

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.К.СЕМЁНЫЧЕВ, Е.В.СЕМЁНЫЧЕВ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ
В ЭКОНОМИКЕ.
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ИННОВАЦИЙ

Часть 1

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 330.47
ББК У9(2)212.8
С 30



Инновационная образовательная программа “Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий”

Рецензенты: засл. деятель науки и техники РФ,
 д-р техн. наук, проф. В. М. Дуплякин;
 д-р эконом. наук, проф. В. К. Курочкин

Семёнычев В.К.
С 30 Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1: учеб. пособие /В.К. Семёнычев, Е.В. Семёнычев. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 217 с.: ил.

ISBN 5-7883-0431-8

Данная работа посвящена эконометрическому моделированию и прогнозированию динамики показателей инноваций, для которой характерно многообразие видов и структур моделей, причём на коротких выборках их наблюдения. Рассмотрены известные методы моделирования, предложен новый подход на основе обобщенных параметрических моделей авторегрессии - скользящего среднего, позволивший получить выигрыш по объему требуемой выборки в разы, давая тем самым возможность мониторинга эволюции моделей.

Подход иллюстрирован десятью методами для линейного тренда с аддитивными и мультипликативными колебательными компонентами и логистического тренда Верхулста (Перла-Рида). Рассмотрена стохастическая компонента как аддитивная, так и мультипликативная.

Приведены примеры приложений данных моделей, результаты реализации методов на реальных и тестовых выборках. Материалы апробированы на занятиях в Самарском государственном аэрокосмическом университете.

Пособие предназначено для экономистов-аналитиков, менеджеров, аспирантов, студентов, а также для дополнительного профессионального образования по специальности «Информационные системы в экономике».

УДК 330.47
ББК У9(2)212.8

ISBN 5-7883-0431-8

© Семёнычев В.К.,
Семёнычев Е.В., 2006
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ	10
1.1. Задача эконометрического моделирования динамики показателей инновационной экономики	11
1.2. Основные понятия эконометрического моделирования	17
1.3. Особенности экономических измерений и экономико-статистического моделирования	21
1.4. Точность оценок параметров регрессий	30
1.5. Методы сглаживания стохастической компоненты	33
1.6. Точность моделирования регрессиями	48
2. СТРУКТУРЫ РЯДА ДИНАМИКИ И МОДЕЛИ КОМПОНЕНТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ	52
2.1. Компоненты и методы декомпозиции рядов динамики	53
2.2. Моделирование трендов в рядах динамики	62
2.3. Модели и моделирование колебательных компонент	71
3. ИНСТРУМЕНТАРИЙ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ РЯДОВ ДИНАМИКИ	94
3.1. Применение моделей авторегрессий для моделирования и прогнозирования динамики показателей инновационной экономики	95
3.2. Методика конструирования параметрической ARMA-модели с помощью Z-преобразования	101
3.3. Программное обеспечение моделирования и прогнозирования для информационных систем поддержки принятия решений	111

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЯДОВ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ ЛИНЕЙНЫМ ТРЕНДОМ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КОМПОНЕНТОЙ	116
4.1. Моделирование рядов динамики линейным трендом, стационарной колебательной компонентой и аддитивной стохастической компонентой	117
4.2. Моделирование рядов динамики линейным трендом, колебательной компонентой с эволюционирующей амплитудой и аддитивной стохастической компонентой	129
4.3. Моделирование рядов динамики линейным трендом, колебательной компонентой и мультипликативной стохастической компонентой	133
4.4. Приёмы уменьшения порядка решаемых при параметризации моделей систем линейных алгебраических уравнений	141
4.5. Тестирование обобщенных параметрических ARMA-моделей для линейного тренда с колебательной компонентой	151
5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ ЛОГИСТИЧЕСКИМ ТРЕНДОМ ВЕРХУЛСТА	169
5.1. Примеры временной и пространственной экономической динамики с логистическими трендами	170
5.2. Свойства и приложения логисты Верхулста (Перла-Рида)	177
5.3. Моделирование рядов динамики моделью Верхулста с аддитивной стохастической компонентой	186
5.4. Моделирование рядов динамики моделью Верхулста с мультипликативной стохастической компонентой	194
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	196
ГЛОССАРИЙ	198
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	208
ИЗБРАННЫЕ ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТ	216

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в России открываются перспективы для интенсивного развития инновационной деятельности. Высшим руководством страны поставлена задача: **создать конкурентоспособную экономику, осуществить технологический прорыв.**

Но этого нельзя сделать без широкого использования достижений современной науки, созданий новых технологий, инновационного продукта.

В развитых странах научно-технологическая революция привела к преобразованию технологического базиса производства, в котором возрос удельный вес наукоёмкого производства, использующего высокие технологии.

Этот процесс в западной экономической и социологической литературе был квалифицирован как становление **экономики знания**. Не только в том смысле, что она основана на знаниях, но и в том, что в ней ярко проявилась характерная для научного знания **тенденция к постоянному изменению и обновлению, улучшению показателей не только используемой технологии и производимой продукции, но и социально-экономических процессов [60].**

Мировой опыт показал, что математическое моделирование инновационной деятельности может существенно способствовать её оптимизации. При этом **усложняются модели динамики** показателей социально-экономических процессов и явлений, **повышаются требования к точности** их моделирования, особенно **на коротких интервалах наблюдения (на коротких выборках)**, так как эволюция процессов ведёт к нестационарности видов моделей или их параметров.

Огромное значение приобретает **мониторинг эволюции моделей**, использование их для **прогнозного моделирования** возможных траекторий развития, оценки эффективности принятых или возможных управленческих решений. Актуальным ста-

новится моделирование жизненного цикла технологий, услуг и товаров, их продвижения с тем, чтобы определить перспективы и способы развития, целесообразность и своевременность принятия инновационных решений.

Моделирование процессов и явлений приобретает **эконометрический характер**, т.е. оно используется не как регистрация и простейшая обработка данных, но скорее как проверка тех или иных экономических теорий, их корректировка или даже отбраковывание.

Пособие знакомит читателя с постановкой и особенностями задачи эконометрического моделирования и прогнозирования динамики показателей инновационной экономики, известными методами и информационными технологиями реализации данной задачи.

Даны общие характеристики точности экономических измерений, моделирования и прогнозирования. Отметим рассмотрение нетипичного для эконометрической литературы, но важного вопроса о выборе шага опроса показателей.

Рассматриваются вопросы декомпозиции ряда динамики на детерминированную компоненту (состоящую, в свою очередь, из тренда, сезонной и циклической компонент) и стохастическую компоненту.

Приведены известные виды моделей трендов. Предложено использование новых моделей колебательной компоненты, отвечающих экономической практике: гармоник с изменяющимися амплитудами, «пилообразных», «треугольных», «куполообразных», прямоугольных и других импульсов. Мультипликативное вхождение колебательной и стохастической компонент в структуру ряда динамики моделировалось как параметрическое (а не в индексах, как это обычно делают).

Относительно стохастической компоненты ряда динамики до настоящего времени зачастую принимают удобные предположения о месте вхождения в структуру модели ряда динамики

и о её свойствах. В пособии стохастическая компонента рассматривается так, как этого требует теоретическая эконометрика: аддитивно или мультипликативно по отношению к детерминированной компоненте ряда динамики.

При этом значительное внимание при оценке и разработке методов моделирования уделялось исследованию наличия, устранению или уменьшению гетероскедастичности стохастической компоненты (оценок параметров модели).

Априори обычно не известна истинная структура многокомпонентного ряда динамики, поэтому исследователю предложен инструментарий, который позволяет ему определить структуру ряда и модели детерминированных компонент, а также структуру вхождения в ряд стохастической компоненты, исходя из точностных характеристик моделирования и прогнозирования.

Общей теоретической основой всех предложенных методов моделирования и прогнозирования многокомпонентных рядов динамики на коротких выборках явился **новый подход с использованием обобщенных параметрических моделей авторегрессии - скользящего среднего (ARMA-моделей в англоязычной научной литературе)**, который представляет собой развитие известных моделей.

Новые, эконометрические по своему характеру, методы моделирования и прогнозирования обладают преимуществами перед известными. Методы могут быть реализованы на коротких выборках (**в разы меньших, чем в известных методах**), идентифицируют **модели динамики существенно более сложные и более приближенные к реальным условиям экономической практики**. Несколько известных методов оказались частными случаями предложенного подхода.

Методы **могут быть применены более чем для 90 моделей** динамики показателей, в которых аргументом является или время (**временная динамика**), или уровни другого показателя

(**пространственная динамика**), или и значения времени, и другого показателя (**пространственно-временная динамика**).

В данном пособии иллюстрация предложенного авторами подхода проведена лишь на двух группах моделей динамики инновационной экономики: **первую** образуют линейные тренды с разнообразного рода колебательными компонентами, а **вторую** – **логистические тренды**, причём из них подробно рассмотрена лишь наиболее популярная – **модель Верхулста (Перла-Рида)**.

Первая группа моделей позволяет аппроксимировать на короткой выборке широкий класс нелинейных трендов и передаёт многообразие колебательных компонент. Вторая группа моделей характерна для динамики инновационной экономики. Общее количество новых методов моделирования и прогнозирования, рассмотренных в данном пособии, равно десяти.

Подробно показаны методика конструирования обобщенных параметрических моделей авторегрессии - скользящего среднего, приёмы повышения точности методов моделирования и прогнозирования, уменьшения требуемого объёма выборки.

Приведены характеристики помехозащищенности методов, возможного диапазона значений параметров моделей на тестовых и реальных выборках.

Полученные результаты могут быть применены и вне рассмотренных задач моделирования и прогнозирования динамики инновационной экономики: они по-другому решают известные задачи статистики и эконометрики и дополняют инструментарий этих наук.

При этом стремились уйти от «наивности» многих известных методов, в которых все модели просты и стационарны, статистические выборки велики, стохастические компоненты «удобны» (по своим характеристикам, по месту вхождения в структуру ряда динамики показателей) и т.п.

Реалии эконометрической практики, как правило, намного сложнее, поэтому предложенные модели, подход и методы изложены в форме развития и усложнения, что позволит понять их лучше.

Рамки пособия позволили рассмотреть только оригинальные решения с обозначением их места среди известных методов.

Для лучшего понимания представленных в пособии материалов приведен «Глоссарий», в котором определены используемые термины.

Кроме библиографического списка литературы, на которую даны ссылки в тексте, в конце пособия приведены и «Избранные экономико-статистические ресурсы Интернет». В них представлены известные методы эконометрического моделирования и статистические данные по динамике микро- и макроэкономических показателей России и других стран.

Авторы в своих исследованиях опирались на работы отечественных учёных, в первую очередь, С.А. Айвазяна, В.Н. Афанасьева, А.Г. Гранберга, И.И. Елисеевой, Г.Б. Клейнера, Ю.П. Лукашина, В.С. Мхитаряна, Ю.М. Плотинского, Н.П. Тихомирова и др.

Из иностранных ученых следует упомянуть, прежде всего, Дж. Бокса, Г. Дженкинса, Р.А. Кашьяпа, А.Р. Рао.

Материалы учебного пособия могут быть использованы экономистами-аналитиками, менеджерами, научными работниками, аспирантами, преподавателями и студентами экономических вузов для дисциплин «Эконометрика», «Эконометрическое моделирование», «Статистика», при дипломном проектировании по специальностям «Математические методы в экономике», «Менеджмент организации», «Прикладная информатика в экономике», а также при дополнительном профессиональном образовании по специальности «Информационные системы в экономике».

1. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ

В данной главе сформулировано содержание задачи эконометрического моделирования динамики показателей инновационной экономики.

Приведены основные понятия и особенности эконометрического моделирования рядов временной и пространственной динамики показателей социально-экономических систем.

Отмечено, что при моделировании показателей динамики инноваций актуально расширение номенклатуры используемых моделей, приближение их по сложности к реальной экономической практике при одновременном сокращении используемых выборок.

Более подробно, чем это обычно делается в эконометрической литературе, рассмотрены последствия неправильного выбора периода дискретизации определяемого параметра.

Проведен анализ и выбор характеристик точности оценивания параметров моделей, прогнозирования и адекватности моделей.

Уделено внимание условиям возможности применения метода наименьших квадратов, основным достоинством которого является сведение задачи параметризации к решению нормальных систем алгебраических уравнений.

Вместе с тем отмечено, что при эконометрическом моделировании инноваций число моделей, линейных по параметрам, мало, а методы линеаризации моделей, существенно нелинейных по параметрам, далеко не всегда возможны и оправданы.

Так как метод нелинейных квадратов и другие методы сглаживания не обеспечивают высокую точность моделирования и

сложны, то приходим к необходимости разработки новых методов моделирования и прогнозирования, которые и рассмотрены в следующих главах пособия.

1.1. Задача эконометрического моделирования динамики показателей инновационной экономики

В настоящее время экономика России приобретает инновационный характер. При этом значительное внимание уделяется организации и управлению инновационным процессом, который **характеризуется комплексностью, многоплановостью, высокой динамикой и вероятностным характером**, поскольку зависит от многих, зачастую трудно поддающихся учёту факторов.

Современным и плодотворным методом исследования инновационного процесса является моделирование и прогнозирование экономического эффекта от нововведений в масштабах отдельных предприятий, целых отраслей промышленности и регионов страны.

Объектом моделирования и прогнозирования будут **экономические системы** и их обобщение – **социально-экономические системы (СЭС)**. Экономическая система определяется обычно как сложная вероятностная система, охватывающая процессы производства, обмена, распределения и потребления материальных благ [36]. В СЭС, наряду с материально-вещественными потоками учитываются и производственные отношения людей в обществе, воспроизведенные и развитые экономической системой производственные отношения, социально-экономические, социально-политические, социокультурные и демографические процессы.

В СЭС рассматривают вопросы инвестиционной, финансовой, социальной или экологической политики, ценообразования на рынке, как системы отношений купли-продажи между про-

давцами и покупателями, распределительных отношений, лагов, запаздываний и т. д.

СЭС могут иметь различный иерархический уровень (макроуровень – страна, мезоуровень - регион, муниципальное образование, отрасль народного хозяйства, микроуровень – семья, конкретное предприятие) и различный профиль.

В пособии рассматривается **экономическая динамика СЭС**, которая исследует и процессы (последовательности состояний и переходы от одних состояний к другим), и определяет возможные траектории деградации или развития, последовательности состояний и переходы от одних состояний к другим.

Динамика функционирования СЭС описывается **показателями** (десятками, а в отдельных случаях и тысячами) последовательностей состояний и переходов от одних состояний к другим [3, 38, 45].

Показатель динамики СЭС определим как обобщающую количественную характеристику в конкретных условиях места и времени [13, 26, 36].

По содержанию **показатели могут быть частными и агрегированными.**

Частные показатели характеризуют изучаемое явление односторонне, изолированно. Примерами частных показателей СЭС могут быть:

- среднесуточный объём выпуска промышленной продукции, который даёт возможность оценить динамику промышленного производства;

- численность граждан, состоящих на учёте в службе занятости, которая показывает эффективность социальной политики государства или муниципальных властей;

- остатки наличных денег у населения и вклады в банках, определяющие платежеспособность населения;

- отдельные ресурсные или объёмные показатели отрасли;

- и т.д.

Агрегированные показатели включают в себя частные, используя их для характеристики эффективности производства, технического уровня предприятия, качества продукции, экологического состояния территории и т.п.

Наиболее часто говорят о динамике показателей во времени t (о временной динамике).

В некоторых случаях, когда смена количественных значений одних показателей может зависеть от значений других показателей, говорят о динамике в пространстве параметров (о пространственной динамике). Примером может быть эффективность продажи какой-либо продукции в зависимости от рекламного бюджета на её продвижение, её цены или объёма затрат на НИОКР.

Показатель в экономической литературе называют также траекторией, результирующей, определяемой, объясняемой (**explained variable**), внутренней или эндогенной переменной модели СЭС. В дальнейшем для показателя будем использовать обозначение Y и чаще использовать термин «определяемая», или «эндогенная переменная». Эндогенными переменными являются, например, доход, потребление, оборот розничной торговли, уровень безработицы, средняя заработная плата, объём инвестиций и др.

В пособии рассматриваются, в основном, скалярные (одномерные) показатели. Однако Y в общем случае может быть и вектором: например, если моделирование нескольких переменных осуществляется при расчёте агрегированных показателей СЭС.

Значения Y формируются в процессе и внутри функционирования СЭС под воздействием некоторого числа i других процессов или явлений X_i , называемых факторными, внешними, экзогенными (**exogenous variable**), определяющими переменными, которые, или часть из которых, поддаются регистрации и

планированию. Далее будем чаще использовать термины «**определяющие**», «**факторные**» и «**экзогенные переменные**». Экзогенные переменные описывают условия функционирования СЭС, могут задаваться извне анализируемой системы. Примерами экзогенных переменных могут быть **физическое время**, налоги, государственные закупки товаров, устанавливаемая цена на благо, рента, налоги, банковские ставки, официальный курс доллара, численность экономически активного населения и др.

Моделью будем считать образ процесса, явления в форме математических соотношений, отражающий существенные свойства моделируемой системы и замещающий его в ходе исследования и управления.

Под приёмом будем понимать отдельные комплексы действий в реализации определенного метода, т.е. **метод включает в себя** ряд различных приёмов и в целом представляет собой их упорядоченную совокупность.

Далеко не всегда удастся моделировать формирование значений Y под воздействием всех факторных переменных X_i , так как их количество может быть очень велико, а влияние не всех из них может быть определено или даже выявлено в силу сложного, зачастую взаимосвязанного характера.

Поэтому на практике широко используются так называемые **трендовые модели динамики** показателей СЭС, в которых **время t** является **единственной по количеству и неслучайной по характеру переменной**, т.е. рассматриваются модели $Y = Y(t)$.

При этом через переменную t находит отражение совокупное и долговременное воздействие множества факторов. Более полное понятие «тренд» будет раскрыто ниже, а пока **определим его как длительную тенденцию показателя**.

Наряду с **аналоговой формой записи модели** $Y(X_i)$ или $Y(t)$ широко используют и запись переменных в форме **ряда динамики** (динамического ряда): упорядоченных дискретных эквиди-

стантных наблюдений $Y_k = Y(k\Delta)$ и $X_k = X(k\Delta)$, где Δ - шаг дискретизации (опроса) по переменным, $k = 0, 1, 2, \dots, N$, N - объём статистической выборки.

Упорядоченные во времени (расположенные в хронологическом порядке) уровни образуют **временной ряд (time-series data)**, при этом Δ - например, год, квартал, месяц, декада, день или даже час, т.е. $t = k\Delta$.

Значения Y_k называют в эконометрике и статистике обычно **уровнями** или **наблюдениями**, а в теории измерений – **отсчётами**. С термином «наблюдение» будем иногда связывать и момент взятия отсчётов – регистрации уровней.

Пространственные модели связи строятся по уровням показателей нескольких СЭС, взятым в определенный момент времени. **Динамические модели связи** – по совокупности уровней показателей одной СЭС в различные моменты времени, а **пространственно-динамические** – по уровням нескольких СЭС в различные моменты времени.

Задача повышения точности моделирования прогнозирования рядов динамики на коротких выборках актуальна даже для наиболее простых одномерных рядов временной и пространственной динамики показателей, рассматриваемых в пособии.

При этом представленные результаты могут быть распространены и на анализ **связных рядов**: рядов динамики двух показателей, наблюдаемых в одни и те же моменты времени. В определенной мере, с существенной спецификой, их можно применить и к **динамическим моделям связи двух показателей**, например, к производственной функции.

Эндогенная переменная Y является принципиально случайной (стохастической), так как климатические и природные явления, структура материальных и духовных потребностей членов общества могут быть определены только с некоторой вероятностью. Сложность и динамичность реальных социально-

экономических процессов приводят к тому, что затраты на производство, экономический эффект, производительность труда, результаты научных исследований и разработок, эффективность новой техники и т.д. поддаются предварительному расчёту и экономическому анализу только с тем или иным уровнем достоверности.

При моделировании пространственной динамики следует иметь в виду, что и **факторный показатель**, определяемый обычно со случайной погрешностью, **является также стохастическим**.

Если уровни Y_k агрегированы так, что отражают состояние показателя за некоторые периоды времени (например, объём производства за год, количество отработанных человеко-дней по месяцам, кварталам, полугодиям и т.п.), то такой ряд называется **динамическим интервальным**.

В моментных рядах динамики уровни Y_k характеризуют состояние показателя в конкретный момент времени или на короткий промежуток времени (например, численность населения и объём основных фондов на начало года, величина запаса какого-либо материала на начало периода и т.д.).

По экономическому содержанию показатели могут быть **натуральные, стоимостные (денежные), трудовые**.

Уровнями **рядов динамики** могут быть **не только абсолютные показатели** (численность совокупностей или объёмы их признаков), но они могут отражать развитие структуры совокупности, изменение во времени вариации показателя в совокупности, а также взаимосвязи между показателями значений признака для разных СЭС. В этих случаях уровни ряда динамики сами являются **относительными показателями** и нередко выражаются в процентах.

