С целью проверки сделанного предположения рассмотрим сечения поверхности по импульсу $P_t(p)$ и времени $P_p(t)$.

На рис. 9.5с график сечения по импульсу $P_t(p)$ сглаживается, следовательно, его размерность D_p равна 1. Рис. 9.5d показывает фрактальное поведение сечения по времени $P_p(t)$. Теоретический расчет размерности этого графика нетривиален и может послужить темой для отдельного исследования.

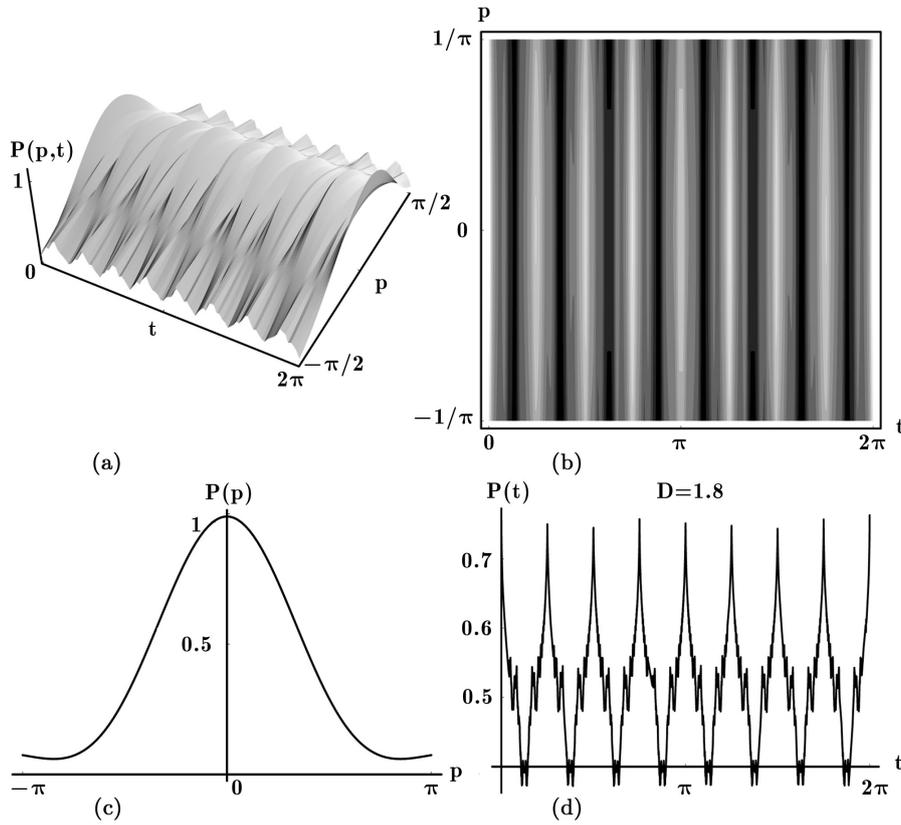


Рис. 9.5. Квантовый ковер Берри для частицы в прямоугольной потенциальной яме в импульсном представлении (a) и (b), сечения по импульсу ($t = 1$) (c) и времени ($p = 1/4$) (d), полученные суммированием 30 слагаемых в (9.53).

Оценим размерность экспериментально с помощью компьютерной программы Mathematica. Для 30 слагаемых в (9.53) вычисления дают следующий результат:

$$\dim P_p(t) = D_t = 1.8. \quad (9.55)$$

Сравним это значение с теоретической размерностью сечения по времени в координатном представлении $D_t = 7/4$. Видно, что расхождение составляет $\sim 3\%$.

Таким образом, доказано, что:

- поверхность $P(p, t)$ сглаживается вследствие потери фрактальности сечения по импульсу $P_t(p)$;
- сечение по времени $P_p(t)$ остается фрактальным;
- в общем случае при переходе от координатного представления к импульсному фрактальная размерность функций Берри не сохраняется.

Для удобства приведем еще раз выражение (9.40) для волновых функций вейерштрассовой формы, полученных Войчиком для частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками:

$$\Psi(x, t) = N \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(s-2)} \sin(q^n x) e^{-iq^{2n}t}. \quad (9.56)$$

С помощью обратного преобразования Фурье (9.51), по аналогии с предыдущим случаем перейдем к импульсному представлению:

$$\Psi(p, t) = N \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(s-2)} \text{Int}(p) e^{-iq^{2n}t}, \quad (9.57)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Int}(p) &= \int_0^{\pi} \frac{e^{ipx}}{2\pi} \sin(q^n x) dx = \\ &= \frac{q^n + e^{ip\pi} [-q^n \cos \pi q^n + ip \sin \pi q^n]}{2\pi(-p^2 + q^{2n})}. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Вычисление нормировочной константы N опустим, так как она не влияет на размерность интересующих нас графиков.

Результат построения плотности вероятности $P(p, t)$ волновых функций Войчика в импульсном представлении показан на рис. 9.6а (в трех измерениях) и 9.6б (в двух измерениях). Волновые функции в импульсном представлении (9.53) отличаются от волновых функций координатном представлении (9.52), следовательно, размерность $P(p, t)$ нельзя вычислить по формулам Войчика. Графики имеют более гладкую форму, чем графики на рис. 9.2а и 9.2б. Покажем, что это связано с тем, что по одной из переменных фрактальность теряется.

Снова рассмотрим сечения по импульсу $P_t(p)$ и времени $P_p(t)$. Как и в случае волновых функций Берри, график сечения по импульсу $P_t(p)$ сглаживается (рис. 9.6с), следовательно, его размерность D_p равна 1. График сечения времени $P_p(t)$ (рис. 9.6д) показывает фрактальное поведение. Оценка его размерности с помощью компьютерных вычислений для 5 слагаемых в (9.53) дает следующий результат:

$$\dim P_p(t) = D_t = 1.4. \quad (9.59)$$

В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- график $P(p, t)$ (рис. 9.6а) имеет более гладкую форму чем график $P(, t)$ (рис. 9.2а), так как размерность сечения по импульсу D_p равна 1 $P_t(p)$;
- график сечения по времени $P_p(t)$ как и в координатном представлении показывает фрактальное поведение;

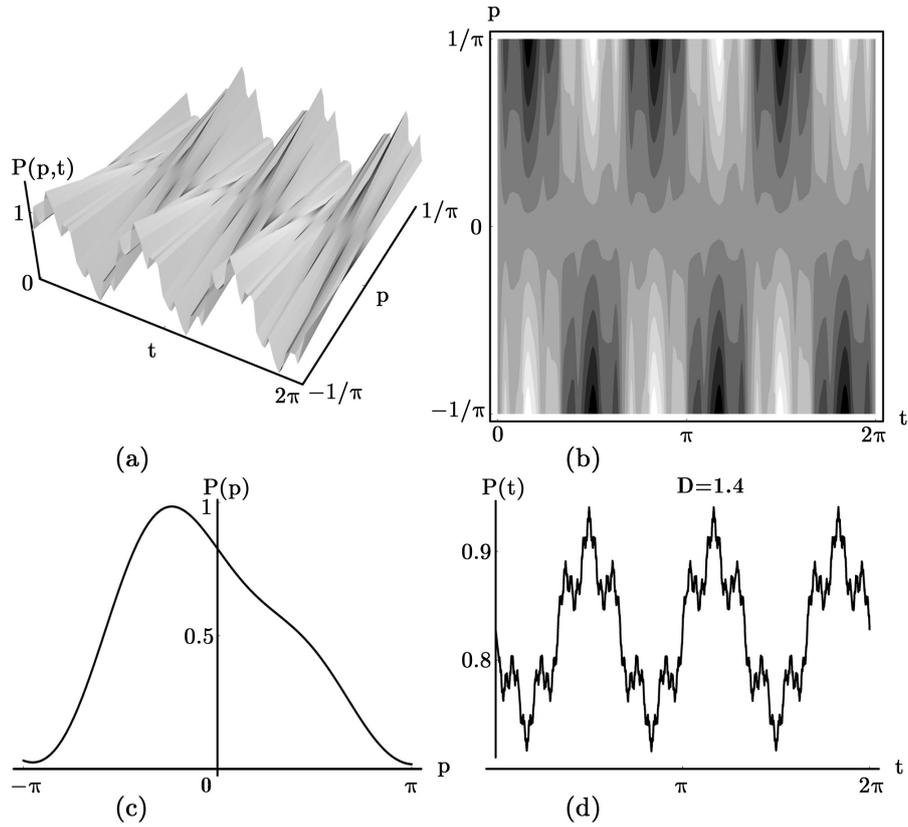


Рис. 9.6. Квантовый ковер Вейчика для частицы в прямоугольной потенциальной яме в импульсном представлении (a) и (b), сечения по импульсу ($t = 1$ (c)) и времени ($p = 1/4$ (d)), полученные суммированием 5 слагаемых в (9.53) при $q = 2$ и $s = 3/2$.

- на основании предыдущих двух выводов можно сказать, что в общем случае при переходе от координатного представления к импульсному фрактальная размерность волновых функций Вейчика не сохраняется.

