МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

С.Я. Новиков, Е.А. Савинов

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 01.03.01 Математика и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Самара
Издательство "Самарский университет"
2014

УДК 519.2
ББК 22.171
Н 73

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. В. Н. Тутубалин,
д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Шатских

Новиков, С. Я.
Н 73 **Интеграл Лебега в теории вероятностей** : учебн. пособие / С. Я. Новиков, Е. А. Савинов. — Самара : Изд-во "Самарский университет", 2014. — 56 с.
ISBN 978-5-86465-635-8

Пособие посвящено подробному построению интеграла Лебега в традициях теории вероятностей с использованием подхода, который считается наиболее конструктивным, что в целом облегчает первоначальное знакомство с предметом. Приведены полные доказательства основных свойств и основных теорем о предельном переходе под знаком интеграла. Показано, как с помощью доказанных свойств и теорем выводятся формулы для вычисления моментов случайной величины с заданным распределением вероятностей. Отдельный раздел посвящен понятию слабой ассоциированности пары случайных величин. Рассмотрена связь с некоррелированностью и независимостью. В завершение приведены наиболее известные неравенства для моментов с подробными доказательствами.

Предназначено для студентов высших учебных заведений направления "Математика" и специальности "Фундаментальные математика и механика".

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 978-5-86465-635-8

Оглавление

Введение

Известно, что интеграл Лебега можно определять несколькими эквивалентными способами. В данном пособии мы вводим абстрактный интеграл Лебега от измеримой функции (случайной величины) по конечной (точнее, по вероятностной) мере с помощью подхода (см. [5]), который считается наиболее конструктивным (см. [2]) и традиционно принят в теории вероятностей.[1] По определению математическое ожидание (среднее значение) случайной величины есть интеграл Лебега от нее, поэтому в дальнейшем мы будем употреблять первое или второе понятие (а также соответствующее обозначение $\int$ или E) исходя из удобства.

В первой главе мы определяем основные понятия и вводим интеграл Лебега последовательно в три этапа: для простых неотрицательных случайных величин, для произвольных неотрицательных, для любых. Кроме того подробно разбираются все основные свойства интеграла Лебега, необходимые для операций над ним.

Во второй главе мы формулируем и доказываем теорему о замене переменных в интеграле Лебега; результаты, связанные с предельным переходом представлены в настоящем пособии теоремой о монотонной сходимости и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Затем коротко описывается структура построения интеграла Лебега по мере Лебега на вещественной прямой с доказательством корректности его определения. При этом построение самой меры Лебега не рассматриваются и предполагаются известными (см., например, [2], [4]). Наконец, используя доказанные теоремы, выводятся формулы для вычисления математического ожидания случайной величины с явно заданным распределением вероятностей.

В третьей главе рассматриваются моменты случайной величины, особо выделяются моменты второго порядка, в частности, центральный смешанный момент двух случайных величин (ковариация). Рассматривается связь некоррелированности, независимости и слабой ассоциированности пары случайных величин.

Наконец, в четвертой главе сформулированы и доказаны наиболее известные неравенства для моментов.

Далее мы будем считать, что все случайные величины заданы на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ с σ-алгеброй $\mathfrak{F}$ подмножеств множества Ω, на которой задана счетно-аддитивная вероятностная мера P. Под записью $\sum A_i$ мы будем понимать конечное или счетное объединение *попарно несовместных* событий A_i, а под $\bigcup A_i$ — конечное или счетное объединение *произвольных* событий A_i. Произведение (пересечение) событий $A \bigcap B$ будем записывать как AB. Запись $\mathbf{1}_A(\omega)$ будет означать индикатор события A. Т.е. 1, когда $\omega \in A$, и 0 иначе. Под $\xi \stackrel{a.s.}{=} \eta$ будем понимать равенство случайных величин с вероятностью единица (**a**lmost **s**urely).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки Россиии в рамках базовой части государственного задания

Глава 1. Определение и свойства

Интеграл Лебега простой случайной величины

Определение 1. *Случайную величину $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ будем называть* простой, *если она принимает конечное число значений, т.е. существует представление*

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega),$$

где $x_i \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{i=1}^{k} A_i = \Omega,\ A_i \in \mathfrak{F},\ i = 1, 2, \dots .$

Определение 2. *Интегралом Лебега простой случайной величины*

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \quad \sum_{i=1}^{k} A_i = \Omega$$

называется число

$$\int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\ \mathsf{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \mathsf{P}(A_i).$$

В дальнейшем нижний предел Ω будем для краткости опускать. Интеграл Лебега случайной величины ξ будем также обозначать $\mathrm{E}\xi$.

Замечание 1. *Отметим, что определение корректно, в том смысле, что значение интеграла не зависит от представления величины ξ. Действительно, предположим, что ξ имеет также другое представление*

$$\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{1}_{B_j}(\omega), \quad \sum_{j=1}^{m} B_j = \Omega.$$

Поскольку $\mathbf{1}_{A_i B_j} = \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{B_j}$, и

$$\mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{A_i B_j}, \quad \mathbf{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{A_i B_j},$$

то

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} x_i \mathbf{1}_{A_i B_j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} y_j \mathbf{1}_{A_i B_j}.$$

Обозначим $p_{ij} := \mathsf{P}(A_i B_j)$. Для произвольных $i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, m$ либо $p_{ij} = 0$, либо $p_{ij} > 0$. Во втором случае $A_i B_j \neq \emptyset$, а значит, $\exists \omega \in A_i B_j$ и $\xi(\omega) = x_i = y_j$. В обоих случаях $x_i p_{ij} = y_j p_{ij}$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \, \mathsf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} y_j \, \mathsf{P}(B_j).$$

Некоторые свойства интеграла Лебега простой случайной величины

1. Для $c \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{E}(c\xi) = c\mathrm{E}\xi. \tag{1}$$

2. Пусть $\xi \leqslant \eta$, тогда

$$\mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta. \tag{2}$$

3.

$$|\mathrm{E}\xi| \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|\,. \tag{3}$$

4.

$$\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta. \tag{4}$$

Доказательство п.1. Пусть

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}$$

$p_i := \mathsf{P}(A_i)$. Тогда

$$c\xi = \sum_{i=1}^{k} c x_i \mathbf{1}_{A_i}$$

$$\mathrm{E}(c\xi) = \sum_{i=1}^{k} c x_i p_i = c \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = c\mathrm{E}\xi.$$

□

Доказательство п.2.

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \eta = \sum_{i=1}^{m} y_j \mathbf{1}_{B_j},$$

$\{A_i\}_{i=1}^{k}$ и $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ разбиения. Тогда, поскольку

$$\mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{A_i B_j}, \quad \mathbf{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{A_i B_j},$$

$$\xi = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i \mathbf{1}_{A_iB_j}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} y_j \mathbf{1}_{A_iB_j}, \tag{5}$$

Обозначим, как и выше,

$$p_{ij} := \mathsf{P}(A_iB_j). \tag{6}$$

Тогда

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad \mathrm{E}\eta = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}. \tag{7}$$

Теперь, для любых $i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,m}$ если $p_{ij} = 0$, то $x_i p_{ij} = y_j p_{ij} = 0$. Если $p_{ij} > 0$, то $A_iB_j \neq \emptyset$, тогда $\forall \omega \in A_iB_j\ \xi(\omega) = x_i,\ \eta(\omega) = y_j$, а поскольку $\xi \leqslant \eta$, то $x_i \leqslant y_j$. Итак, для любых i, j $x_i p_{ij} \leqslant y_j p_{ij}$, значит $\mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta$. □

Доказательство п.3. Ясно, что $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$. Тогда в силу свойств 1 и 2

$$-\mathrm{E}\,|\xi| \leqslant \mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|\,,$$

откуда $|\mathrm{E}\xi| \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|$. □

Доказательство п.4. Используя (5), (6) и (7), имеем

$$\xi + \eta = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \mathbf{1}_{A_iB_j}$$

$$\mathrm{E}(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta.$$

□

Интеграл Лебега неотрицательной случайной величины

Лемма 1. *Введем последовательность*

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)}(x) + n\mathbf{1}_{[n,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

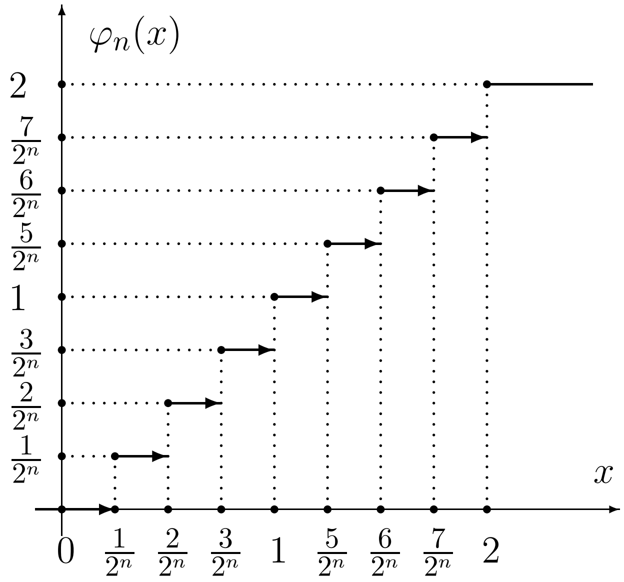


График функции $\varphi_n(x)$ для случая $n = 2$
Функция $\varphi_n(x)$ обладает следующими свойствами

1. *Для любого $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(x)$ неотрицательная борелевская простая (принимающая конечное число значений) функция;*
2. *для любого $x \geqslant 0 \quad \varphi_n(x) \uparrow x, \quad n \to \infty;$*
3. *для любого $n \in \mathbb{N}$ и $x \leqslant y \quad \varphi_n(x) \leqslant \varphi_n(y)$.*

Доказательство. Утверждения пунктов *1* и *3* очевидны, заметим только, что функции $\varphi_n(x)$ борелевские как линейные комбинации индикаторов: действительно, прообраз любого борелевского множества при отображении φ_n представляет собой конечную сумму полуинтервалов, а это множество борелевское.

Докажем утверждение пункта *2*. Сначала покажем поточечную сходимость. Зафиксируем произвольное $x \geqslant 0$ и выберем достаточно большое $n > x$. Тогда существует натуральное $1 \leqslant k_x \leqslant n2^n$ такое, что

$$\frac{k_x - 1}{2^n} \leqslant x < \frac{k_x}{2^n}.$$

Тогда $\varphi_n(x) = \frac{k_x - 1}{2^n}$, и

$$|\varphi_n(x) - x| < \frac{1}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Подчеркнем, что, доказанная сходимость поточечная. Поскольку последнее неравенство выполняется только для $0 \leqslant x < n$, то равномерная сходимость также будет иметь место на любом ограниченном множестве в $\mathbb{R}_+$, но не на всем $\mathbb{R}_+$.

Покажем теперь монотонность по n, т.е., что $\varphi_{n+1}(x) \geqslant \varphi_n(x)$ для всех $x \geqslant 0$ и n. Зафиксируем произвольно n и $x \geqslant 0$. Далее возможны три случая:

1. $x \geqslant n+1$. В этом случае
$$\varphi_{n+1}(x) = n+1 > n = \varphi_n(x).$$
2. $n \leqslant x < n+1$. Тогда существует натуральное k_x
$$n2^{n+1} + 1 \leqslant k_x \leqslant (n+1)2^{n+1}$$
такое, что
$$\frac{k_x - 1}{2^{n+1}} \leqslant x < \frac{k_x}{2^{n+1}}.$$
Тогда
$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{k_x - 1}{2^{n+1}} \geqslant n = \varphi_n(x).$$
3. $x < n$. Тогда существует $1 \leqslant k_x \leqslant n2^n$ такой, что
$$\frac{k_x - 1}{2^n} \leqslant x < \frac{k_x}{2^n}.$$
Тогда верно одно из двух неравенств:
$$\frac{2k_x - 2}{2^{n+1}} \leqslant x < \frac{2k_x - 1}{2^{n+1}}, \quad \frac{2k_x - 1}{2^{n+1}} \leqslant x < \frac{2k_x}{2^{n+1}}.$$
Тогда выполняется, соответственно, одно из двух равенств
$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k_x - 2}{2^{n+1}}, \quad \varphi_{n+1}(x) = \frac{2k_x - 1}{2^{n+1}}.$$
Т.е. $\varphi_{n+1}(x) \geqslant \frac{2k_x-2}{2^{n+1}} = \frac{k_x-1}{2^n} = \varphi_n(x)$.

$\square$

Теорема 1. *Если $\xi(\omega) \geqslant 0$, то найдется последовательность простых неотрицательных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ таких, что $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Доказательство. Положим
$$\xi_n := \varphi_n(\xi),$$
где функции $\varphi_n(x)$ заданы равенством (8). Благодаря пункту 1 леммы 1 ξ_n измеримы как борелевские функции случайной величины ξ (т.е. действительно являются случайными величинами), неотрицательны и просты. Из пункта 2 леммы 1 следует утверждение теоремы. $\square$

Пусть ξ неотрицательная случайная величина на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. В силу теоремы 1 найдется последовательность простых неотрицательных случайных величин $\xi_n \uparrow \xi$. В силу (2)
$$\int \xi_n \, d\,\mathsf{P} \leqslant \int \xi_{n+1} \, d\,\mathsf{P}.$$
Следовательно, существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_n \int \xi_n \, d\,\mathsf{P}$. В следующей лемме и ее следствии будет показано, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\xi_n\}$ с указанными свойствами.