В последнее время часто стремятся, в силу указанных выше причин, использовать трендовые модели или **учесть (ввести)**

временной фактор при моделировании пространственной динамики нескольких показателей СЭС. Таким образом, время может быть одной из экзогенных переменных. При этом **динамические модели связи** показателей строятся по **наблюдениям показателей СЭС**, взятым в один и тот же момент времени, а через время отражают **воздействие некоторого множества других, не учтенных в пространственной модели связи, факторов**.

Примером может служить задача учёта научно-технического прогресса (инноваций) в производственной функции Кобба-Дугласа в виде экспоненциальной функции времени $k\Delta$ с параметром A_3 [28, 46]:

$$f\{k\Delta, X_{1k}, X_{2k}, A_0, A_1, A_2, A_3\} = A_0 X_{1k}^{A_1} \cdot X_{2k}^{A_2} \cdot \exp(A_3 k\Delta),$$

где X_{1k}, X_{2k} - факторные переменные, A_0, A_1, A_2 - параметры.

Следует иметь в виду, что в различных задачах одна и та же переменная может выступать то в качестве факторной, то в качестве определяемой, так что их разделение порой условно и имеет смысл только в рамках конкретной модели.

1.2. Основные понятия эконометрического моделирования

Определим модель как **регрессию m факторных переменных X_{ik} на показатель Y_k** :

$$Y_k = f(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}, A_0, A_1, \dots, A_d) + \xi_k, \quad (1.1)$$

где ξ_k - случайный ряд чисел, называемый **стохастической компонентой (возмущением, инновацией, помехой)**, $f(\dots)$ - неслучайная, в общем случае нелинейная, функция, зависящая от времени (номера наблюдения) и от вектора параметров (A_0, A_1, \dots, A_d) размерности d , $A_i \in R^d$.

Модель (1.1) можно представить и в эквивалентной, более простой по записи, форме

$$Y_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) + \xi_k.$$

Если на **выборке (sample)** объёма N функция $f(\dots)$ имеет один и тот же вид и параметры, то имеем случай **стационарной модели**.

Более сложен случай, когда на отдельных «частичных выборках» N_j внутри выборки N вид функции $f_j(\dots)$ и/или параметры $(A_{0j}, A_{1j}, \dots, A_{dj})$ различны. В [73] этот случай назван **моделированием ряда динамики при наличии структурных изменений**.

Заметим, что малый объём «частичных выборок» позволяет не только моделировать структурные изменения ряда динамики, но и использовать при этом более простые модели динамики, анализировать эволюцию их видов или параметров, т.е. имеем **эволюционирующую модель регрессии**, в которой может быть учтён инновационный фактор.

Стохастическая компонента ξ_k в (1.1) описывается моментами распределения (математическим ожиданием, дисперсией, условной дисперсией), функцией распределения, мерой коррелированности со значениями стохастической компоненты в другие моменты времени. Эти характеристики определяют выбор метода сглаживания стохастической компоненты при реализации методов моделирования, оценку точности моделирования.

Обычно принимается **аддитивная структура вхождения стохастической компоненты** ξ_k в модель ряда динамики, показанная в (1.1).

Реже используется **мультипликативная структура вхождения стохастической компоненты**

$$Y_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) \cdot \xi_k. \quad (1.2)$$

Представляется, однако, что это связано в большей мере с недостаточным развитием методов моделирования мультипликативной структуры, чем с реальным механизмом формирования уровней ряда динамики. Далее будут предложены соответствующие методы.

Впрочем, несложным преобразованием можно и структуру (1.2) превратить в аддитивную:

$$Y_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) \cdot (\xi_k + 1 - 1) = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) + \zeta_k, \quad (1.3)$$

где $\zeta_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) \cdot (\xi_k - 1)$ - определяет новую стохастическую компоненту, состоящую из произведения неслучайной функции $f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d)$ и случайных величин $(\xi_k - 1)$.

По наблюдениям Y_k осуществляют выбор вида неслучайной функции $f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d)$ - проводят её **спецификацию** или **структурную идентификацию**. Если вид функции известен (постулируется) или определен, то находят **оценку параметров** A_i - осуществляют **параметризацию** или **параметрическую идентификацию**.

Далее иногда будем использовать термин «**идентификация**» в обобщающем смысле: он может включать в себя спецификацию и/или параметризацию.

Наличие стохастической компоненты, конечный объём выборки при осуществлении идентификации обуславливают случайный характер оценок значений A_i в модели. Случайные оценки неслучайных параметров будем обозначать A_i^o .

При подстановке оценок A_i^o в $f(\dots)$ будем иметь **модельные значения** Y_k^o уровней показателя: **случайную выборочную регрессию** (неслучайную функцию со случайными параметрами)

$$Y_k^o = f(k\Delta, A_0^o, A_1^o, \dots, A_d^o). \quad (1.4)$$

Невязкой модели (остатком-residual) будем называть разность

$$Y_k - f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) = \varepsilon_k,$$

где ε_k записано как обобщение ξ_k в (1.1) или ζ_k в (1.3).

Невязка ε_k не поддаётся прямому измерению в силу незнания точного вида и параметров функции $f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d)$. При статистическом исследовании свойств ε_k будем иметь дело с **оценкой невязки**, определяемой следующим образом

$$Y_k - Y_k^o = \varepsilon_k^o. \quad (1.5)$$

При эконометрическом моделировании динамики показателей СЭС минимизируется (тем или иным образом) всё множество невязок ε_k^o на выборке объёмом N , т.е. идентификация (выбор вида функции и её параметров) осуществляется из условия минимизации некой **усредненной невязки**.

Наиболее часто минимизируют **среднеквадратическую невязку** (при реализации рассмотренного ниже метода наименьших квадратов), сумму модулей отклонений $|Y_k - Y_k^o|$ или используют другие метрики [1, 9, 21, 84].

Аддитивную стохастическую гетероскедастическую компоненту ξ_k можно в свою очередь представить как мультипликативную гетероскедастическую:

$$Y_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) + \xi_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) + \frac{Y_k}{Y_k} \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{Y_k} \right) = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_n = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d) \cdot \delta_k, \text{ где } \delta_k = \frac{Y_k}{Y_k - \xi_k}.$$

1.3. Особенности экономических измерений и экономико-статистического моделирования

При организации измерений, моделировании и прогнозировании динамики показателей СЭС будем учитывать **ряд специфических особенностей** [43, 46, 66, 83].

Во-первых, на практике объёмы статистических выборок обычно невелики: не превышают двух-трёх десятков наблюдений. Это может быть связано с отсутствием статистических выборок в силу организационных или экономических обстоятельств их сбора. Кроме того, для реформируемой экономики России длинные выборки в принципе непригодны, т.к. описывают хозяйствование в существенно различных условиях.

Состояние современной российской экономики требует использования инноваций и новых технологий, предложение и реализация которых предполагает **анализ и оценку перспектив динамики показателей инновационно-активного развития**, что также делает актуальным моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов на начальных участках их развития, т.е. по малым выборкам. Наличие малых выборок делает зачастую невозможным использование многих известных статистических процедур и методов идентификации для рядов экономической динамики.

Во-вторых, на малых выборках следует учитывать еще одно весьма важное обстоятельство, необходимое для правильного отражения рядом динамики реального процесса или явления: **сопоставимость уровней ряда**, которую можно трактовать как погрешность экономических измерений.

При инновационном характере развития СЭС может быть **низка степень сопоставимости** исходных данных во времен-

ной области, сравнимой с продолжительностью инновационного периода [42, 58].

Эволюция свойств СЭС означает, что одни и те же измеренные данные, относящиеся к разным этапам развития системы, могут подчиняться разным законам за счёт изменения эндогенных и экзогенных факторов. Несопоставимость уровней может быть вызвана и изменением методики расчёта показателя, изменением классификаций, терминологии и т.д. Чаще всего несопоставимость встречается в стоимостных показателях из-за изменения цен в анализируемом периоде. Несопоставимость может возникнуть и вследствие изменения границ области, района, страны, а также в результате укрупнения нескольких ведомств путем слияния их в единое целое, или укрупнения производства за счет объединения нескольких предприятий.

Можно привести ряд примеров. При введении новых систем и правил налогового учёта в России («упрощенная» система налогообложения, введение «налога на вменённый доход», возможность выбора предприятием учётной политики в плане списания затрат, амортизации, наличие льготного периода налогообложения для инновационных предприятий и т.п.) происходит вполне объяснимое с точки зрения минимизации налогообложения предприятий смещение макроэкономических показателей. В силу того, что процесс перехода предприятий на новые условия растягивается на несколько лет, то и смещение происходит не одномоментно, а постепенно, ограничивая преемственность соответствующих данных.

Аналогичная ситуация возникает и при внедрении новых правил управленческого учёта: может возникнуть несопоставимость данных для рядов динамики показателей. Интенсивные изменения потребительских доходов населения, изменение структуры потребления также могут делать многие данные (например, цену) несопоставимыми во времени. Например, в практике фирм, занимающихся мониторингом рекламного рынка,

могут происходить изменения, как методики, так и круга учитываемых рекламных носителей, что может привести к неверным выводам относительно динамики роста рынка рекламы.

Сопоставимость во временной области требует в качестве уровней ряда динамики использовать только **адекватные индикаторы**. Например, отношение значений какого-либо экономического показателя к значениям того же показателя в соответствующем месяце предыдущего года непригодно для моделирования инновационных и нестационарных (эволюционирующих) процессов.

Аналогичная ситуация возникает и при известных методах исключения сезонной компоненты (**«десезонализации»**) эволюционирующих (с изменением вида и параметров сезонной компоненты) рядов динамики: попытка исключить сезонный фактор именно таким образом приведет к искажению текущих значений индикаторов за счет эволюции сезонной волны (индикатор не «гасит» сезонную волну). Впрочем, к вопросу о недостатках известных методов «десезонализации» и способах их устранения мы вернемся ниже.

Индикатор, показывающий для каждого месяца процентное отношение экономического показателя с начала соответствующего года до данного месяца нарастающим итогом к такому же показателю прошлого года, тоже не адекватен в условиях высокой динамики процессов. Средние значения несопоставимы между собой, так как они получены путем усреднения за разные периоды (за разные годы). Сезонная компонента при таком способе моделирования не устраняется, а деформируется, что может также приводить к неадекватным выводам. Причиной указанных проблем с индикаторами является отсутствие эффективных методик для моделирования нестационарных процессов.

Аналогичные ситуации могут возникать при работе с «производными» динамическими рядами, полученными преобразованием каких-либо первичных данных: необходимо учиты-

вать возможные последствия таких преобразований [5]. Следует иметь в виду и календарную несопоставимость, например, различие количества дней в месяцах года, количество праздничных дней и т.п.

В большинстве случаев все же удается устранить или уменьшить несопоставимость, вызванную указанными причинами, путем пересчёта с помощью формальных методов.

В-третьих, при моделировании большинства производственных систем основные закономерности их протекания и развития известны, а любой недостаток априорной информации для анализа их точности может быть восполнен экспериментальными данными.

Принципиально иная ситуация возникает при моделировании СЭС. Здесь зачастую отсутствует априорная информация о количественных закономерностях, присущих причинно-следственным (казуальным) связям между показателями, необходимая для формирования моделей.

К тому же анализ существенно осложняется многообразием динамических свойств СЭС и, как следствие, возможных динамических моделей. Многообразие проявляется в виде сложной структуры рядов динамики (наличия нескольких компонент, сочетающихся аддитивно и мультипликативно), в виде запаздываний реакции объекта моделирования на внешнее воздействие, пренебрежение которыми заметно снижает точность анализа.

В-четвертых, при моделировании и прогнозировании показателей СЭС практически исключается (или крайне затруднена) возможность проведения активных экспериментов для получения информации о поведении изучаемых переменных, проявлениях тех или иных отклонений в ходе процесса, обусловленного его динамикой. Это относится и к экспериментам, связанным с надлежащим образом выбранными вариациями тех или иных условий, с их многократным повторением для выяснения уровня, при котором влияние вариаций становится заметным.

В-пятых, определяющим в проблеме точности моделей экономической (инновационной) динамики является уровень отражения в них соотношения детерминированных и стохастических свойств. Соотношение характеристик устойчивости и изменчивости, а также их удельный вес в общей характеристике развития за определенные интервалы времени определяет степень инерционности СЭС и возможность прогнозирования её показателей.

В-шестых, следует иметь также в виду, что на участках эволюционного развития достаточно грубые (простые) модели рядов динамики показателей могут давать приемлемые по точности результаты, а для описания переходного состояния потребуется более полная система параметров и более подробная структуризация модели.

В-седьмых, следует учесть, что динамика СЭС может быть описана с помощью линейных или нелинейных дифференциальных или конечно–разностных уравнений. Детерминированные непрерывные функции или решетчатые функции, моделирующие явления и процессы в СЭС, являются зачастую решениями этих уравнений, но иногда могут быть predetermined, исходя из положений экономической теории, или просто уже исторически сложившейся практикой моделирования.

При этом использование непрерывного времени удобно для аналитического моделирования, позволяет применить аппарат дифференциального исчисления. В то же время дискретные модели облегчают построение алгоритмов для их реализации на компьютерах.

В-восьмых, для пространственных рядов динамики имеем регрессии, со стохастическими факторными переменными, идентификация которых сложнее, имеет свою специфику [21].

В-девятых, математическая экономика в большей мере рассматривает непрерывные модели и их решения, в то время как эконометрика, оперирующая статистическими данными, ис-

пользует результаты дискретизации этих моделей. Тем не менее, в известной эконометрической литературе процедура дискретизации рассматривается довольно поверхностно, без анализа тех погрешностей, которые при этом могут возникнуть, и тех условий, которые следует соблюдать.

В лучшем случае ограничиваются ссылкой на **теорему Котельникова-Шеннона** (теорему отсчётов или дискретизации), по которой непрерывная функция времени $Y(t)$ будет полностью определена последовательностью (рядом) своих значений, отстоящих друг от друга не более чем на шаг (период) опроса [sample time] $\Delta = \frac{f_{\max}}{2}$, где f_{\max} - наивысшая частота в спектре дискретизируемой функции. Величина, обратная периоду дискретизации, называется линейной частотой дискретизации [sample frequency] $f_d = \frac{1}{\Delta}$. Обратим внимание на то, что частота дискретизации во временных рядах динамики обычно известна (час, день, неделя, декада, месяц, квартал, год) и может варьироваться лишь в определенных пределах (например, путём перехода от годовых наблюдений к месячным).

Для каждой модели динамической траектории можно рассчитать её спектр и частоту f_{\max} [16, 57], выбрать соответствующий период опроса Δ во времени.

Следует осознать, что речь может идти как о временной, так и о пространственной динамике. Например, для передачи характера зависимости спроса на благо от его цены допустим большой шаг изменения цены, если изменение спроса незначительно (спрос не зависит от цены или изменяется по линейному закону с малым углом наклона). При высокой динамике (описываемой полиномами второго, третьего порядка и т.п.) шаг должен быть меньшим.

Проведём иллюстрацию данного условия на примере гармоника: она может быть моделью компонент ряда динамики или составной частью более сложной модели.

В соответствии с теоремой Котельникова-Шеннона гармонический сигнал с периодом T может быть адекватно представлен своими наблюдениями, если его частота не превышает половины частоты дискретизации (эта частота f_N называется **частотой Найквиста** (Nyquist frequency) $f_N = \frac{f_d}{2} = \frac{1}{2\Delta}$).

Покажем, какие последствия могут вызвать те или иные соотношения между реальной частотой дискретизации, применяемой при регистрации показателя, и частотой Найквиста.

Возможны случаи правильной передачи (восстановления) гармоника и случаи существенного искажения частоты, амплитуды и фазы. На рис. 1 показан случай 13 наблюдений на 1 период, т.е. частота гармоника $f = 1/T$ меньше частоты Найквиста f_N . Видно, что наблюдения позволяют правильно восстановить траекторию. Практически достаточно от 5 до 10 наблюдений на период гармоника, т.е. должно выполняться соотношение $5 < \frac{T}{\Delta} < 10$.

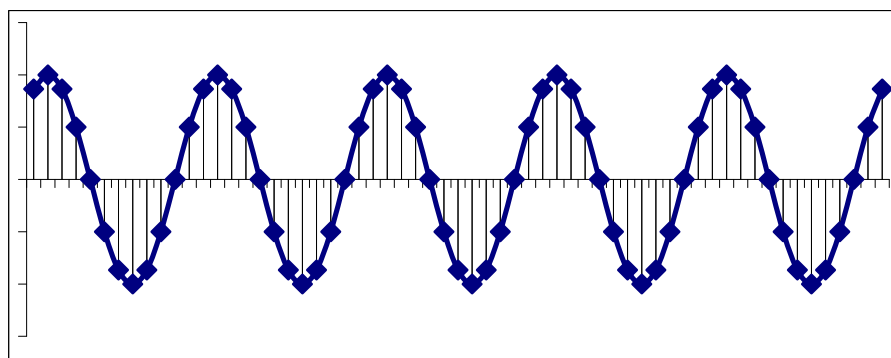


Рис. 1. Частота дискретизации гармонического сигнала меньше частоты Найквиста

Порой точное значение периода гармоника неизвестно (оно составляет предмет измерения), но какие-то априорные знания о диапазоне её значений имеются практически всегда. Во всяком

случае, попасть в указанный диапазон соотношения частоты дискретизации в 5-10 раз больше частоты гармоники не представляется сложной задачей. В то же время излишне завышать частоту дискретизации нецелесообразно, так как число наблюдений окажется избыточным для моделирования (излишние затраты на сбор, хранение, анализ и передачу данных). Кроме того, слишком частые наблюдения будут по значениям уровней близки друг к другу (малоразличимы), что может привести к вычислительным погрешностям при их обработке, неустойчивости решения: явлению **мультиколлинеарности (multicollinearity)**, которое рассмотрим более подробно в разделе 4.3.

Реальная экономическая практика принятия решений обычно сама отбирает более или менее оптимальные периоды дискретизации. Например, вряд ли прижилась бы практика только ежегодных наблюдений для измерения количества введенных в эксплуатацию метров жилья в городе, вместо применяемого в настоящее время ежемесячного.

На рис. 2 показано, что если частота гармоники равна частоте Найквиста, то дискретные наблюдения позволяют восстановить гармонику с той же частотой, но амплитуда и фаза смоделированной по данным наблюдениям гармоники (экономического процесса) могут быть существенно искажены. В худшем случае все наблюдения могут оказаться равными нулю.

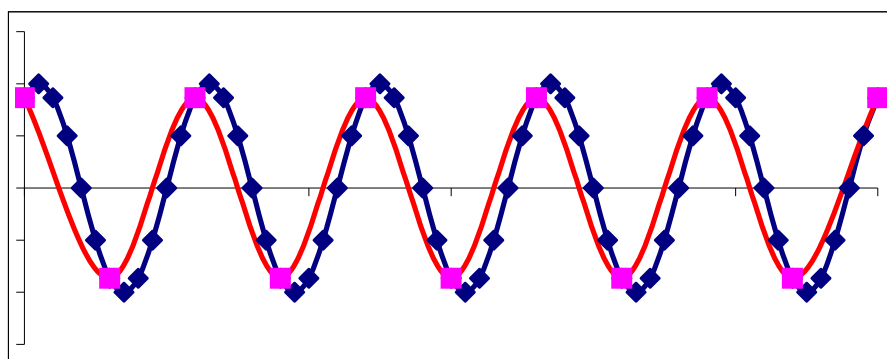


Рис. 2. Частота дискретизации гармонического сигнала равна частоте Найквиста

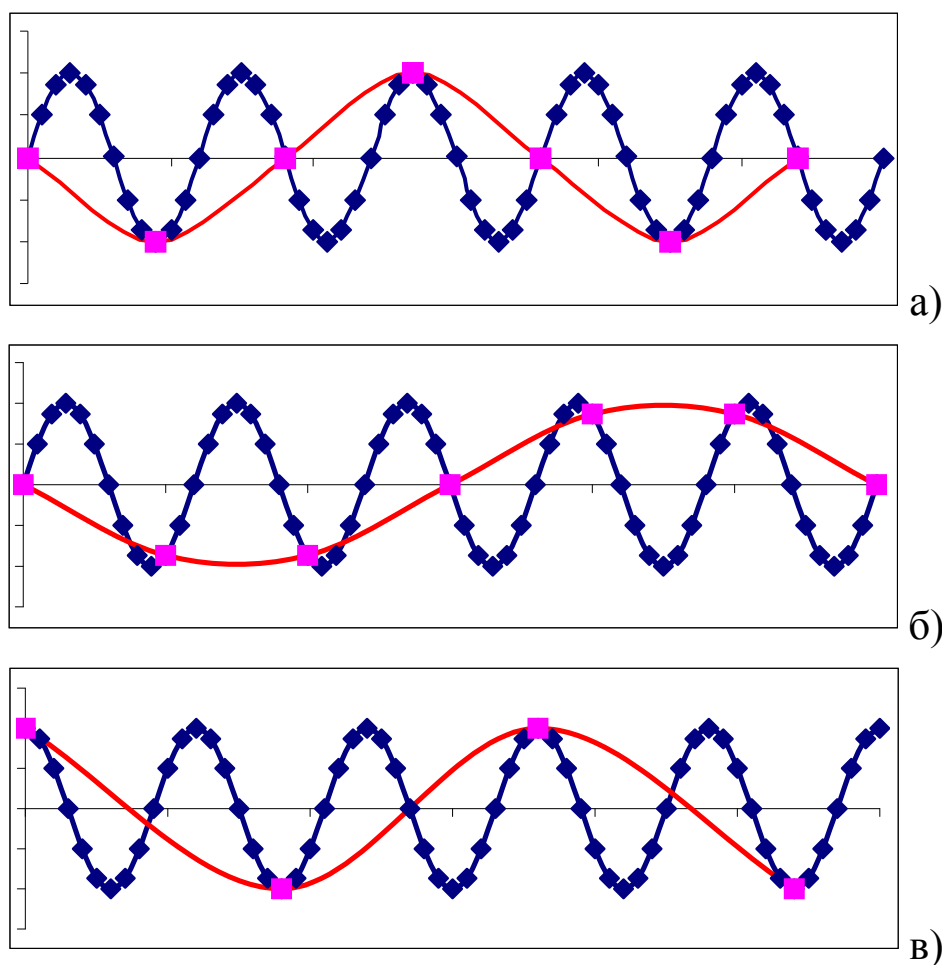


Рис. 3. Частота дискретизации гармонического сигнала больше частоты Найквиста

На рис. 3, а, в показаны случаи получения «маятниковой» колеблемости, когда имеет место чередование знаков в последовательных наблюдениях гармонике при выборе частоты дискретизации гармонического сигнала больше частоты Найквиста.