Выше (см. 9.3.2) было приведено выражение (9.45) для фрактальных волновых функций квантового гармонического осциллятора. Для удобства перепишем его еще раз:

$$\Psi(x, t) = N \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(s-3/2)} \varphi_{q^{2n}} e^{-i(q^{2n}+1/2)t}, \quad (9.60)$$

где $\varphi_{q^{2n}}$ определяется через полиномы Эрмита (9.44).

Очень хорошая аппроксимация формулы (9.44) может быть получена на каждом фиксированном отрезке $[-b, b]$ при достаточно высоких уровнях энергий с помощью ВКБ-приближения (смотрите подраздел 9.3.2)

$$\varphi_n(x) \sim n^{-1/4} \sin[\sqrt{n+1/2}x - (n-1)\pi/2], \quad (9.61)$$

Для перехода к импульсному представлению необходимо вычислить интеграл, содержащий $\varphi_n(x)$. Расчет можно упростить, если для $\varphi_n(x)$ использо-

вать приближенное выражение (9.61). Произведя интегрирование, получим следующее выражение для “фрактального” гармонического осциллятора в импульсном представлении:

$$\Psi(p, t) = N \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(s-3/2)} \text{Int}(p) e^{-i(q^{2n}+1/2)t}, \quad (9.62)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Int}(p) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{ipx}}{2\pi} \sin(q^n x) dx = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}ip\pi} \left[-ip \left(-e^{ip\pi} \cos a + \cos b \right) + \sqrt{1/2 + q^{2n}} \left(e^{ip\pi} \sin a + \sin b \right) \right]}{\pi(1 - 2p^2 + 2q^{2n})} \end{aligned} \quad (9.63)$$

и вспомогательные выражения a и b определяются по формулам

$$a = \frac{1}{2}\pi \left(-q^{2n} + \sqrt{\frac{1}{2} + q^{2n}} \right), \quad b = \frac{1}{2}\pi \left(q^{2n} + \sqrt{\frac{1}{2} + q^{2n}} \right). \quad (9.64)$$

Используя выражение (9.62), построим график плотности вероятности $P(p, t)$ полученных волновых функций. На рис. 9.7а и 9.7б показаны трехмерное и двухмерное изображения этой поверхности. Как и в рассмотренных выше примерах, поверхность $P(p, t)$ в импульсном представлении выглядит более гладкой, чем поверхность $P(x, t)$ на рис. 9.3а, 9.3б в координатном представлении, из чего можно сделать вывод о том, что размерность графика плотности вероятности изменилась. Такое изменение размерности связано с различием волновых функций (9.62) и (9.60).

Различие волновых функций отражается и на графиках сечений поверхности $P(x, t)$ по импульсу $P_t(p)$ и времени $P_p(t)$. Как и в предыдущих двух случаях, размерность графика сечения по импульсу D_p равна 1 (рис. 9.7с), а график сечения времени $P_p(t)$ (рис. 9.7д) сохраняет фрактальное поведение. Компьютерные вычисления размерности графика $P_p(t)$ для 5 слагаемых в (9.62) приводят к следующему значению:

$$\dim P_t(p) = D_p = 1.3. \quad (9.65)$$

Кратко суммируем полученные для гармонического осциллятора результаты:

- так как размерность сечения по импульсу D_p равна 1, график поверхности $P(p, t)$ сглаживается;

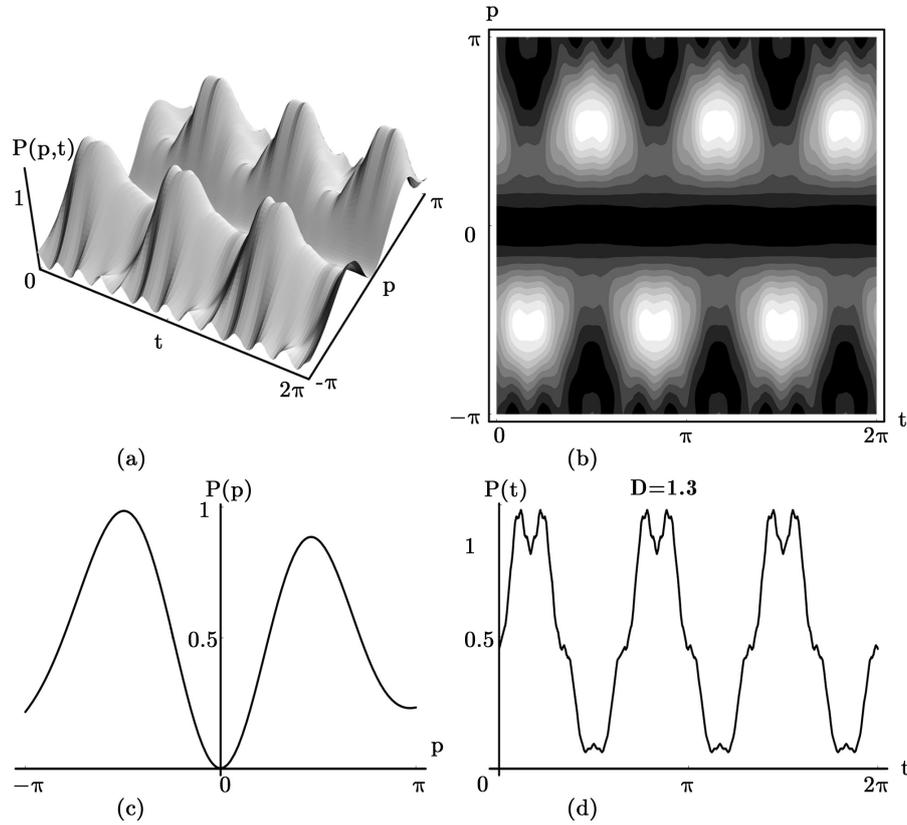


Рис. 9.7. Квантовый ковер Вейчика для гармонического осциллятора в импульсном представлении (a) и (b), сечения по импульсу ($t = 1$) (c) и времени ($p = 1/4$) (d), полученные суммированием 5 слагаемых в (9.62) при $q = 2$ и $s = 5/4$

- график сечения по времени $P_p(t)$ как и в координатном представлении сохраняет фрактальную структуру, но его размерность изменяется;
- в общем случае при переходе от координатного представления к импульсному фрактальная размерность волновых функций, полученных Вейчиком для гармонического осциллятора, не сохраняется.

В разделе 9.3.2 были построены фрактальные волновые функции гармонического осциллятора. Поскольку осциллятор имеет важнейшее значение в квантовой физике, необходимо изучить физические следствия фрактальности его волновых функций. Для этого, прежде всего, перейдем в более удобное для наших дальнейших выкладок представление глауберовских КС [10].

Фрактальную волновую функцию можно представить в форме

$$|\Psi(t)\rangle = N \sum_n C_{q^{2n}}(t) |q^{2n}\rangle,$$

тогда $\Psi(\alpha, t) = \langle \alpha | \Psi(t) \rangle$. Поскольку

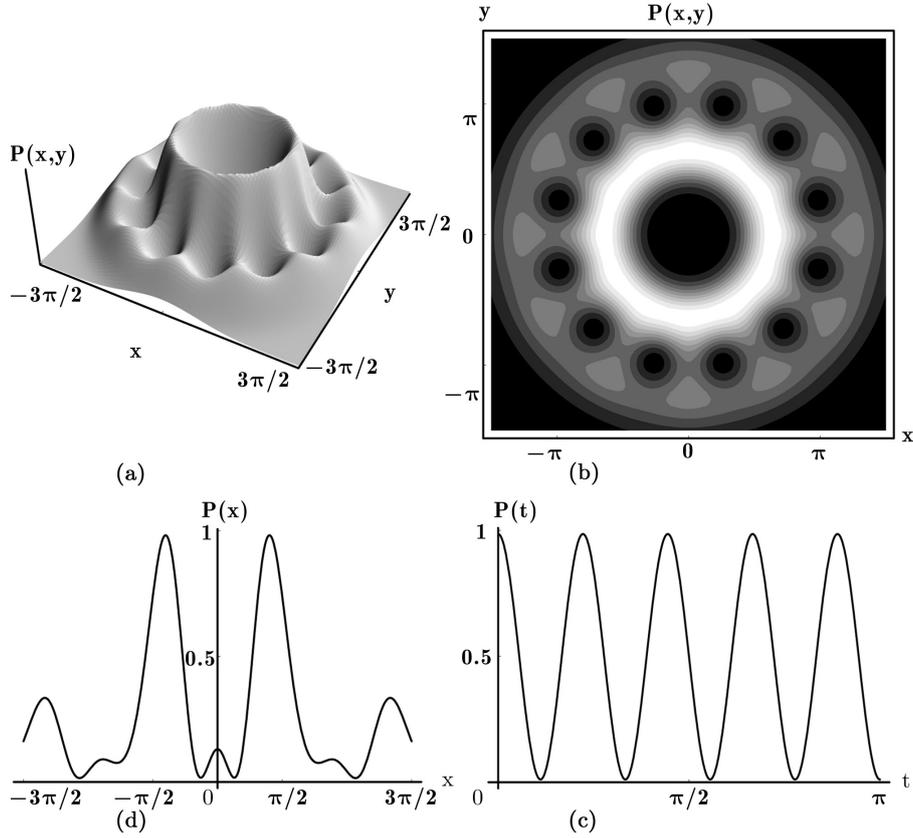


Рис. 9.8. Квантовый ковер Вейча для гармонического осциллятора в глауберовском представлении (a) и (b), сечения по $\text{Re } \alpha$ ($t = 1$, $\text{Im } \alpha = 1$ (c)) и времени ($\text{Re } \alpha = \text{Im } \alpha = 1$ (d)), полученные суммированием 5 слагаемых в (9.66) при $q = 2$ и $s = 5/4$

$$\langle \alpha | q^{2n} \rangle = \frac{\bar{\alpha}^{q^{2n}}}{\sqrt{q^{2n}!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}},$$

справедливо следующее выражение:

$$\Psi(\alpha, t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(s-3/2)}}{\sqrt{q^{2n}!}} \bar{\alpha}^{q^{2n}} e^{-it(q^{2n}+1/2)}. \quad (9.66)$$

Построение графиков плотности вероятности полученных волновых функций (см. рис. 9.8) показывает, что фрактальность не сохраняется ни в одном из сечений, все графики носят гладкий характер. Это означает, что переход от координатного к глауберовскому представлению не сохраняет размерностей графиков функций.