Лемма 2. *Задана неотрицательная случайная величина* ξ. *Пусть* η *и* ξ_n, $n \geqslant 1$ *простые неотрицательные случайные величины, причем*

$$\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta.$$

(ξ_n *существуют в силу теоремы 1). Тогда*

$$\lim_n \int \xi_n \, d\,\mathsf{P} \geqslant \int \eta \, d\,\mathsf{P}\,.$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. $A_n = \{\xi_n \geqslant \eta - \varepsilon\}$.

$$\xi_n = \xi_n \mathbf{1}_{A_n} + \xi_n \mathbf{1}_{\overline{A_n}} \geqslant \xi_n \mathbf{1}_{A_n} \geqslant (\eta - \varepsilon)\mathbf{1}_{A_n}$$

$$\int \xi_n \, d\,\mathsf{P} \geqslant \int (\eta - \varepsilon)\mathbf{1}_{A_n} \, d\,\mathsf{P} = \int \eta \mathbf{1}_{A_n} \, d\,\mathsf{P} - \varepsilon\,\mathsf{P}(A_n) =$$

$$= \int \eta \, d\,\mathsf{P} - \int \eta \mathbf{1}_{\overline{A_n}} \, d\,\mathsf{P} - \varepsilon\,\mathsf{P}(A_n) \geqslant$$

$C := \max\limits_{\omega} \eta(\omega)$

$$\geqslant \int \eta \, d\,\mathsf{P} - C\,\mathsf{P}(\overline{A_n}) - \varepsilon.$$

Очевидно, $\overline{A_{n+1}} \subseteq \overline{A_n}$, и $\cap \overline{A_n} = \emptyset$, значит $\mathsf{P}(\overline{A_n}) \to 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве и учитывая произвольность ε, получаем утверждение леммы. $\square$

Следствие 1. *Задана неотрицательная случайная величина* ξ. *Пусть* ξ_n *и* η_m *последовательности простых неотрицательных случайных величин, таких, что*

$$\xi_n \uparrow \xi, \quad \eta_m \uparrow \xi.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_n \, d\,\mathsf{P} = \lim_{m\to\infty} \int \eta_m \, d\,\mathsf{P}\,.$$

Доказательство. Для любого m $\xi_n \uparrow \xi \geqslant \eta_m$, и в силу леммы 2

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_n \, d\,\mathsf{P} \geqslant \int \eta_m \, d\,\mathsf{P}$$

Переходя к пределу по m получим

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_n \, d\,\mathsf{P} \geqslant \lim_{m\to\infty} \int \eta_m \, d\,\mathsf{P}$$

Аналогично получаем противоположное неравенство. $\square$

Определение 3. *Интегралом Лебега неотрицательной случайной величины ξ называется величина*

$$\mathrm{E}\xi = \int \xi \, d\,\mathsf{P} := \lim_{n\to\infty} \int \xi_n \, d\,\mathsf{P}, \tag{9}$$

где последовательность неотрицательных простых случайных величин $\xi_n \uparrow \xi$.

В силу следствия 1 определение корректно, т.е. предел (9) не зависит от выбора последовательности простых с.в.

Утверждение 1 (линейность интеграла Лебега от неотрицательных величин).
Пусть $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$. Если $\max\{\mathrm{E}\xi, \mathrm{E}\eta\} < \infty$, то $\mathrm{E}(\xi+\eta) < \infty$, и

$$\mathrm{E}(\xi+\eta) = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta.$$

Если $\max\{\mathrm{E}\xi, \mathrm{E}\eta\} = \infty$, то $\mathrm{E}(\xi+\eta) = \infty$.

Доказательство. В силу теоремы 1 существуют последовательности простых неотрицательных случайных величин $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$. Тогда $\xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta$, и по определению интеграла Лебега от неотрицательной случайной величины

$$\mathrm{E}\xi = \lim_n \mathrm{E}\xi_n, \quad \mathrm{E}\eta = \lim_n \mathrm{E}\eta_n,$$
$$\mathrm{E}(\xi+\eta) = \lim_n \mathrm{E}(\xi_n + \eta_n) = \lim_n \left(\mathrm{E}\xi_n + \mathrm{E}\eta_n\right).$$

Последнее равенство следует из (4). Если теперь $\max\{\mathrm{E}\xi, \mathrm{E}\eta\} < \infty$, то ограниченность $\mathrm{E}(\xi+\eta)$ и доказываемое равенство следуют из свойств пределов последовательностей. Если же, например, $\mathrm{E}\xi = \infty$, то

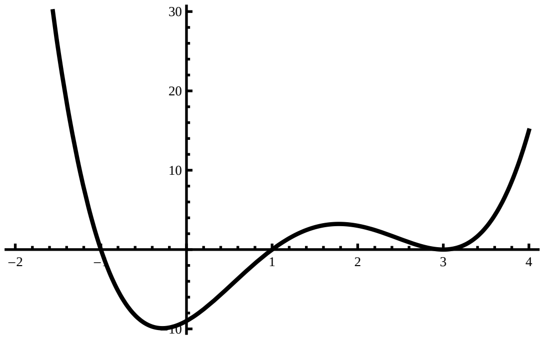
$$\lim_n \left(\mathrm{E}\xi_n + \mathrm{E}\eta_n\right) \geqslant \lim_n \mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi = \infty.$$

$\square$

Интеграл Лебега произвольной случайной величины

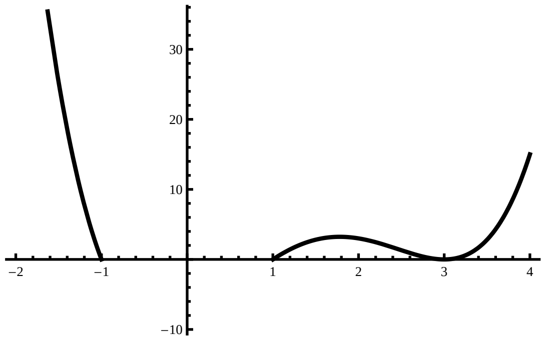
Пусть ξ - случайная величина. Введем неотрицательные случайные величины

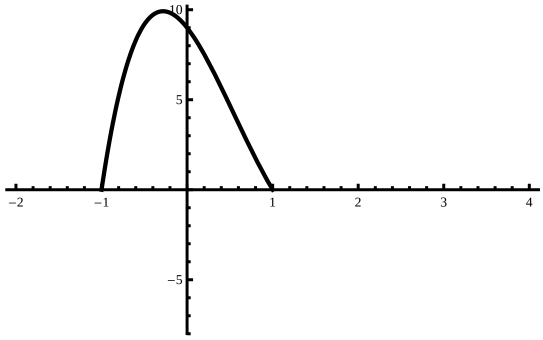
$$\xi^+ := \max\{\xi, 0\} = \xi \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant 0\}}, \quad \xi^- = -\min\{\xi, 0\} = -\xi \mathbf{1}_{\{\xi < 0\}}$$



Пример графика некоторой функции $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

На следующем рисунке показано, как выглядят графики φ^+ и φ^-





и отметим очевидные равенства

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad |\xi| = \xi^+ + \xi^-. \tag{10}$$

Определение 4. *Будем говорить, что математическое ожидание случайной величины ξ определено и конечно, если*

$$\max\left\{\mathrm{E}\xi^+, \mathrm{E}\xi^-\right\} < \infty.$$

В этом случае полагают

$$\mathrm{E}\xi := \mathrm{E}\xi^+ - \mathrm{E}\xi^-.$$

Если $\mathrm{E}\xi^+ = \infty,\ \mathrm{E}\xi^- < \infty$, *то* $\mathrm{E}\xi := +\infty$,
если $\mathrm{E}\xi^+ < \infty,\ \mathrm{E}\xi^- = \infty$, *то* $\mathrm{E}\xi := -\infty$,
если $\mathrm{E}\xi^+ = \infty,\ \mathrm{E}\xi^- = \infty$, *то математическое ожидание не определено.*

Замечание 2. *Из утверждения 1 и второго равенства в (10) следует, что* $\mathrm{E}\xi$ *определено и конечно тогда и только тогда, когда* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$.

Замечание 3. *Интегралом Лебега от случайной величины ξ по измеримому множеству $A \in \mathfrak{F}$ будем называть*

$$\int\limits_A \xi \, d\,\mathsf{P} := \int \xi \mathbf{1}_A \, d\,\mathsf{P} = \mathrm{E}\xi\mathbf{1}_A.$$

Прежде всего отметим, что данное определение корректно, так как при $A \in \mathfrak{F}$ функция $\xi\mathbf{1}_A$ измерима, т.е. является случайной величиной.

Свойства интеграла Лебега произвольной случайной величины

1. Пусть $c \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$. Тогда $\mathrm{E}\,|c\xi| < \infty$, и

$$\mathrm{E}(c\xi) = c\mathrm{E}\xi.$$

2. Пусть $\xi \leqslant \eta$, а $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{E}\eta$ определены. Тогда
$$-\infty \leqslant \mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta \leqslant \infty$$
в том смысле, что
из $-\infty < \mathrm{E}\xi$ следует $-\infty < \mathrm{E}\eta$ и $\mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta$
из $\mathrm{E}\eta < \infty$ следует $\mathrm{E}\xi < \infty$ и $\mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta$.

3. Пусть $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$, тогда
$$|\mathrm{E}\xi| \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|\,.$$

4. Пусть $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$, $\mathrm{E}\,|\eta| < \infty$. Тогда $\mathrm{E}\,|\xi+\eta| < \infty$, и
$$\mathrm{E}(\xi+\eta) = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta.$$

5. Если $\mathrm{E}\xi$ определено, то для каждого $A \in \mathfrak{F}$ определено $\mathrm{E}(\xi \mathbf{1}_A)$. Если $\mathrm{E}\xi$ конечно, то $\mathrm{E}(\xi \mathbf{1}_A)$ также конечно.

6. Если $\xi \overset{a.s.}{=} 0$, то $\mathrm{E}\xi = 0$.

7. Если $\mathrm{E}\xi = 0$, $\xi \geqslant 0$, то $\xi \overset{a.s.}{=} 0$.

8. Если $\xi \overset{a.s.}{=} \eta$ и $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$, то $\mathrm{E}\,|\eta| < \infty$ и $\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\eta$.

9. (Неравенство Коши-Буняковского) Пусть с.в. ξ и η таковы, что $\mathrm{E}\xi^2 < \infty$, $\mathrm{E}\eta^2 < \infty$. Тогда $\mathrm{E}\,|\xi\eta| < \infty$ и
$$(\mathrm{E}\xi\eta)^2 \leqslant \mathrm{E}\xi^2 \mathrm{E}\eta^2.$$

Доказательство п.1. Предположим сначала, что $c \geqslant 0$, и $\xi \geqslant 0$. По теореме 1 существует последовательность неотрицательных простых случайных величин $\xi_n \uparrow \xi$. Тогда $c\xi_n \uparrow c\xi$ и, используя определение интеграла Лебега неотрицательной случайной величины, равенство (1) и свойства пределов, имеем
$$\mathrm{E}(c\xi) = \lim_n \mathrm{E}(c\xi_n) = c \lim_n \mathrm{E}\xi_n = c\mathrm{E}\xi.$$
Теперь пусть ξ знакопеременная случайная величина, а $c \in \mathbb{R}$. Если $c \geqslant 0$, то очевидно
$$(c\xi)^+ = c\xi^+, \quad (c\xi)^- = c\xi^-,$$
и
$$\mathrm{E}(c\xi) = \mathrm{E}(c\xi)^+ - \mathrm{E}(c\xi)^- = \mathrm{E}(c\xi^+) - \mathrm{E}(c\xi^-) = c\mathrm{E}\xi^+ - c\mathrm{E}\xi^- = c\mathrm{E}\xi.$$
Если $c < 0$, то очевидно
$$(c\xi)^+ = -c\xi^-, \quad (c\xi)^- = -c\xi^+$$

и

$$\mathrm{E}(c\xi) = \mathrm{E}(c\xi)^+ - \mathrm{E}(c\xi)^- = \mathrm{E}(-c\xi^-) - \mathrm{E}(-c\xi^+) = -c\mathrm{E}\xi^- + c\mathrm{E}\xi^+ = c\mathrm{E}\xi.$$

$\square$

Доказательство п.2. Пусть $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(x)$, заданных равенством (8), и введем случайные величины

$$\xi_n := \varphi_n(\xi), \quad \eta_n := \varphi_n(\eta)$$

Ввиду пункта 3 леммы 1 $\xi_n \leqslant \eta_n$. Ввиду пункта 2 леммы 1 $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$. Ввиду свойства (2)

$$0 \leqslant \mathrm{E}\xi = \lim_n \mathrm{E}\xi_n \leqslant \lim_n \mathrm{E}\eta_n = \mathrm{E}\eta \leqslant \infty.$$

Пусть теперь $\xi \leqslant \eta$ произвольные случайные величины. Непосредственно нетрудно проверить, что

$$\xi^+ \leqslant \eta^+, \quad \xi^- \geqslant \eta^-. \tag{11}$$

Предположим, что $\mathrm{E}\xi > -\infty$, тогда $\mathrm{E}\xi^- < \infty$, следовательно, ввиду (11), $\mathrm{E}\eta^- < \infty$, и $\mathrm{E}\eta > -\infty$. Далее, либо $\mathrm{E}\eta^+ = \infty$, и доказываемое неравенство выполняется автоматически, либо $\mathrm{E}\eta^+ < \infty$, тогда снова ввиду неравенств (11) $\mathrm{E}\xi^+ < \infty$ и

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi^+ - \mathrm{E}\xi^- \leqslant \mathrm{E}\eta^+ - \mathrm{E}\eta^- = \mathrm{E}\eta.$$

Аналогично рассматривается случай $\mathrm{E}\eta < \infty$. $\square$

Доказательство п.3. Ясно, что $-|\xi| \leqslant \xi \leqslant |\xi|$. Тогда в силу свойств 1 и 2

$$-\mathrm{E}\,|\xi| \leqslant \mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|\,,$$

откуда $|\mathrm{E}\xi| \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|$. $\square$

Доказательство п.4. Поскольку

$$|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|\,, \quad |\xi - \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|\,,$$

то в силу свойства 2 и утверждения 1

$$\mathrm{E}\,|\xi + \eta| < \infty, \quad \mathrm{E}\,|\xi - \eta| < \infty.$$

Предположим, что $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, $\xi \geqslant \eta$. Тогда в силу утверждения 1

$$\mathrm{E}(\xi - \eta) + \mathrm{E}\eta = \mathrm{E}\xi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(\xi - \eta) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\eta. \tag{12}$$

Теперь предположим только, что $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$. В следующей цепочке равенств четвертое выполняется в силу (12), а пятое в силу утверждения 1.

$$\mathrm{E}(\xi - \eta) = \mathrm{E}(\xi - \eta)^+ - \mathrm{E}(\xi - \eta)^- = \mathrm{E}(\xi - \eta)\mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}} - \mathrm{E}(\eta - \xi)\mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}} =$$

$$= \mathrm{E}\left(\xi \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}} - \eta \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}}\right) - \mathrm{E}\left(\eta \mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}} - \xi \mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}}\right) =$$
$$= \mathrm{E}\xi \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}} - \mathrm{E}\eta \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}} - \mathrm{E}\eta \mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}} + \mathrm{E}\xi \mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}} =$$
$$= \mathrm{E}\left(\xi \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}} + \xi \mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}}\right) - \mathrm{E}\left(\eta \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant \eta\}} + \eta \mathbf{1}_{\{\xi < \eta\}}\right) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\eta. \tag{13}$$

Наконец, пусть ξ и η знакопеременные случайные величины. В следующей цепочке третье равенство выполняется в силу (13), четвертое в силу утверждения 1.

$$\mathrm{E}(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi^+ - \xi^- + \eta^+ - \eta^-) = \mathrm{E}((\xi^+ + \eta^+) - (\xi^- + \eta^-)) =$$
$$= \mathrm{E}(\xi^+ + \eta^+) - \mathrm{E}(\xi^- + \eta^-) = \mathrm{E}\xi^+ + \mathrm{E}\eta^+ - \mathrm{E}\xi^- - \mathrm{E}\eta^- = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta.$$

□

Доказательство п.5. Следует из того, что

$$(\xi \mathbf{1}_A)^+ = \xi^+ \mathbf{1}_A \leqslant \xi^+, \quad (\xi \mathbf{1}_A)^- = \xi^- \mathbf{1}_A \leqslant \xi^-.$$

□

Доказательство п.6. Пусть сначала $\xi \overset{a.s.}{=} 0$ простая случайная величина.