При присутствии в наблюдениях дополнительно аддитивной или мультипликативной стохастической компонент неправильный выбор периода дискретизации может привести к получению труднообъяснимых с экономической точки зрения видов случайных «маятниковых» колебаний [3].

Рис. 4 показывает, что для суммы линейной функции и гармонике при частоте дискретизации меньшей частоты Найквиста

можно также получить и колеблемость «маятникового» («треугольного») вида.

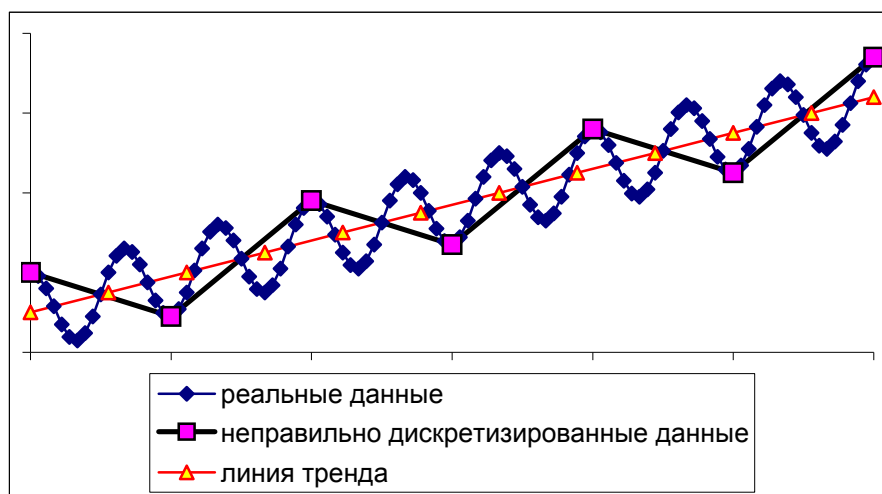


Рис. 4. Изменение вида суммы линейной функции и гармоники при частоте дискретизации меньшей частоты Найквиста

Рассмотренные вопросы дискретизации для одной гармоники являются самыми простыми. Если, например, колебательная компонента ряда динамики моделируется суммой трёх гармоник, то частоту дискретизации по условию Котельникова-Шеннона определяет гармоника с наибольшей частотой из трёх.

1.4. Точность оценок параметров регрессий

Наличие стохастической компоненты ε_k в наблюдениях обуславливает стохастический характер уровней определяемой переменной Y_k , оценок параметров A_i^o модели регрессии, сглаженных (в том числе прогнозируемых) значений Y_k^o .

Используемые в эконометрике характеристики точности различны [71, 74]:

- для оценок параметров эконометрических моделей A_i^o по выборке,
- для оценок точности и качества моделирования (адекватности) моделей на выборке,
- для прогнозирования рядов динамики с использованием идентифицированной модели.

При параметрической идентификации стремятся получить оптимальные оценки параметров A_i^o , которые должны обладать следующими свойствами:

1. Несмещенность (unbiased estimator) - отсутствуют систематические погрешности в оценках, т.е.

$$M\{A_i^o\} = A_i, \text{ где } M\{\dots\} - \text{оператор математического ожидания.}$$

В этом случае каждая отдельная оценка A_i^o на конкретной выборке объемом N лишь в редких случаях совпадает с соответствующей характеристикой генеральной совокупности (population), но при многократном повторении выборок среднее значение оценок, рассчитываемых по ним, совпадёт с истинным значением оцениваемого параметра.

2. Эффективность (efficient estimator) - обеспечивается минимальное значение дисперсии оценки в применяемом методе сглаживания среди других возможных методов при фиксированном объеме выборки N , т.е.

$$D\{A_i^o\} - \min, \text{ где } D\{\dots\} - \text{оператор дисперсии.}$$

Каждая отдельная эффективная оценка не гарантирует того, что она даёт более точное значение параметра, чем менее эффективная. Оценка называется **асимптотически эффективной**, если с увеличением объема выборки её дисперсия стремится к нулю.

3. Состоятельность (consistent estimator) - оценки параметров сходятся по вероятности к оцениваемому параметру, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|A_i - A_i^o| < \delta\} = 1,$$

где P – вероятность, δ – сколь угодно малое неотрицательное число. Другими словами, состоятельной называется та оценка, которая даёт истинное значение при достаточно большом объёме выборки вне зависимости от значений входящих в неё конкретных наблюдений.

В большинстве случаев несмещенная оценка является и состоятельной. С другой стороны, состоятельные оценки, возможно смещенные при малых объёмах выборки, при увеличении объёмов выборок становятся асимптотически несмещенными. Поэтому при невозможности получения несмещенной оценки рекомендуют найти хотя бы состоятельную оценку.

Наибольшее внимание в эконометрике малых выборок принято уделять **обеспечению эффективности оценок A_i^o параметров**, т.е. минимизации дисперсий оценок (поскольку с возрастанием объёма выборки N несмещенность и состоятельность оценок гарантируются).

Кроме точечных оценок точности A_i^o желательно определить **доверительные интервалы (confidence interval) оценок параметров**, особенно для малых выборок [8]. Аналитический расчёт доверительных интервалов оценок параметров известен лишь для регрессий в виде полиномов первого и второго порядка и при нормальном законе распределения стохастической компоненты. Расчёт может быть выполнен и для экспоненциальной функции, сводимой к линейной модели путем логарифмирования при некоторых условиях. В последнем случае, после определения доверительных интервалов для линеаризованной функции осуществляется операция потенцирования.

Аналитические решения определения доверительных интервалов для оценок параметров других нелинейных моделей регрессии, которые в основном и встречаются на практике, отсутствуют [68].

1.5. Методы сглаживания стохастической компоненты

Точность параметризации, моделирования и прогнозирования ряда динамики модели по выборке зависит от выбора того или иного метода сглаживания стохастической компоненты ε_k : наименьших квадратов (МНК) – **ordinary least squares (OLS) method**, его расширений (например, обобщенного МНК (ОМНК) – **generalized least squares (GLS) method**, взвешенного МНК, нелинейного МНК (НМНК), максимального правдоподобия - **maximum likelihood (ML) method**, квантильной регрессии, моментов, инструментальных переменных, ортогональной регрессии или др. [2, 4, 12, 39].

Обоснование метода сглаживания осуществляется исходя из вида модели регрессии, её стационарности, свойств стохастической компоненты ε_k , объёма выборки и т.д.

Наиболее простым и наиболее популярным является **МНК**, обеспечивающий выбор оценок параметров модели из условия минимума суммы квадратов невязки:

$$\begin{aligned} A_0^o, A_1^o, \dots, A_d^o &= \arg \min_{A_0, A_1, \dots, A_d} \sum_{k=0}^N (Y_k - Y_k^o)^2 = \\ &= \arg \min_{A_0, A_1, \dots, A_d} \sum_{k=0}^N (Y_k - f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d))^2 = \\ &= \arg \min_{A_0, A_1, \dots, A_d} \sum_{k=0}^N \varepsilon_k^2 = \arg \min_{A_0, A_1, \dots, A_d} Q(A_0, A_1, \dots, A_d), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где запись $\arg \min_{A_0, A_1, \dots, A_d} \sum_{k=0}^N (Y_k - Y_k^o)^2$ означает операцию нахождения на множестве A_0, A_1, \dots, A_d таких аргументов $A_0^o, A_1^o, \dots, A_d^o$, которые минимизируют функцию

$Q(A_0, A_1, \dots, A_d) = \sum_{k=0}^N (Y_k - f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d))^2$, а $\sum_{k=0}^N \{\dots\}$ выполняет функцию сглаживания (роль оператора математического ожидания).

Параметры $A_0^o, A_1^o, \dots, A_d^o$ можно найти как решение системы d уравнений (она называется **нормальной системой уравнений**), формируемых из **необходимого условия (first-order conditional (FOC))** минимума функции $Q(A_0, A_1, \dots, A_d)$ от d параметров A_i модели регрессии:

$$\frac{\partial Q(A_0, A_1, \dots, A_d)}{\partial A_i} = 0, \quad (1.7)$$

где $i = 0, \dots, d$.

Функция $Q(A_0, A_1, A_2, \dots, A_d)$ называется **среднеквадратической невязкой, функцией потерь – loss function**. В большинстве практически важных случаев условие (1.7) является и достаточным условием минимума среднеквадратической невязки для расчёта A_i^o .

Нормальная система уравнений (1.7) приводит к **системе линейной алгебраических уравнений (СЛАУ)**, если параметры A_i входят в модель регрессии **линейно**, как, например, в следующих моделях:

$$Y_k = A_0 + A_1 k \Delta + \varepsilon_k, \quad (1.8)$$

$$Y_k = A_0 + A_1 k \Delta + A_2 (k \Delta)^2 + \varepsilon_k, \quad (1.9)$$

$$Y_k = A_0 + \frac{A_1}{k \Delta} + \varepsilon_k. \quad (1.10)$$

Заметим, что модели (1.9) и (1.10) отличаются от модели (1.8) тем, что они **нелинейны относительно факторной переменной $k \Delta$** . При введении новых переменных $X_1 = k \Delta$ и $X_2 = (k \Delta)^2$ модель (1.9) становится двумерной, но линейной и по параметрам A_0, A_1 , и по факторным переменным. Линеаризацию модели (1.10) по факторной переменной обеспечивает новая переменная $1/k \Delta$, хотя переход к ней плохо интерпретируется физически.

Различие между линейными и нелинейными моделями существенно не только с формальной математической точки зрения, но и в теоретико-экономическом, а также и в практическом

отношении. Дело в том, что большинство зависимостей в экономике носят принципиально нелинейный характер: например, эффективность использования ресурсов при увеличении производства, изменение спроса и потребления населения при росте доходов и т.д. Аналитическое решение соответствующих нелинейных дифференциальных или конечно-разностных уравнений не всегда возможно, но и в тех случаях, когда оно существует, сопряжено со значительными трудностями по решению или по идентификации интеграла, зачастую нелинейного по параметрам. Поэтому часто линеаризируют зависимости или пользуются линейными дифференциальными уравнениями и их решениями.

Линейность моделей регрессии по параметрам весьма привлекательное свойство, так как даёт возможность применения достаточно простого, хорошо изученного с точки зрения точностных характеристик и поддержанного программно МНК. Однако число линейных по параметрам моделей и **линеаризирующих преобразований**, сводящих модели к линейным, невелико.

При линеаризирующих преобразованиях зачастую постулируются те или иные, скорее удобные, чем реальные, свойства стохастической компоненты ε_k . Например, предполагается логарифмически нормальный закон её распределения, или принимается «удобная» структура вхождения ε_k в модель. Причём в одних случаях – аддитивная структура, а в других – мультипликативная. То - в числителе аналитического выражения модели, то - в его знаменателе и т.д.

Кроме того, в научной литературе отмечается, что оценки вектора параметров исходной и линеаризованной моделей при приёмах линеаризации не совпадают, особенно различна точность прогноза [73].

Проиллюстрируем проблемы, возникающие при применяемых линеаризирующих преобразованиях, на примере моделирования ряда динамики с экспоненциальной моделью тренда

$$Y_k = A_1 \exp \alpha_1 k \Delta \cdot \xi_k .$$

Обычно предлагается сведение её к модели, линейной по параметрам $\ln A_1$ и α , путём логарифмирования:

$$\ln Y_k = \ln A_1 + \alpha_1 k \Delta + \ln \xi_k .$$

Однако для выполнения операции логарифмирования стохастическая компонента должна быть мультипликативной и неотрицательной.

Логарифмирование не позволяет осуществить линеаризацию той же функции при аддитивной стохастической компоненте. Не линеаризируется логарифмированием модель и при тренде в виде обобщенной экспоненциальной функции с аддитивной стохастической компонентой ξ_k .

Знание параметра A_0 в последней модели представляет обычно самостоятельный интерес, как асимптоты тенденции (при $k \rightarrow \infty$) ряда динамики, поэтому используемое зачастую предположение об априорном знании A_0 и переходе к идентификации экспоненциальной модели для выборки

$$Y_k - A_0 = A_1 \exp \alpha_1 k \Delta \xi_k$$

с последующим логарифмированием искусственно.

Итак, модели регрессии

$$Y_k = A_1 \exp \alpha_1 k \Delta + \xi_k ,$$

$$Y_k = A_0 + A_1 \exp \alpha_1 k \Delta + \xi_k .$$

являются **нелинейными по параметрам (существенно нелинейными или внутренне нелинейными)**, для них не существует линеаризирующих преобразований.

В качестве другого примера возьмем гармонику

$$Y_k = A_3 \sin(\omega k \Delta + \psi) = A_3 \cos \psi \sin \omega k \Delta + A_3 \sin \psi \cos \omega k \Delta = A_4 \sin \omega k \Delta + A_5 \cos \omega k \Delta ,$$

которая является существенно нелинейной по параметру ω , но линейной по параметрам A_3 и ψ , так как с учётом принятых обозначений для A_4 и A_5 можно получить

$$A_3 = ((A_4)^2 + (A_5)^2)^{\frac{1}{2}}, \psi = \text{Arctg} \frac{A_5}{A_4}.$$

Разложение нелинейной функции в ряд, например, Тейлора является другим известным линеаризирующим преобразованием. Однако оно приводит к малой погрешности лишь в окрестности точки разложения и **лишь в этой окрестности (т.е. на коротких выборках)** достаточно хорошо аппроксимирует параметризуемую функцию.

Оценка Эйткена, использующая разложение редуцированной функции в ряд Тейлора, ограниченный линейными членами, довольно сложна, не обеспечивает высокой точности, формирует новую **гетероскедастическую стохастическую компоненту**, у которой дисперсия является функцией от уровней переменных модели [21].

Оптимальность оценок A_i^o при применении МНК (МНК-оценок) будет обеспечена при выполнении следующих условий, известных как условия **Гаусса–Маркова (Gauss–Markov conditions)**, для стохастической компоненты ε_k :

1. Компонента ε_k должна являться случайной величиной. Обычно это условие дополняют ещё одним: распределение ε_k не должно зависеть от значений определяющих переменных в регрессии.

Данное условие обычно выполняется автоматически, если объясняющие переменные не являются стохастическими, например, для временных рядов динамики. Однако трудно себе представить нестохастические переменные в «пространственной» динамике.

2. Компонента ε_k должна являться центрированной случайной величиной, т.е. $M\{\varepsilon_k\}=0$. Данное условие означает, что случайная компонента не должна иметь систематического смещения.

Если постоянный член (параметр) включен в уравнение регрессии, то разумно предположить, что это условие выполняется автоматически, так как роль постоянного члена состоит в отражении любой систематической, но постоянной составляющей в уровнях Y_k .

3. $D\{\varepsilon_k\}=\sigma^2$ - дисперсия должна быть одинаковой для всех значений ε_k и независимой от значений определяющих переменных X_i в модели регрессии. Данное условие определяет свойство **гомоскедастичности** ε_k , а при его невыполнении стохастическая компонента ε_k - **гетероскедастична**.

Если условие гомоскедастичности не выполняется, то оценки параметров будут неэффективными, хотя и несмещенными. Напомним, что эффективности оценок в эконометрике уделяется наибольшее внимание, поэтому и **вопрос обеспечения гомоскедастичности, или хотя бы уменьшения гетероскедастичности, является одним из главных** при эконометрическом моделировании.

При этом следует осознавать, что величина σ^2 , конечно, неизвестна. Одна из задач регрессионного анализа и состоит в оценке величины и стационарности дисперсии стохастической компоненты.

4. $M\{\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l\}=0$ при $k \neq l$, т.е. значения ε_k и ε_l должны быть некоррелированы.

Зачастую данное условие нарушается для временных рядов динамики, в этом случае говорят об **автокорреляции возмущений** (серийной корреляции). Невыполнение условия «некоррелированности» приводит к неэффективности оценок параметров.

5. Часто приведенные выше условия Гаусса-Маркова дополняют требованием нормальности закона распределения ε_k . Заметим, что при этом требование некоррелированности ε_k эквивалентно их независимости.

При выполнении всех указанных выше условий для ε_k оценки A_i , полученные по МНК, совпадут с оценками по методу максимального правдоподобия, а при несоблюдении хотя бы одного – теряют свойство оптимальности при применении МНК [1].

Проиллюстрируем некоторые условия Гаусса-Маркова, необходимые для понимания особенностей рядов динамики и формулирования требований к методам их моделирования.

При моделировании статистической выборки **адекватной моделью** случайный остаток ε_k должен быть отделен от уровня определяемой переменной модели Y_k .

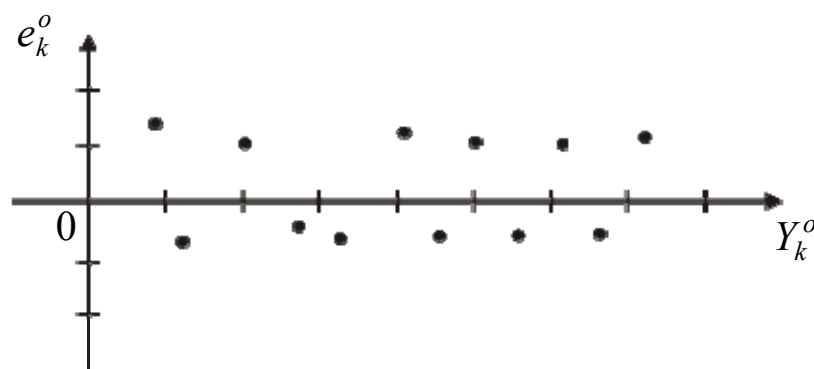


Рис. 5. Случайные остатки в функции уровня определяемой переменной

Расположение остатков ε_k (точнее их оценок) на рис. 5 в виде горизонтальной полосы говорит о том, что модельные значения Y_k^o хорошо аппроксимируют фактические значения Y_k , а остатки представляют собой случайные величины.

Целесообразна и иллюстрация свойства гетероскедастичности в силу его большого значения для определения точности и выбора метода сглаживания при моделировании рядов экономической динамики. В каждом наблюдении стохастическая

компонента имеет только одно значение ε_k , поэтому, говоря о её дисперсии и гетероскедастичности, имеют в виду возможное поведение ε_k до того, как проведено наблюдение. При гомоскедастичности нет оснований априори ожидать появления особенно больших отклонений в любом наблюдении, а вероятность того, что величина ε_k примет какое-то данное значение, будет одинакова для всех наблюдений k . На рис. 6, а оценки остатков ε_k имеют систематический характер и постоянную дисперсию, а на рис. 6, б – переменную дисперсию в функции уровня определяемой переменной (номера наблюдения), т.е. обладают свойством гетероскедастичности.