Далее найдем зависимость от времени среднего числа квантов осциллятора, приготовленного в фрактальном состоянии

$$|\Psi(t)\rangle = N \sum_n C_n(t) |n\rangle,$$

$$C_n(t) = n^{\frac{s-3/2}{2}} e^{-i(n+1/2)t}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{\sum |C_n(t)|^2}};$$

$$\begin{aligned}
\langle a^+ a \rangle &= \langle \Psi(\alpha, t) | a^+ a | \Psi(\alpha, t) \rangle = N^2 \sum_{n, n'} \bar{C}_n C_{n'} \langle n | a^+ a | n \rangle = \\
&= N^2 \sum_{n, n'} \bar{C}_n C_{n'} n' \delta_{n, n'} = N^2 \sum_n |C_n|^2 n.
\end{aligned}$$

В рассмотренном случае $n = q^{2n}$, поэтому

$$\langle a^+ a \rangle = N^2 \sum_n |C_{q^{2n}}|^2 q^{2n}. \quad (9.67)$$

Если $M = 15$, $q = 2$ и $s = 5/4$, то среднее число квантов равно 671 880.

Дисперсия определяется формулой

$$D = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \quad (9.68)$$

$$\begin{aligned}
\langle X \rangle &= \frac{1}{2} N^2 \sum_{n, n'} \bar{C}_n C_{n'} \langle n | (a^+ + a) | n' \rangle = \\
&= \frac{1}{2} N^2 \sum_n \bar{C}_n (\sqrt{n} C_{n-1} + \sqrt{n+1} C_{n+1}).
\end{aligned} \quad (9.69)$$

$$\begin{aligned}
\langle X^2 \rangle &= \frac{1}{2} N^2 \sum_{n, n'} \bar{C}_n C_{n'} \langle n | (a^{+2} + a^2 + 2a^+ a + 1) | n' \rangle = \\
&= \frac{1}{2} N^2 \sum_n \bar{C}_n (C_n (2n+1) + \sqrt{n(n+1)} C_{n-2} + \sqrt{(n+1)(n+2)} C_{n+2}).
\end{aligned} \quad (9.70)$$

Если учесть, что $n = q^{2m} = 1, 4, 16, \dots$, то

$$D = \frac{1}{2} N \sqrt{\sum_n |C_{q^{2n}}|^2 (2q^{2n} + 1)}. \quad (9.71)$$

Пусть $M = 15$, $q = 2$ и $s = 5/4$, тогда дисперсия равна $D = 1159.21$.

9.3.3 Связанные осцилляторы и динамика фракталов

Во всех физически интересных случаях квантовый гармонический осциллятор нельзя рассматривать отдельно от окружения. Для изучения поведения фрактального состояния под влиянием внешнего воздействия рассмотрим систему двух связанных осцилляторов, один из которых в начальный момент находится во "фрактальном" состоянии, а другой в вакуумном.

Гамильтониан этой системы зададим в виде

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \lambda (\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_1), \quad (9.72)$$

здесь ω_1 и ω_2 – частоты осцилляторов, а λ – константа взаимодействия [?].

С использованием операторов генераторов группы $SU(2)$ \mathbf{L} выражение (9.72) может быть представлено в виде

$$\widehat{H} = \Delta\omega\widehat{L}_3 + (\widehat{L}_+ + \widehat{L}_-) + (\omega_1 + \omega_2)\widehat{\mathfrak{S}}. \quad (9.73)$$

Зная оператор эволюции, получим волновую функцию, описывающую нашу систему в произвольный момент времени

$$|\Psi(t)\rangle = \widehat{U}(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (9.74)$$

где

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_1(0)\rangle \otimes |\Psi_2(0)\rangle.$$

Оператор эволюции равен

$$\widehat{U}(t) = \exp\{-it(\omega_1 + \omega_2)\widehat{\mathfrak{S}}\} \exp\{\alpha(t)\widehat{L}_+\} \exp\{\beta(t)\widehat{L}_3\} \exp\{\gamma(t)\widehat{L}_-\}, \quad (9.75)$$

где коэффициенты $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ легко находятся в явном виде [5].

Подействуем $\widehat{U}(t)$ на $|\Psi(0)\rangle$ и в результате получим

$$|\Psi(t)\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n C_{n,l}(t) |l, n-l\rangle, \quad N = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n |C_{n,l}(t)|^2}}.$$

$$C_{n,l}(t) = n^{\frac{(s-3/2)}{2}} e^{-\frac{it(\omega_1+\omega_2)}{2}n} e^{-\frac{\beta(t)}{2}n} \alpha^l(t) \sqrt{\frac{n!}{l!(n-(l+1))!}}.$$

Рассмотрим следующий случай:

$$\langle 0|\Psi(t)\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,0}|n\rangle.$$

Тогда среднее число квантов и дисперсию можно найти также, как и в предыдущем случае:

$$\langle a^+a \rangle (t) = N^2 \sum_n |C_{q^{2n}, 0}(t)|^2 q^{2n}, \quad (9.76)$$

$$D(t) = \frac{1}{2}N \sqrt{\sum_n |C_{q^{2n}, 0}(t)|^2 (2q^{2n} + 1)}. \quad (9.77)$$

Рис. 9.9а и 9.9б, построенные по формулам 9.76 и 9.77, показывают, что с ростом числа энергетических уровней, учитываемых в суперпозиции, резко растут значения для среднего числа частиц и дисперсии.

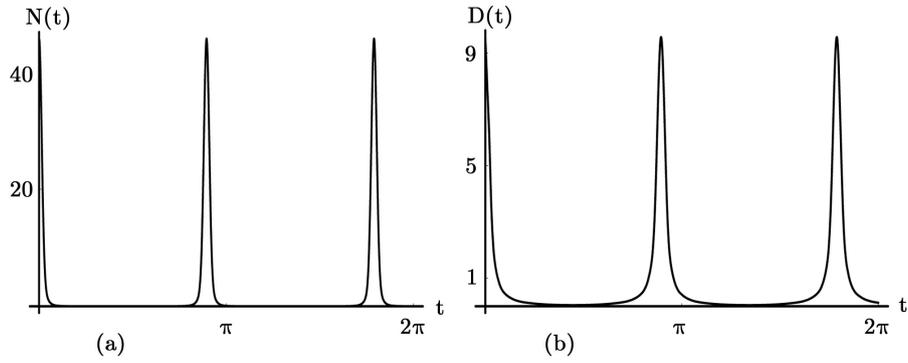


Рис. 9.9. Среднее число квантов (a) и дисперсия (b) для системы двух взаимодействующих гармонических осцилляторов при $M = 4$, $q = 2$ и $s = 5/4$

Актуальной является проблема разработки экспериментальных методов получения квантовых фракталов Войчика и их детектирования. Это связано с реализацией начального состояния, для которого квантовые числа состояний, вовлеченных в суперпозицию, возрастают как q^{2n} . В настоящее время пока не известно, как экспериментально создавать такие "разреженные" квантовомеханические суперпозиции.

В заключение этого раздела отметим, что результаты численного моделирования, представленные здесь на рис. 9.1 – 9.6 выполнены нами самостоятельно. Они воспроизводят соответствующие графики из работы [88] и фактически были использованы для тестирования программы построения как квантовых ковров, так и расчета их фрактальных размерностей. Фрактальные свойства квантовых суперпозиций интересны также и тем, что их можно использовать для создания новых криптоалгоритмов.

Глава 10

Спонтанное параметрическое рассеяние и трехмерная группа Лоренца

10.1 Спонтанное параметрическое рассеяние

Предсказанное в 1967 г. профессором МГУ Д.Н. Клышко явление спонтанного параметрического рассеяния света (СПР) представляет собой оптический параметрический процесс спонтанного распада фотонов падающего на нелинейный кристалл лазерного излучения (накачки) с частотой ω_0 на пары фотонов: сигнальный (частоты ω_1) и холостой (частоты ω_2) [69]. При этом, сумма частот родившихся фотонов равна частоте накачки (закон сохранения энергии):

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (10.1)$$

Также должен выполняться закон сохранения импульса

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2,$$

поэтому сигнальный и холостой фотоны распространяются под некоторыми углами к фотону накачки.