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \sum_{i=1}^{k} A_i = \Omega.$$

Если $x_i \neq 0$, то

$$A_i \subseteq \{\xi = x_i\} \subseteq \{\xi \neq 0\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(A_i) \leqslant \mathsf{P}\{\xi \neq 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}\xi = 0.$$

Пусть теперь $\xi \overset{a.s.}{=} 0$, $\xi \geqslant 0$. Обозначим $A := \{\xi = 0\}$, $\mathsf{P}(A) = 1$. По теореме 1 существует последовательность простых $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \uparrow \xi$. Ясно, что для любого n $A \subseteq \{\xi_n = 0\}$, т.е. $\mathsf{P}\{\xi_n = 0\} = 1 \Rightarrow \mathrm{E}\xi_n = 0 \Rightarrow \mathrm{E}\xi = \lim\limits_n \mathrm{E}\xi_n = 0$. Теперь пусть $\xi \overset{a.s.}{=} 0$ произвольная (знакопеременная) случайная величина. Тогда $|\xi| \overset{a.s.}{=} 0$. По свойству 3 интеграла Лебега $|\mathrm{E}\xi| \leqslant \mathrm{E}\,|\xi| = 0$. □

Доказательство п.7. Замечая, что при $\xi \geqslant 0$ для любого натурального n

$$\mathbf{1}_{\{\xi > \frac{1}{n}\}} = \mathbf{1}_{\{n\xi > 1\}} \leqslant n\xi,$$

пользуясь свойствами 1 и 2, имеем

$$\mathsf{P}\left\{\xi > \frac{1}{n}\right\} = \mathrm{E}\mathbf{1}_{\{\xi > \frac{1}{n}\}} \leqslant n\mathrm{E}\xi = 0.$$

Из очевидного равенства

$$\{\xi > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\xi > \frac{1}{n}\right\}$$

следует
$$\mathsf{P}\left\{\xi > 0\right\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\xi > \frac{1}{n}\right\} = 0,$$
откуда в силу $\xi \geqslant 0$
$$\mathsf{P}\left\{\xi = 0\right\} = 1.$$
$\square$

Доказательство п.8. $\xi \overset{a.s.}{=} \eta \;\Leftrightarrow\; \eta - \xi \overset{a.s.}{=} 0$. В силу свойств 6 и 4
$$\mathrm{E}\eta = \mathrm{E}(\eta - \xi) + \mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi.$$
$\square$

Доказательство п.9. Если $\mathrm{E}\xi^2 = 0$ или $\mathrm{E}\eta^2 = 0$, то по свойству 7 либо $\xi \overset{a.s}{=} 0$ либо $\eta \overset{a.s}{=} 0$, и неравенство выполнено тривиально. Пусть $\mathrm{E}\xi^2 > 0$ и $\mathrm{E}\eta^2 > 0$. Рассмотрим случайные величины
$$\xi_1 := \frac{|\xi|}{\sqrt{\mathrm{E}\xi^2}}, \quad \eta_1 := \frac{|\eta|}{\sqrt{\mathrm{E}\eta^2}}.$$
Заметим,
$$0 \leqslant \mathrm{E}\left(\xi_1 - \eta_1\right)^2 = \mathrm{E}\xi_1^2 - 2\mathrm{E}\xi_1\eta_1 + \mathrm{E}\eta_1^2 = 2 - 2\mathrm{E}\xi_1\eta_1,$$
откуда
$$\mathrm{E}\xi_1\eta_1 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}\left|\xi\eta\right| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\xi^2}\sqrt{\mathrm{E}\eta^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\mathrm{E}\xi\eta\right| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\xi^2}\sqrt{\mathrm{E}\eta^2}.$$
Последний переход выполняется в силу свойства 3. $\square$

Глава 2. Замена переменных и предельный переход под знаком интеграла Лебега

Замена переменных

Теорема 2. *Пусть ξ с.в. на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Тогда для любой борелевской функции $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\Omega} g\left(\xi(\omega)\right)\ \mathsf{P}(d\omega). \tag{14}$$

Если определен один из интегралов, то определен и второй.

Замечание 4. *На первый взгляд может показаться, что интеграл в левой части – еще не введенный нами объект. Однако, полагая в качестве вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ тройку $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$, мы видим, что это уже известный нам интеграл Лебега* от случайной величины *$g(x)$ по вероятностной мере P_ξ (поскольку $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелевская, т.е. измерима на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathsf{P}_\xi)$, она является случайной величиной).*

Доказательство. Рассмотрим в качестве $g(x) = \mathbf{1}_B(x),\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Тогда (14) принимает вид

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}\{\xi(\omega) \in B\},$$

а это равенство выполнено как определение распределения случайной величины. Таким образом, (14) выполняется также для всех борелевских простых функций $g(x)$ в силу свойств 1 и 4 (линейность).

Пусть $g(x)$ неотрицательная борелевская. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных функций

$$g_n(x) = \varphi_n(g(x)),$$

где $\varphi_n(\cdot)$ задано формулой (8). В силу леммы 1 для каждого $x \in \mathbb{R}$ $g_n(x) \uparrow g(x)$. Кроме того, отсюда же следует, что для любого $\omega \in \Omega$ $g_n(\xi(\omega)) \uparrow g(\xi(\omega))$.

Поскольку, как установлено выше,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\Omega} g_n\left(\xi(\omega)\right)\ \mathsf{P}(d\omega),$$

то совпадают (конечные или бесконечные) пределы

$$\lim_n \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \lim_n \int\limits_{\Omega} g_n\left(\xi(\omega)\right)\ \mathsf{P}(d\omega).$$

По определению интеграла Лебега это равенство и есть равенство (14).

Пусть $g(x)$ произвольная борелевская. Предположим, первый интеграл в (14) определен и конечен. То есть конечны интегралы

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g^{+}(x)\ \mathsf{P}_{\xi}(dx) < \infty, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} g^{-}(x)\ \mathsf{P}_{\xi}(dx) < \infty.$$

Тогда в силу доказанного выше конечны интегралы

$$\int\limits_{\Omega} g^{+}\left(\xi(\omega)\right)\ \mathsf{P}(d\omega) < \infty, \quad \int\limits_{\Omega} g^{-}\left(\xi(\omega)\right)\ \mathsf{P}(d\omega) < \infty.$$

Таким образом, второй интеграл в (14) определен, конечен и совпадает с первым. Аналогично рассматриваются остальные случаи. □

Теорема о монотонной сходимости

Теорема 3. *Пусть* $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *неотрицательные случайные величины, причем* $\xi_n \uparrow \xi$ *и* $\mathrm{E}\xi_n \leqslant K < \infty$ *(равномерная ограниченность). Тогда* $\mathrm{E}\xi \leqslant K$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi.$$

Замечание 5. *Отличие в данной формулировке от определения интеграла Лебега состоит в том, что случайные величины* ξ_n *не предполагаются простыми.*

Доказательство. Для каждого $k \geqslant 1$ введем последовательность (она существует по теореме 1) $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n\geqslant 1}$ простых неотрицательных случайных величин таких, что $\xi_k^{(n)} \uparrow \xi_k$ для всех ω при $n \to \infty$. Обозначим
$\zeta^{(n)} := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k^{(n)}$. Тогда

$$\zeta^{(n-1)} \leqslant \zeta^{(n)} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k^{(n)} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k = \xi_n \leqslant \xi.$$

Существует $\lim\limits_{n} \zeta^{(n)} =: \zeta$. Для $1 \leqslant k \leqslant n$ выполняется

$$\xi_k^{(n)} \leqslant \zeta^{(n)} \leqslant \xi.$$

Устремляем $n \to \infty$, получим, что для любого k

$$\xi_k \leqslant \zeta \leqslant \xi.$$

Устремляем $k \to \infty$, получим $\zeta = \xi$. Поскольку $\zeta^{(n)} \geqslant 0$ простые, и $\zeta^{(n)} \uparrow \zeta$, то

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\zeta = \lim_{n} \mathrm{E}\zeta^{(n)} \leqslant \lim_{n} \mathrm{E}\xi_n \leqslant K < \infty.$$

С другой стороны
$$\mathrm{E}\xi_n \leqslant \mathrm{E}\xi \Rightarrow \lim_n \mathrm{E}\xi_n \leqslant \mathrm{E}\xi.$$
$\square$

Следствие 2. *Пусть для любого n $0 \leqslant \xi_n \leqslant \eta$, $\mathrm{E}\eta < \infty$ и $\xi_n \downarrow \xi$ a.s. Тогда*
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $0 \leqslant \mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta < \infty$.

Обозначив $\xi_n' := \eta - \xi_n$, отметим, что
$$\xi_n' \geqslant 0, \quad \mathrm{E}\xi_n' \leqslant \mathrm{E}\eta, \quad \xi_n' \uparrow \eta - \xi,$$
и в силу теоремы 3
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n' = \mathrm{E}(\eta - \xi).$$
$\square$

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Теорема 4. *Если $|\xi_n| \leqslant \eta$, $\mathrm{E}\eta < \infty$ и $\xi_n \to \xi$, то $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$ и*
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi.$$

Доказательство. Будем сначала предполагать, что $\xi_n \geqslant 0$.

Обозначая $\zeta_n := \inf\limits_{m\geqslant n} \xi_m$ и учитывая, что
$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \liminf_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \quad \zeta_n \leqslant \xi_n \leqslant \eta,$$
отметим, что
$$\zeta_n \geqslant 0, \quad \zeta_n \uparrow \xi, \quad \mathrm{E}\zeta_n \leqslant \mathrm{E}\eta,$$
и в силу теоремы 3 $\mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\eta < \infty$ и
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\zeta_n = \mathrm{E}\xi.$$

Таким образом, справедлива цепочка
$$\mathrm{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\zeta_n = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\zeta_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n. \tag{15}$$

Обозначая $\zeta_n' := \sup\limits_{m\geqslant n} \xi_m$, и учитывая, что
$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n' = \limsup_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi, \quad \xi_n \leqslant \zeta_n' \leqslant \eta,$$

отметим, что

$$0 \leqslant \zeta_n' \leqslant \eta, \quad \zeta_n' \downarrow \xi, \quad \mathrm{E}\xi \leqslant \mathrm{E}\zeta_n' \leqslant \mathrm{E}\eta < \infty,$$

и в силу следствия 2

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\zeta_n' = \mathrm{E}\xi.$$

Таким образом, справедлива цепочка неравенств

$$\mathrm{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\zeta_n' = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\zeta_n' \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем

$$\mathrm{E}\xi = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n,$$

т.е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi < \infty.$$

Теперь пусть ξ_n произвольная последовательность, удовлетворяющая условию теоремы. Тогда из сходимости $\xi_n \to \xi$ следует $|\xi_n| \to |\xi|$, и из формул

$$\xi_n^+ = \frac{|\xi_n| + \xi_n}{2}, \quad \xi_n^- = \frac{|\xi_n| - \xi_n}{2}$$

получим

$$\xi_n^+ \to \xi^+, \quad \xi_n^- \to \xi^-.$$

Поскольку $\xi_n^+ \leqslant |\xi_n| \leqslant \eta$ и $\xi_n^- \leqslant |\xi_n| \leqslant \eta$, то в силу доказанного выше

$$\mathrm{E}\xi^+ < \infty, \quad \mathrm{E}\xi^- < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n^+ = \mathrm{E}\xi^+, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n^- = \mathrm{E}\xi^-,$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Замечание 6. *Можно считать, что последовательности случайных величин в теоремах 3 и 4 сходятся лишь a.s. Действительно, мы можем переопределить исходные случайные величины на событии нулевой вероятности так, чтобы сходимость $\xi_n \to \xi$ имела место на всем пространстве. При этом в силу свойства 8 соответствующие математические ожидания не изменятся.*

Более того, теорема Лебега остается в силе, если вместо сходимости a.s. потребовать сходимость ξ_n к ξ лишь по вероятности (см. [2]), т.е. чтобы для любого $\varepsilon > 0$ $\mathsf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \to 0, \ n \to \infty$.

О классическом интеграле Лебега на вещественной прямой

При рассмотрении типов распределений вероятностей, а именно, абсолютно непрерывного распределения, возникают такие новые объекты как плотность распределения $f(x)$ и интеграл Лебега по мере Лебега на вещественной прямой от функции плотности

$$F(x) = \int\limits_{(-\infty,x]} f(t)\,\lambda(dt), \tag{17}$$

который, как правило, традиционно записывают в том же виде, что и соответствующий интеграл Римана:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{18}$$

Связано это, видимо, с тем, что на практике плотность распределения чаще всего является интегрируемой по Риману (а вообще говоря, может даже не быть борелевской), и соответствующие интегралы (17) и (18) совпадают. Тем не менее, при рассмотрении общего случая нужно понимать, что в формуле функции распределения (18) мы как и в (17) имеем дело с интегралом Лебега по мере Лебега на прямой, и для дальнейшего изложения нам понадобится определить этот объект.

Основное отличие от уже введенного нами понятия интеграла состоит в том, что мера Лебега не является конечной, т.е. $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$. Из-за этого интеграл от простой функции (например, константы) может быть бесконечным. В связи с этим несколько модифицируем схему построения.

Далее мы считаем меру Лебега λ заданной на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ и счетно-аддитивной на ней (это предполагается известным). Введем множество $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ такое, что $\lambda(A) < \infty$. Определим интеграл Лебега в три этапа:

1. для простой неотрицательной функции с носителем конечной лебеговой меры
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_A(x)\,\lambda(dx), \tag{19}$$

2. для борелевской неотрицательной функции
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\lambda(dx) \tag{20}$$

3. и, наконец, интеграл (20) для произвольной борелевской $f(x)$.

Итак, пусть сначала функция $f(x) \geqslant 0$ простая, т.е. принимает конечное число значений и имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{B_i}(x), \quad \sum_{i=1}^{k} B_i = \mathbb{R}, \quad x_i \geqslant 0.$$

Определим интеграл от функции $f(x)\mathbf{1}_A(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_A(x)\,\lambda(dx) := \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda(B_i A) \leqslant \lambda(A) \max_{i=1}^{k} x_i < \infty.$$

Заметим, что значение интеграла не зависит от выбора представления функции $f(x)$. Доказательство полностью аналогично данному в замечании 1. Кроме того, отметим, что выполняются все аналогичные свойства интеграла от простых случайных величин.