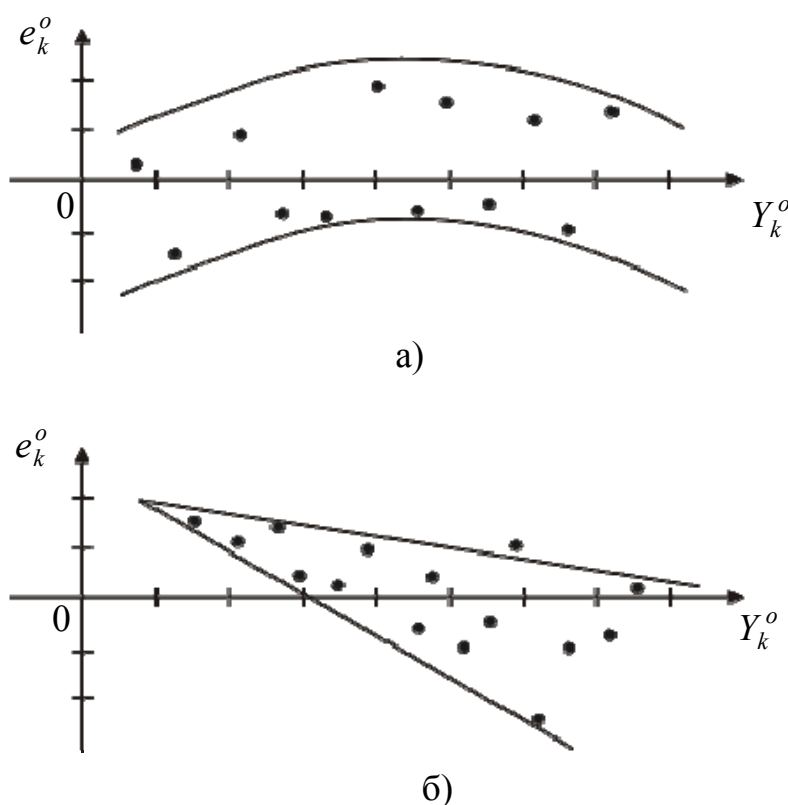


Рис. 6. Неслучайные остатки в функции определяемой переменной

Гетероскедастичность может иметь место не только для временных рядов, но и для «пространственной» динамики. Например, если исследуется зависимость расходов на питание в

семье от её общего дохода, то можно ожидать, что разброс данных будет выше для семей с более высоким доходом. Это означает, что дисперсии зависимых величин – расходов на питание (а, следовательно, и случайных ошибок) не постоянны для отдельных значений объясняющей переменной – дохода, так как в этом случае исследуемый объект неоднороден.

На практике обычно не удается уверенно определить причину и вид гетероскедастичности: например, она может появиться из-за неправильного выбора модели, т.е. определяться самим фактом выбора той или иной модели, или методом её идентификации.

Чаще она обнаруживается экспериментально с помощью тестов, в которых делаются различные предположения о зависимости случайной компоненты от тренда или номера наблюдений, например, тесты Спирмена, Голдфельда-Квандта, Глейзера, применение которых, заметим, предполагает использование объемов выборок в 30 и более наблюдений [1, 3].

Заметим, что в моделях (1.1) и (1.2) стохастическая компонента ξ_k обычно предполагается гомоскедастической. В мультипликативной модели (1.2) можно говорить о **гетероскедастичности определяемой переменной Y_k** при гомоскедастической ε_k . В модели (1.3) стохастическая компонента ζ_k гетероскедастична даже при гомоскедастичности ξ_k .

Устранение или хотя бы частичная компенсация (уменьшение) гетероскедастичности ε_k является в эконометрике, как правило, непростой задачей. Для её решения применяют, например, **ОМНК**, требующий знания ковариационной матрицы остатков ε_k или его более простой вариант - **взвешенный МНК**, в котором постулируется некий закон изменения дисперсии (например, в виде геометрической прогрессии, линейной

или экспоненциальной функции) и осуществляется соответствующее весовое суммирование невязок [2].

Если значения ε_k автокоррелированы, а её ковариационная матрица известна, то веса в ОМНК назначают обратно пропорциональными значениям дисперсии для « k -го» наблюдения. Если ковариационная матрица неизвестна, но имеет специальную структуру, определяемую некоторым числом параметров, то можно применить метод максимального правдоподобия.

Для представления общей картины следует упомянуть, что в относительно длинных рядах динамики могут встретиться ещё два важных вида изменения дисперсии стохастической компоненты ε_k .

В рядах с **условной гетероскедастичностью**, характеризующих, например, процессы инфляции или уровень инвестиций, **условная дисперсия** ряда динамики зависит от времени. В долгосрочном периоде, на протяжении нескольких десятков лет, дисперсия таких рядов постоянна, но в рамках данного периода могут быть более короткие отрезки времени продолжительностью в несколько лет, на которых дисперсия явления относительно высока. При этом ряд динамики может быть гомоскедастичен, несмотря на условную гетероскедастичность [73, 88].

Представляют интерес и ряды динамики с **волатильностью** (например, обменные курсы валют и доходностей фондового рынка, цены на опционы, динамические соотношения для цен активов), в которых чередуются периоды малых значений ε_k и периоды больших значений ε_k [23].

Перейдём к выбору метода сглаживания при моделировании рядов динамики моделями, существенно нелинейными по параметрам. При минимизации среднеквадратической невязки известными способами приходим к **нелинейному МНК**: условие (1.6) даёт систему нормальных уравнений нелинейных относи-

тельно параметров A_i , **аналитическое решение** которой обычно невозможно [21]. Искать минимум $Q(A_0, A_1, A_2, \dots, A_d)$ позволяют и **численные методы**, успешно применяемые для детерминированных функций: Ньютона-Гаусса, Левенберга-Марквардта, Хартли, градиентный, сопряженных градиентов, симплекса и др. [1, 21].

Однако оценка параметров по статистической выборке для НМНК может или не существовать, или могут получаться несколько НМНК – оценок параметров, приводящих к одному и тому же значению среднеквадратической невязки. Возможен и выход на локальный, а не на глобальный минимум. При этом распознать, какое из значений оценок является ложным, а какое – истинным затруднительно.

Иногда ни один из указанных методов не приводит к оценке параметров. В частности, сходимость часто отсутствует в регрессии

$$f\{X_{1k}, X_{2k}, A_0, A_1, A_2\} = A_0 (A_1 X_{1k}^{A_2} + (1 - A_1) X_{2k}^{A_2})^{1/A_2},$$

которая представляет собой производственную функцию с постоянной эластичностью замены [21].

Добавим, что для НМНК характерны и известные проблемы со сходимостью численных методов, так как она зависит от выбора начального вектора параметров, шага итераций и т.д. Исследование же статистических свойств НМНК-оценок параметров в нелинейной регрессии весьма сложно: при конечном объеме выборки для установления свойств НМНК-оценки необходимо знать конкретный вид регрессии. Отметим лишь, что НМНК-оценки могут быть несостоятельными, являются смещенными.

Использование МНК и его расширений в настоящее время уже предполагает поиск альтернативы при эконометрическом моделировании и прогнозировании моделей экономической динамики.

Во-первых, МНК использует невязку каждого из наблюдений выборки с одинаковым весовым коэффициентом, что не всегда приемлемо. Естественно предположить, что зависимость в рядах динамики постепенно ослабевает с увеличением «расстояния» между наблюдениями. Очевидно, что при прогнозировании в условиях быстро изменяющихся социально-экономических явлений информация более поздних временных периодов является более важной, более существенной, чем информация ранних периодов. В экономике такие изменения обусловлены, например, технологическими сдвигами, изменениями цен на ресурсы, покупательной способностью населения, потребительскими предпочтениями, внешними событиями (войнами, природными катаклизмами и т.п.), изменениями в законодательстве и рядом других объективных и субъективных причин.

Вместе с тем, зачастую даже по чисто вычислительным причинам без устаревшей информации порой бывает затруднительно построить эконометрическую модель (например, из-за малого объёма исходных данных). Кроме того, «новые» взаимосвязи обычно образуются на фоне «старых», являются закономерным итогом эволюции отношений в социально-экономической, технической и других сферах общественной жизни.

Вследствие этого, информация более ранних периодов также может представлять определенную ценность с точки зрения адекватного отображения рассматриваемых явлений и процессов.

Эти причины в совокупности выдвигают проблему сопоставительного представления в эконометрической модели разновременной информации, которая обычно решается взвешиванием исходных данных, относящихся к различным моментам времени анализируемого периода. Весовые коэффициенты в такой модели прогноза должны выражать степень важности, ценности разновременной исходной информации, полноты ее учёта при формировании модели. Весовые дисконтирующие коэффициен-

ты сглаживания могут назначаться на основе субъективных суждений относительно ценности исходной информации, относящейся к разным моментам времени (что оправдано в задаче прогнозирования, когда наиболее важными являются последние наблюдения). Коэффициенты могут быть заданы в числовой форме или в виде функциональной зависимости таким образом, чтобы по мере продвижения в «прошлое» веса убывали.

Во-вторых, при гетероскедастичности стохастической компоненты анализируемой траектории последствия применения МНК будут следующими [2]: оценки параметров A_i по-прежнему останутся несмещенными и линейными, но они **не будут даже асимптотически эффективными, а дисперсии оценок будут рассчитываться со смещением**, так как необъясненная уравнением регрессии дисперсия остатков не является более несмещенной.

Вследствие этого, интервальные оценки A_i , даже для тех немногих случаев, когда они могут быть определены аналитически, ненадежны, как и статистические прогнозы по моделям неслучайных компонент.

Третьим является то обстоятельство, что принимаемый обычно постулат о нормальности закона распределения ε_k далеко не в полной мере соответствует реальной эконометрической практике.

Он скорее удобен для применения МНК, чем реально доказан. Методов, позволяющих надежно проверить, следуют ли ошибки нормальному распределению или нет, особенно на коротких выборках, в настоящее время не существует. Более того, в научной литературе убедительно показана необоснованность принимаемого обычно утверждения о преимущественности нормального закона распределения стохастической компоненты в эконометрических моделях. Часто вообще не удаётся указать

какое-либо параметрическое семейство, в рамках которого находится конкретное распределение ошибок.

Достаточно логично предполагать, учитывать при декомпозиции и анализе точностных характеристик методов моделирования, что часть уровней ряда динамики, формируемая случайными факторами, существенно меньше долей других компонент. Значения ε_k меньше в сравнении с уровнями ряда динамики Y_k и других компонент, а её размах (выбросы) ограничен.

Дело в том, что наряду с относительно небольшими «эволюционными» изменениями определяемой переменной, которые могут моделироваться нормальным законом распределения ошибок, в рядах экономической динамики могут присутствовать и выбросы - outliers (внезапные «разладочные», аномальные, скачкообразные изменения в механизме формирования значений ε_k), и пропуски в данных, которые можно рассматривать как выброс с нулевым значением.

Пропуски могут объясняться как недостатками при сборе информации, так и происшедшими изменениями в системе отчётности, в системе фиксирования данных.

Выбросы обуславливают аномально большие значения вероятности больших и малых значений случайной компоненты ε_k или, как говорят, формируют «тяжелые хвосты распределений» стохастической компоненты. Появление аномальных значений может быть вызвано каким-то «мешающим» механизмом, отличным от свойств исследуемой СЭС: например, сдвигом запятой при перенесении информации из документа, занесением данных в другую графу и т.д.

Выявление и исключение таких значений, замена их истинными или обоснованными расчётными является первым и необходимым этапом первичной обработки данных, так как идентификация по «засоренной» выборке приводит к погрешностям.

Использование известных в статистике методов проверки выборки на однородность и последующее **отбрасывание аномальных наблюдений** из рядов динамики, содержащих упорядоченные данные, **принципиально неприемлемо**.

Можно, в принципе, воспользоваться приёмом определения аномальных значений, как **превышающих** в некоторое, экспертно определенное, число раз **среднеквадратическое значение остатков** ε_k или как **аномальное значение первых разностей** исходного ряда. После этого выявленному аномальному значению можно присвоить допустимое по экспертной оценке значение - тем самым выборка **«цензурируется»**.

Целесообразнее, на наш взгляд, другой метод: использовать так называемые **робастные (robustness) процедуры**, нечувствительные (или мало чувствительные) к «засорениям» выборки, не требующие априорных знаний закона распределения ε_k (оценки Хьюбера, Андрюса, Мешалкина, Рамсея, Нэсбурга-Кашьяпа и др. [2, 62, 82, 89]).

Из них выделим относительно новый и простой **метод «квантильной регрессии»**, дающий эффективные оценки параметров моделей [7, 84, 87]. Он позволяет осуществлять моделирование и прогнозирование рядов динамики с различными значениями квантилей. Медианная регрессия с квантилем «1/2» оценивает параметры моделей, исходя из минимума суммы модулей невязок, а сглаживание с квантилями «1/10» и «9/10» определяет **границы риска** или (по сути) **доверительный интервал** значений параметров и сглаженных значений определяемой переменной модели и прогноза.

Таким образом, **квантильная регрессия выступает как численное решение** (при отсутствии аналитических решений) задачи определения параметров модели и их доверительных интервалов.

Для акцентирования **возможности реализации метода сглаживания, отличного от МНК** (например, при аномальности закона распределения стохастической компоненты), в предлагаемых ниже методах эконометрического моделирования и прогнозирования **будем использовать** для обозначения оператора сглаживания **символ** $M^O\{\dots\}$.

1.6. Точность моделирования регрессиями

При проведении аналитического выравнивания зачастую бывает трудно заранее определить подходящий вид функции $f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d)$ (т.е. модель регрессии), особенно если выборка, представленная графически, явно не похожа на какую-либо аналитическую функцию. При этом исследователи в своём большинстве могут представить лишь небольшое количество простых аналитических выражений.

Сегодня в эконометрической практике сложные модели не используются в основном не потому, что они неадекватны практике или экономической теории, но, главное, из-за невозможности или малой точности их идентификации известными методами.

Точность модели регрессии (качество модели, её адекватность) характеризуется мерой близости сглаженных (модельных) значений Y_k^O определяемой переменной к реальным (фактическим) Y_k **на всём интервале наблюдения** (на выборке объёмом N).

Для характеристики точности моделирования могут быть использованы различные показатели: например, среднеквадратическое отклонение (или дисперсия) остатков ε_k , коэффициент детерминации R^2 и др.

Для оценки качества однофакторной регрессии удобнее рассчитывать не дисперсию, а **безразмерный коэффициент детерминации** R^2 (**coefficient of determination**) [1, 63], который показывает насколько вариация Y_k обусловлена изменением определяющей переменной и насколько на её формирование влияют случайные факторы:

$$R^2 = \frac{\sum_{k=0}^N (Y_k^o - M[Y_k])^2}{\sum_{k=0}^N (Y_k - M[Y_k])^2}.$$

У коэффициента детерминации есть очевидные достоинства: он легко вычисляется, интуитивно понятен и имеет четкую интерпретацию. Чем ближе коэффициент детерминации к 1 для сравниваемых моделей регрессии, тем, видимо, точнее модель.

Однако использование коэффициента детерминации порождает и ряд проблем:

- R^2 никогда не уменьшается при усложнении модели, что может создать у исследователя стимул необоснованно её усложнять;

- при оценке качества моделей рядов динамики значение R^2 зачастую достигает значения 0,9 и выше, в результате чего осуществление различия моделей на основании данного коэффициента является трудновыполнимой задачей;

- при отсутствии постоянного слагаемого в модели регрессии R^2 может принимать и отрицательные значения.

Современная вычислительная техника позволяет предложить и параметризовать несколько моделей регрессии (из визуальных предположений, из предпосылок экономической теории), затем для каждой из них вычислить остаточную дисперсию $D\{\varepsilon_k\}$ (или R^2) на анализируемой выборке. И модель с наименьшей величиной остаточной дисперсии (или с большим коэффициентом детерминации) признать лучшей из предложенных.

При этом следует реализовать известные процедуры проверки статистической гипотезы о равенстве дисперсий или коэффициентов детерминации (их расхождение для сравниваемых моделей может быть обусловлено конечностью объёма выборки).

При непротиворечивости гипотезы о равенстве статистических мер точности сравниваемых моделей выбор следует сделать в пользу более простой модели, с меньшим количеством параметров.

Точность модели регрессии определяет и **статистический анализ остатков** ε_k , в ходе которого проверяются некоторые из условий Гаусса-Маркова: независимость, случайность и нормальность закона распределения.

Их нарушения свидетельствуют о неверной спецификации модели регрессии, во всяком случае, при применении метода наименьших квадратов МНК.

Автокорреляция остатков означает, что существуют такие k и l , при которых $M\{\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l\} \neq 0$. Чаще рассматривают корреляцию между остатками уровней исходного ряда и остатками, сдвинутыми на один шаг во времени, т.е. $l = k + 1$.

Известно несколько тестов, определяющих автокорреляцию остатков ε_k : серий, Льюинга-Бокса и, чаще всего, Дарбина-Уотсона [34], согласно которому рассчитывается статистика

$$DW = \frac{\sum_{k=m+2}^N (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})^2}{\sum_{k=m+1}^N \varepsilon_k^2}.$$

Статистика Дарбина-Уотсона имеет определенные ограничения: выявляет лишь корреляцию между соседними значениями остатка, в то время как может быть корреляция на других интервалах. Кроме того, для её применения в регрессии должен присутствовать свободный (без факторных переменных) член; регрессоры должны быть нестохастическими; необходимо использовать выборки не менее чем из пятнадцати наблюдений;

имеется область неопределенности, в которой вопрос о наличии автокорреляции остаётся открытым.

Положительную и отрицательную автокорреляцию остатков можно продемонстрировать на примере ряда последовательных значений курса ценной бумаги. Если в какой-то момент времени курс окажется завышенным по сравнению с реальным курсом, то, скорее всего, курс будет завышен и на следующих торгах, т.е. имеет место положительная автокорреляция. Она встречается чаще. При отрицательной автокорреляции наблюдения действуют друг на друга по принципу «маятника» - завышенные значения в предыдущих наблюдениях приводят к занижению их в последующих наблюдениях.

Известно несколько методов исключения или уменьшения автокорреляции остатков, например, включение времени в качестве дополнительной факторной переменной; переход к моделированию не уровней ряда динамики, а их разностей (первых, вторых и т.д.); метод авторегрессионных преобразований [73].

2. СТРУКТУРЫ РЯДА ДИНАМИКИ И МОДЕЛИ КОМПОНЕНТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Для разработки новых методов параметризации широкого класса моделей динамики показателей инноваций с высокой точностью на малых выборках необходимо рассмотреть возможные структуры рядов динамики и виды моделей компонент этих структур.

Этим вопросам и посвящена данная глава. Принято, как это обычно делается в экономической литературе, что любой ряд динамики можно представить композицией тренда, сезонной, циклической, стохастической, календарной и инфляционной компонент.

Наибольшее внимание уделено первым четырем из них. Приведены характеристики и модели этих компонент, рассмотрены вопросы декомпозиции наблюдаемого параметра на компоненты.

Указанные компоненты могут входить в структуру аддитивно, мультипликативно и комплексно: аддитивно-мультипликативно. При этом мультипликативные структуры рассматриваются не в индексах, как это обычно делается, а предложена параметрическая структура ряда с колебательной компонентой для эконометрического моделирования.

Показано, что моделирование эволюционирующих колебательных компонент может быть осуществлено как применением соответствующих моделей, так и реализацией параметризации на коротких выборках.

Здесь же показана возможность моделирования колебательных компонент различных видов (в том числе и импульсных)

суммой трёх гармоник, амплитуды и частоты которых могут отличаться от ряда Фурье.

2.1. Компоненты и методы декомпозиции рядов динамики

Считают, что **декомпозиция** (разложение) ряда динамики на компоненты (составляющие) позволяет описать почти любой социально-экономический процесс или явление, независимо от их характера [6].

В структуре одномерного ряда динамики обычно выделяют четыре компоненты [3, 20, 29, 31, 42, 85]:

- **вековой уровень** (secular trend), **главную тенденцию, эволюторную компоненту** или **тренд** (будем обозначать её T_k);
- **циклические** (или конъюнктурные) **колебания** относительно тренда - **циклы** C_k ;
- **сезонные колебания** S_k ;
- **стохастическую компоненту** ε_k .

Компоненты ряда динамики различаются по ряду признаков. Так первые три компоненты, в отличие от четвертой, являются неслучайными, образуют **детерминированную часть (компоненту) ряда**, которую будем обозначать через D_k .

Декомпозиция представляет динамику как суперпозицию медленного процесса (тренда) и более быстрых процессов – циклических, сезонных и стохастических компонент.

При этом **сезонные колебания** S_k **не связывают только с изменением климатических условий внутри года**, к ним относят любые колебания с периодом менее одного года.

Длительность циклических колебаний – от одного года до 60–65 лет. Естественно, что если выборка состоит из годовых

наблюдений, то она может быть использована только для моделирования циклических колебаний.

Следует сознавать, что наблюдаемыми являются только значения (уровни) Y_k , а каждая из указанных выше компонент является отдельно ненаблюдаемой - в этом заключена главная проблема декомпозиции.