Со времени предсказания и открытия СПР прошло уже около полвека, но интерес к исследованию и применению этого явления не ослабевает. Особый интерес представляет применение уникальных характеристик, рождаемых в СПР скоррелированных пар фотонов (бифотонов), в квантовой информатике (квантовая телепортация, квантовые вычисления) (см., например, недавнюю монографию [92]). Как было показано Д.Н.Клышко (см. [93, 94]), СПР может быть описано только в рамках последовательной квантовой теории, как процесс спонтанного распада фотона накачки на два фотона меньших энергий из-за взаимодействия с атомами нелинейного кристалла. Бифотоны рождаются как результат параметрического взаимодействия трех мод электромагнитного поля, две из которых находились в вакуумном состоянии.

В этой главе мы рассмотрим применение теоретико-групповых когерентных состояний, связанных с динамической симметрией задачи.

10.2 Квантовый параметрический усилитель и когерентные состояния

Изучим вначале модель, в которой лазерное поле накачки квантованное и имеется вырождение по частоте для сигнальной и холостой мод ($\omega_1 = \omega_2$). Гамильтониан такой системы имеет вид [87]:

$$\hat{H} = \hbar \{ \omega_0 (\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 + 1/2) + \omega_1 (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + 1/2) + g (\hat{a}_0^+ \hat{a}_1^2 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^{+2}) \}, \quad (10.2)$$

где g - константа взаимодействия, \hat{a}_i^+ и \hat{a}_i — операторы рождения и уничтожения фотонов в i -ой моде ($i = 0, 1$).

Легко видеть, что гамильтониан (1.2) может быть выражен через генераторы группы Гейзенберга - Вейля W_1 - (\hat{a}_0^+ , \hat{a}_0) и группы $SU(1, 1)$:

$$\hat{K}_0 = (1/2) (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + 1/2), \quad \hat{K}_+ = (1/2) \hat{a}_1^{+2}, \quad \hat{K}_- = (1/2) \hat{a}_1^2. \quad (10.3)$$

Динамику системы будем описывать при помощи когерентных состояний (КС) группы $W_1 \otimes SU(1, 1)$ — прямого произведения группы Гейзенберга-Вейля W_1 и группы $SU(1, 1)$ — квантово-механического аналога трехмерной группы Лоренца [7].

Алгебру Ли группы W_1 свяжем с операторами рождения и уничтожения фотонов моды накачки. В результате (см., например, [6, 7]) когерентные состояния, связанные с группой W_1 , имеют вид хорошо известный вид:

$$|z_0 \rangle = \exp(-|z_0|^2/2) \cdot \exp(z_0 \hat{a}^+) |0 \rangle. \quad (10.4)$$

Алгебра Ли группы $SU(1, 1)$ порождается билинейными комбинациями операторов рождения и уничтожения параметрической моды. Напомним также основные сведения о когерентных состояниях для группы $SU(1, 1)$. Эта группа имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений, и, следовательно, для нее можно построить несколько систем когерентных состояний. Для нас в дальнейшем будут представлять интерес представления так называемой положительной дискретной серии, которые можно реализовать с помощью бозонных операторов рождения и уничтожения.

Коммутационные соотношения группы $SU(1, 1)$ определены следующим образом:

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = -2\hat{K}_0.$$

Инвариантный оператор:

$$\hat{K}^2 = \hat{K}_0 (\hat{K}_0 - \hat{I}) - \hat{K}_+ \hat{K}_- = k(k-1)\hat{I},$$

где \hat{I} – единичный оператор. Принципиальным моментом для группы $SU(1, 1)$ является то, что она не односвязна, т.е. в этой группе не всякий замкнутый путь может быть стянутым в одну точку. Поэтому для подобных групп переходят к рассмотрению их односвязных универсальных накрывающих, получаемых "склеиванием" необходимого количества экземпляров исходных групп, число которых определяется рангом фундаментальной группы топологического пространства исходной группы Ли G . Фундаментальная группа $\pi_1(SU(1, 1))$ изоморфна группе всех целых чисел Z , поэтому накрывающая группа $\widetilde{SU}(1, 1)$ – квантово-механическая трехмерная группа Лоренца – содержит бесконечный центр Z и не является матричной группой. В результате, для положительной дискретной серии T_k^+ группы $\widetilde{SU}(1, 1)$ число k меняется непрерывно от нуля до бесконечности: $0 < k < \infty$, в отличие от $SU(1, 1)$, где $k = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$.

Когерентное состояние для этой серии имеет вид:

$$|z_1 \rangle = (1 - |z_1|^2)^k \exp(z_1 \hat{K}_+) |k, 0 \rangle \quad (10.5)$$

где $|k, 0 \rangle \equiv |0 \rangle$ – собственный вектор оператора \hat{K}_0 , соответствующий его минимальному собственному значению k . Комплексный параметр z_1 принадлежит внутренности круга единичного радиуса ($|z_1| < 1$), стереографической проекции двумерного двухполостного гиперболоида, вложенного в трехмерное псевдоевклидово пространство.

Разложение единицы:

$$\hat{I} = \frac{2k - 1}{\pi} \int_{|z_1| < 1} \frac{dRe(z_1)dIm(z_1)}{(1 - |z_1|^2)^2} |z_1 \rangle \langle z_1|,$$

существует для $k > 1/2$.

Вычисляя инвариантный оператор алгебры Ли $SU(1, 1)$, можно установить, что для реализации генераторов $SU(1, 1)$ через бозонные операторы рождения и уничтожения одной моды возможны два значения $k = 1/4$ – четные фотонные состояния (т.е. КС группы $SU(1, 1)$ разлагается в ряд по фотонным состояниям с четными значениями чисел квантов: $n_1 = 0, 2, \dots$) и $3/4$ – нечетные состояния: $n_1 = 1, 3, \dots$).

10.3 Динамика когерентных состояний в модели СПР

С использованием генераторов $SU(1, 1)$ гамильтониан (10.2) представится в виде:

$$\hat{H} = \hbar \left\{ \omega_0(\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 + 1/2) + 2\omega_1 \hat{K}_0 + 2g(\hat{a}_0^+ \hat{K}_- + \hat{a}_0 \hat{K}_+) \right\}. \quad (10.6)$$

Будем искать эволюцию соответствующих КС следующим образом [9]:

- Вычислим диагональный матричный элемент оператора Гамильтона в представлении КС:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(z, \bar{z}; t) = \langle z | \hat{H} | z \rangle, \quad (10.7)$$

где \bar{z} - обозначение для комплексно сопряженного z .

- Найдем решение дифференциального уравнения Гамильтона

$$\dot{z} = \{z, \mathcal{H}\}, \quad (10.8)$$

определяющего траекторию в пространстве параметров КС, для заданных начальных условий.

Здесь символом $\{z, \mathcal{H}\}$ обозначена скобка Пуассона. Для функций F_1 и F_2 скобка равна [6]:

$$\{F_1, F_2\} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z^\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}^\beta} \frac{\partial F_2}{\partial z^\alpha} \right), \quad (10.9)$$

а величина $g_{\alpha\beta}$ вычисляется по формуле:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \quad g_{\alpha\eta} g^{\eta\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad (10.10)$$

где

$$K(z, \bar{w}) = \langle z | w \rangle / (\langle z | 0 \rangle \langle 0 | w \rangle)$$

- величина в пространстве голоморфных функций аналогичной δ - функции Дирака [6].

В последнем выражении и в формулах (10.7)-(10.9) под $z \equiv (z_0, z_1)$ и $w \equiv (w_0, w_1)$ понимаются комплексные параметры КС групп W_1 и $SU(1, 1)$.

Вычисляя явный вид функции \mathcal{H} и соответствующие скобки Пуассона и подставляя результат в (8), получим уравнения для параметров КС:

$$\dot{z}_0 = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_0}, \quad \dot{z}_1 = -\frac{i(1 - |z_1|^2)^2}{2\hbar k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_1}, \quad (10.11)$$

где

$$\mathcal{H} = \hbar \left(\omega_0(z_0 \bar{z}_0 + 1/2) + 2k \frac{\omega_1(z_1 \bar{z}_1 + 1) + 2g(z_0 \bar{z}_1 + \bar{z}_0 z_1)}{1 - z_1 \bar{z}_1} \right). \quad (10.12)$$

В явном виде уравнения (10.11) следующие:

$$\dot{z}_0 = -i(\omega_0 z_0 + 2gk z_1 / (1 - z_1 \bar{z}_1)), \quad \dot{z}_1 = -i(\omega_1 z_1 + g \bar{z}_0 z_1^2). \quad (10.13)$$

Находя (численно) решения выведенных уравнений, можно рассчитать временную динамику средних значений чисел фотонов в лазерной $\langle n_0 \rangle = \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle$ и параметрической модах $\langle n_1 \rangle = \langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \rangle$.