Теперь считаем, что $f(x) \geqslant 0$ борелевская. Существует последовательность простых неотрицательных функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x) \uparrow f(x)$ – в качестве таковых можно, например, как и раньше, взять, $f_n(x) = \varphi_n(f(x))$, где $\varphi_n(x)$ определены формулой (8). Введем последовательность борелевских подмножеств прямой $A_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, таких, что $A_n \uparrow \mathbb{R}$ и $\lambda(A_n) < \infty$. Поскольку

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant f_n(x)\mathbf{1}_{A_n}(x) \uparrow f(x), \quad n \to \infty,$$

существует конечный или бесконечный предел (при $n \to \infty$) интегралов от этих функций. Определим теперь интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\lambda(dx) := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\,\lambda(dx) \quad (\leqslant \infty)$$

и отметим, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора последовательностей $f_n(x)$ и A_n. Для доказательства этого факта нужно рассмотреть аналоги соответствующих утверждений (леммы 2 и следствия 1):

Лемма 3. *Задана борелевская функция $f(x) \geqslant 0$. Пусть $g(x)$ и $f_n(x)$ простые неотрицательные борелевские функции $(n \geqslant 1)$, причем для каждого $x \in \mathbb{R}$*

$$f_n \uparrow f \geqslant g.$$

(в качестве $f_n(x)$ можно взять $\varphi_n(f(x))$).

Пусть к тому же $B, A_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$ такие, что $A_n \uparrow \mathbb{R}$, $\lambda(A_n) < \infty$, $\lambda(B) < \infty$.

Тогда

$$\lim_n \int f_n(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\,\lambda(dx) \geqslant \int g(x)\mathbf{1}_B(x)\,\lambda(dx).$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$C_n := \{x \ : \ f_n\mathbf{1}_{A_n} \geqslant (g-\varepsilon)\mathbf{1}_B\}.$$

Сразу отметим, что из $f_n\mathbf{1}_{A_n} \uparrow f$ следует

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \ : \ f_n\mathbf{1}_{A_n} > f - \varepsilon \geqslant g - \varepsilon \geqslant (g-\varepsilon)\mathbf{1}_B,$$

т.е. $\bigcup\limits_n C_n = \mathbb{R}$. Тогда $\bigcap\limits_n \overline{C_n} = \emptyset$. таким образом, $\overline{C_n} \downarrow \emptyset$. Отметим также, что $\overline{C_n} \subseteq B$, поэтому $\lambda(\overline{C_n}) \leqslant \lambda(B) < \infty$. В силу непрерывности меры Лебега в нуле (с учетом конечности $\lambda(\overline{C_n})$) отсюда следует $\lambda(\overline{C_n}) \to 0$.

Ввиду неравенства

$$f_n\mathbf{1}_{A_n} \geqslant f_n\mathbf{1}_{A_nC_n} \geqslant (g-\varepsilon)\mathbf{1}_{BC_n}$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n \mathbf{1}_{A_n}\, d\lambda \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} (g-\varepsilon)\mathbf{1}_{BC_n}\, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} g\mathbf{1}_{BC_n}\, d\lambda - \varepsilon\lambda(BC_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} g\mathbf{1}_B\, d\lambda - \int\limits_{\mathbb{R}} g\mathbf{1}_{B\overline{C_n}}\, d\lambda - \varepsilon\lambda(BC_n) \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}} g\mathbf{1}_B\, d\lambda - \lambda(\overline{C_n}) \max_{x\in\mathbb{R}} g\mathbf{1}_B - \varepsilon\lambda(B).$$

Теперь $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. □

Следствие 3. *Задана борелевская функция $f(x) \geqslant 0$. Пусть $f_n(x)$ и $g_m(x)$ последовательности простых неотрицательных борелевских функций таких, что*

$$f_n(x) \uparrow f(x), \quad g_m(x) \uparrow f(x),$$

и последовательности борелевских множеств A_n и B_m таких, что

$$A_n \uparrow \mathbb{R}, \quad B_m \uparrow \mathbb{R}, \quad \lambda(A_n) < \infty, \quad \lambda(B_m) < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\, \lambda(dx) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_m(x)\mathbf{1}_{B_m}(x)\, \lambda(dx).$$

Доказательство. следует из леммы 3 и полностью аналогично выводу следствия 1 из леммы 2. □

Наконец, для знакопеременной борелевской функции $f(x)$ интеграл Лебега вводится так же, как в определении 4.

Нетрудно убедиться, что свойства интеграла Лебега $1-9$, доказанные в параграфе , выполняются и для интеграла по мере Лебега на прямой. Также выполняются теоремы о монотонной и мажорируемой сходимости.

Вычисление математического ожидания случайной величины с заданным распределением вероятностей

Определение 5. *Распределением случайной величины ξ будем называть вероятностную меру на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, определяемую равенством*

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}\left\{\xi \in B\right\}, \ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Определение 6. *Случайную величину ξ будем называть* дискретной, *если ее распределение сосредоточено на не более чем счетном множестве, т.е. если существует такое множество $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, что*

$$\mathsf{P}_\xi(A) = \sum_i \mathsf{P}_\xi(\{a_i\}) = 1.$$

Элементы a_i, для которых $p_i := \mathsf{P}_\xi(\{a_i\}) > 0$ называют атомами распределения. А соответствующие p_i - весами.

Замечание 7. *Обозначая* $B_i := \{\xi = a_i\} \in \mathfrak{F}$, *можно представить*

$$\xi(\omega) = \sum_i a_i \mathbf{1}_{B_i}(\omega), \quad \omega \in B = \sum_i B_i, \quad \mathsf{P}\,(B) = 1.$$

Определение 7. *Случайную величину* ξ *будем называть* абсолютно-непрерывной, *если существует такая неотрицательная измеримая функция* $f_\xi(y)$, *что*

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B f_\xi(y)\,\lambda(dy), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Функция $f(y)$ *называется* плотностью распределения.

Замечание 8. *Если функция* $f_\xi(y)$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\mathsf{P}_\xi(B) = (R)\int\limits_a^b f_\xi(y)\,dy.$$

Заметим, что абсолютно-непрерывное распределение однозначно можно задать, взяв в качестве плотности любую неотрицательную интегрируемую функцию $f(y)$ *такую, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\,\lambda(dy) = 1.$$

Определение 8. *Случайную величину будем называть* сингулярной *(относительно меры* λ*), если для любого* $x \in \mathbb{R}$ $\mathsf{P}\{\xi = x\} = 0$, *и существует такое* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *что*

$$\mathsf{P}\{\xi \in A\} = 1, \quad \lambda(A) = 0.$$

Замечание 9. *Как следует из определения, множество* A *имеет мощность континуума. Действительно, если бы* A *было не более чем счетно, то из условия* $\mathsf{P}\{\xi = x\} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *следовало бы, что* $\mathsf{P}\{\xi \in A\} = 0$ *в силу счетной аддитивности* P. *Из условия* $\mathsf{P}\{\xi = x\} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *следует также, что функция распределения непрерывна.*

Дискретное распределение

Утверждение 2. *Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной распределением* $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *определено, конечно и вычисляется по формуле*

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{21}$$

если только сходится ряд $\sum |x_i|\, p_i$.

Доказательство. Пусть ξ неотрицательная дискретная случайная величина с распределением $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \quad \omega \in A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \mathsf{P}(A) = 1,$$

где $x_i \geqslant 0$, $\mathsf{P}(A_i) = p_i$.

Таким образом,

$$\xi(\omega) \overset{a.s.}{=} \widehat{\xi}(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Вычислим $\mathrm{E}\xi$ по определению интеграла Лебега. Введем последовательность простых неотрицательных случайных величин

$$\xi_n(\omega) := \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \quad x_i \geqslant 0.$$

Очевидно, что $\xi_n \uparrow \widehat{\xi}$. Тогда по определению интеграла Лебега (и с учетом свойства 8)

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\widehat{\xi} = \lim_n \mathrm{E}\xi_n = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (\leqslant \infty).$$

Если ξ знакопеременная дискретной случайная величина, то $\widehat{\xi} = \widehat{\xi}^{+} - \widehat{\xi}^{-}$, где

$$\widehat{\xi}^{+} = \sum_{\{i\,:\,x_i \geqslant 0\}} x_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \widehat{\xi}^{-} = \sum_{\{i\,:\,x_i < 0\}} (-x_i) \mathbf{1}_{A_i}.$$

Если ряд $\sum x_i p_i$ сходится абсолютно, т.е. $\sum |x_i|\, p_i < \infty$, то

$$\mathrm{E}\widehat{\xi}^{+} = \sum_{\{i\,:\,x_i \geqslant 0\}} x_i p_i < \infty, \quad \mathrm{E}\widehat{\xi}^{-} = \sum_{\{i\,:\,x_i < 0\}} (-x_i) p_i < \infty,$$

и выполняется (21). $\square$

Следствие 4. *Если $g(x)$ борелевская функция, то*

$$\mathrm{E}g(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i, \tag{22}$$

если только ряд сходится абсолютно.

Пример 1.

1. *Пусть ξ имеет распределение Бернулли с параметром $p \in (0,1)$, т.е. принимает значения 0 и 1 с вероятностями $1-p$ и p соответственно. Тогда по формуле (21)*

$$\mathrm{E}\xi = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

(можно считать, что все p_i в (21), начиная с третьего равны нулю).

2. *Пусть ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$. Тогда по формуле (21)*

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

замена $m = n-1, \ r = k-1$

$$= pn \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!(m-r)!} p^r (1-p)^{m-r} = np.$$

Можно вычислить это математическое ожидание иначе. Если ξ_k - случайные величины с распределением Бернулли $B(p), 0 < p < 1$, то их сумма $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ как раз имеет биномиальное распределение $Bi(n,p)$, и

$$\mathrm{E}\left(\xi_1 + \cdots + \xi_n\right) = \mathrm{E}\xi_1 + \mathrm{E}\xi_2 + \cdots + \mathrm{E}\xi_n = np.$$

3. *Пусть ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1)$, т.е. с вероятностью 1 принимает натуральные значения, и*

$$\mathsf{P}\{\xi = n\} = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad q = 1-p.$$

Тогда по формуле (21)

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(q),$$

где $f_n(x) = x^n$. Замечая, что $f_n'(x)$ непрерывны, а на отрезке $[0,q]$ ряд из $f_n'(x)$ сходится равномерно ($q < 1$), имеем для $x \in [0,q]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом
$$\mathrm{E}\xi = p\,\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

4. *Пусть ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, т.е. $\xi \sim (k, \pi_k)_{k=0}^{\infty}$, где*
$$\pi_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$
Тогда по формуле (21)
$$\mathrm{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda.$$

5. *Пусть ξ такая же, как и выше. Вычислить $\mathrm{E}\xi^2$. По формуле (22) (с $g(x) = x^2$)*
$$\mathrm{E}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

Абсолютно непрерывное распределение

Утверждение 3. *Пусть $g(x)$ борелевская функция. Математическое ожидание случайной величины $g(\xi)$, где ξ имеет абсолютно непрерывное распределение и плотностью $f_\xi(x)$ вычисляется по формуле*
$$\mathrm{E}g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x)\,dx \tag{23}$$
если только интеграл сходится абсолютно. В частности, если $\int\limits_{\mathbb{R}} |x|\, f_\xi(x)\,dx < \infty$, то
$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\,dx. \tag{24}$$

Доказательство. По теореме о замене переменных верно (14), т.е.
$$\mathrm{E}g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx)$$

Поэтому нужно лишь показать выполнение равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x)\, dx \tag{25}$$

для любой борелевской функции $g(x)$ (при условии абсолютной сходимости интеграла в правой части).

Заметим, что по определению абсолютно-непрерывного распределения для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполняется

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \int\limits_B f_\xi(x)\, dx, \tag{26}$$

где интеграл понимается, вообще говоря, как интеграл по мере Лебега.

Перепишем (26) как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x) f_\xi(x)\, dx.$$

Тогда в силу линейности интеграла Лебега (свойств 1 и 4) и соответствующих свойств интеграла по мере Лебега равенство (25) выполнено для всех простых борелевских функций $g(x)$.

Покажем выполнение равенства для неотрицательной борелевской функции $g(x)$. Обозначим

$$g_n(x) := \varphi_n\left(g(x)\right),$$

где $\varphi_n(x)$ задана формулой (8). В силу леммы 1 функции $g_n(x)$ простые неотрицательные и $g_n(x) \uparrow g(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)\ \mathsf{P}_\xi(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) f_\xi(x)\, dx.$$

Поскольку для всех $x \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \leqslant g_n(x) f_\xi(x) \uparrow g(x) f_\xi(x)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) f_\xi(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x)\, dx < \infty$$

ввиду условия абсолютной сходимости интеграла в правой части, по теореме о монотонной сходимости для интеграла Лебега на прямой

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x) f_\xi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f_\xi(x)\, dx,$$

и утверждение доказано для неотрицательных $g(x)$.

Пусть, наконец, $g(x)$ произвольная борелевская. Тогда, поскольку $0 \leqslant g^{+} \leqslant |g|$ и $0 \leqslant g^{-} \leqslant |g|$, интегралы в правых частях следующих равенств конечны и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g^{+}(x)\ \mathsf{P}_{\xi}(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} g^{+}(x) f_{\xi}(x)\, dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} g^{-}(x)\ \mathsf{P}_{\xi}(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} g^{-}(x) f_{\xi}(x)\, dx,$$

откуда следует требуемое. $\square$

Замечание 10. *Особо отметим, что, вообще говоря,*

$$\mathrm{E}g(\xi) \neq g\left(\mathrm{E}\xi\right).$$

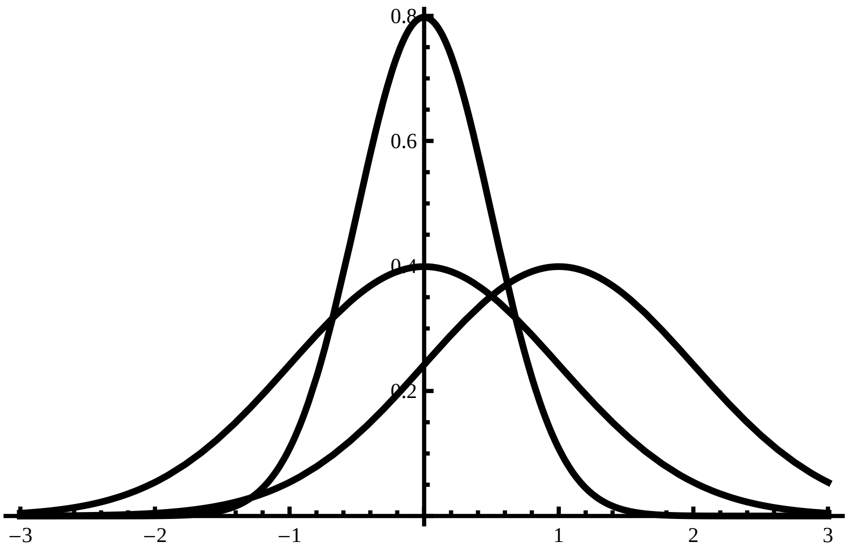
Пример 2.