Компоненты могут образовывать динамический ряд или **суммированием (аддитивно)**

$$Y_k = T_k + C_k + S_k + \varepsilon_k,$$

или **произведением (мультипликативно)**

$$Y_k = T_k \cdot C_k \cdot S_k \cdot \varepsilon_k,$$

или **аддитивно-мультипликативно**, например, так

$$Y_k = \{T_k + C_k\} \cdot S_k + \varepsilon_k \text{ или } Y_k = T_k \cdot C_k + S_k + \varepsilon_k.$$

Те или иные компоненты (кроме стохастической) ряда динамики в рассмотренных структурах могут отсутствовать как принципиально, в силу причинно-следственных связей, их порождающих, так и **в зависимости от длины интервала наблюдения** (объёма выборки).

Считается, что **чем короче интервал наблюдения, тем проще может быть модель**, адекватная выборке. Последнее означает, что в зависимости от объёма выборки **декомпозиция ряда динамики может быть различной**.

Ряды динамики, состоящие из тренда, сезонной и стохастической компонент, называют **тренд-сезонными**, а ряды, состоящие из тренда, циклической и случайных компонент – **тренд-циклическими**.

Термином **колебательная компонента (колеблемость)** ряда динамики можно обобщить циклические колебания или сезонные колебания, или их совокупность.

В аддитивных структурах ряда динамики все компоненты размерны, а в мультипликативных структурах все нетрендовые

компоненты - сомножители C_k, S_k, ε_k рассматривают только как безразмерные **индексы**.

В мультипликативных моделях колеблемость ряда динамики растёт по мере роста уровней и уменьшается при падении уровней. Такие модели чаще используются в практике анализа объёма продаж, при этом вводятся **индексы сезонности**: отношение уровня цен, продаж или других экономических показателей за отдельные месяцы (кварталы) к среднему уровню показателя за год или за несколько лет и т.п. Мультипликативную структуру сезонных колебаний имеет, например, показатель производства (количество) яиц в России.

Аддитивные структуры ряда динамики обычно используют при анализе объёмных (стоимостных или натуральных) показателей и их сумм, а мультипликативные – оказываются полезными для описания динамики отношений объёмных величин. Например, показатель производства молока в России имеет аддитивную структуру сезонных колебаний.

Заметим, что при мультипликативном характере сезонной компоненты входящая в ряд динамики стохастическая компонента также обычно предполагается мультипликативной, что **далеко не всегда отвечает реальной динамике**, а является скорее удобным для **десезонализации** предположением.

Лишь в немногих случаях можно априори определить структуру ряда динамики, как по детерминированным компонентам, так и по стохастической компоненте. Чаще оправдан метод проб и ошибок, согласно которому оценивается точность моделирования и прогнозирования в предположении тех или иных структур ряда динамики, а вывод делается в пользу той из них, для которой мера точности окажется статистически значимо лучшей.

Известный комплекс методов декомпозиции рядов динамики (его в силу широкого применения назовём «**классическим**»)

можно представить в виде последовательности нескольких этапов [35, 42, 47]:

1. Выравнивание исходного ряда каким-либо известным методом с помощью существующих программ статистического анализа для получения **непараметрического ряда сглаженных уровней** T_k^o или **параметрического выражения** (аналитической функции с оценками параметров) для тренда T_k .

2. Способ получения оценок значений сезонных отклонений зависит от структуры ряда динамики:

а) при аддитивной структуре (суммировании значений тренда, сезонной и стохастической компонент) вычисление s_k^o (а точнее $s_k^o + \xi_k$) осуществляется вычитанием значений ряда тренда из исходного ряда (**детрендированием - detrending**), т.е. $Y_k - T_k^o$;

б) для мультипликативной модели (произведение тренда, сезонной и стохастической компонент) s_k^o (а точнее $s_k^o \cdot \xi_k$) определяется как ряд частных от деления значений исходного ряда на полученные значения уровней сглаженного ряда, т.е. $\frac{Y_k}{T_k^o}$.

На этом этапе можно сделать выбор в пользу аддитивной или мультипликативной модели, исследуя полученный ряд, содержащий сезонную и стохастическую компоненты.

3. Получение таблицы значений сезонной компоненты $\overline{s_k}$ методом усреднения уровней ряда значений сезонных отклонений для одноименных периодов.

4. Корректировка полученных на 3-м этапе первоначальных значений усредненных сезонных отклонений в соответствии с предположением о нейтральности суммарного воздействия сезонности за период:

а) для аддитивной модели сумма значений сезонной составляющей за период сезонности должна быть равна нулю;

б) для мультипликативной модели сумма значений индексов сезонности, выраженных в долях, должна быть равна значению периода, выраженного в количестве наблюдений (например, $T=12$ для периода, равного году при ежемесячных наблюдениях).

В отдельных разновидностях метода классической сезонной декомпозиции на первом этапе проводится только сглаживание, а тренд и остаточная компонента определяются на последующих шагах для ряда, полученного

- вычитанием (при аддитивной модели сезонности) из исходного временного ряда значений скорректированной сезонной компоненты;

- делением (при мультипликативной модели сезонности) значений исходного временного ряда на величину скорректированных сезонных индексов.

Отметим, что **минимально необходимой** для построения модели считается выборка на длительности **в четыре периода** сезонной колебательной компоненты для усреднения сезонных отклонений. Также требуется стационарность вида и параметров модели сезонности на всей выборке. Чаще рекомендуются выборки **на десяти периодах сезонной компоненты**. Для применения метода сезонной декомпозиции обязательно **требуется точное знание периода сезонности**, которое далеко не всегда известно.

В результате получается **осредненная по всей выборке (стационарная) сезонная колебательная компонента**. При этом не предполагается получение аналитического выражения для данной компоненты, которая задается в итоге таблицей значений, которую и предлагают применять для **прогноза**.

Показанный метод декомпозиции ряда динамики может быть **многомасштабным**: применяемой не только к сезонным колебаниям, но и к кратным относительно них (полугодовых, квартальных, трёх- и двухмесячных) колебаний. Последовательно исключая из исходного ряда колебания с меньшим пе-

риодом, можно получить более гладкий ряд – оценку тренда. Многомасштабный метод декомпозиции преследует две цели: выделение тренда и получение дополнительной информации о динамике показателя на более мелких временных масштабах. К недостаткам метода многомасштабной декомпозиции следует отнести необходимость знания основной гармоник и указанной кратности частот.

Существенно больший интерес, особенно для моделирования и прогнозирования динамики инновационной экономики, представляет возможность моделирования **эволюционирующих рядов**.

Если, как это обычно делается, сезонная компонента моделируется гармониками, то у **гармоник зачастую могут варьироваться (эволюционировать) значения амплитуд, реже частот**.

Метод «классической» декомпозиции практически **неприменим к тренд-циклическим рядам**, модели которых существенно сложнее и отличны от моделей тренд-сезонных рядов. Скорость **эволюции** циклических колебаний обычно больше, могут эволюционировать и фазы модулирующих гармоник, период гармоник обычно неизвестен, колебания могут быть аперiodическими, могут включать запаздывающий аргумент.

Ещё одна трудность параметризации и декомпозиции тренд-циклических рядов связана с характером тренда в динамике инновационной экономики. Отсутствие сколько-нибудь значимого тренда в тренд-циклических рядах характерно для устоявшихся производств, не испытывающих революционных изменений в технологиях и выходящих на стабильный консервативный рынок. При инновациях естественно ожидать изменения моделей и параметров тренда даже на малых выборках.

В инновационной экономике на длительных интервалах наблюдения тренд показателей, зависящих от нововведений, может существенно отличаться от линейного тренда, носить нели-

нейный, как правило, **логистический характер**, что и будет учтено ниже.

Известна и более тонкая точная декомпозиция ряда динамики, которая учитывает дополнительно и аддитивную или мультипликативную **календарную компоненту** K_k [42]:

$$Y_k = T_k + C_k + S_k + K_k + \varepsilon_k \text{ или } Y_k = T_k \cdot C_k \cdot S_k \cdot K_k \cdot \varepsilon_k.$$

Необходимость учёта календарности при анализе рядов динамики необходима для обеспечения сопоставимости исходных данных.

Рассмотрим более подробно календарную компоненту, которая порождается, **во-первых**, имеющимися в реальной практике различиями в продолжительности одноименных периодов времени (интервалах дискретизации – годах, кварталах, месяцах), в течение (или на рубежах) которых производятся статистические наблюдения. В связи с этим можно говорить о годовых, квартальных и месячных календарных эффектах, обусловленных общепринятой хронометрической практикой.

Во-вторых, каждому календарному периоду можно поставить в соответствие некоторый «рабочий» период функционирования СЭС, динамику которой отражает ряд. Длительность такого «рабочего» периода зависит от числа официально установленных нерабочих дней, а также от объективно сложившегося соотношения между дискретной (осуществляемой только в рабочие дни периода) и непрерывной (осуществляемой в течение всех дней периода) составляющими интервала наблюдения СЭС. В результате равным календарным периодам могут соответствовать «рабочие» периоды различной продолжительности.

Негативным следствием хронометрических, трудовых и производственных календарных эффектов при моделировании рядов экономической динамики является неполная сопоставимость того или иного показателя в различные одноименные периоды времени. В связи с этим возникают задачи оценки вклада

календарных факторов в искажение «реальной» динамики показателей и последующей коррекции (преобразования) ряда динамики к свободному от всех календарных эффектов виду. Календарная коррекция должна проводиться перед моделированием остальных компонент ряда, вызывает некоторое перераспределение уровней ряда динамики.

Если уровни анализируемого ряда динамики даны в стоимостном выражении, то может оказаться целесообразной оценка и коррекция вклада инфляционных факторов (**инфляционной компоненты** I_k) в номинальную динамику показателей, например, так:

$$Y_k = T_k + C_k + S_k + K_k + I_k + \varepsilon_k \text{ или } Y_k = T_k \cdot C_k \cdot S_k \cdot K_k \cdot I_k \cdot \varepsilon_k.$$

С методами календарной и инфляционной коррекции можно познакомиться, например, в [42].

В дальнейшем будем рассматривать вопросы моделирования указанных первых трёх детерминированных компонент и стохастической компоненты.

Вопросы декомпозиции ряда динамики трудно формализуемы. Можно, например, руководствоваться системой неравенств

$$|\xi_k| \ll |T_k|, \quad |S_k| < |T_k|, \quad |\xi_k| < |S_k|, \quad |\xi_k| < |C_k|$$

и условием периодичности сезонной компоненты.

Анализируя точность метода «классической» сезонной декомпозиции можно заметить, что погрешности, возникающие на первом этапе в определении тренда в силу многовариантности решения задачи, субъективизма исследователя и т.п., переносятся на этап определения параметров сезонности. Погрешности второго этапа из-за корректировки после усреднения, в свою очередь, влияют на определение остаточной стохастической компоненты. И, наконец, последовательное выполнение всех вычислительных операций ведёт к накоплению погрешностей.

Для сравнения отметим, что в предложенных ниже методах идентификации на основе обобщенных параметрических моде-

лях авторегрессии - скользящего среднего отдельные этапы выделения трендовой и колебательных компонент отсутствуют. При этом обеспечено повышение точности не отдельных этапов, а параметризации компонент и адекватности модели, причём на коротких выборках.

Следует сознавать, что актуальная проблема повышения точности моделирования и прогнозирования одномерных рядов динамики на коротких выборках является **первым и необходимым этапом многомерного анализа рядов динамики СЭС**.

При моделировании взаимосвязи двух или более рядов динамики могут возникнуть несколько проблем, зависящих от точности идентификации одномерных рядов.

1. Искажение показателей тесноты и силы связи:

- если ряды содержат циклические или сезонные компоненты одинаковой периодичности, то это приведёт к завышению истинных показателей связи изучаемых рядов динамики;

- если только один из рядов содержит сезонные или циклические компоненты или периодичность колебаний различна, то это приведёт к занижению истинных показателей тесноты связи изучаемых рядов.

2. Проблема «ложной корреляции» состоит в следующем:

- если ряды имеют тренды одинаковой направленности, то между уровнями этих рядов всегда будет наблюдаться положительная корреляция, независимо от того, существует ли причинная связь между этими рядами или нет;

- если ряды имеют тренды разной направленности, то корреляция рядов окажется отрицательной.

Таким образом, **точность анализа взаимосвязи** двух и более рядов динамики **может быть повышена** изучением связи «стохастических остатков», что в свою очередь предполагает высокую точность идентификации компонент ряда динамики.

2.2. Моделирование трендов в рядах динамики

Факторами, порождающими тренд показателей СЭС, могут быть, например, изменение состава населения, инфляция, технологические изменения, изменение структуры потребления, рост производства, рост цен и т.д.

Взятые в отдельности, эти факторы могут оказывать разнонаправленные и различные по динамике воздействия на анализируемый экономический показатель, но в совокупности они формируют некоторую более «гладкую» зависимость, чем исходные данные - тренд.

По статистической выборке можно, в принципе, построить **множество трендов**, в зависимости от применения тех или иных процедур сглаживания (скользящего среднего, аппроксимации полиномиальными сплайнами, экспоненциальным средним, сглаживанием скользящими полиномами и др).

Следует при этом отдавать себе отчёт в том, что любое сглаживание порождает новые корреляционные связи между значениями ряда динамики, которые отсутствовали в исходных данных. Это - известный эффект Слуцкого-Юла [29, 59]. Например, экспоненциальное сглаживание, как и взвешенная регрессия, определяются с помощью параметра, который порождает произвол в выборе степени сглаживания. Кроме того, экспоненциальное сглаживание сдвигает «переломы» тренда (точки смены знака у производной или первых разностей) вправо, что приводит к запаздыванию при определении момента смены тенденций.

В рядах динамики можно наблюдать тренды четырёх видов: наиболее часто - **тренд среднего уровня**; более тонким инструментом анализа является **тренд дисперсий**; существенно реже анализируется **тренд автокорреляций** и лишь в специальных приложениях - **тренд минимальных значений траектории**.

Как правило, предметом исследования является тренд среднего уровня, наглядно представляемый графиком значений ряда динамики, а аналитически выражается в виде функции, вокруг которой варьируются фактические значения изучаемого показателя - наблюдения.

Тренд дисперсии – это изменения отклонений эмпирических значений динамического ряда от значений, вычисленных по уравнению тренда.

Тренд автокорреляций – тенденция изменения связи между отдельными уровнями ряда динамики.

На практике используются до сотни различных аналитических выражений для моделирования трендов, выбор среди которых зачастую неоднозначен, не формализован, а определяется в значительной мере имеющимся (и понимаемым исследователем) инструментарием, сложившимися традициями, вкусом, привычкой или опытом исследователя, соотношением параметров тренда, шага дискретизации и объема выборки.

Осуществим классификацию моделей трендов по используемым в них функциям.

1. Алгебраические полиномы:

$$T_k = \sum_{i=0}^m A_i (k\Delta)^i, \quad (2.1)$$

где $A_i \in R$, m – порядок полинома. Популярны модели в виде полинома первого, второго и третьего порядков - T_{1k}, T_{2k}, T_{3k} соответственно.

2. Гиперболические полиномы:

$$T_k = \sum_{i=0}^m \frac{1}{A_i (k\Delta)^i}, \quad (2.2)$$

при этом на практике применяют следующие частные модели:

$$T_{4k} = \frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_1 (k\Delta)} - \text{равносторонняя гипербола};$$

$$T_{5k} = \frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_1 (k\Delta)} + \frac{1}{A_2 (k\Delta)^2} - \text{квадратичная гипербола}.$$

3. Дробно-рациональные функции:

$$T_{6k} = A_1(k\Delta) + A_0 + A_3 / (k\Delta); \quad (2.3)$$

$$T_{7k} = \frac{1}{A_2(k\Delta)^2 + A_1(k\Delta) + A_0}; \quad (2.4)$$

$$T_{8k} = \frac{A_0}{A_1 + (k\Delta)} + A_2; \quad (2.5)$$

$$T_{9k} = \frac{A_2(k\Delta)^2 + A_1(k\Delta)}{(k\Delta)^2 + A_0}.$$

Ошиб

ка! Закладка не определена.(2.6)

Если в «пространственной» динамике T_{8k} моделирует спрос на определенный вид товаров или услуг, а переменная $k\Delta$ в выражении (2.5) - уровень доходов потребителей, то эту модель называют функцией Торнквиста на товары относительной роскоши (товары второй необходимости), например, дорогие продукты питания.

Если в (2.6) T_{9k} - спрос на определенный вид товаров или услуг, а $k\Delta$ - уровень доходов потребителей, то данная модель называется функцией Торнквиста на малоценные товары.

Выражение

$$T_{10k} = \frac{A_0(k\Delta)}{(k\Delta) + A_1} \quad (2.7)$$

называют функцией Торнквиста на товары первой необходимости (например, на основные продукты питания).

Модель

$$T_{11k} = \frac{A_0(k\Delta)^2 + A_1(k\Delta)}{(k\Delta) + A_2}$$

Ошиб

ка! Закладка не определена.(2.8)

известна и как функция Торнквиста на предметы роскоши при указанном выше экономическом содержании T_{11k} и $k\Delta$.

Следует иметь в виду, что рассмотренные функции Торнквиста являются упрощенными моделями спроса. Так, модель для товаров первой необходимости не учитывает, что с ростом дохода потребителя его спрос на дешевые продукты после возрастания обычно снова падает, возможно, скачком до нуля. Известен и спрос Гиффона на продукты питания, когда рост цены на относительно дешевый и более эффективный (по количеству пищевых единиц на единицу цены) продукт ведет к замещению им в потребительском наборе более предпочтительного, но менее эффективного продукта (например, мяса – картофелем).

Выражения (2.5), (2.6), (2.7) и (2.8) применяются также и для описания временных трендов, когда переменная $k\Delta$ имеет смысл физического времени.

4. Модели с использованием одной логарифмической функции (их часто называют **полулогарифмическими**):

$$T_{12k} = A_0 + A_1 \text{Log}(k\Delta), \quad (2.9)$$

$$\text{Log}T_{13k} = A_0 + A_1(k\Delta), \quad (2.10)$$

где $\text{Log}(\)$ – логарифмическая функция по основанию $a (a > 0, a \neq 1)$.

Наиболее часто в качестве основания принимают «10» или $e = 2,718\dots$ - основание натуральных логарифмов.

Моделью (2.9) описывают, например, процесс затухания спроса в функции доходов по мере перехода к группам населения с низким доходом.

Применяется также моделирование трендов функциями

$$T_{14k} = A_0 + A_1 / \text{Log}(k\Delta), \quad (2.11)$$

$$T_{15k} = A_0 + A_1 \text{Log}(k\Delta) + A_2 \text{Log}^2(k\Delta). \quad (2.12)$$

5. Термин **квазиполиномы** [18] может быть употреблен для обобщения большого количества моделей трендов:

$$T_k = \sum_{i=1}^m A_i(k\Delta) B_i \exp(\alpha_i k\Delta) \cos(\omega_i k\Delta + \phi_i), \quad (2.13)$$

где ω_i – частоты, ϕ_i – фазы гармонических компонент, обычно $m \leq 4$.

Примерами могут быть:

$T_{16k} = A_1 \exp(\alpha k\Delta) + A_0$ – обобщенная экспоненциальная функция;

$T_{17k} = A a^{Bk\Delta} = A \exp(Bk\Delta \cdot Lna) = A \exp(k\Delta C_1)$ – показательная функция, где $C_1 = B \cdot Lna$;

$$T_{18k} = A(1+B)^{k\Delta} = A \exp(k\Delta C_2), \text{ где } C_2 = Ln(1+B);$$

$$T_{19k} = A \exp(\alpha k\Delta) \cdot \cos(\omega k\Delta + \phi);$$

$$T_{20k} = A_1 \cos \omega_1 k\Delta + A_2 \sin \omega_2 k\Delta;$$

$$T_{21k} = A_0 + A_1 \cos \omega_1 k\Delta + A_2 \sin \omega_2 k\Delta;$$

$$T_{22k} = A_0(k\Delta) + A_1 \cos \omega_1 k\Delta + A_2 \sin \omega_2 k\Delta;$$

$$T_{23k} = A_1 \exp(\alpha k\Delta) + \sum_{i=1}^m B_i \exp(a_i k\Delta) \cos(\omega_i k\Delta + \phi_i);$$

$$T_{24k} = A_1 \exp(a_1 k\Delta) + A_2 \exp(a_2 k\Delta) \cos(\omega k\Delta + \phi);$$

$$T_{25k} = (A_1(k\Delta) + A_0) \cos(\omega k\Delta + \phi);$$

$$T_{26k} = (A_1(k\Delta) + A_0) + B \cos(\omega k\Delta + \phi);$$

$$T_{27k} = \sum_{i=1}^m (A_i(k\Delta) + B_i) \cdot \exp(a_i k\Delta);$$

$$T_{28k} = A \exp(\alpha k\Delta).$$

6. В качестве экономических моделей, особенно в инновационной экономике, широко употребляют **логистические модели (логисты, S-образные модели, модели роста, модели жизненного цикла – duration model)**, для которых характерно изменение знаков вторых производных от траектории [14, 15, 17, 43, 44].

Приведём тринадцать известных аналитических выражений. Наиболее популярной является **модель Верхулста (Перла-Рида)**:

$$T_{29k} = \frac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)}. \quad (2.14)$$

Иногда используется и модель Верхулста T_{30k} с другим основанием показательной функции, её применяют и для квадрата значений показателя, т.е. для $(T_{31k})^2$.