Для нахождения сжатия в фотонной моде используется квадратурная величина, которая определена следующим образом [69]:

$$V = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2, \quad (10.14)$$

где

$$X_1 = \frac{1}{4} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+), \quad X_1^2 = \frac{1}{16} (\hat{a}_1^2 + \hat{a}_1^{+2} + \hat{a}_1 \hat{a}_1^+ + \hat{a}_1^+ \hat{a}_1).$$

Фотонная мода считается сжатой, если $V < 1/4$.

Для КС группы $SU(1, 1)$ получим:

$$V = \langle X_1^2 \rangle = \frac{k}{4} (1 + z_1 + \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_1) / (1 - z_1 \bar{z}_1). \quad (10.15)$$

Для модели СПР без вырождения ($\omega_1 \neq \omega_2$) с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hbar \{ \omega_0 (\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 + 1/2) + \omega_1 (\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + 1) + g (\hat{a}_0^+ \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+) \} \quad (10.16)$$

легко видеть, что уравнения (10.13) сохраняют свой вид, но теперь они описывают динамику лазерной моды и бифотонов с частотами ω_1 и ω_2 . Однако отличие от вырожденного случая состоит в том, что инвариантное квантовое число k здесь пробегает бесконечный ряд значений и равно $k = \frac{|\Delta n| + 1}{2}$, где $\Delta n = n_1 - n_2$ - разность чисел квантов с частотами ω_1 и ω_2 .

10.4 Суперпозиции, смеси и сжатие

В предыдущем параграфе мы изучали динамику поведения во времени когерентных состояний, которые являются частным случаем квантово-механических чистых состояний. Однако хорошо известно, что наиболее общие состояния в квантовой теории описываются с помощью матрицы плотности $\hat{\rho}$.

Для чистого состояния $|\Psi\rangle$ матрица плотности имеет вид проектора

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|,$$

тогда как смесь состояний задается как

$$\hat{\rho} = \sum_n |c_n|^2 |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|, \quad \sum_n |c_n|^2 = 1.$$

Коэффициенты $|c_n|^2$ определяют вероятность реализации чистого состояния $|\Psi_n\rangle$.

В этом параграфе мы изучим различие в поведении суперпозиций и смесей КС, соответствующих разным представлениям трехмерной группы Лоренца для вырожденного параметрического усилителя (гамильтониан вида (10.2)). Оказалось, что среднее число фотонов не различает статистическую смесь и чистую суперпозицию таких состояний. Сжатие же ведет себя по-разному в этих двух случаях.

Действительно, рассмотрим два типа начальных состояний:

1. чистую суперпозицию вида

$$|\Psi\rangle = c_+|z_+\rangle + c_-|z_-\rangle,$$

2. статистическую смесь

$$\hat{\rho} = |c_+|^2|z_+\rangle\langle z_+| + |c_-|^2|z_-\rangle\langle z_-|$$

с одинаковыми коэффициентами c_{\pm} . Через $|z_{\pm}\rangle$ обозначены КС в четном (+, $k = 1/4$) и нечетном (-, $k = 3/4$) случаях.

Легко видеть, что в том и другом случаях зависимость среднего числа фотонов в моде определяется одинаковыми выражениями

$$\langle n_1(t) \rangle = |c_+|^2 \langle n_+(t) \rangle + |c_-|^2 \langle n_-(t) \rangle.$$

В то же время, поведение сжатия во времени различает эти начальные состояния. Объяснение легко находится, если вспомнить, что оператор числа фотонов является четным, а квадратурный оператор X_1 не имеет определенной четности и обладает ненулевыми матричными элементами между состояниями с разной четностью.

Опуская детали вычислений, приведем выражения для параметра сжатия V для суперпозиции – V_s и смеси – V_m :

$$V_s = \frac{1}{16} \left(\frac{|c_+|^2(1 + z_+ + \bar{z}_+ + z_+\bar{z}_+)}{1 - z_+\bar{z}_+} + \frac{3|c_-|^2(1 + z_- + \bar{z}_- + z_-\bar{z}_-)}{1 - z_-\bar{z}_-} \right) - \frac{1}{2} \text{Re} \left(c_+\bar{c}_- \frac{(1 + z_+)(1 - |z_+|^2)^{1/4}(1 - |z_-|^2)^{3/2}}{(1 - z_+\bar{z}_-)^{3/2}} \right), \quad (10.17)$$

$$V_m = \frac{1}{16} \left(\frac{|c_+|^2(1 + z_+ + \bar{z}_+ + z_+\bar{z}_+)}{1 - z_+\bar{z}_+} + \frac{3|c_-|^2(1 + z_- + \bar{z}_- + z_-\bar{z}_-)}{1 - z_-\bar{z}_-} \right). \quad (10.18)$$

В формуле (10.17) последнее слагаемое соответствует интерференции КС с разной четностью, которая отсутствует в формуле (10.18) для смеси. Видно, что для суперпозиции чистых когерентных состояний параметр сжатия уменьшается.

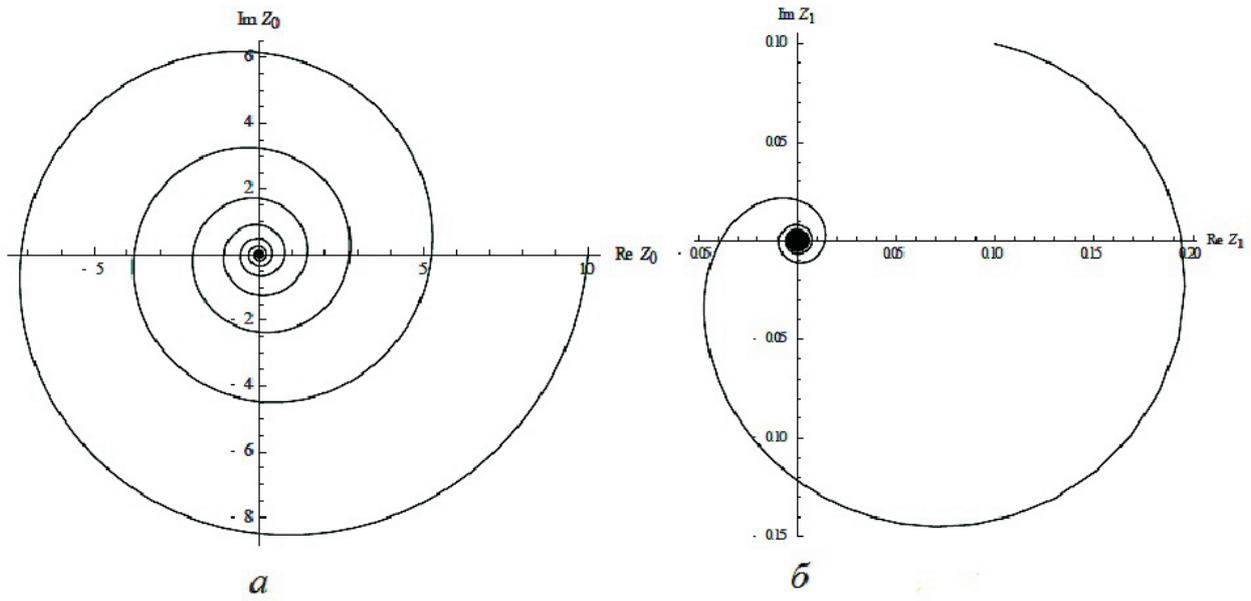


Рис. 10.1. Траектории КС для лазерной моды (а) и для параметрической моды (б) $|z_1| < 1$. $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.5$, $g_0 = 0.2$, $\tau = 5$, $z_0(0) = 10$, $z_1(0) = 0.1(1 + i)$

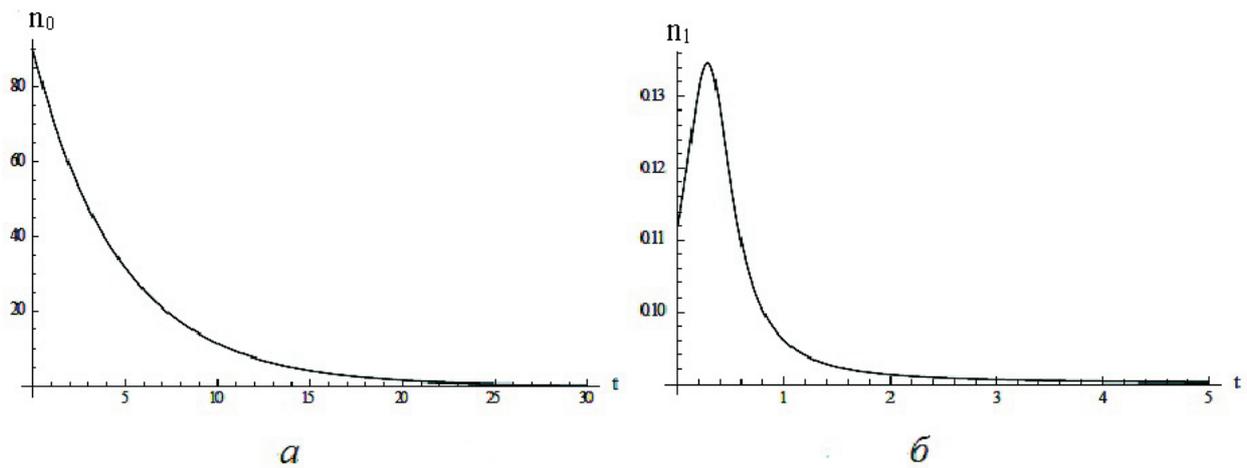


Рис. 10.2. Временные зависимости средних чисел квантов в лазерной моде (а) и в моде, рождаемой в процессе параметрической генерации (б). (Параметры те же, что и на Рис.10.1)