1. *Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$. Тогда она имеет плотность $f_{\xi}(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$. По формуле (24)*

$$\mathrm{E}\xi = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} x\, dx = \frac{a+b}{2}.$$

2. *Пусть ξ имеет нормальное распределение $N(a,\sigma^2)$ с плотностью*

$$f_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$



Графики плотностей нормального распределения $N(0,1)$, $N(1,1)$, $N(0,1/2)$

Вычислим $\mathrm{E}\xi$, используя (24).

$$\mathrm{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, d(x-a) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,dy + a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{a,\sigma}(x)\,dx = a.$$

Вычислим $\mathrm{E}(\xi-a)^2$, *используя (23).*

$$\mathrm{E}(\xi-a)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[\begin{array}{c} x=\sigma y+a \\ dx=\sigma dy \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{0,1}(y)\,dy = \sigma^2.$$

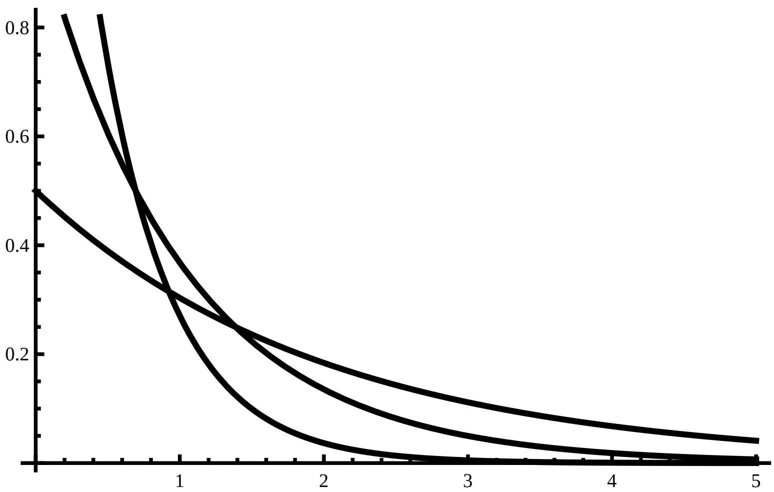
В частности, если случайная величина η *имеет стандартное нормальное распределение* $N(0,1)$, *то*

$$\mathrm{E}\eta = 0, \quad \mathrm{E}\eta^2 = 1.$$

3. Пусть ξ *имеет показательное распределение с плотностью*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

где $\alpha > 0$.



Графики плотностей показательного распределения при $\alpha = 1/2,\ 1,\ 2$

Тогда по формуле (24)

$$\mathrm{E}\xi = \alpha\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

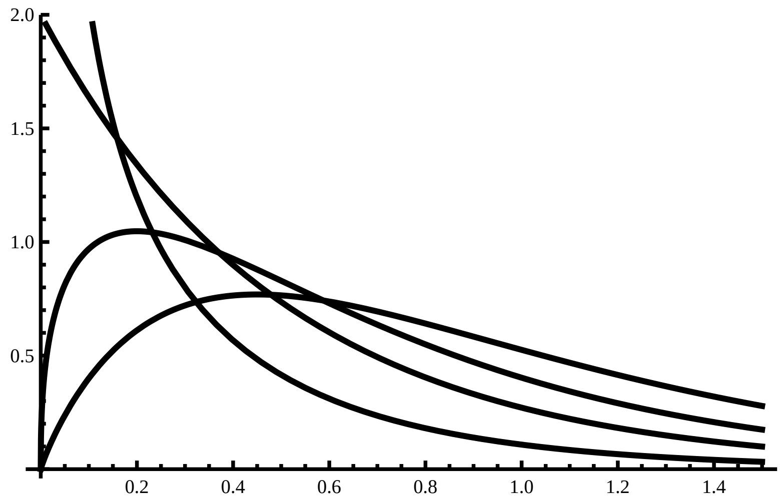
4. *Пусть* ξ *такая же как и выше, а* η *имеет стандартное нормальное распределение* $N(0,1)$. *Тогда по формуле (23)*

$$\mathrm{E}\xi^{1/2} = \alpha \int\limits_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\alpha x}\, dx = \left[\begin{array}{c} \alpha x = \frac{1}{2} y^2 \\ \alpha\, dx = y\, dy \end{array} \right] = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \int\limits_0^\infty y^2\, e^{-y^2/2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha}} \int\limits_{-\infty}^\infty y^2\, e^{-y^2/2}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}\eta^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

5. *Пусть* ξ *имеет гамма-распределение* $\Gamma(\alpha,\lambda)$ $(\alpha > 0,\ \lambda > 0)$ *с плотностью*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\, x^{\lambda-1}\, e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}, \qquad \Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty t^{\lambda-1}\, e^{-t}\, dt.$$



Графики плотностей гамма-распределения при $\alpha = 2,\ \lambda = 0.5,\ 1,\ 1.4,\ 1.9$

Тогда для натурального k *по формуле (23)*

$$\mathrm{E}\xi^k = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^\infty x^{k+\lambda-1}\, e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\alpha^k} \int\limits_0^\infty (\alpha x)^{k+\lambda-1}\, e^{-\alpha x}\, d(\alpha x) =$$

$$= \frac{\Gamma(k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\alpha^k} = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdot\dots\cdot(\lambda+k-1)}{\alpha^k}$$

6. *Пусть* ξ *имеет двойное показательное распределение с функцией распределения* $F_\xi(x) = e^{-e^{-x}}$ *и плотностью* $f_\xi(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$.

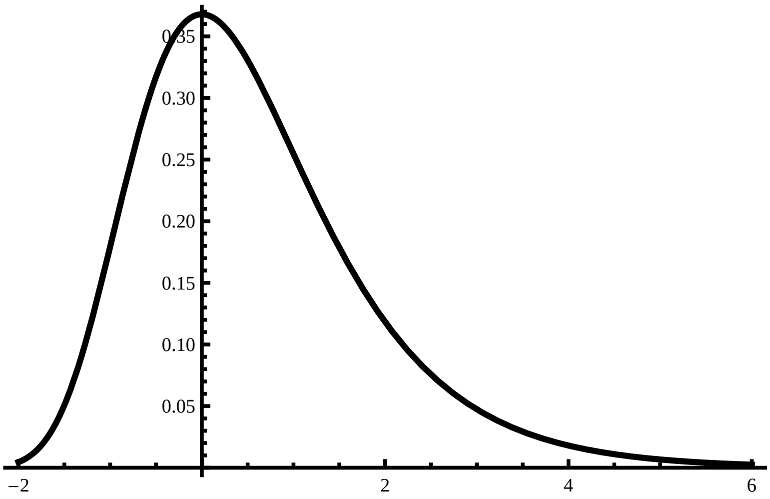


График плотности двойного показательного распределения

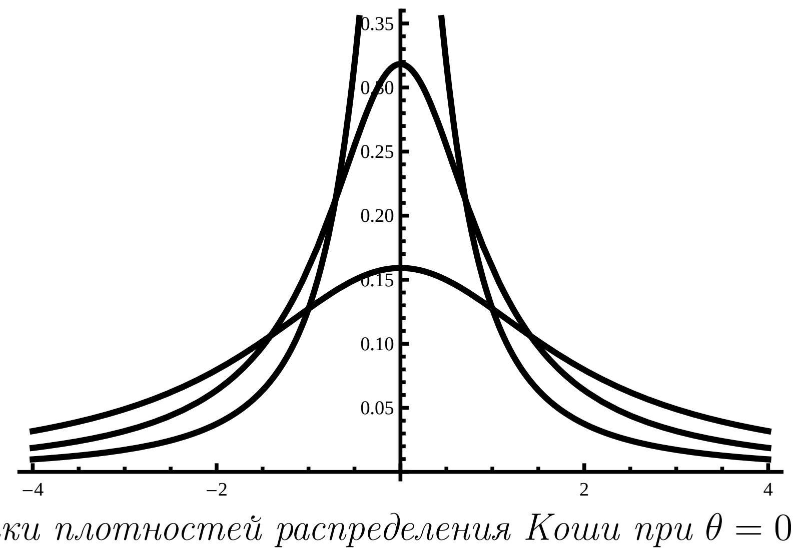
Воспользуемся формулой (24). Делая подстановку $y = e^{-x}$

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} x e^{-x} e^{-e^{-x}}\, dx = -\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y} \ln y \, dy = \gamma \approx 0,5772156649\ldots$$

постоянная Эйлера-Маскерони (см. [1], стр. 15,31).

7. *Пусть* ξ *имеет стандартное* $(\theta = 1)$ *распределение Коши с плотностью*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$



Графики плотностей распределения Коши при $\theta = 0.5,\ 1,\ 2$

Поскольку нет требуемой абсолютной сходимости, т.е

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\, dx}{1+x^2} = +\infty,$$

то не существует конечного математического ожидания. Более того, так как по формуле (23)

$$\mathrm{E}\xi^+ = \mathrm{E}\xi \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant 0\}} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = +\infty,$$

$$\mathrm{E}\xi^- = \mathrm{E}\left(-\xi \mathbf{1}_{\{\xi < 0\}}\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{-x\,dx}{1+x^2} = +\infty,$$

математическое ожидание вообще не определено.

Произвольное распределение

Лемма 4. *Пусть ξ неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Тогда*

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^{\infty} \big(1 - F_\xi(x)\big)\,dx, \tag{27}$$

где интеграл в правой части понимается как интеграл Римана.

Для произвольной случайной величины

$$\mathrm{E}\xi = -\int\limits_{-\infty}^{0} F_\xi(x)\,dx + \int\limits_0^{\infty} \big(1 - F_\xi(x)\big)\,dx, \tag{28}$$

если оба интеграла конечны. В случае, когда бесконечен один из интегралов, $\mathrm{E}\xi$ равно $\pm\infty$ соответственно. Если бесконечны оба, $\mathrm{E}\xi$ не определено.

Доказательство. Введем последовательность

$$\widehat{\varphi}_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]}(x) + n\mathbf{1}_{(n,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Замечание 11. *В отличие от последовательности $\varphi_n(x)$, заданной равенством (8), функции $\widehat{\varphi}_n(x)$ непрерывны слева (а не справа):*

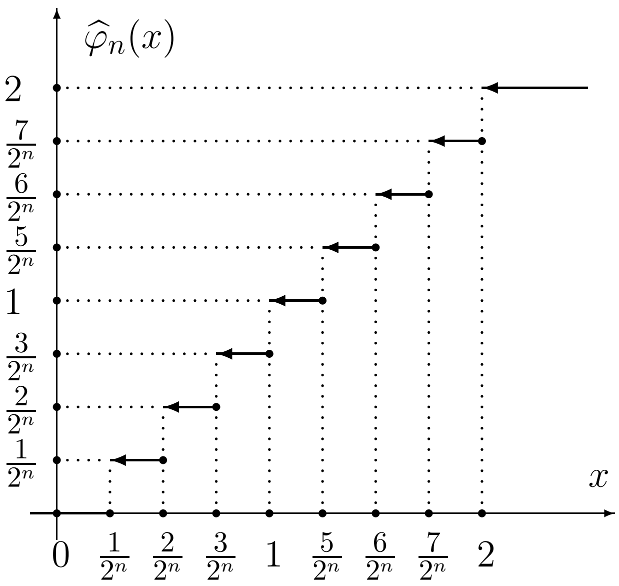


График функции $\widehat{\varphi}_n(x)$ для случая $n = 2$

Полностью аналогично лемме 1 можно утверждать, что $\widehat{\varphi}_n(x)$ неотрицательные борелевские монотонные простые функции, и для всех $x \geqslant 0$ $\widehat{\varphi}_n(x) \uparrow x$, $n \to \infty$.

Введем случайные величины $\xi_n := \widehat{\varphi}_n(\xi)$. Ясно, что ξ_n простые неотрицательные случайные величины, при этом $\xi_n \uparrow \xi$ для всех $\omega \in \Omega$. Таким образом по определению интеграла Лебега

$$\mathrm{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\xi_n. \tag{30}$$

Вычислим $\mathrm{E}\xi_n$.

$$\mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\,\mathbf{1}_{\left\{\frac{k-1}{2^n}<\xi\leqslant\frac{k}{2^n}\right\}} + n\mathbf{1}_{\{\xi>n\}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\,\mathsf{P}\left\{\frac{k-1}{2^n} < \xi \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} + n\,\mathsf{P}\{\xi > n\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n2^n}\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^n}\,\mathsf{P}\left\{\frac{k-1}{2^n} < \xi \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} + n\,\mathsf{P}\{\xi > n\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n2^n-1}\ \sum_{k=i+1}^{n2^n} \frac{1}{2^n}\,\mathsf{P}\left\{\frac{k-1}{2^n} < \xi \leqslant \frac{k}{2^n}\right\} + n\,\mathsf{P}\{\xi > n\} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n-1} \mathsf{P}\left\{\frac{i}{2^n} < \xi \leqslant n\right\} + n\,\mathsf{P}\{\xi > n\} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n-1}\left(F_\xi(n) - F_\xi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + n\left(1 - F_\xi(n)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\left(F_\xi(n) - F_\xi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right) + n\left(1 - F_\xi(n)\right) =$$

$$= n - \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n} F_\xi\left(\frac{i}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\left(1 - F_\xi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right).$$

Введем последовательность простых функций на $[0, +\infty)$

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{n2^n}\left(1 - F_\xi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)\mathbf{1}_{\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)}(x)$$

и заметим, что

$$\mathrm{E}\xi_n = \int f_n(x)\,\lambda(dx). \tag{31}$$

Для любого $x \geqslant 0$ при достаточно больших n (именно для $n > x$) найдется $i_{x,n} \leqslant n2^n$ такой, что

$$x \in \left[\frac{i_{x,n} - 1}{2^n}, \frac{i_{x,n}}{2^n}\right), \quad \left|x - \frac{i_{x,n}}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad f_n(x) = 1 - F_\xi\left(\frac{i_{x,n}}{2^n}\right).$$

Таким образом, при $n \to \infty$, учитывая, что $F_\xi(x)$ непрерывна справа,

$$\frac{i_{x,n}}{2^n} \downarrow x \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \uparrow \left(1 - F_\xi(x)\right)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по теореме о монотонной сходимости для интеграла по мере Лебега можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,\lambda(dx) = \int\limits_{[0,+\infty)}\left(1 - F_\xi(x)\right)\lambda(dx) = \int\limits_0^\infty \left(1 - F_\xi(x)\right)dx. \tag{32}$$

Последнее равенство означает здесь переход к интегралу Римана, и оно справедливо, поскольку подынтегральная функция интегрируема по Риману на любом отрезке ввиду того, что имеет не более чем счетное число точек разрыва. Из (30), (31) и (32) следует первое утверждение леммы.