Известна и **обобщенная логистическая модель [44, 48]**:

$$T_{32k} = \frac{1}{A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \exp(-\alpha_i k \Delta)}, \text{ где обычно } m \leq 3. \quad (2.15)$$

Логистический характер динамики имеют и тренды, описываемые выражениями

$$T_{33k} = A \exp(-\alpha_1 / (a_2 - (k\Delta))) - \text{модель Джонсона}; \quad (2.16)$$

$$T_{34k} = A \exp\{-B \exp(-\alpha \cdot (k\Delta))\}; \quad (2.17)$$

$$T_{35k} = A \cdot B^{C(k\Delta)} - \text{модель Гомперца}; \quad (2.18)$$

$$T_{36k} = A_1 \exp\{-A_2 (1 - \exp(-a_1(k\Delta))) / a_1\}; \quad (2.19)$$

$$T_{37k} = \frac{1}{C_0 + C_1 \exp\{-\mu (1 - \exp(-a_1(k\Delta))) / a_1\}} - \text{модель Чантера}; \quad (2.20)$$

$$T_{38k} = C(1 - (1 + \alpha(k\Delta)) \cdot \exp(-\alpha(k\Delta))) - \text{модель Рамсея [89]}; \quad (2.21)$$

$$T_{39k} = \begin{cases} C\{1 - \cos(k\Delta/C), & |k\Delta| \leq \pi C \\ 2C, & |k\Delta| \leq \pi C \end{cases} - \text{модель Андрияса [76]}. \quad (2.22)$$

Из применяемых моделей роста следует упомянуть и степенную функцию, называемую также **аллометрической моделью [32]**:

$$T_{40k} = A(k\Delta)^\beta. \quad (2.23)$$

Известно моделирование логистических тенденций и **кинематической функцией**

$$T_{41k} = A(k\Delta)^\pi \exp(\alpha k\Delta). \quad (2.24)$$

При определенном сочетании параметров можно логистическую динамику передать и следующими двумя моделями

$$T_{42k} = a_3(k\Delta)^3 + a_2(k\Delta)^2 + a_1(k\Delta) + a_0, \text{ где } a_3 < 0;$$

$$T_{43k} = \exp(a_2(k\Delta)^2 + a_1(k\Delta) + a_0), \text{ где } A < 0.$$

Отметим, что модели (2.17) и (2.19) являются модификациями модели (2.18) Гомперца, в чем можно убедиться, прологарифмировав каждое из выражений и сравнив результаты:

$$\text{Ln}T_{34k} = \text{Ln}A - B \exp(-Ck\Delta) \text{ для (2.17);}$$

$$\text{Ln}T_{35k} = \text{Ln}A + (\text{Ln}B) \exp(\text{Ln}C^{k\Delta}) \text{ для (2.18);}$$

$$\text{Ln}T_{36k} = (\text{Ln}A_1 - A_2 / \alpha_1) + (A_2 / \alpha_1) \exp(-\alpha_1 k\Delta) \text{ для (2.19).}$$

Вместе с приведенными функциями $T_{1k} \div T_{43k}$ известно применение для моделирования и прогнозирования экономической динамики и полиномиальных сплайнов (например, квадратичных и кубических) [18, 32, 41].

В экономической литературе принципиально **отмечается целесообразность усложнения** рассмотренных трендовых моделей для передачи эволюционного (инновационного) характера процессов и явлений.

Так, например, допускается, что коэффициент при независимой переменной в моделях тренда может изменяться устойчиво с ходом времени.

Другим примером является включение времени в качестве дополнительной определяющей переменной в моделях пространственной и временной динамики, что позволяет определить регрессию на неучтенные в явном виде факторы, связав её со временем.

Перейдем к рассмотрению известных методов моделирования и прогнозирования трендовых компонент ряда динамики и оценке их точности.

На практике наиболее распространенными методами моделирования тренда являются **укрупнение интервалов, сглаживание скользящей средней и аналитическое выравнивание (параметризация)** [40, 50, 81, 83].

Метод укрупнения интервалов прост, но не обеспечивает высокой точности и заключается, как известно, в преобразовании первоначального ряда динамики в ряды более продолжительных периодов (месячные – в квартальные, квартальные – в годовые и т.д.). В ряде случаев после укрупнения интервалов тенденция роста становится очевидной.

Основная идея различных приемов сглаживания сводится к замене фактических уровней динамического ряда расчётными уровнями, которые подвержены колебаниям в меньшей степени. Это способствует более четкому проявлению тенденции развития (или деградации). Иногда сглаживание применяют как предварительный этап перед использованием других методов выделения тенденции. Широко используют для сглаживания **метод взвешенной скользящей средней** и его разновидность – **метод экспоненциального сглаживания с применением теоремы Брауна и других приёмов** [37, 74, 90, 91, 92].

Метод взвешенной скользящей средней является непараметрическим, т.е. не позволяет получить аналитического выражения для модели тренда и реализовать тем самым эконометрический подход в исследованиях. Кроме того, он искажает вид тенденции при малом числе наблюдений, имеет трудность в обосновании выбора интервала сглаживания, ведет к потере нескольких сглаженных уровней ряда.

Метод экспоненциального сглаживания позволяет обеспечивать большую точность, в том числе для рядов динамики с сезонными компонентами, особенно его адаптирующиеся модификации.

Однако, исходя из задачи моделирования динамики инновационной экономики, следует считать названные методы неудов-

летворительными, прежде всего из-за большого объема требуемой выборки: от 30 до 360 наблюдений. Кроме того, они предполагают привлечение для своей реализации высококвалифицированных специалистов, принятие некоторых неформализованных решений: по значению параметра сглаживания, по выбору значения начальной точки сглаживания и т.п. Аналогичные выводы можно сделать по отношению к методу гармонических весов, прогнозной модели Хольта-Уинтера.

В качестве недостатков известных аналитических методов выравнивания могут быть названы следующие:

- **объёмы используемых выборок, как правило, велики**, что, с одной стороны, увеличивает количество вычислений, а с другой, и это важнее, требует стационарности модели на большом интервале наблюдения, что обусловит методическую погрешность параметризации трендов инновационной экономики;

- перед реализацией того или иного метода сглаживания, неизбежно применяемого для компенсации стохастической компоненты, над наблюдениями производятся **преобразования для сведения модели к линейной по параметрам** и последующего применения МНК. Недостатки некоторых линеаризирующих преобразований уже отмечены выше и показаны на примерах. Добавим, что наличие сезонной (циклической) компоненты делает невозможными указанные преобразования, а оценка тренда методом «классической» декомпозиции не обеспечивает высокой точности параметризации при ограничениях на объём выборки, при эволюции колебательной компоненты;

- **отсутствует общий подход** к решению задачи моделирования и прогнозирования для широкого класса моделей, известны лишь отдельные эвристические решения;

- **применяемые на практике модели, как правило, просты**, но не в силу их адекватности реальной экономической практике, а скорее из-за трудности определения класса и параметров более сложных (тонких) моделей, невозможности учёта

временного тренда параметров и экзогенных воздействий, что сужает область эконометрического моделирования и прогнозирования. Практически отсутствуют исследования по характеру поведения, возможностям применения сложных моделей (экспоненциальных и гиперболических полиномов, логистических моделей и др.).

При аналитическом моделировании не обращают порой внимание на то обстоятельство, что модель, с высокой адекватностью экспериментальным данным, **не всегда обладает высокими прогностическими свойствами.**

2.3. Модели и моделирование колебательных компонент

В рядах экономической динамики с колебательной компонентой объектом моделирования является обычно тренд, а колебательную компоненту рассматривают лишь для её элиминирования (десезонализации) из исходного динамического ряда. Однако зачастую и колебательная компонента представляет самостоятельный интерес, является равноправным информативным признаком [19, 64, 65, 67, 69, 70, 72, 80, 86].

Покажем, что колебательный характер социально-экономических процессов и явлений присущ практически всем СЭС. Среди основных факторов, порождающих колебательные компоненты, следует назвать краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные изменения конъюнктуры финансовых, сырьевых и товарных рынков. К ним относятся также объективные условия функционирования ряда базовых отраслей, в частности, сельского хозяйства, строительства, промышленности стройматериалов и электроэнергетики, которые через механизм межотраслевых связей распространяют сезонные волны по всем сферам и секторам экономики.

Циклическая компонента проявляется на протяжении длительного времени в результате действия факторов, обладающих либо большим последствием, либо циклически (либо аperiодически) изменяющихся во времени. Она характеризует повторяющиеся и волнообразные изменения экономических процессов и явлений длительностью от года до 60-65 лет.

Количество факторов, определяющих циклический характер эволюции СЭС весьма велико, их влияние на динамику показателей зачастую носит косвенный опосредованный характер, а дополнительная статистическая информация, позволяющая достоверно оценить направление и интенсивность такого влияния, обычно отсутствует.

Выделяют **несколько видов циклов**: двадцатилетние циклы, обусловленные сдвигами в воспроизводственной структуре сферы производства; циклы Джанглера (7 ÷ 10 лет), проявляющиеся как итог взаимодействия денежно-кредитных факторов; циклы Катчина (3 ÷ 5 лет), обусловленные динамикой оборачиваемости запасов; частные хозяйственные циклы (от 1 года до 12 лет), вызываемые колебаниями инвестиционной активности; демографические «ямы»; периоды экономического подъёма или спада; циклы Кондратьева (от 30 до 65 лет); строительные циклы С.Кузнецца с периодом 15-25 лет и некоторые другие.

Известны и траектории экономической эволюции, имеющие колебания показателя вокруг повышающегося тренда [44]; многоступенчатые (с логистической тенденцией) кривые, характеризующие динамику замены технологий в различных областях техники [62, 75]; колебательный процесс, известный как «мультипликатор-акселератор» [32, 75], моделирующий длительные циклы с нарастающей амплитудой.

В экономических исследованиях широко используют и так называемые циклические «**экономические барометры**», основанные на следующей идее: в динамике различных элементов экономики существуют такие показатели (например, фондового

рынка), которые в своих циклических изменениях идут впереди других (например, товарного рынка), а потому могут служить предвестниками последних.

В этом смысле типичен рынок недвижимости [61], в котором показатели, характеризующие строительный цикл, принято делить на три вида: **лидирующие, совпадающие и отстающие**. При этом такой показатель, как индекс цен на сырье (например, цемент), является лидирующим, занятость и валовой национальный продукт – совпадающими, а инвестиции в нежилой сектор – отстающими.

Во временных рядах могут иметь место более или менее регулярные циклические составляющие, связанные с фазой **бизнес-цикла**. Например, необходимость в освоении новых месторождений нефти, газа и т.п. сопряжена с увеличением капитальных и текущих затрат, однако совершенствование технологии и техники добычи способствует последующему снижению удельных затрат.

Значительное количество экономических исследований посвящено изучению циклов по инициативе политиков, которые пытаются также проанализировать и затем использовать такую динамику, воздействуя на экономику, организуя так называемый **политико-деловой цикл**, период которого составляет 4 или 5 лет в соответствии с электоральным циклом конкретной страны [49].

Оценка устойчивости, колеблемости, цикличности является инструментарием для изучения конъюнктуры потребительского рынка [58, 90], для организации государственного статистического наблюдения за внутренней торговлей и статистического наблюдения за деятельностью предприятий потребительского рынка.

Различают **циклы в динамике абсолютных значений показателя и циклы в динамике темпов его роста**. Собственные (эндогенные) факторы появления циклов связаны с внутренней

динамикой системы и не зависят от времени года явно, хотя их влияние может совпадать с календарным периодом. Например, известно, что демографический процесс обуславливает колебательные компоненты в других СЭС.

В послеперестроечной российской экономике мал срок осуществления экономических реформ, поэтому **моделирование рыночных циклов на малых объёмах выборки показателей представляет особую актуальность.**

Сезонная компонента характеризует изменения, которые регулярно повторяются и завершаются в пределах года или нескольких месяцев.

Наиболее часто с сезонным фактором связывают погодные условия, соответствующие какому-либо времени года. Погодные условия действительно влияют на объёмы производства в сельском хозяйстве, в отраслях легкой промышленности, обрабатывающих сельскохозяйственную продукцию, в строительстве, в добывающих отраслях. От них зависят объёмы услуг в бытовом обслуживании, объёмы продаж потребительских товаров, перевозок пассажиров на транспорте. Даже продуктивность с/х животных зависит от времени года.

Сезонные колебания, возникшие в производственном секторе, передаются в финансовый сектор, где они изменяются, переплетаясь с действиями социально-экономических и юридических факторов. Например, у хозяйствующих объектов, неравномерно производящих свою продукцию, спрос на деньги в отдельные периоды повышается. Весной потребность в заёмных средствах у сельскохозяйственных предприятий резко возрастает, а осенью увеличивается потребность в дополнительных средствах у перерабатывающих предприятий, стремящихся после уборки урожая обеспечить себя сырьём на перспективу. Кредитные учреждения, учитывая хозяйственные и финансовые условия на местном рынке, должны предвидеть этот изменяющийся спрос и удовлетворять его на каждый конкретный мо-

мент времени. Особенно это относится к отраслевым банкам, ориентированным на кредитование предприятий соответствующей отрасли.

На валютный рынок оказывают влияние экспортно ориентированные отрасли и компании, многие из которых в своей деятельности испытывают влияние сезонных колебаний (автомобильная промышленность, нефтегазодобывающая, металлургическая), что, в свою очередь, отражается на состоянии платежного баланса страны.

В расчётах конкретных сумм налоговых поступлений в бюджеты различных уровней большое значение имеет прогнозирование роста и спада производства, товарооборота, в том числе и за счёт сезонных факторов. Эти данные важны при очередном формировании бюджетов всех уровней, так как в них могут быть более достоверно отражены потребности регионов в федеральных ресурсах в виде субсидий, дотаций и трансфертного финансирования. Особенно это важно для регионов, имеющих сельскохозяйственную или иную сырьевую направленность.

Взносы во многие фонды перечисляются периодически (пенсионные фонды, фонды обязательного медицинского страхования, Государственный фонд занятости и др.), что формирует сезонность в финансовом секторе экономики.

На фондовых рынках также наблюдаются колебательные процессы с ярко выраженными циклами: месячными, квартальными, 21-недельными и 1 недельными [47, 72]. В качестве причин, вызывающих такие циклы, можно назвать периоды и объёмы размещения ценных бумаг, потребность эмитента в денежных средствах, регулирование эмитентом срочной структуры долга.

В розничной торговле колебания можно обнаружить и в течение дней недели (например, перед выходными днями увеличивается продажа отдельных продуктов питания), и в течение

какой-либо недели месяца. Мощным «возбудителем» сезонности и других циклических процессов служат также колебания спроса и потребительских предпочтений населения и хозяйствующих субъектов.

Цикличность рынка связана с **жизненными циклами товаров** - неотъемлемой компонентой рыночного механизма. Данное явление изучается в ходе маркетингового исследования, является также объектом статистического моделирования и прогнозирования. Различные этапы жизненного цикла - выведение товара на рынок, рост, зрелость и упадок - могут быть смоделированы кривой соответствующей конфигурации.

Сезонные эффекты могут быть обусловлены и неравномерной динамикой занятости населения, подверженной влиянию политики ежегодных отпусков работников и привлечения дополнительных кадров для выполнения сезонных работ, а также пиков и спадов временной нетрудоспособности населения.

Средняя заработная плата, доходы и расходы населения, остатки вкладов в банках, динамика численности безработных, индексы потребительских цен и оптовых цен промышленности содержат не только тренды, но и сезонные колебания.

Не во всех случаях сезонность является следствием действия неуправляемых или почти неуправляемых факторов. В настоящее время при исследовании динамики важнейших показателей развития промышленного комплекса России **задача сезонной корректировки** считается одной из наиболее актуальных. Причем она возникает на микро-, макро- и мезоуровнях СЭС. Такая корректировка осуществляется для индекса промышленного производства в целом, для индексов производства в отдельных отраслях и в отраслевых группах промышленности.

Но даже и в случаях, когда прямое воздействие на процессы, вызывающие сезонные колебания, невозможно, то их необходимо учитывать при совершенствовании технологических, ор-

ганизационно-экономических процессов и процессов управления.

Для того чтобы можно было «влиять» на сезонность, необходимо уметь определять её параметры с высокой точностью, уметь моделировать и прогнозировать развитие процессов, подверженных сезонным колебаниям.

Известны **непараметрический** и **параметрический подходы** к моделированию колебательной компоненты.

Непараметрический подход не определяет аналитического выражения для колебательной компоненты. Он предполагает знание её периода (наименьшего отрезка по оси ординат, через который значения ряда повторяются), который априори известен. Достаточно подробно такой подход рассмотрен выше, как метод «классической» сезонной декомпозиции. При этом отмечено, что данный подход может быть реализован только для длинных рядов динамики с устойчивой (стационарной) сезонной колебательной компонентой, принципиально неприменим при инновационном характере экономики для моделирования и прогнозирования «молодых» экономических процессов и явлений, не имеющих ещё в своём развитии указанного необходимого времени наблюдения в 4 - 10 периодов колебательной компоненты.

К простейшему варианту параметрического подхода можно отнести **метод фиктивных переменных** [73], который использует в линейных аддитивных моделях тренд-сезонных рядов динамики значения квартальных сезонных коэффициентов, также **усреднённых** по 4-10 периодам колебаний.

Наиболее часто при параметрическом подходе к моделированию колебательной компоненты используют модель в виде **гармоники**

$$S_k = A_3 \sin(\omega k \Delta + \Psi) = A_4 \sin \omega(k \Delta) + A_5 \cos \omega(k \Delta), \quad (2.25)$$

где A_3 – амплитуда гармоники, $\omega = 2\pi/T$ – её частота, T – период, Ψ – начальная фаза, $A_4 = A_3 \cos \Psi$, $A_5 = A_3 \sin \Psi$.

В модели (2.25) часто период $T = 2\pi/\omega$ априори известен: «привязан» к году, кварталу или месяцу.

В практике эконометрических исследований иногда удаётся сделать ещё одно упрощение: осуществлять первое наблюдение в момент прохождения гармоники, моделирующей колебательную компоненту, через нулевое значение, обеспечив тем самым $\psi = 0$.

В тех случаях, когда колебательная компонента S_k имеет более сложную форму и обладает свойством периодичности, её обычно представляют в виде ряда Фурье [19, 31, 73]:

$$S_k = A_0/2 + \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos r\omega k\Delta + B_r \sin r\omega k\Delta), \quad (2.26)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{n}, A_r = \frac{2 \sum_{k=1}^n Y_k \cos k\Delta}{n}, B_r = \frac{2 \sum_{k=1}^n Y_k \sin k\Delta}{n}, n = T/\Delta, r = 1, 2, 3, \dots,$$

причём значению $r = 1$ соответствует **основная гармоника** с периодом T , а остальным значениям r – **высшие** (сопутствующие) **гармоники** с периодами T/r .

При этом A_0 , A_r и B_r в ряде Фурье параметризуются обычно как линейные коэффициенты множественной регрессии. В практических приложениях зачастую используют ряд Фурье с тремя слагаемыми.

Возможности известных методов параметризации моделей (2.25) и (2.26) для моделирования **эволюционирующей колебательной компоненты** ограничены, так как форма колебаний (амплитуды, периоды и фазы гармоник) на всем интервале наблюдений периодов в этом случае принимается постоянной (неэволюционирующей), а период основной гармоники в ряде Фурье – известным.

Возможным решением задачи моделирования эволюционной колебательной компоненты при использовании тех же моделей является разработка новых методов их параметризации на коротких выборках.

При этом следует требовать стационарность моделей колебательных компонент только на этих выборках, позволяя тем самым отслеживать возможную эволюцию моделей и повышать точность прогнозирования рядов динамики.

Большую точность моделирования вариации амплитуды гармонической колебательной компоненты даёт введение фактора времени в модель (2.25) [43]

$$S_k = A_3(k\Delta)\sin(\omega k\Delta + \psi) \quad (2.27)$$

и его обобщение для ряда Фурье (2.26) [72]:

$$S_k = A_0 / 2 + \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos r\omega k\Delta + B_r \sin r\omega k\Delta)(k\Delta)^r. \quad (2.28)$$

Если рассмотренный выше метод «классической» декомпозиции при мультипликативной сезонной компоненте позволяет моделировать непараметрически вариацию амплитуды компоненты **пропорционально текущим значениям тренда**, то модели (2.27) и (2.28) реализуют моделирование амплитуды колебательной компоненты пропорциональное времени.

Модели (2.27) и (2.28) известны как принципиальные теоретические предложения, а методы их параметризации не представлены в известной научной литературе. Ниже покажем возможность параметризации и этих моделей на коротких выборках.

Трудности моделирования тренд-циклических рядов, как уже отмечалось, обусловлены часто встречающейся непериодичностью циклической компоненты, большим разнообразием и вариацией параметров и видов моделей неслучайных компонент рядов.