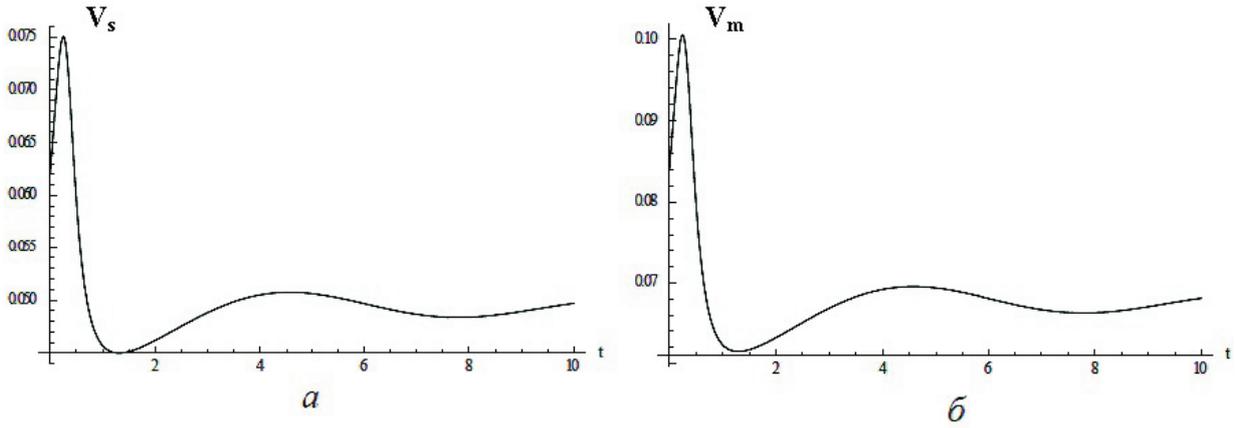


Рис. 10.3. Временная зависимость параметра сжатия $V = V_s$ (а) и $V = V_m$ (б). $|c_+|^2 = |c_-|^2 = \frac{1}{2}$

Численное решение системы выведенных комплексных дифференциальных уравнений находилось с использованием пакета Mathematica [95]. На основании полученных численных решений строились траектории КС на комплексных плоскостях; графики зависимости среднего числа фотонов в модах от времени; временные зависимости вероятностей n - квантовых возбуждений; зависимости сжатия от времени в параметрической моде. При расчете учитывалось пространственное разбегание лазерной и параметрической мод и их затухание. Показано, что использование суперпозиций когерентных состояний группы $SU(1, 1)$ позволяет увеличить сжатие генерируемых фотонных пар.

Разбегание моделировалось убыванием со временем константы взаимодействия g , которая была выбрана в виде

$$g = g(t) = g_0 \exp(-t^2/\tau^2)$$

здесь g_0 - начальное значение константы взаимодействия, пропорциональное величине нелинейной восприимчивости процесса [69], а параметр τ определяет длительность взаимодействия. Затухание учитывалось добавлением к частотам фотонов в гамильтониане и в уравнениях (10.13) малых мнимых добавок, имитирующих поглощение фотонов в среде.

Параметры модели обезразмеривались и варьировались в широких пределах. Здесь на рисунках 10.1-10.3 приведены результаты одного из таких расчетов.

На рисунке 10.1 показаны траектории когерентных состояний, при этом траектория КС параметрической моды (КС группы $SU(1, 1)$) расположена внутри круга единичного радиуса - плоскости Лобачевского ($|z_1| < 1$). Рисунок 10.2 показывает перекачку энергии из лазерной моды в параметри-

ческую моду. Рисунок 10.3 иллюстрирует временную динамику параметра сжатия для параметрической моды. В случае (а) начальным состоянием является суперпозиция КС фотонов с четными и нечетными числами квантов, а (б) показывает расчет сжатия для статистической смеси таких состояний. Поскольку $V < 1/4$ параметрическая мода является сжатой, но для суперпозиции сжатие заметно сильнее.

В заключение отметим, что здесь выведены уравнения, описывающие динамику фотонных мод в модели вырожденного параметрического усилителя и в модели без вырождения по частоте. Рассчитаны временные эволюции среднего числа фотонов и параметров сжатия. Учитывалось разбегание лазерной и параметрической мод, которое неизбежно есть в силу пространственного синхронизма этих мод. Расчеты наглядно свидетельствуют о генерации сжатия в параметрической моде. Расчет параметра сжатия также свидетельствует о том, что сжатие генерируемых пар фотонов можно увеличить, используя суперпозиции когерентных состояний соответствующих разным унитарным представлениям группы $SU(1, 1)$ – четных и нечетных состояний для вырожденной модели СПР. Учет потерь в системе необходимо провести на основе исследования решений кинетических уравнений [9] для различных начальных состояний для матрицы плотности.

Задания для самостоятельной работы студентов и заключение

В пособии изложены основы теории представлений групп динамической симметрии, концепции теории когерентных состояний атомных систем, взаимодействующих с классическим и квантованным электромагнитным полем. На этой основе изучены задачи квантовой оптики, связанные с полным динамическим описанием эволюции атомов и поля и процессов релаксации. Наряду с традиционными для монографий и учебников по квантовой оптике вопросов описания модели Джейнса — Каммингса, динамики и релаксации квантовых систем, в нем с теоретико-групповой точки зрения рассмотрены наиболее важные в приложениях квантовые состояния электромагнитного поля, такие как глауберовские когерентные состояния, сжатые состояния и атомные когерентные состояния, связанные с группой $SU(N)$. Изложено применение метода когерентных состояний к построению и расчету фейнмановских интегралов по траекториям. Уделено внимание методу геометрических фаз, суперсимметричной реализации квантово-оптических моделей и наглядной визуализации квантовой динамики с помощью квантовых ковров. Наиболее важным в прикладном отношении является предложенный в пособии единый подход к описанию как когерентной динамики (описываемой уравнением Шредингера), так и некогерентной динамики, основанной на применении соответствующих квантовых кинетических (управляющих) уравнений для матрицы плотности. Значительное место в пособии уделено сведению квантовых управляющих уравнений к уравнениям типа Фоккера — Планка и описанию математических методов их решения.

Изложение теоретического материала в пособии в значительной мере основано на оригинальных работах автора. Оно иллюстрируется индивидуальными заданиями, выполнение которых позволит студентам глубже освоить теоретический материал и получить навыки выполнения сложных математических расчетов. Автор надеется, что работа с теоретическим материалом пособия и выполнение индивидуальных заданий позволит студентам научиться работать с оригинальной научной литературой и подготовиться к написанию выпускных работ и магистерских диссертаций.

На самостоятельное решение студентов выносятся следующие задачи:

1. Построить системы когерентных состояний (КС), ассоциированных с унитарными представлениями групп W_N , $SU(2)$ и $SU(1, 1)$. Найти их скалярное произведение, исследовать свойства полноты и производящие свойства. Показать, что КС на группе $SU(2)$ переходят в глауберовские КС при $J \rightarrow \infty$.
2. Исследовать свойства сжатых состояний Столера $|\zeta\rangle$ для гармонического осциллятора. Установить их связь с когерентными состояниями группы $SU(1, 1)$.
3. Показать, что глауберовские когерентные состояния $|\alpha\rangle$ и сжатые состояния $|\zeta\rangle$ минимизируют соотношения неопределенностей для операторов координаты и импульса гармонического осциллятора.
4. Показать что группа $SU(3)$ является группой симметрии трехмерного гармонического осциллятора. Какие неприводимые представления этой группы реализуются на его состояниях?
5. Вычислить вероятность перехода между уровнями n и m гармонического осциллятора, взаимодействующего с классической силой

$$F(t) = F_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos \omega t,$$

$\omega \neq \omega_0$, где ω_0 — частота гармонического осциллятора, γ — константа затухания светового импульса

Сравнить результаты точного расчета и вычислений в первом и втором порядках временной теории возмущений.