Для знакопеременной случайной величины ξ рассмотрим ξ^+ и ξ^-. При $x \geqslant 0$

$$1 - F_{\xi^+}(x) = \mathsf{P}\left\{\xi^+ > x\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi > x\right\} = 1 - F_\xi(x).$$

Тогда

$$\mathrm{E}\xi^+ = \int\limits_0^\infty \left(1 - F_{\xi^+}(x)\right)dx = \int\limits_0^\infty \left(1 - F_\xi(x)\right)dx.$$

Снова при $x \geqslant 0$

$$1 - F_{\xi^-}(x) = \mathsf{P}\left\{\xi^- > x\right\} = \mathsf{P}\left\{-\xi > x\right\} = \mathsf{P}\left\{\xi < -x\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi \leqslant -x\} - \mathsf{P}\{\xi = -x\} = F_\xi(-x) - \mathsf{P}\{\xi = -x\}.$$

Запишем интеграл от ξ^- следующим образом

$$\mathrm{E}\xi^- = \int\limits_{[0,+\infty)} \big(1 - F_{\xi^-}(x)\big)\,\lambda(dx) = \int\limits_0^\infty F_\xi(-x)\,dx - \int\limits_{[0,+\infty)} \mathsf{P}\{\xi = -x\}\;\lambda(dx).$$

Поскольку функция распределения имеет не более чем счетное число точек разрыва, то подынтегральная функция во втором интеграле равна нулю почти всюду относительно меры Лебега. Следовательно этот интеграл равен нулю в силу аналога свойства 6 для интеграла по мере Лебега. В первом интеграле, проведя замену $y = -x$, получим

$$\mathrm{E}\xi^- = \int\limits_{-\infty}^0 F_\xi(y)\,dy.$$

$\square$

Следствие 5. *Пусть ξ неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Тогда*

$$\mathrm{E}\xi^p = p\int\limits_0^\infty x^{p-1}\big(1 - F_\xi(x)\big)\,dx, \quad p > 0. \tag{33}$$

Доказательство. Перепишем (27) следующим образом

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\{\xi > x\}\;dx.$$

Тогда для $p > 0$

$$\mathrm{E}\xi^p = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\{\xi^p > x\}\;dx = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\left\{\xi > x^{1/p}\right\}\;dx = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\{\xi > t\}\;d\left(t^p\right) =$$

$$= p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\,\mathsf{P}\{\xi > t\}\;dt = p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\big(1 - F_\xi(t)\big)\,dt.$$

$\square$

Пример 3.

Пусть ξ неотрицательная величина, имеющая показательное распределение с плотностью и функцией распределения соответственно

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

где $\alpha > 0$. Тогда по формуле (27)

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

2. *Пусть ξ такая же как и выше. По формуле (33)*

$$E\xi^{1/2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-\alpha x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \alpha x = \frac{1}{2}y^2 \\ \alpha\,dx = y\,dy \end{array}\right] = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2\alpha}\int\limits_0^\infty e^{-y^2/2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2\alpha}}\int\limits_{-\infty}^\infty f_{0,1}(y)\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

3. *Пусть ξ сингулярная случайная величина с функцией распределения $F(x)$, которая построена следующим образом. Положим*

$$F(x) = 0,\ x < 0,\ \ F(x) = 1,\ x \geqslant 1.$$

Делим полуинтервал $[0,1)$ на 3 равные части, на интервале $(1/3, 2/3)$ полагаем $F(x) = 1/2$. Каждый из оставшихся полуинтервалов делим на 3 части, и полагаем на $[1/9, 2/9)$ $F(x) = 1/4$, а на $[7/9, 8/9)$. $F(x) = 3/4$. И т.д. Таким образом функция $F(x)$ определена на объединении всех интервалов постоянства - на множестве, которое мы обозначим как $\overline{C}$. При этом множество значений этой функции на всех указанных интервалах всюду плотно в отрезке $[0,1]$ (на вертикальной оси).

Множество $\overline{C}$ - объединение всех интервалов постоянства имеет меру Лебега

$$\lambda(\overline{C}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} = 1,$$

тогда $\lambda(C) = 0$.

Выберем произвольную точку $x_0 \in C$. Ясно, что

$$\forall\delta > 0, \quad \exists x' \in \overline{C} \cap (x_0 - \delta, x_0), \quad \exists x'' \in \overline{C} \cap (x_0, x_0 + \delta),$$

иначе C содержит интервал, что невозможно ввиду $\lambda(C) = 0$. Тогда, выбирая δ последовательно все меньше и меньше, можно выбрать в $\overline{C}$ последовательности $x'_k \uparrow x_0$, $x''_k \downarrow x_0$. Ввиду монотонности $F(x)$ на $\overline{C}$ монотонны и последовательности $F(x'_k) \uparrow$ и $F(x''_k) \downarrow$, к тому же они ограничены, значит существуют пределы, и

$$\lim_{k\to\infty} F(x'_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} F(x''_k).$$

Покажем, что пределы равны. Предположим, что неравенство строгое. Тогда в силу плотности множества $\{F(x),\ x \in \overline{C}\}$

$$\exists x \in \overline{C}: \quad F(x) \in \left(\lim_{k\to\infty} F(x'_k), \lim_{k\to\infty} F(x''_k)\right).$$

Снова ввиду монотонности $F(x)$ на $\overline{C}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x'_k < x < x''_k.$$

Следовательно, $x = x_0 \notin \overline{C}$, что противоречит $x \in \overline{C}$. Ввиду противоречия

$$\lim_{k\to\infty} F(x'_k) = \lim_{k\to\infty} F(x''_k) =: y_0.$$

Отсюда следует

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \left\{x'_k\right\},\ x'' \in \left\{x''_k\right\}:$$

$$F(x') < y_0 < F(x''), \quad \left|F(x'') - F(x')\right| < \varepsilon.$$

Выберем δ_ε так, чтобы $(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \subset (x', x'')$ (это возможно в силу $x_0 \in (x', x'')$). Наконец, ввиду монотонности F на $\overline{C}$

$$\forall x \in \overline{C} \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon), \quad F(x') \leqslant F(x) \leqslant F(x''),$$

то есть y_0 и $F(x)$ принадлежат одному промежутку длины менее ε, значит, $|F(x) - y_0| < \varepsilon$. Следовательно

$$\forall x_0 \in C \quad \exists \lim_{x\to x_0} F(x) = y_0.$$

Определим $F(x_0) := y_0$. Аналогично поступаем так во всех точках из C. Теперь $F(x)$ определена на всей оси и непрерывна. Поэтому $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x - 0) = 0$ в каждой точке x отрезка $[0, 1]$.

С другой стороны,

$$\mathsf{P}\{\xi \in \overline{C}\} = \sum_I \mathsf{P}\{\xi \in I\},$$

где суммирование идет по всем интервалам, входящим в $\overline{C}$. Но на каждом таком интервале $F(x)$ постоянна, т.е. $\mathsf{P}\{\xi \in I\} = 0$.

Таким образом, $\mathsf{P}\{\xi \in \overline{C}\} = 0$, *и* $\mathsf{P}\{\xi \in C\} = 1$. *При этом, как показано выше,* $\lambda(C) = 0$.

Итак, случайная величина ξ *действительно имеет сингулярное распределение. Вычислим математическое ожидание. Заметим, что по построению* $1 - F(x) = F(1 - x)$ *и воспользуемся формулой (27)*

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^1 \big(1 - F(x)\big)\,dx = \int\limits_0^1 F(1-x)\,dx = \int\limits_0^1 F(y)\,dy,$$

откуда следует, что

$$1 = 2\int\limits_0^1 F(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}\xi = \frac{1}{2}.$$

Следствие 6. *Если* $\xi \geqslant 0$ *a.s., дискретная целочисленная случайная величина, т.е.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\xi = k\right\} = 1,$$

тогда

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\xi \geqslant n\right\}. \tag{34}$$

Доказательство.

$$\mathrm{E}\xi = \int\limits_0^{\infty} \big(1 - F_\xi(x)\big)\,dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_n^{n+1} \big(1 - F_\xi(x)\big)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \big(1 - F_\xi(n)\big) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \mathsf{P}\big\{\xi > n\big\} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathsf{P}\big\{\xi \geqslant n\big\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\big\{\xi \geqslant n\big\}.$$

□

Пример 4. *Пусть ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1)$, т.е. с вероятностью 1 принимает натуральные значения, и*

$$\mathsf{P}\{\xi = n\} = pq^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad q = 1 - p.$$

Вычислим математическое ожидание ξ, используя формулу (34).

$$\mathsf{P}\left\{\xi < n\right\} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{P}\left\{\xi = k\right\} = \sum_{k=1}^{n-1} pq^{k-1} = p\,\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} = 1 - q^{n-1}.$$

$$\mathsf{P}\left\{\xi \geqslant n\right\} = q^{n-1}.$$

$$\mathrm{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Глава 3. Моменты. Связь независимости, некоррелированности и слабой ассоциированности случайных величин

Моменты случайных величин

Определение 9. *Моментом порядка k случайной величины ξ называется* $\mathrm{E}\xi^k$.

Если определено и конечно $\mathrm{E}\xi$, *то центральным моментом порядка k называется* $\mathrm{E}\,(\xi - \mathrm{E}\xi)^k$. *Центральный момент второго порядка*

$$D\xi = \mathrm{E}\,(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = \mathrm{E}\xi^2 - (\mathrm{E}\xi)^2$$

называется дисперсией, а величина

$$\sigma = \sqrt{D\xi}$$

среднеквадратичным отклонением.

Определение 10. *Пусть случайные величины ξ и η такие, что* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$, $\mathrm{E}\,|\eta| < \infty$, $\mathrm{E}\,|\xi\eta| < \infty$. *Тогда определен* смешанный центральный момент

$$cov(\xi, \eta) = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)(\eta - \mathrm{E}\eta) = \mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta,$$

который называется ковариацией *случайных величин ξ и η. Если к тому же* $0 < D\xi < \infty$, $0 < D\eta < \infty$, *то определена величина*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}},$$

которая называется коэффициентом корреляции.

Определение 11. *Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $cov(\xi, \eta) = 0$, т.е.*

$$\mathrm{E}\xi\eta = \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.$$

Замечание 12. *Заметим, что при наличии конечного математического ожидания конечность дисперсии эквивалентна конечности момента второго порядка:*

$$\mathrm{E}\,|\xi| < \infty \quad \Rightarrow \quad \left(D\xi < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}\xi^2 < \infty\right).$$

Кроме того, конечность момента второго порядка обеспечивает конечность первого:

$$\mathrm{E}\xi^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}\,|\xi| < \infty,$$

что следует из неравенства Коши-Буняковского, записанного для случайных величин $|\xi|$ и 1:

$$(\mathrm{E}\,|\xi| \cdot 1)^2 \leqslant \mathrm{E}\xi^2\mathrm{E}1^2.$$

Также, конечность вторых моментов двух случайных величин обеспечивает конечность смешанного момента:

$$\mathrm{E}\,|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\xi^2}\sqrt{\mathrm{E}\eta^2}.$$

Свойства дисперсии, ковариации, коэффициента корреляции

1. $D\xi \geqslant 0$.
2. Если $a =$const, то $Da = 0$. Если $D\xi = 0$, то $\xi \overset{a.s}{=}$const.
3. $D(a + b\xi) = b^2 D\xi$.
4. Если $D\xi < \infty,\ D\eta < \infty$, то $\big(cov\big(\xi, \eta\big)\big)^2 \leqslant D\xi D\eta$.
5. Если $D\xi < \infty,\ D\eta < \infty$, то ξ и η некоррелированные $\iff D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.
6. Ковариация билинейна.
7. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$.
8. Для любых $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ $\rho(\xi, a \pm b\xi) = \pm 1$. Обратно, если $\rho(\xi, \eta) = \pm 1$, то $\eta \overset{a.s.}{=} a \pm b\xi$ для некоторых $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Доказательство 1. $D\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 \geqslant 0$. □

Доказательство 2. $Da = \mathrm{E}(a - \mathrm{E}a)^2 = 0$. Если $D\xi = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = 0$ то в силу свойства 7 интеграла Лебега $\xi - \mathrm{E}\xi \overset{a.s}{=} 0$. □

Доказательство 3. $D(a + b\xi) = \mathrm{E}(a + b\xi - \mathrm{E}a - \mathrm{E}b\xi)^2 = b^2\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = b^2 D\xi$. □

Доказательство 4. Неравенство Коши-Буняковского для величин $\xi - \mathrm{E}\xi$ и $\eta - \mathrm{E}\eta$. □

Доказательство 5. $D(\xi + \eta) = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi + \eta - \mathrm{E}\eta)^2 = \mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 + 2\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)(\eta - \mathrm{E}\eta) + \mathrm{E}(\eta - \mathrm{E}\eta)^2 = D\xi + 2\,cov\big(\xi, \eta\big) + D\eta$. □

Доказательство 6. Обозначим $\xi_1' := a(\xi_1 - \mathrm{E}\xi_1)$, $\xi_2' := b(\xi_2 - \mathrm{E}\xi_2)$, $\eta' := \eta - \mathrm{E}\eta$.

$cov\big(a\xi_1 + b\xi_2, \eta\big) = \mathrm{E}(\xi_1' + \xi_2')\eta' = \mathrm{E}\xi_1'\eta' + \mathrm{E}\xi_2'\eta' = a\,cov\big(\xi_1, \eta\big) + b\,cov\big(\xi_2, \eta\big)$.