Вообще многообразие форм колебательной компоненты заслуживает особого внимания, в частности, и потому, что во многих приложениях отмечается импульсный характер компо-

нент: «пилообразный», «треугольный», «прямоугольный», «куполообразный» [5, 55, 56].

На рис. 7 показана аппроксимация «пилообразной» колеблемости рядом Фурье

$$S_k = \sin \omega t - (1/2)\sin 2\omega t + (1/3)\sin 3\omega t - (1/4)\sin 4\omega t + (1/5)\sin 5\omega t - \dots \quad (2.29)$$

в зависимости от числа используемых членов разложения.

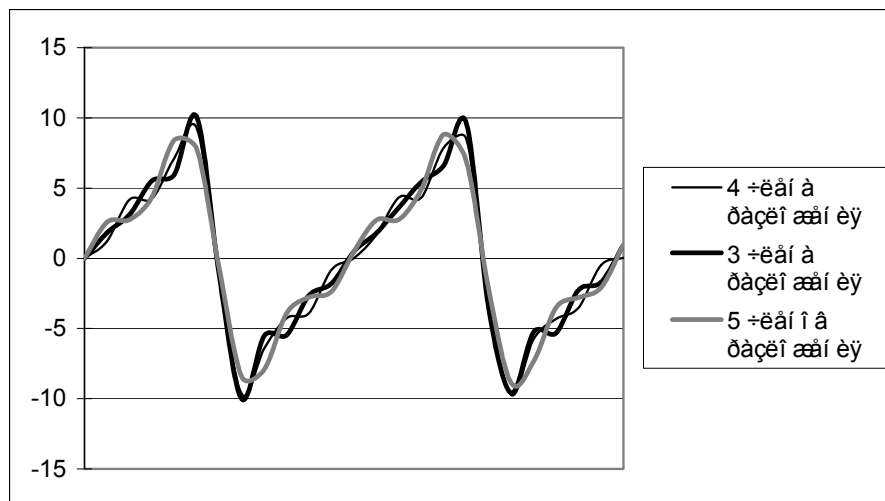


Рис. 7. Точность аппроксимации «пилообразной» колебательной компоненты в зависимости от количества членов разложения в ряде Фурье

Видим, что для удовлетворительной аппроксимации «пилообразных» импульсных колебаний достаточно ограничиться первыми тремя членами разложения.

В модель (2.29) можно ввести начальную фазу ψ в тригонометрические функции или ввести постоянное дополнительное слагаемое, что позволит «передвигать» график пилообразной компоненты по осям координат «влево – вправо» и «вверх – вниз». Смена знаков в (2.29) сделает возможным заменить «участки роста» на «участки убывания» и наоборот.

В таблицах 1, 2, 3, 4, 5, 6 приведены разложения «пилообразных», «треугольных», «прямоугольных» и «куполообразных» импульсных колебательных компонент в ряд Фурье при бесконечном числе слагаемых ряда.

При трёх членах разложений можно, как и для «пилообразных» импульсных колебаний, получить удовлетворительное приближение к идеальным импульсам.

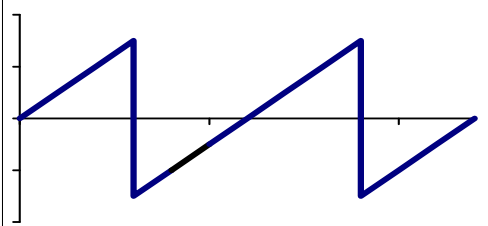
Рассмотрим теперь случаи, в которых коэффициенты перед гармониками ряда Фурье могут отличаться от рассчитываемых по формуле (2.26). Отличие коэффициентов может быть за счёт ошибок параметризации из-за присутствия случайной компоненты в уровнях Y_k , а может быть и сознательным, для передачи других, отличных от идеальных «пилообразных», «треугольных», «прямоугольных» и «куполообразных» импульсов, но приближенных к реальным колеблестям.

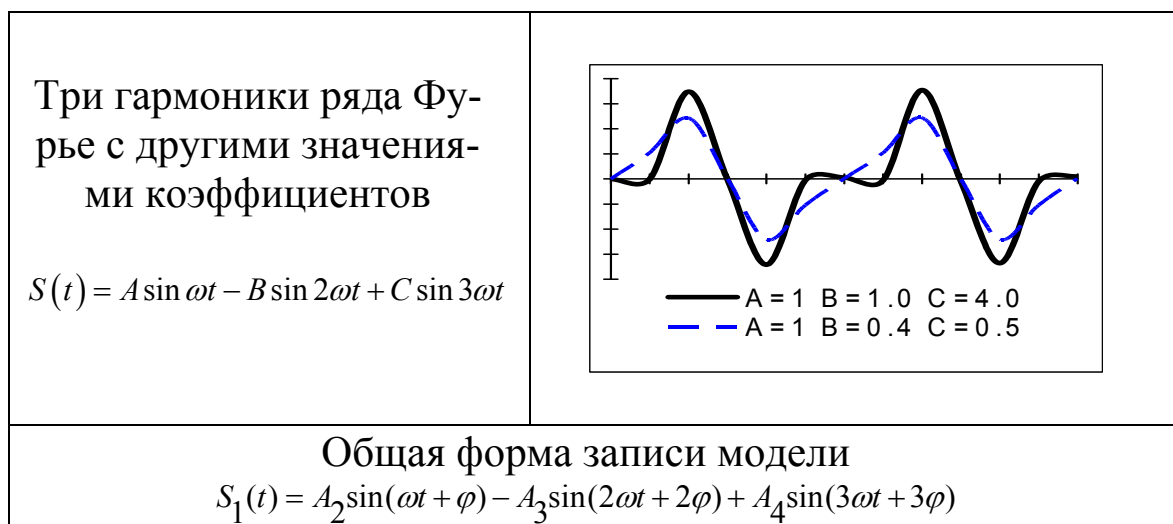
Назначение в табл. 1, 2, 3, 4, 5 и 6 других коэффициентов при трёх гармониках разложения показало многообразие возможных форм колебательных компонент при отклонении значений коэффициентов перед членами разложения от коэффициентов Фурье.

Начнём с рассмотрения часто встречающейся в практике «пилообразной» колебательной компоненты (таблица 1). Если рис. 7 демонстрировал точность аппроксимации, то в верхней половине таблицы 1 показано идеальное представление рядом Фурье с соответствующими коэффициентами и частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ «пилообразной» колебательной компоненты.

Таблица 1

«Пилообразная» колебательная компонента

<p>Идеальное разложение в ряд Фурье</p> $S(t) = \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots$	
--	--



В нижней половине таблицы 1 показано, к каким видам колебательных компонент может привести использование тех же трёх гармоник, но с другими значениями коэффициентов перед ними.

Отчетливо выраженный негармонический «пилообразный» характер имеет, например, колебательная компонента в тиражах печатных СМИ, что связано с периодичностью проведения подписных компаний [55].

К подобного вида колебаниям экономических показателей могут приводить и установленные сроки бухгалтерской отчетности, когда фиксируются изменения значений финансовых показателей, моменты открытия бирж, сдача объектов в эксплуатацию и т.п.

Из исследований американской экономики последних лет следует, что после 2001 года существуют постоянные «пилообразные» колебания потребительского спроса, объемов продаж, запасов и тому подобных показателей.

Крупные розничные торговцы сначала создают товарные запасы на несколько месяцев вперед (страхуясь от возможного роста цен), а потом постепенно реализуют их потребителям, не делая при этом никаких новых заказов и доводя, таким образом, склады и магазинные прилавки до полного «оголения», которое

происходит не случайно, а чтобы застраховаться уже от возможного падения покупательского спроса.

Убедившись, что падения спроса не происходит, розничные сети делают крупные заказы производителям и склады с прилавками снова наполняются товаром.

Из-за подобной неравномерности при размещении заказов динамика основных показателей, описывающих экономику США, имеет пилообразный характер – вслед за ростом заказов происходит рост производства, занятости, доходов и спроса. Ну, а после того, как заказы выполнены, наоборот, производство, занятость и доходы снижаются. То есть показатели низких объемов спроса за первый квартал ровным счетом ничего не значат, пока они не продублированы информацией о высоких товарных запасах. Хуже, если на низкий спрос наложатся высокие запасы, а если низкий спрос имеет место одновременно с низкими товарными запасами, можно ждать роста заказов, увеличения выпуска товаров и появления новых доходов, но уже только во втором квартале. Во всех этих случаях в качестве модели может быть использована периодическая колебательная компонента пилообразной формы.

Близкие по форме к «пилообразным» имеют и инвестиции в основной капитал по России за последние годы: рис. 8 (по данным сайта <http://stat.hse.ru>).



Рис. 8. Инвестиции в основной капитал

В данных рядах динамики отчётливо просматривается и трендовая компонента: на локальных участках она визуально близка к линейной, но на всем интервале наблюдения – просматривается явно нелинейная модель. При этом лишь проведение идентификации позволит классифицировать её как параболическую, или как экспоненциальную, или как логистическую, или как ещё какую-либо. Корректное принятие решения предполагает сравнение мер адекватности тех или иных моделей – путем сравнения соответствующих статистических гипотез.

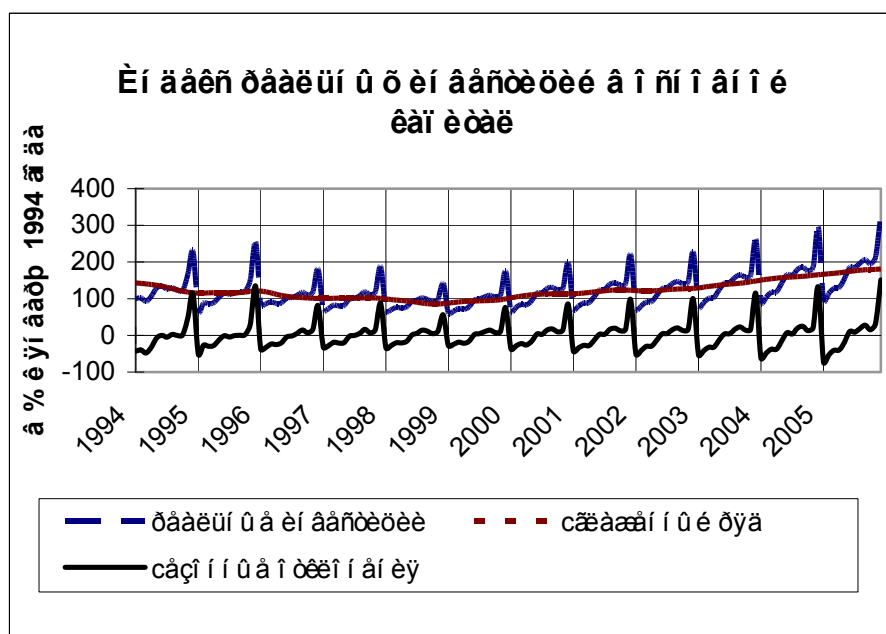


Рис. 9. Индекс реальных инвестиций в основной капитал

На рис. 9 видим близкую динамику колебательной компоненты индекса реальных инвестиций в основной капитал по России, построенный по данным сайта <http://stat.hse.ru>.

Декомпозиция ряда на тренд и сезонную компоненту представлена на том же сайте.

Отметим совершенно другой характер тренда при переходе от абсолютных значений показателя к индексам.

«Треугольная» колебательная компонента тоже достаточно часто встречается на практике и её характеристики представлены в таблице 2.

«Прямоугольная» колебательная компонента, характеристики которой приведены в таблице 3, также довольно часто используется для описания динамики социально-экономических процессов и явлений.

Например, она применяется как некоторая идеальная характеристика резкого перехода продажи путевок (дохода от этой продажи) в сфере туризма от периода «низкого» сезона к периоду «высокого» сезона (летний период отпусков) с относительно стабильными показателями внутри каждого из этих сезонов.

Таблица 2

«Треугольная» колебательная компонента

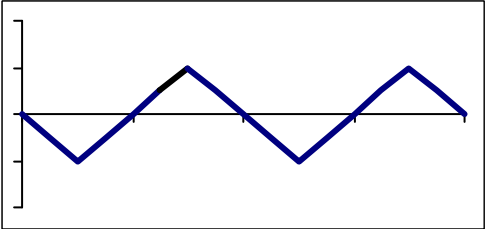
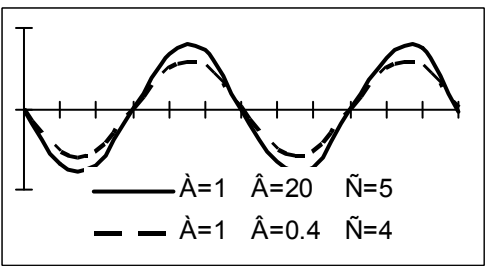
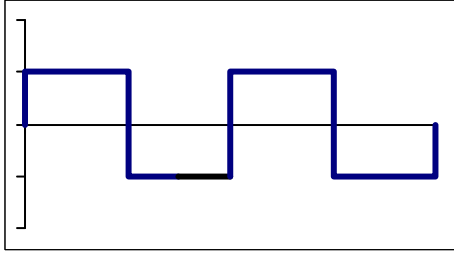
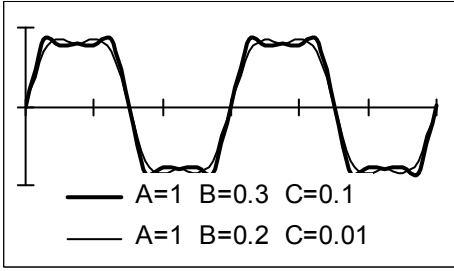
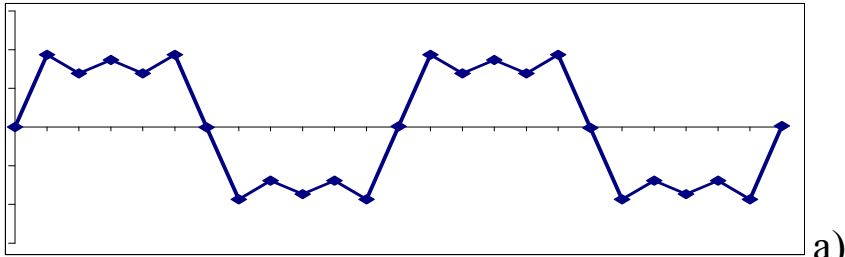
<p>Идеальное разложение в ряд Фурье</p> $S(t) = \sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t$	
<p>Три гармоники ряда Фурье с другими значениями коэффициентов</p> $S(t) = A \sin \omega t - B \sin 3\omega t + C \sin 5\omega t$	 <p>— $\hat{A}=1$ $\hat{A}=20$ $\hat{N}=5$ - - $\hat{A}=1$ $\hat{A}=0.4$ $\hat{N}=4$</p>
<p>Общая форма записи модели</p> $S_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) - A_3 \sin(3\omega t + 3\varphi) + A_4 \sin(5\omega t + 5\varphi)$	

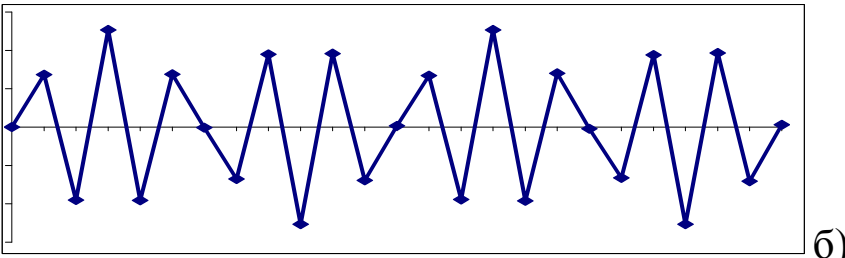
Таблица 3

«Прямоугольная» колебательная компонента

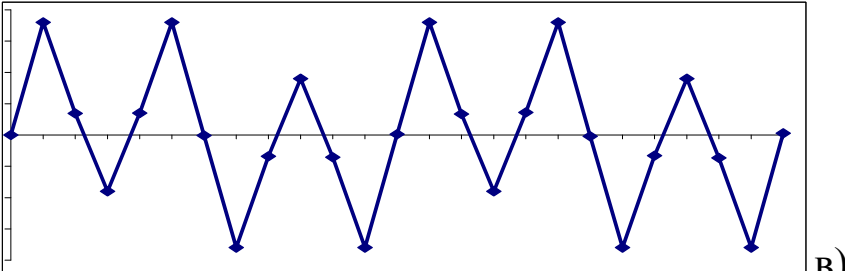
<p>Идеальное разложение в ряд Фурье</p> $S(t) = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots$	
<p>Три гармоники ряда Фурье с другими значениями коэффициентов</p> $S(t) = A \sin \omega t + B \sin 3\omega t + C \sin 5\omega t$	
<p>Общая форма записи модели</p> $S_3(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) + A_3 \sin(3\omega t + 3\varphi) + A_4 \sin(5\omega t + 5\varphi)$	



a)



б)



B)

Рис. 10. Влияние вариации значений коэффициентов ряда Фурье при прямоугольной колебательной компоненте

Для классической «прямоугольной» колебательной компоненты, описываемой рядом Фурье вида $S(t) = A_2 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_4 \sin 5\omega t$ с «идеальными» коэффициентами $A_2 = 1; A_3 = 0,33; A_4 = 0,2$, получим колебательную компоненту вида, представленного на рис. 10, а. При назначении коэффициентов трёх гармоник, существенно отличающихся от значений коэффициентов Фурье, например, при $A_2 = 1; A_3 = 0,33; A_4 = 12$, будем иметь фигуру, показанную на рис. 10, б. При задании значений коэффициентов $A_2 = 1; A_3 = 3; A_4 = 0,2$ получим фигуру, приведенную на рис. 10, в.

Таблица 4

«Куполообразная» колебательная компонента (1 тип)

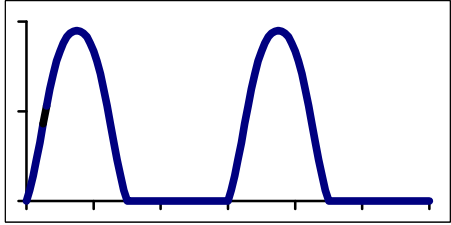
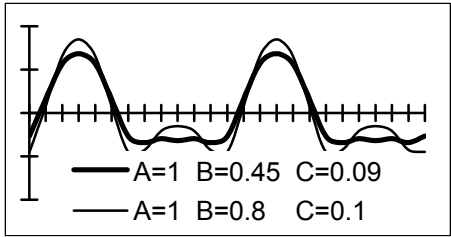
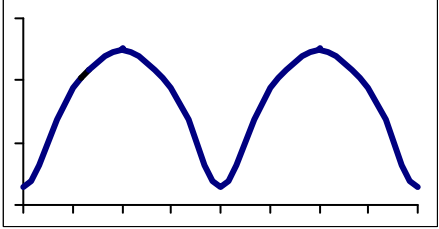
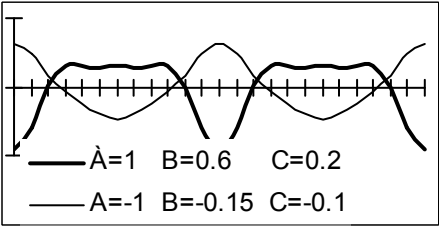
<p>Идеальное разложение в ряд Фурье</p> $S(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \dots \right)$	
<p>Три гармоники ряда Фурье с другими значениями коэффициентов</p> $S(t) = A \sin \omega t - B \cos 2\omega t - C \cos 4\omega t$	
<p>Общая форма записи модели</p> $S_6(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_3 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) - A_4 \sin(\omega_3 t + \varphi_3),$ <p>где $\omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 4\omega_1, \varphi_2 = 2\varphi_1 + \frac{\pi}{2}, \varphi_3 = 4\varphi_1 + \frac{\pi}{2}.$</p>	

Таблица 5

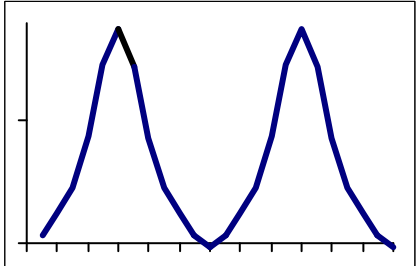
«Куполообразная» колебательная компонента (2 тип)

<p>Идеальное разложение в ряд Фурье</p> $S(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\cos 2\omega t}{1^2} - \frac{\cos 4\omega t}{2^2} - \frac{\cos 6\omega t}{3^2} - \dots$	
<p>Три гармоники ряда Фурье с другими значениями коэффициентов</p> $S(t) = -A \cos 2\omega t - B \cos 4\omega t - C \cos 6\omega t$	 <p>— $A=1$ $B=0.6$ $C=0.2$ — $A=-1$ $B=-0.15$ $C=-0.1$</p>
<p>Общая форма записи</p> $S_5(t) = -A_2 \sin(2\omega t + 2\varphi + \frac{\pi}{2}) - A_3 \sin(4\omega t + 4\varphi + \frac{\pi}{2}) - A_4 \sin(6\omega t + 6\varphi + \frac{\pi}{2})$	

При переходе к общей форме записи использовано известное из тригонометрии соотношение $\cos \omega t = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$.