6. Вычислить вероятность опрокидывания спина $J = 1/2$, находящегося во внешнем однородном магнитном поле

$$\vec{B}(t) = \mathcal{B}_\perp (\vec{e}_x \cos \omega t + \vec{e}_y \sin \omega t) + \mathcal{B}_\parallel \vec{e}_z.$$

7. Найти нижний (ковариантный) символ гамильтониана частицы с произвольным спином J во внешнем магнитном поле из задачи 6 и исследовать ее "классическую" динамику. Что происходит при $J \rightarrow \infty$?
8. Найти спектр квазиэнергий осциллятора с периодически изменяющейся частотой ($\epsilon \ll \omega_0$):

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0 + \epsilon & \text{при } 0 \leq t < T/2, \\ \omega_0 - \epsilon & \text{при } T/2 \leq t < T. \end{cases}$$

9. Найти фейнмановский пропагатор в координатном представлении для гармонического осциллятора, взаимодействующего с классической силой $F(t)$ и в случае параметрически изменяющейся частоты $\omega(t)$.
10. Вычислить пропагатор (в представлении глауберовских когерентных состояний) для одномодового квантового параметрического усилителя с гамильтонианом:

$$\hat{H}(t) = \hbar \left[\omega \hat{b}^+ \hat{b} + \varkappa \left(\hat{b}^+ \hat{b}^+ e^{-2i\omega t} + \hat{b} \hat{b} e^{2i\omega t} \right) \right].$$

11. Найти в явном виде оператор эволюции двухуровневого атома, взаимодействующего с фотонной модой в идеальном резонаторе (модель Джейнса - Каммингса) и исследовать временное поведение инверсии населенностей атома в зависимости от начального состояния фотонной моды. Рассчитать временную зависимость поведения полуразности населенностей атома для начального состояния фотонной моды, заданного когерентным состоянием $|\alpha\rangle$. Параметр $|\alpha|$ задавать в интервале $10 < |\alpha| < 100$.
12. Вывести кинетическое уравнение для матрицы плотности квантовой системы с эквидистантным спектром, взаимодействующей с большой термодинамически равновесной диссипативной системой.

Указание: Использовать марковское приближение.

13. Установить закон изменения населенностей двухуровневой системы, взаимодействующей с термостатом при температуре T . Начальному состоянию системы соответствует температура $T_0 > T$.
14. Найти вероятность заселения n -го уровня гармонического осциллятора, релаксирующего из начального состояния с матрицей плотности

$$\hat{\rho}(0) = |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0|,$$

где $|\alpha_0\rangle$ — глауберовское когерентное состояние. Температура термостата $T > 0$.

15. Найти закон распада состояния "Шредингерского котика"

$$|\Psi\rangle = (|\alpha\rangle + e^{i\theta} |-\alpha\rangle) / \sqrt{2}$$

в термостате при $T = 0$. (Здесь $|\pm\alpha\rangle$ — осцилляторные когерентные состояния, а $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.)

16. Исследовать динамику сжатия фотонов в модели квантового параметрического усилителя (см. задачу 10), при условии, что начальное состояние

осциллятора является:

а) n - фотонным $|n\rangle$, б) когерентным $|\alpha\rangle$ и в) хаотическим (тепловым), соответствующим температуре термостата $T > 0$.

Построить графики зависимостей от времени дисперсий операторов $\hat{X}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^+)/2$,

$\hat{X}_2 = (\hat{a} - \hat{a}^+)/2i$. В каких случаях система оказывается в чистом "сжатом" состоянии?

17. Показать, что однокубитные операторы \hat{I} , \hat{X} , \hat{Y} , \hat{Z} , где

$$\hat{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad \hat{X} = NOT = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|,$$

$$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad \hat{Y} = \hat{X} \cdot \hat{Z}.$$

образуют группу и найти их закон умножения.

18. Показать, что с помощью метода коррекции ошибок можно замедлить процесс декогеренции. Рассмотреть релаксацию непрерывно детектируемого состояния Юрке - Столера

$$|\Psi\rangle = (|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle)/\sqrt{2}$$

с изменением фазы поля на π и показать, что здесь имеет место т.н. "энергетическая релаксация т.е. после усреднения по случайным отсчетам поле остается в суперпозиционном состоянии

$$|\Psi(t)\rangle = (|\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle + i|-\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle)/\sqrt{2}$$

и матрица плотности, соответствующая этому состоянию, удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{\gamma}{2} \left([\hat{A}_\pi, \hat{\rho} \hat{A}_\pi^+] + [\hat{A}_\pi \hat{\rho}, \hat{A}_\pi^+] \right),$$

где $\hat{A}_\phi = e^{i\phi \hat{a}^+ \hat{a}}$.

При выполнении заданий студентам следует изучить соответствующий раздел пособия и, при необходимости, обратиться к оригинальным публикациям, приведенным в библиографическом списке.

Отчет по заданиям готовится студентами в электронном виде и докладывается на научном семинаре, организуемом для контроля самостоятельной работы.

Библиографический список

- [1] Хамермеш М. Теория групп и ее применения к физическим проблемам. - М.: Мир. 1968. - 384 с.
- [2] Барут А.О., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. - М.: Мир. 1980. - 393 с.
- [3] Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.- М.: Наука. 1979. - 320 с.
- [4] Горохов А.В. Методы теории групп в задачах квантовой физики. Ч.1.- Куйбышев.: Изд.-во КуГУ. 1977. - 80 с.
- [5] Горохов А.В. Методы теории групп в задачах квантовой физики. Ч.2.- Куйбышев.: Изд. - во КуГУ. 1979. - 96 с.
- [6] Горохов А.В. Методы теории групп в задачах квантовой физики. Ч.3.- Куйбышев.: Изд.-во КуГУ. 1983.- 96 с.
- [7] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. - М.: Наука. 1987. - 272 с.
- [8] Шелепин Л.А. К теории когерентного спонтанного излучения // ЖЭТФ. 1968. т.54. С. 1463 - 1471.
- [9] Горохов А.В. Алгебры Ли в квантовой оптике и молекулярной спектроскопии // Известия РАН. Серия физическая, 2011, Т. 75. № 2, С. 168-174.
- [10] Glauber R.J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. //Phys.Rev.- 1963. V.131. P. 2766-2789.
- [11] Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов. /в кн. Квантовая оптика и квантовая радиофизика. - М.: Мир. 1966. С. 91 - 281.
- [12] Клаудер Д., Сударшан Э. Основы квантовой оптики.- М.: Мир. 1970. - 428 с.
- [13] Perelomov A.M. Coherent States for Arbitrary Lie Group //Commun. Math. Phys. 1972. V.26. P. 222 - 236.

- [14] Arrechi F.T., Courteus E., Gilmore R., Thomas H. Atomic Coherent States in Quantum Optics // Phys. Rev. 1972.V. A 6. P. 2211 - 2237.
- [15] Klauder J.R. Continuous Representation Theory. I. Postulates of Continuous Representation Theory // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 1055-1058.; II. Generalized Relation Between Quantum and Classical Dynamics. //J. Math. Phys. 1963. P. 1058 - 1076.
- [16] Klauder J.R., Skagerstam B.S. Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics. - Singapore.: World Scientific. 1985.- VII + 911 p.
- [17] Wei-Min Zhang, Da Hsuan Feng, Gilmore R. Coherent States: Theory and Some Applications // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. P. 867 -927.
- [18] Puri R.R. Mathematical Methods of Quantum Optics. - Berlin: Springer. 2001 - XIII + 285 p.
- [19] Bengtsson I., Życzkowski K. Geometry of Quantum States. - New York: Cambridge University Press. 2006. 479 p.
- [20] Gazeau J.-P. Coherent States in Quantum Physics. - KGaA, Weinheim: WILEY-VCH Verlag. 2009. 344 p.
- [21] Klimov A.B., Chumakov S.M. A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics. KGaA, Weinheim: WILEY-VCH Verlag. 2009. 334 p.
- [22] Combescure M. Didier R. Coherent States and Applications in Mathematical Physics. - New York: Springer. 2012. 431 p.
- [23] Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. - М.: Мир, 1968. - 383 с.
- [24] Schweber S.S. On Feynman Quantization // J. Math. Phys. 1962 V. 3. P. 831 - 842.
- [25] Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.- М.: Атомиздат. 1976. - 256 с.
- [26] Simon B. Functional integration and quantum physics. - NY: Academic Press Publishers. 1979. - 296 p.
- [27] Marinov M.S. Path Integrals in Quantum Theory: An Outlook of Basic Concepts //Phys. Rept. 1980. V. 60. P. 1-57.
- [28] Березин Ф.А. Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // УФН. 1980. Т. 132. С. 497-548.

- [29] Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. - М.: Изд-во МГУЮ 1983. - 555 с.
- [30] Kleinert H. Path Integrals and Collective Fields // Fortsch. der Physik V. 26. P. 565-672; Kleinert H. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics - World Scientific. Singapore. 1995. Second extended edition - 850 p.
- [31] Горохов А.В. Континуальные интегралы в представлении когерентных состояний на группах Ли. Динамика системы, взаимодействующей с бозонным полем / В кн.: *Теоретико - групповые методы в физике*. М.: Наука. 1980. Т. 1. С. 246- 256.
- [32] Gorokhov A.V. Coherent States on Lie Groups and Path Integrals /In book: *Group Theoretical Methods in Physics*.- Harwood Academ. Publishers. London - New York. 1985. V. 1. P. 189 - 199.
- [33] Gorokhov A.V. Path Integrals on Compact Kähler Manifolds /In book: *Group Theoretical Methods in Physics*. - VNU Science Press. BV. Utrecht. 1986. V. 1. P. 595 - 608.
- [34] Gerry Ch. C. SU(1,1) Coherent States Dynamics . A Path Integral Approach // Phys. Rev. V. A 39. P. 971 - 975.
- [35] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука. 1979 Т. 1. - 760 с.
- [36] Хуа Ло-Кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. - М.: ИЛ. 1959. - 163 с.
- [37] Keller J.B. Corrected Bohr - Sommerfeld Quantum Conditions for Nonseparable Systems // Ann. of Phys. (USA) 1958. V. 4. P. 180 - 188.
- [38] Hillery M., Zubary M.S. Path integral approach to problems in quantum optics //Phys. Rev. 1982. V. A 26. P. 451 - 460.
- [39] Zaheer K., Zubairy M.S. Atom - field interaction without the rotating - wave approximation: A Path - Integral Approach // Phys. Rev. 1988. V. A 37. P.1628 - 1633.
- [40] Kochetov E.A., Yarunin V.S. Coherent - State Path Integral for a Transition Amplitude: A Theory and Applications // Physica Scripta. 1995. V.51. P. 46 - 53.
- [41] Kazumasa T. Lectures on Path Integral Coherent States Representation. Sorousiron Kenku. 1980. - V. 62. P. 1-24.