Аналогично по второму аргументу. □

Доказательство 7. Следует из свойства 4. □

Доказательство 8. В силу билинейности ковариации

$$cov\big(\xi, a \pm b\xi\big) = 0 \pm b\,cov\big(\xi, \xi\big) = \pm bD\xi.$$

Поскольку в силу свойства 3 $D(a \pm b\xi) = b^2 D\xi$, то

$$\rho(\xi, a + b\xi) = \frac{\pm bD\xi}{\sqrt{b^2 D\xi^2}} = \pm 1.$$

Обратно, пусть для определенности $\rho(\xi,\eta)=1$. Обозначим

$$\xi_1 := \frac{\xi - \mathrm{E}\xi}{\sqrt{D\xi}}, \quad \eta_1 := \frac{\eta - \mathrm{E}\eta}{\sqrt{D\eta}}.$$

Очевидно, $\mathrm{E}\xi_1^2 = \mathrm{E}\eta_1^2 = \mathrm{E}\xi_1\eta_1 = 1$. Таким образом

$$\mathrm{E}\left(\xi_1 - \eta_1\right)^2 = \mathrm{E}\xi_1^2 - 2\mathrm{E}\xi_1\eta_1 + \mathrm{E}\eta_1^2 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Тогда в силу свойства 7 интеграла Лебега $\xi_1 \overset{a.s.}{=} \eta_1$, т.е.

$$\eta \overset{a.s}{=} \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\,\xi - \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}\,\mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta.$$

□

Независимость и некоррелированность

Напомним определение независимости событий

Определение 12. *События A и B называются независимыми (относительно вероятности P), если*

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$$

Определение 13. *Говорят, что множества $A_1,\ldots,A_n$ независимы в совокупности (относительно вероятности P), если для любых $k=1,\ldots,n$ и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$*

$$\mathsf{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\cdots\mathsf{P}(A_{i_k}).$$

Определение 14. *Случайные величины ξ, η называются независимыми, если для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ независимы события $\{\xi \in B_1\}$ и $\{\eta \in B_2\}$.*

Случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых борелевских $B_1,B_2,\ldots,B_n$ события $\{\xi_1 \in B_1\},\{\xi_2 \in B_2\},\ldots,\{\xi_n \in B_n\}$ независимы в совокупности.

Независимость бесконечной последовательности случайных величин означает независимость в совокупности любого конечного набора этих величин.

Как известно, случайные величины ξ и η независимы в точности тогда, когда их совместная функция распределения представима в виде произведения маргинальных:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y).$$

Доказательство можно найти, например, в [5].

В этом параграфе мы докажем полезное свойство независимых случайных величин: интеграл Лебега их произведения совпадает с произведением интегралов каждой из величин. Сначала рассмотрим вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть ξ и η независимые случайные величины, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ произвольные борелевские функции на $\mathbb{R}$ (в частности, они могут совпадать). Тогда $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ также независимые случайные величины.*

Доказательство. Ввиду равенств для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\{\varphi(\xi) \in B_1\} = \{\xi \in \varphi^{-1}(B_1)\}, \quad \{\psi(\eta) \in B_2\} = \{\eta \in \psi^{-1}(B_2)\}$$

множества в левых частях измеримы (т.е. являются событиями, а функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ являются случайными величинами) и независимы, поскольку измеримы и независимы множества в правых частях. $\square$

Теорема 5. *Если случайные величины ξ и η независимы и* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$, $\mathrm{E}\,|\eta| < \infty$, *то* $\mathrm{E}\,|\xi\eta| < \infty$ *и*

$$\mathrm{E}\xi\eta = \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.$$

Доказательство. Пусть сначала ξ и η простые независимые.

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{1}_{B_j}.$$

Тогда события A_i и B_j независимы для любой пары $(i,j) \ : \ i = \overline{1,k}$ и $j = \overline{1,m}$, и

$$\mathrm{E}\xi\eta = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \,\mathsf{P}(A_i B_j) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \,\mathsf{P}(A_i)\,\mathsf{P}(B_j) = \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.$$

Пусть теперь $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, независимые. Рассмотрим последовательность борелевских функций $\varphi_n(x)$, определенных формулой (8). Введем случайные величины $\xi_n = \varphi_n(\xi)$, $\eta_n = \varphi_n(\eta)$.

В силу леммы 1 для каждого n случайные величины ξ_n и η_n простые неотрицательные, $\xi_n \uparrow \xi$, $\eta_n \uparrow \eta$, а ввиду леммы 5 независимые. Тогда, как показано выше,

$$\mathrm{E}\xi_n\eta_n = \mathrm{E}\xi_n\mathrm{E}\eta_n.$$

Функции $\xi_n\eta_n$ простые и $\xi_n\eta_n \uparrow \xi\eta$. Поэтому, ввиду конечности $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{E}\eta$,

$$\mathrm{E}\xi\eta = \lim_n \mathrm{E}\xi_n\eta_n = \lim_n \mathrm{E}\xi_n\mathrm{E}\eta_n = \lim_n \mathrm{E}\xi_n \lim_n \mathrm{E}\eta_n = \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.$$

Пусть, наконец, случайные величины ξ и η знакопеременные. Нетрудно видеть, что

$$\xi\eta = \xi^+\eta^+ - \xi^+\eta^- - \xi^-\eta^+ + \xi^-\eta^-. \tag{35}$$

Поскольку

$$\xi^+ = \psi_+(\xi), \quad \eta^+ = \psi_+(\eta),$$

где $\psi_+(x) = x\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$ борелевская функция, по лемме 5 случайные величины ξ^+ и η^+ независимы. Аналогично независимы и остальные пары величин в (35). Таким образом

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\xi\eta = \mathrm{E}\xi^+\eta^+ - \mathrm{E}\xi^+\eta^- - \mathrm{E}\xi^-\eta^+ + \mathrm{E}\xi^-\eta^- = \\ = \mathrm{E}\xi^+\mathrm{E}\eta^+ - \mathrm{E}\xi^+\mathrm{E}\eta^- - \mathrm{E}\xi^-\mathrm{E}\eta^+ + \mathrm{E}\xi^-\mathrm{E}\eta^- = \\ = \big(\mathrm{E}\xi^+ - \mathrm{E}\xi^-\big)\big(\mathrm{E}\eta^+ - \mathrm{E}\eta^-\big) = \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.\end{aligned}$$

□

Следствие 7. *Если случайные величины независимы, и определена их ковариация, то они некоррелированы.*

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 5. *Рассмотрим дискретную случайную величину ξ такую, что*

$$\mathsf{P}\{\xi = -1\} = \mathsf{P}\{\xi = 0\} = \mathsf{P}\{\xi = 1\} = \frac{1}{3}.$$

Пусть $\eta = \xi^2$. Очевидно, ξ и η зависимы. Формально в этом можно убедиться, рассматривая вероятности событий

$$\mathsf{P}\{\xi > 0,\, \eta > 0\} = \frac{1}{3}, \quad \mathsf{P}\{\xi > 0\} = \frac{1}{3}, \quad \mathsf{P}\{\eta > 0\} = \frac{2}{3}.$$

Покажем, что ξ и η некоррелированы. В самом деле, замечая, что $\xi^3 = \xi$,

$$\mathrm{E}\xi = 0, \quad \mathrm{E}\eta = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}\xi\eta = \mathrm{E}\xi^3 = \mathrm{E}\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad cov\big(\xi, \eta\big) = 0.$$

Слабо ассоциированные случайные величины

Как показывает последний пример, некоррелированные случайные величины могут быть зависимы. Однако если они обладают дополнительным свойством *слабой ассоциированности*, то они необходимо независимы. Ниже мы приведем простое доказательство этого факта для пары случайных величин. Доказательство для общего случая, основанное на оценке характеристических функций, как и общее определение слабой ассоциированности, можно найти в [3].

Введем определение ассоциированности для случая двух случайных величин.

Определение 15. *Две случайные величины ξ и η называются* слабо ассоциированными *или* положительно ассоциированными (*обозначается* **PA**), *если*

$$cov\big(f(\xi), g(\eta)\big) \geqslant 0 \tag{36}$$

для любых неубывающих борелевских функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых ковариация (36) определена.

Замечание 13. *В определении* отрицательной ассоциированности (**NA**) *знак в (36) меняется на "$\leqslant$".*

Далее для удобства будем обозначать случайные величины буквами X и Y.

Теорема 6. *Пусть X и Y некоррелированные* **PA** *случайные величины.*
Тогда X и Y независимы.

Доказательство. Введем для каждого $u \in \mathbb{R}$ пару последовательностей неубывающих функций:

$$f_n(x;u) = \begin{cases} -1 & , x \leqslant u \\ n(x-u)-1 & , u < x \leqslant u + \frac{1}{n} \\ 0 & , x > u + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$g_n(x;u) = nx - f_n(x;u).$$

Зафиксируем произвольные точки $s, t \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$|g_n(x;u)| \leqslant |nx| + 1.$$

Из этой оценки следует, что

$$\mathrm{E}\,|g_n(X;s)g_n(Y;t)| \leqslant \mathrm{E}\left(|nX|+1\right)\left(|nY|+1\right) =$$

$$= n^2\mathrm{E}\,|XY| + n\mathrm{E}\,|X| + n\mathrm{E}\,|Y| + 1 < \infty,$$

$$\mathrm{E}\,|g_n(X;s)| \leqslant n\mathrm{E}\,|X| + 1 < \infty, \quad \mathrm{E}\,|g_n(Y;t)| \leqslant n\mathrm{E}\,|Y| + 1 < \infty,$$

поскольку известно, что определена ковариация величин X и Y. В силу свойства **PA**

$$cov\big(g_n(X;s), g_n(Y;t)\big) \geqslant 0,$$

$$n^2 cov\big(X, Y\big) - cov\big(nX, f_n(Y;t)\big) - cov\big(f_n(X;s), nY\big) +$$

$$+ cov\big(f_n(X;s), f_n(Y;t)\big) \geqslant 0,$$

откуда с учетом $cov\big(X,Y\big) = 0$ получаем два неравенства

$$cov\big(f_n(X;s), nY - f_n(Y;t)\big) + cov\big(nX, f_n(Y;t)\big) \leqslant 0,$$

$$cov\big(nX - f_n(X;s), f_n(Y;t)\big) + cov\big(f_n(X;s), nY\big) \leqslant 0.$$

Замечая, что все слагаемые в этих неравенствах неотрицательные (в силу свойства **PA**), делаем вывод, что все они равны нулю. Вычитая из второго слагаемого третье или из четвертого первое, получим для любого натурального n

$$cov\big(f_n(X;s), f_n(Y;t)\big) = 0,$$

то есть

$$\mathrm{E}f_n(X;s)f_n(Y;t) = \mathrm{E}f_n(X;s)\mathrm{E}f_n(Y;t). \tag{37}$$

Легко видеть, что для любого $x \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$

$$f_n(x;u) \to f(x;u) = \begin{cases} -1 & ,x \leqslant u \\ 0 & ,x > u \end{cases}$$

Также заметим, что

$$f_n(x;s)f_n(y;t) \to f(x;s)f(y;t) = \begin{cases} 1 & ,x \leqslant s,\ y \leqslant t \\ 0 & ,\text{else} \end{cases}$$

В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости при $n \to \infty$

$$\mathrm{E}f_n(X;s) \to \mathrm{E}f(X;s) = -F_X(s),$$

$$\mathrm{E}f_n(Y;t) \to \mathrm{E}f(Y;t) = -F_Y(t),$$

$$\mathrm{E}f_n(X;s)f_n(Y;t) \to \mathrm{E}f(X;s)f(Y;t) = F_{X,Y}(s,t)$$

где $F_X(\cdot), F_Y(\cdot)$ функции распределения случайных величин X и Y, а $F_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ функция их совместного распределения. Таким образом, переходя к пределу в (37) по $n \to \infty$, получим

$$F_{X,Y}(s,t) = F_X(s)F_Y(t),$$

что и означает независимость случайных величин X и Y. $\square$

Следствие 8. *Если X и Y некоррелированные* **NA** *случайные величины, то они независимы.*

Доказательство. Положим $X^* := -X$ И покажем, что величины X^* и Y Обладают свойством **PA**. Выберем произвольные борелевские неубывающие функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых определена ковариация $cov\big(f(X^*), g(Y)\big)$. Заметим, что функция $f^*(x) := -f(-x)$ неубывающая. Тогда ввиду того, что X и Y **NA**, имеем

$$cov\big(f(X^*), g(Y)\big) = cov\big(-f^*(-X^*), g(Y)\big) = -cov\big(f^*(X), g(Y)\big) \geqslant 0,$$

т.е. X^* и Y **PA**. Поскольку $cov\big(X^*, Y\big) = -cov\big(X, Y\big) = 0$, то по теореме 6 X^* и Y независимы. Следовательно, X и Y независимы в силу леммы 5. $\square$

Пример 6. *Из теоремы 6 и ее следствия сразу следует, что некоррелированные случайные величины из примера 5 не являются ни* **PA** *ни* **NA** *(так как иначе они были бы независимыми). Отсутствие этих свойств можно также показать, используя определение 15.*

Действительно, рассмотрим неубывающие борелевские функции

$$f_1(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x), \quad f_2(x) = \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x), \quad g(x) = x.$$

Вычислим ковариации $cov\big(f_1(\xi), g(\eta)\big)$ *и* $cov\big(f_2(\xi), g(\eta)\big)$.

$$\mathrm{E}f_1(\xi) = \mathrm{E}\mathbf{1}_{\{\xi \geqslant 0\}} = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{E}f_2(\xi) = \mathrm{E}\mathbf{1}_{\{\xi > 0\}} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{E}g(\eta) = \mathrm{E}\xi^2 = \frac{2}{3},$$

$$\mathrm{E}f_1(\xi)g(\eta) = \mathrm{E}\xi^2\mathbf{1}_{\{\xi \geqslant 0\}} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{E}f_2(\xi)g(\eta) = \mathrm{E}\xi^2\mathbf{1}_{\{\xi > 0\}} = \frac{1}{3},$$

$$cov\big(f_1(\xi), g(\eta)\big) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}, \quad cov\big(f_2(\xi), g(\eta)\big) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом свойства **PA** *и* **NA** *не выполняются.*

Глава 4. Неравенства

Неравенства Маркова, Чебышева

Лемма 6 (Неравенство Маркова). *Если $\xi \geqslant 0$, и $E\xi < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$*
$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E\xi}{\varepsilon}.$$

Доказательство.
$$E\xi \geqslant E\xi\mathbf{1}_{\{\xi\geqslant\varepsilon\}} \geqslant \varepsilon E\mathbf{1}_{\{\xi\geqslant\varepsilon\}} = \varepsilon\,\mathsf{P}\{\xi \geqslant \varepsilon\}.$$
□

Следствие 9 (Неравенство Чебышева). *Если ξ произвольная случайная величина, и $E\xi^2 < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$*
$$\mathsf{P}\{|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Применить неравенство Маркова к случайной величине $(\xi - \mathrm{E}\xi)^2$. □

Пример 7. *Пусть $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots$ одинаково распределенные случайные величины, и $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$. Тогда в силу неравенства Маркова для любого $\varepsilon > 0$*
$$\mathsf{P}\left\{\frac{|\xi_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right\} = \mathsf{P}\left\{|\xi_n| \geqslant \varepsilon n\right\} = \mathsf{P}\left\{|\xi| \geqslant \varepsilon n\right\} \leqslant \frac{\mathrm{E}\,|\xi|}{\varepsilon n} \to 0, \quad n \to \infty,$$
что означает (см. [5]) сходимость по вероятности
$$\frac{|\xi_n|}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Неравенство Пэли-Зигмунда

Лемма 7. *Пусть случайная величина $\xi \geqslant 0$, $0 < \mathrm{E}\xi^2 < \infty$. Тогда для $r \in (0, 1)$ выполняется*
$$\mathsf{P}\left\{\xi > r\mathrm{E}\xi\right\} \geqslant (1-r)^2\frac{(\mathrm{E}\xi)^2}{\mathrm{E}\xi^2}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\mathrm{E}\xi > 0$, так как в случае $\mathrm{E}\xi = 0$ в силу свойства 7 интеграла Лебега выполнялось бы $\xi \stackrel{a.s.}{=} 0$, а значит, $\mathrm{E}\xi^2 = 0$, что неверно по предположению.

Рассмотрим неотрицательную случайную величину η такую, что $\mathrm{E}\eta = 1$, $\mathrm{E}\eta^2 < \infty$. Для любого $t > 0$ выполняется
$$\left(t\mathbf{1}_{\{\eta>r\}} - (\eta - r)\right)^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$t^2\mathbf{1}_{\{\eta>r\}} \geqslant 2t\mathbf{1}_{\{\eta>r\}}(\eta-r)-(\eta-r)^2 \geqslant 2t(\eta-r)-(\eta-r)^2 =$$

$$= -\eta^2+2\eta(t+r)-2tr-r^2.$$

Переходя к математическому ожиданию обеих частей, получим

$$t^2\,\mathsf{P}\left\{\eta>r\right\} \geqslant -\mathrm{E}\eta^2+2t+2r-2tr-r^2 \geqslant -\mathrm{E}\eta^2+2t(1-r).$$

В качестве t подставим $\mathrm{E}\eta^2/(1-r)$.

$$\mathsf{P}\left\{\eta>r\right\} \geqslant \frac{2(1-r)}{t}-\frac{\mathrm{E}\eta^2}{t^2}=\frac{2(1-r)^2}{\mathrm{E}\eta^2}-\frac{(1-r)^2}{\mathrm{E}\eta^2}=\frac{(1-r)^2}{\mathrm{E}\eta^2}.$$

Наконец, подстановка в полученное неравенство $\eta := \xi/\mathrm{E}\xi$ завершает доказательство. $\square$

Двусторонняя оценка

Лемма 8. *Пусть случайная величина $\xi \geqslant 0$ a.s., функция $g(x)$ непрерывна на $[0,+\infty)$, $g(0)=0$, строго монотонно возрастает и $g(x)\uparrow+\infty$, $x\to+\infty$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi\geqslant g(n)\right\} \leqslant \mathrm{E}g^{-1}(\xi) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi> g(n)\right\}. \tag{38}$$

В частности, для произвольной случайной величины ξ и любого $r>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{|\xi|\geqslant n^{1/r}\right\} \leqslant \mathrm{E}\left|\xi\right|^r \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{|\xi|> n^{1/r}\right\}.$$

Замечание 14. *Прежде всего отметим, что в силу условия $\xi\geqslant 0$ a.s. выполняется $\xi \overset{a.s.}{=} \xi^+$ и $g^{-1}(\xi)\overset{a.s.}{=} g^{-1}(\xi^+)$. Поэтому в силу свойства 8 интеграла Лебега*

$$\mathrm{E}g^{-1}(\xi)=\mathrm{E}g^{-1}(\xi^+). \tag{39}$$

Кроме того ввиду строгой монотонности $g(x)$

$$\left\{\xi\geqslant g(n)\right\}=\left\{\xi^+\geqslant g(n)\right\},\ n\geqslant 1; \qquad \left\{\xi> g(n)\right\}=\left\{\xi^+> g(n)\right\},\ n\geqslant 0. \tag{40}$$

Заметим, что достаточно доказать выполнение неравенства для неотрицательных (на всем Ω) случайных величин. Действительно, если оно выполнится для неотрицательных случайных величин, то оно выполнится и для ξ^+, откуда в силу (39) и (40) оно также выполнится для исходной a.s. неотрицательной величины ξ.

Доказательство. Следуя замечанию, будем считать ξ неотрицательной. Обозначим $\psi(x) := g^{-1}(x)$ и введем дискретные случайные величины

$$\eta := \sum_{j=1}^{\infty} j\,\mathbf{1}_{\{j\leqslant\psi(\xi)<j+1\}}, \quad \zeta := \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,\mathbf{1}_{\{j<\psi(\xi)\leqslant j+1\}}.$$

Нетрудно видеть, что $\eta \leqslant \psi(\xi) \leqslant \zeta$, следовательно ввиду свойства 2

$$\mathrm{E}\eta \leqslant \mathrm{E}\psi(\xi) \leqslant \mathrm{E}\zeta.$$

Вычислим левую и правую часть этого неравенства.

$$\mathrm{E}\eta = \sum_{j=1}^{\infty} j\,\mathsf{P}\left\{j \leqslant \psi(\xi) < j+1\right\} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\mathsf{P}\left\{j \leqslant \psi(\xi) < j+1\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\mathsf{P}\left\{j \leqslant \psi(\xi) < j+1\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\psi(\xi) \geqslant n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi \geqslant g(n)\right\}.$$

$$\mathrm{E}\zeta = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,\mathsf{P}\left\{j < \psi(\xi) \leqslant j+1\right\} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}\mathsf{P}\left\{j < \psi(\xi) \leqslant j+1\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\mathsf{P}\left\{j < \psi(\xi) \leqslant j+1\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\psi(\xi) > n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi > g(n)\right\}.$$

Неравенство для абсолютного момента порядка r есть частный случай (38) для случайной величины $|\xi|$, когда $g(x) = x^{1/r}$. □

Неравенство (38) позволяет получить

Второе доказательство следствия 6. Положив в (38) $g(x) = x$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi \geqslant n\right\} \leqslant \mathrm{E}\xi \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi > n\right\}.$$

Поскольку ξ принимает целые значения, неравенство обращается в равенство. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi \geqslant n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi > n-1\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\xi > n\right\}.$$

□

Пример 8. *Используя неравенство (38), можно усилить результат примера 7. Действительно, если* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{|\xi_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|\xi_n| \geqslant \varepsilon n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|\xi| \geqslant \varepsilon n\right\} \leqslant \mathrm{E}\frac{|\xi|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}\,|\xi| < \infty,$$

откуда следует (см. [5]) сходимость почти наверное

$$\frac{|\xi_n|}{n} \xrightarrow{a.s.} 0, \quad n \to \infty.$$

Неравенство Иенсена

Лемма 9. *Пусть* $g(x)$ *выпуклая вниз борелевская функция,* $\mathrm{E}\,|\xi| < \infty$. *Тогда*

$$\mathrm{E}g(\xi) \geqslant g\left(\mathrm{E}\xi\right).$$

Доказательство. Ввиду выпуклости вниз функции $g(x)$ для любой точки $s \in \mathbb{R}$ найдется функция $h_s(x) = ax + b$ такая, что

$$g(x) \geqslant h_s(x), \quad g(s) = h_s(s).$$

В частности, при $s = \mathrm{E}\xi$ имеем

$$\mathrm{E}g(\xi) \geqslant \mathrm{E}h_s(\xi) = h_s(\mathrm{E}\xi) = g(\mathrm{E}\xi).$$

$\square$

Замечание 15. *Заметим, что из выполнения неравенства Иенсена следует выпуклость функции* $g(x)$. *Действительно, если* ξ *произвольная дискретная случайная величина такая, что*

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = p, \quad \mathsf{P}\{\xi = y\} = q, \quad p + q = 1,$$

где $x \neq y$, *то либо*

$$\mathsf{P}\{g(\xi) = g(x)\} = p, \quad \mathsf{P}\{g(\xi) = g(y)\} = q,$$

либо

$$\mathsf{P}\{g(\xi) = g(x) = g(y)\} = 1.$$

В обоих случаях

$$\mathrm{E}g(\xi) = p\,g(x) + q\,g(y).$$

С другой стороны

$$\mathrm{E}\xi = px + qy,$$

и из неравенства Иенсена имеем

$$p\,g(x) + q\,g(y) \geqslant g\left(px + qy\right),$$

что и означает выпуклость вниз.

Неравенство Ляпунова

Лемма 10. *Если* $0 < s < t$, *то*

$$(\mathrm{E}\,|\xi|^s)^{1/s} \leqslant \left(\mathrm{E}\,|\xi|^t\right)^{1/t}.$$

Доказательство. Пусть $g(x) = |x|^{t/s}$ – выпуклая вниз функция, $\eta = |\xi|^s$. В силу неравенства Иенсена

$$\mathrm{E}g(\eta) \geqslant g(\mathrm{E}\eta) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}\,|\xi|^t \geqslant (E\,|\xi|^s)^{t/s}.$$

□

Неравенство Гёльдера

Лемма 11. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. *Если* $\mathrm{E}\,|\xi|^p < \infty$, $\mathrm{E}\,|\eta|^q < \infty$, *то* $\mathrm{E}\,|\xi\eta| < \infty$, *и*

$$\mathrm{E}\,|\xi\eta| \leqslant (\mathrm{E}\,|\xi|^p)^{1/p}\,(\mathrm{E}\,|\xi|^q)^{1/q}.$$

Доказательство. Если $\mathrm{E}\,|\xi|^p = 0$ или $\mathrm{E}\,|\eta|^q = 0$, то в силу свойства (7) интеграла Лебега либо $\xi \overset{a.s}{=} 0$, либо $\eta \overset{a.s}{=} 0$, и неравенство выполнено тривиально. Пусть $\mathrm{E}\,|\xi|^p > 0$, $\mathrm{E}\,|\eta|^q > 0$. Рассмотрим случайные величины

$$\xi_1 = \frac{|\xi|}{(\mathrm{E}\,|\xi|^p)^{1/p}}, \quad \eta_1 = \frac{|\eta|}{(\mathrm{E}\,|\xi|^q)^{1/q}}.$$

В силу выпуклости вверх логарифмической функции

$$\ln\left(\frac{1}{p}\,\xi_1^p + \frac{1}{q}\,\eta_1^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln\xi_1^p + \frac{1}{q}\ln\eta_1^q = \ln(\xi_1\eta_1),$$

откуда

$$\xi_1\eta_1 \leqslant \frac{1}{p}\,\xi_1^p + \frac{1}{q}\,\eta_1^q, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}\xi_1\eta_1 \leqslant \frac{1}{p}\,\mathrm{E}\xi_1^p + \frac{1}{q}\,\mathrm{E}\eta_1^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что и завершает доказательство. □

Замечание 16. *Отметим, что неравенство Коши-Буняковского (свойство 9 интеграла Лебега) является частным случаем неравенства Гёльдера для* $p = q = 2$.

Следствие 10. *Если* $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, *и* $1/p + 1/q = 1/r$, *и при этом* $\mathrm{E}\,|\xi|^p < \infty$, $\mathrm{E}\,|\eta|^q < \infty$, *то* $\mathrm{E}\,|\xi\eta|^r < \infty$, *и*

$$(\mathrm{E}\,|\xi\eta|^r)^{1/r} \leqslant (\mathrm{E}\,|\xi|^p)^{1/p}\,(\mathrm{E}\,|\xi|^q)^{1/q}.$$

Доказательство. Запишем неравенство Гёльдера для случайных величин $|\xi|^r$, $|\eta|^r$ и степеней (порядков) p/r, q/r. Действительно,

$$\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1.$$

Таким образом

$$\mathrm{E}\,|\xi\eta|^r \leqslant \left(\mathrm{E}\,|\xi|^{r\cdot\frac{p}{r}}\right)^{r/p} \left(\mathrm{E}\,|\eta|^{r\cdot\frac{q}{r}}\right)^{r/q}.$$

□

Неравенство Минковского

Лемма 12. *Если* $\mathrm{E}\,|\xi|^p < \infty$, $\mathrm{E}\,|\eta|^p < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$, *то* $\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p < \infty$ *и*

$$\left(\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\mathrm{E}\,|\xi|^p\right)^{1/p} + \left(\mathrm{E}\,|\eta|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Функция $g(x) = x^p$ выпукла вниз при $x \geqslant 0$, $p \geqslant 1$, поэтому

$$\left(\frac{|\xi+\eta|}{2}\right)^p \leqslant \left(\frac{|\xi|+|\eta|}{2}\right)^p \leqslant \frac{|\xi|^p+|\eta|^p}{2}.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p < \infty$, а при $p = 1$ сразу следует и доказываемое неравенство. Пусть $p > 1$. Тогда

$$|\xi+\eta|^p = |\xi+\eta|\,|\xi+\eta|^{p-1} \leqslant |\xi|\,|\xi+\eta|^{p-1} + |\eta|\,|\xi+\eta|^{p-1}.$$

Перейдем к математическим ожиданиям и применим неравенство Гёльдера в обоих слагаемых для степеней p и $p/(p-1)$ поскольку

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p/(p-1)} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$$

Получим

$$\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p \leqslant \mathrm{E}\,|\xi|\,|\xi+\eta|^{p-1} + \mathrm{E}\,|\eta|\,|\xi+\eta|^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\mathrm{E}\,|\xi|^p\right)^{1/p}\left(\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p\right)^{(p-1)/p} + \left(\mathrm{E}\,|\eta|^p\right)^{1/p}\left(\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p\right)^{(p-1)/p},$$

откуда

$$\left(\mathrm{E}\,|\xi+\eta|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\mathrm{E}\,|\xi|^p\right)^{1/p} + \left(\mathrm{E}\,|\eta|^p\right)^{1/p}.$$

□

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.

[2] Богачев В.И. *Основы теории меры.* Т.1. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2006. 584 с.

[3] Булинский А.В., Шашкин А. *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* М.: Физматлит, 2008. 480 с.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1989. 624 с.

[5] Ширяев А.Н. *Вероятность-1.* М.: МЦНМО, 2004. 520 с.

[6] Yuan Shih Chow, Henry Teicher. *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales.* Springer, 1997.

[7] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* Springer, 1997.

Учебное издание

Новиков Сергей Яковлевич,
Савинов Евгений Анатольевич

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Титульное редактирование Т. И. Кузнецовой
Компьютерная верстка, макет Е. А. Савинова

Подписано в печать 22.10.2014.
Гарнитура Times New Roman. Формат $60 \times 84/16$.
Typeset by LaTeX. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 100 экз. Заказ № 2543.
Издательство «Самарский университет»,
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано на УОП СамГУ