- [42] Горохов А.В., Михайлов В.А. Когерентные состояния и интегралы по траекториям для динамической группы $SU(N)$ // Изв. Вузов (Физика). 1985. Т.7. С. 59-64.
- [43] Горохов А.В. Генерация и разрушение квантовой когерентности // Теор. Физика (СамГУ). 2001. Т. 2. С. 74-85.
- [44] Тер-Микиелян М.Л. Простейшие атомные системы в резонансных лазерных полях // УФН. 1996. Т.167, С. 1249 - 1294.
- [45] Агапьев Б.Д., Горный М.Б., Матисов Б.Г., Рождественский Ю.В. Когерентное пленение населенностей в квантовых системах //УФН. 1993. Т.163. С.1-36.
- [46] Пранц С.В., Якунова Л.С. Временная эволюция трехуровневого атома в поле лазерных импульсов //Опт. и спектр. 1990. Т.69. С. 964 - 970.
- [47] Рождественский Ю.В. Динамика трехуровневого атома в поле двух стоячих световых волн//Опт. и спектр. 1990.- Т.69. С. 247 - 251.
- [48] Корсунский Е.А., Матисов Б.Г., Рождественский Ю.В. Временная эволюция атомных населенностей в трёхуровневых системах // ЖЭТФ. 1991. Т.100. С. 1438 - 1448.
- [49] Berry M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. // Proc.Roy.Soc, London, Ser. A 392. P.45- 1984.
- [50] Hannay J.N. Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. // Phys. A.: Math.Gen. 18. P. 221- 1985.
- [51] Aharonov Y., Anandan J. Phase Change During a Cyclic Quantum Evaluation. // Phys.Rev.Lett. 1987. V. 58. P. 1593-1596.
- [52] Вальтер Г. Одноатомный мазер и другие эксперименты квантовой электродинамики резонатора // УФН. 1996. Т. 166. N 7. С.777 - 794.
- [53] Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser. //Proc.IEEE. 1963. Vol.51. p.89-119.
- [54] Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. - М.: Мир. 1978. - 222 с.
- [55] Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972.

- [56] Альперин М.М., Клубис Я.Д., Хижняк А.И. Введение в физику двухуровневых систем. - Киев: Наукова думка. 1987. - 224 с.
- [57] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [58] Shirley J.H. Solution of the Schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time. Phys.Rev 1965 **138** p B979-B987.
- [59] Birman J.L., Gorokhov A.V. Double Stratonovich - Hubbard Trick and Novel Path Integral for System Of Interacting Fermions // Lect. Notes in Physics. - 1991. V. 382. P. 383 - 393.
- [60] Gorokhov A.V., Birman J.L. Novel Method for Calculating the Path Integral for the Partition Function of a Many-Fermion System //Europhys. Lett. 1991. V. 15. N 6. P. 615 - 620.
- [61] Birman J.L., Gorokhov A.V. Hubbard - Stratonovich Tricks, Dynamical Superalgebras and Related Path Integral Problems / In book: "Path Integrals from meV to MeV". Dubna. 1996. P. 259 - 264.
- [62] Горохов А.В. Атомные конденсаты и атомный лазер // Соросовский Обр. Журн. 2001. N 1. С. 71 - 76.
- [63] Buzano C., Rasetti M.G., Rastello M.L. Dynamical superalgebra of "dressed" Jaynes - Cummings Model // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P.137 - 139.
- [64] Balantekin A.B., Schmitt H.A., Halse P. Coherent states for the noncompact supergroups $OSp(2|2N, R)$ // J. Math. Phys. 1989. V. 30. P.274 - 279.
- [65] Горохов А.В., Рогачева Е.В. Когерентные состояния на супергруппе $OSp(2|2)$ и континуальный интеграл в моделях двухуровневого атома. // Вестник Самарского государственного университета. Спец.выпуск. 1995. С. 99 - 108.
- [66] Генденштейн Л.Е., Криве И.В. Суперсимметрия в квантовой механике // УФН. 1985. Т. 146. С.553 - 590.
- [67] Лоудон Р. Квантовая теория света. - М.: Мир. - 1976. - 488 с.
- [68] Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: Физматлит. 2003. - 512 с.
- [69] Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Наука. Физматлит. 2000. - 896 с.

- [70] Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы. - М.: Наука. 1988. - 288 с.
- [71] Калачев А.А., Самарцев В.В. Когерентные явления в оптике. - Казань.:Казанский гос. университет им.В.И. Ульянова - Ленина. 2003. - 281 с.
- [72] Зельдович Б.Я., Переломов А.М., Попов В.С., Релаксация квантового осциллятора //ЖЭТФ. 1968. Т.55. С. 586 - 606.
- [73] Зельдович Б.Я., Переломов А.М., Попов В.С., Релаксация квантового осциллятора при наличии внешней силы //ЖЭТФ. 1969. Т.57. С. 196 - 206.
- [74] Белавин А.А., Зельдович Я.Б., Переломов А.М., Попов В.С. Релаксация квантовых систем с эквидистантным спектром // ЖЭТФ. 1969. Т.56. С. 264 - 275.
- [75] Agarwal G.S. Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches // Springer Tracts in Modern Physics. 1973. V. 70. P.129 - 136.
- [76] Risken H. The Fokker-Plank equation.- Berlin: Springer. 1984.- 346p.
- [77] Бройер Х.П., Петруччионе Ф. Теория открытых систем. - М., Ижевск: R&C Dynamics. 2010. - 824 с.
- [78] Haken H. Light. Volume 2 Laser Light Dynamics. 1985. - N-Y.: North - Holland Phys Publ. - 336 p.
- [79] Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику.- М.: Наука.- 1981. - 578 с.
- [80] Петров Э.Г., Тесленко В.И. Кинетические уравнения для квантовой динамической системы, взаимодействующей с термостатом и случайным полем // ТМФ. 1990. Т. 84. С. 446 - 458.
- [81] Gorokhov A.V. Quantum Systems in Regular and Stochastic Fields. Creation and Destruction of the Coherence. // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т.4. С. 306-311.
- [82] Шапиро В.Е., Логинов В.Н. Динамические системы при случайных воздействиях.- Новосибирск: Наука. 1982.- 160 с.
- [83] Килин С.Я. Квантовая оптика: Поля и их детектирование. - Минск: Навука і тэхніка. 1990. - 176 с.

- [84] Клышко Д.Н. Физические основы квантовой электроники.- М.: Наука. 1986. - 296 с.
- [85] Louisell W. Quantum statistical properties of radiation.- Wiley. New York. 1979. - 528 p.
- [86] Berry M.V. Quantum fractals in boxes // J.Phys.A: Math.Gen. 1996. V.29. P. 6617–6629.
- [87] Шляйх В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве: пер. с англ. под ред. В.П. Яковлева. — М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. —760 с.
- [88] Wojcik D., Bialynicki-Birula I., Zyczkowski K. Time evolution of quantum fractals // Phys.Rev.Lett. 2000. V. 85. P. 5022 - 5026.
- [89] Шайкин А.В., Горохов А.В. Квантовые фракталы // Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: Сборник статей. Казань, 2001. С. 57 - 63.
- [90] Hall M.J. Rainecker M.S., Schleich W.P. Untraveling quantum carpets: a travelling-wave approach // J.Phys.A. 1999. V.32. P. 8275 - 8291.
- [91] Wojcik D., Zyczkowski K. // Fractal carpets in a quantum well // xxx.itp.ru. arXiv: math-ph/0107030. 2001. - 17 p.
- [92] Самарцев В.В. Коррелированные фотоны и их применение. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 168 с.
- [93] Бурлаков А.В., Кулик С.П., Рытиков Г.О., Чехова М.В. Генерация бифотонного света в поляризационно-частотных Белловских состояниях. // ЖЭТФ, 2002, т.122, с.738-745.
- [94] Китаева Г.Х., Пенин А.Н. Спонтанное параметрическое рассеяние света. // Письма в ЖЭТФ, 2005, т.82, вып.6, С.388-394.
- [95] Горохов А.В., Умов Д.И. Квантовая теория спонтанного параметрического рассеяния света и когерентные состояния трехмерной группы лоренца. // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. 2011. № 2(83). С. 171-178.

Учебное электронное издание

Горохов Александр Викторович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
СОВРЕМЕННОЙ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ**

Электронное учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет А. В. Горохова

Издательство «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел. 8(846)334-54-23