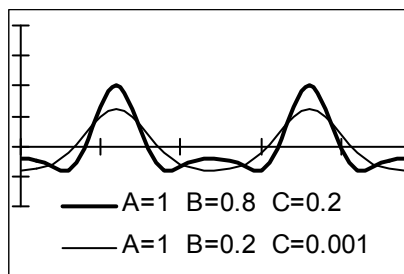
Таблица 6

«Куполообразная» колебательная компонента (3 тип)

<p>Идеальное разложение в ряд Фурье</p> $S(t) = -\frac{\pi^2}{3} + 4(\cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} - \dots)$	
--	--

Три гармоники ряда Фурье
с другими значениями коэф-
фициентов

$$S(t) = A\cos\omega t - B\cos 2\omega t + C\cos 3\omega t$$



Общая форма записи

$$S_4(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) - A_3\sin(2\omega t + 2\varphi + \frac{\pi}{2}) + A_4\sin(3\omega t + 3\varphi + \frac{\pi}{2})$$

В табл. 4, 5 и 6 приведены аналитические выражения и графическая иллюстрация для трёх других типов колебательных компонент, объединенных за счет их внешнего вида условным названием «куполообразные». «Куполообразные» импульсы, как и другие рассмотренные колебательные компоненты, например $S(t) = -A_2\cos\omega t + A_3\cos 2\omega t - A_4\cos 3\omega t$, могут иметь достаточно разнообразные виды.

При коэффициентах $A_2 = 1$; $A_3 = 0,25$; $A_4 = 0,11$ «куполообразный» импульс изображен на рис. 11, а, а при $A_2 = 1$; $A_3 = 0,8$; $A_4 = 50$ - на рис. 11, б.

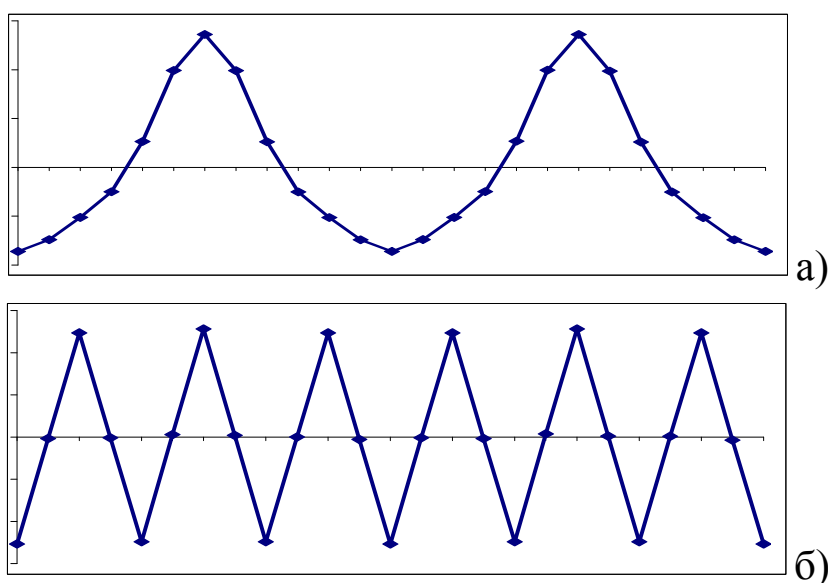


Рис. 11. Вариация значений коэффициентов модели Фурье для «куполообразной сезонности»

Визуально не всегда возможно определить тип колебательной компоненты. Так, например, для представленного на рис. 12 графика потребности в работниках по России (по данным сайта [www.http://stat.hse.ru](http://stat.hse.ru)) корректное отнесение колеблемости к «куполообразному» или «треугольному» типу может быть сделано только после процедуры определения параметров модели, сравнения показателей качества моделирования. Отметим, что колеблемость «маятникового» типа [3] может быть образована сочетаниями коэффициентов в «прямоугольной» или «куполообразной» колебательных компонентах.



Рис. 12. График заявленной потребности в работниках

Общая форма записи для всех указанных в таблицах 1, 2, 3, 4, 5 и 6 видов колебательных компонент $S(t)$ можно представить в виде

$$S(t) = \Phi_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \Phi_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \Phi_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3). \quad (2.30)$$

При представлении колебательной компоненты в виде (2.30) задача параметризации заключается в определении параметров ω_i , Φ_i и φ_i . После параметризации частот можно специфицировать, если это необходимо, колебательную компоненту по группам рассматриваемых моделей, определяя значения коэффициентов, а с учетом определенных значений фаз и амплитуд – и по моделям.

Можно рассматривать и частные случаи экономической практики, когда частоты компонент (хотя бы одной) известны, а в параметризации нуждаются только амплитуды и начальные фазы.

Наиболее простым является случай, при котором и фазы можно сделать известными, а проще всего – нулевыми, задавая соответствующим образом момент взятия первого наблюдения.

Обобщим полученные результаты. Итак, параметрическую модель аддитивного тренд-сезонного ряда будем рассматривать в одном из следующих видов

$$Y_k = T_k + A_3 \sin(\omega k \Delta + \psi) + \varepsilon_k, \quad (2.31)$$

$$Y_k = T_k + A_3(k \Delta) \sin(\omega k \Delta + \psi) + \varepsilon_k, \quad (2.32)$$

$$Y_k = T_k + \Phi_1 \sin(\omega_1 k \Delta + \varphi_1) + \Phi_2 \sin(\omega_2 k \Delta + \varphi_2) + \Phi_3 \sin(\omega_3 k \Delta + \varphi_3) + \varepsilon_k, \quad (2.33)$$

$$Y_k = T_k + k \Delta \{ \Phi_1 \sin(\omega_1 k \Delta + \varphi_1) + \Phi_2 \sin(\omega_2 k \Delta + \varphi_2) + \Phi_3 \sin(\omega_3 k \Delta + \varphi_3) \} + \varepsilon_k. \quad (2.34)$$

Впрочем, в последнем случае множитель $k \Delta$ можно вводить или для одной, или для двух гармоник. Например, только для той из них, амплитуда, и соответственно влияние, которой больше чем у остальных.

Известно использование параметрического представления (2.26) в адаптивных методах моделирования рядов динамики для полиномиальных и экспоненциальных трендов при экспоненциальном сглаживании на выборках до 60-70 наблюдений [37]. Однако такие методы не отвечают требованиям моделирования эволюции параметров и типов моделей неслучайных компонент, обеспечению высоких прогностических свойств моделей. Нет необходимости изучать и имеющиеся десятки представлений различных колебательных компонент в виде ряда Фурье разложения, чтобы не связывать исследователя с априорным знанием вида компоненты, соотношения частот и знания основной частоты.

Будем опираться на более общее утверждение о том, что периодические ряды можно описать совокупностью гармонических колебаний вида $A_i \sin(\omega_i k \Delta + \Psi_i)$, частоты которых соизмеримы, т.е. отношения всех возможных пар частот являются рациональными числами.

Справедливо и обратное утверждение о том, что процессы, образованные суммой двух и более гармонических функций с соизмеримыми частотами, периодичны [4].

Ряд Фурье удовлетворяет этому условию, но он **не является единственным** для описания периодических процессов. В эконометрической практике можно использовать для моделирования и совокупность гармоник, частоты и амплитуды которых отличны от гармоник ряда Фурье: например, назначать частоты, исходя из экономической сущности моделируемого ряда динамики, или определять их, исходя из критериев качества моделирования. По сути, такая модель колебательной компоненты упоминалась выше при описании метода многомасштабной декомпозиции, где кроме основной гармоники с периодом в год рассматривались неклассические гармоники ряда Фурье, а гармоники с кратностью частот 2, 3, 4 и 6 относительно основной. Аналогичный пример приводился применительно к финансовым рядам, где фиксировалось присутствие гармоники с периодом в 21 неделю, некратной кварталам, месяцам или году.

Перейдем теперь к вопросу эконометрического моделирования рядов динамики с мультипликативной колебательной компонентой. Единственным известным методом моделирования таких рядов является непараметрическая «классическая» декомпозиция с присущими ей недостатками, указанными выше. Однако и для ряда динамики с мультипликативной структурой колебательной компоненты, как и для ряда динамики с аддитивной колебательной компонентой, можно предложить [56] параметрическую модель вида

$$Y_k = T_k (1 + D \cdot S_k) + \varepsilon_k. \quad (2.35)$$

где параметр D – глубина амплитудной модуляции уровней тренда T_k , которая обычно не превышает 0,7-0,8 [16]. Тогда для рассмотренных в данном пособии видов колебательных компонент, мультипликативно входящих в структуру ряда динамики, будем иметь модели:

$$Y_k = T_k (1 + A_3 \sin(\omega k \Delta + \psi)) + \varepsilon_k, \quad (2.36)$$

$$Y_k = T_k (1 + A_3(k \Delta) \sin(\omega k \Delta + \psi)) + \varepsilon_k, \quad (2.37)$$

$$Y_k = T_k (1 + \Phi_1 \sin(\omega_1 k \Delta + \varphi_1) + \Phi_2 \sin(\omega_2 k \Delta + \varphi_2) + \Phi_3 \sin(\omega_3 k \Delta + \varphi_3)) + \varepsilon_k, \quad (2.38)$$

$$Y_k = T_k (1 + (k \Delta) \{ \Phi_1 \sin(\omega_1 k \Delta + \varphi_1) + \Phi_2 \sin(\omega_2 k \Delta + \varphi_2) + \Phi_3 \sin(\omega_3 k \Delta + \varphi_3) \}) + \varepsilon_k. \quad (2.39)$$

Важно, что и для параметрических моделей (2.36-2.39), и для параметрических моделей (2.31-2.34) автоматически выполняются все указанные выше свойства непараметрического моделирования тренд-сезонных рядов. Нет необходимости проверять какие-либо условия для значений параметров или индексов на выборке в один период и осуществлять корректировку при их невыполнении.

Но главное в другом: модели (2.31-2.34), как увидим ниже, позволяют осуществлять эконометрическое моделирование на коротких выборках, меньших десяти или даже четырех периодов гармоник.

При этом появляется возможность прогнозирования значений тренда и колебательной компоненты на горизонте прогноза не по «средним» значениям параметров на четырёх–десяти периодах, а привязываться и к данным, усредненным на существенно меньшем интервале наблюдения, более близким к интервалу прогноза и поэтому позволяющим осуществлять прогноз точнее.

Совершенно другим будет в этом случае и влияние аномального выброса в отдельном наблюдении: он не усредняется по 4-10 периодам. Исключать его нельзя, поскольку предполагается «эволюция» формы и параметров колебательной компоненты, поэтому отсутствие или существенное изменение значения одного наблюдения может сказаться на результате моделирования.

3. ИНСТРУМЕНТАРИЙ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ РЯДОВ ДИНАМИКИ

После того, как в предыдущих главах определен предмет моделирования, его специфика, модели компонент и структуры ряда динамики, в данной главе рассматривается выбор возможного инструментария для повышения точности моделирования на коротких выборках.

Приведены сведения по известным авторегрессионным моделям рядов динамики. Отмечены, как положительные свойства, возможность их использования на коротких выборках для параметризации коэффициентов путем решения систем линейных алгебраических уравнений, наличие программной поддержки.

Недостаток, заключающийся в непараметрическом характере их коэффициентов и не позволяющий осуществлять эконометрическое моделирование, предложено устранить при помощи Z -преобразования. Приведены основные свойства Z -преобразования.

Здесь же дано представление об основных известных пакетах статистических и эконометрических программ, которые могут быть использованы при эконометрическом моделировании рядов динамики.

3.1. Применение моделей авторегрессий для моделирования и прогнозирования динамики показателей инновационной экономики

Регрессия (1.3) представляет собой некоторую эквивалентную систему, осуществляющую описание уровней исходного ряда динамики Y_k . Она построена не на основе действующих в ней функциональных связей, а представляет собой некоторый её аналог, который описывает связь исследуемых переменных (в данном случае Y_k и $k\Delta$).

Обычно модели экономической динамики подразделяют на два основных класса [8].

1. Модели с распределенными лагами – модели, содержащие в качестве лаговых (смещенных во времени) лишь объясняющие переменные.

Примером является модель

$$Y_k = \alpha + \beta_0 X_k + \beta_1 X_{k-1} + \dots + \beta_p X_{k-p} + \varepsilon_k, \text{ где } p - \text{порядок лага.}$$

2. Авторегрессионные модели – общее название моделей, уравнения которых в качестве объясняющих переменных включают (**не ограничиваясь только ими**) значения объясняемых переменных, т.е. Y_{k-i} , где $i=1,2,\dots,p$, а p - порядок авторегрессии.

Главная идея авторегрессионных моделей состоит в том, что будущие значения ряда динамики не могут произвольно отклоняться в большую или меньшую сторону от предшествующих значений ряда динамики, какими бы причинами ни были вызваны эти отклонения.

Можно авторегрессионные модели интерпретировать и как подбор из имеющихся значений последовательных наблюдений динамического ряда Y_{k-i} модели-аналога, наиболее адекватно описывающей этот процесс.

Известно несколько типов моделей авторегрессионного класса: модели авторегрессии (AR - auto regressive), модели скользящего среднего (MA - moving average), авторегрессии - скользящего среднего (ARMA – autoregressive moving average), модели авторегрессии - проинтегрированного скользящего среднего (ARIMA - autoregressive integrated moving average), модели авторегрессии с условной гетероскедастичностью (ARCH - autoregressive conditional heteroscedasticity), их расширения - обобщенная авторегрессионная условно гетероскедастическая модель (GARCH – generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model), интегрированная обобщенная авторегрессионная условно гетероскедастическая модель (IGARCH - integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model) [6, 27, 39, 73, 78, 79, 90].

Применение AR-моделей уровней ряда динамики с постоянными коэффициентами было предложено около тридцати лет тому назад в теории и практике управления цифровыми системами, при анализе сигналов на фоне шумов и при решении некоторых экономических задач.

Например, для Y_k в качестве регрессоров можно принять Y_{k-1} , Y_{k-2} , Y_{k-3} и др.:

$$Y_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_{k-i} + \varepsilon_k, \quad (3.1)$$

где Y_{k-i} - наблюдаемые случайные величины, λ_i - коэффициенты авторегрессии, параметризуемые при помощи того или иного сглаживания, ε_k - стохастическая компонента.

Модели авторегрессии предлагались или как соответствующие решения разностных уравнений, описывающих объект управления, или, исходя из условия адекватности порядка и коэффициентов авторегрессии анализируемым данным.

В первом, достаточно редком для практики, случае коэффициенты авторегрессии функционально связывались с парамет-

рами разностного уравнения, что позволяло, после их МНК-оценивания, провести расчёт параметров объекта управления.

Второй случай, более часто встречающийся и более адекватный практике анализа и управления, приводил к непараметрическим моделям авторегрессий, которые позволяли осуществлять прогноз значений временного ряда, фиксировать его «разладку», не отвечая на вопрос о том, что было её причиной – **смена параметров модели или смена её вида**. При этом никоим образом не определялась связь между порядком авторегрессии, оценками коэффициентов AR-модели и видами, параметрами моделей ряда, т.е. не осуществлялась структурная идентификация, не проверялась, не корректировалась модель процесса или явления, предлагаемая экономической теорией (**моделирование не носило эконометрического характера**).

Структура анализируемых рядов динамики предполагалась, как правило, двухкомпонентной: тренд достаточно простой модели (редко с сезонной или циклической компонентой) и аддитивная широкополосная стохастическая компонента.

AR-модели, в общем-то, и не предназначались для описания нестационарных процессов с тенденцией. Их обычно применяли для идентификации корреляционных или спектральных характеристик стохастической компоненты. Они адекватны не очень резким колебаниям и, как показала практика, в этом случае дают довольно хорошие результаты для прогнозов (краткосрочного и среднесрочного).

Аналитические расчёты дисперсии коэффициентов AR-моделей и ошибки прогноза оказываются относительно простыми лишь для авторегрессий первого и второго порядков [1].

Иногда AR-моделью описывали не сам ряд Y_k , а некоторые его функции, например, логарифмическую функцию уровней ряда $\ln Y_k$. Так, для рядов динамики, содержащих экспоненциальные тренды и сезонную компоненту, известны модели авто-

регрессии Тейла-Вейджа, в которых перед построением модели члены анализируемого ряда динамики заменяли их логарифмами. Коэффициенты авторегрессии λ_i при этом не соотносили с параметрами моделей компонент ряда динамики, их подбирали с помощью компьютера, вычисляя и сравнивая среднеквадратические ошибки полученных прогнозов для каждого набора параметров.

Малая точность авторегрессий Тейла-Вейджа и невозможность их применения к многокомпонентным моделям тренда экономических параметров, в силу приведенных выше доводов, очевидны.

Известны и модели вида

$$Y_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_{k-i} + \sum_{j=1}^q \mu_j \text{Ln} Y_{k-j} + \varepsilon_k,$$

которые называют **обобщенными авторегрессиями**. Они образованы в результате действий над значениями уровней и функций (логарифмических функций в приведенном примере) значений уровней ряда.

Принципиально, без доведения до методов идентификации по выборке, известны предложения использования **нестационарных (с переменными коэффициентами) авторегрессий** [27].

Иногда переменная Y_k характеризуется не только зависимостью от предшествующих значений этой переменной, но испытывает и влияние ряда факторов, которые представлены другой переменной X_k . В этом случае говорят о **смешанной авторегрессии**:

$$Y_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_{k-i} + \sum_{j=1}^f \mu_j X_k + \varepsilon_k.$$

Обычно параметры AR-моделей (за исключением известных случаев идентификации частоты одной гармонике [66] и разностного соотношения для экспоненциальной функции [68]) не связывают с указанными выше классами и/или параметрами мо-

делей трендов или колебательных компонент. В этом смысле они являются **непараметрическими**. Механизм получения «разностных соотношений» (они названы в публикациях именно так) не раскрыт, они получены, видимо, эвристическим путем.

Пятнадцать–двадцать лет тому назад произошло существенное расширение области применения AR-моделей. Они стали использоваться для анализа динамических процессов и в экономике. В силу особенностей моделирования экономической динамики, о которой говорилось выше, существенно возросли требования к функциональным возможностям, точности методов моделирования и прогнозирования с помощью авторегрессионных моделей, потребовалась реализация их на малых выборках. Поэтому в 90-е годы прошлого века появились MA, ARMA, ARIMA, ARCH, GARCH, IGARCH и другие модели.

В MA-моделях значение Y_k определяется линейной комбинацией значений стохастической компоненты в предыдущие моменты времени

$$Y_k = \sum_{i=1}^g \gamma_i \varepsilon_{k-i}, \quad (3.2)$$

где g - порядок MA-модели, γ_i - её коэффициенты.

ARMA-модели являются объединением соотношений (3.1) и (3.2). Модели ARIMA формируют из разностей уровней траекторий, обычно разнесённых на период колебательной (как правило, сезонной) компоненты [73].

Очевидны недостатки ARIMA-моделей: необходимо точное знание периода сезонной компоненты при условии её стационарности; сама компонента должна быть аддитивной в структуре траектории; интервал наблюдения для обеспечения помехозащищенности моделирования должен составлять несколько периодов компоненты, т.е. требуемый объём выборки - десятки наблюдений.

Модели ARCH, GARCH и IGARCH состоят из суммы авторегрессионной модели и модели условной дисперсии. **Оценка параметров** моделей ARCH, GARCH, IGARCH сложнее, производится обычно с помощью метода максимального правдоподобия, требует большего количества наблюдений.

Авторегрессионные модели семейства Койка, как и **модели экспоненциального сглаживания**, осуществляют, в основном, адаптивное прогнозирование [37, 73], а не эконометрическое моделирование. В них параметры сглаживания подбираются, исходя из ошибки прогноза, а не из условий обеспечения точности спецификации или параметризации модели.

Из проведенного анализа можно также заключить, что **математической основой для разработки методов моделирования и прогнозирования**, отвечающих возможности решения сформулированных выше задач, **могут быть модели авторегрессии – скользящего среднего**.

При этом следует **опираться на такие их положительные свойства** как линейность вхождения коэффициентов λ_i в модели, что позволяет свести задачу их оценки к решению линейных СЛАУ, а также наличие стандартного программного обеспечения для компьютеров.

Для моделирования инновационных процессов **важным достоинством авторегрессий является возможность оценки параметров авторегрессии на относительно малых выборках, всего в 3-4 раза превышающих порядок авторегрессии [73]**.

Недостатками известных моделей авторегрессии – скользящего среднего является то, что они не являются параметрическими и не могут, в силу этого, реализовать эконометрическое моделирование, не отражают многообразие и сложность реальных социально-экономических процессов и явлений.

Для устранения указанных недостатков ниже предложим механизм конструирования параметрических моделей авторег-

рессии - скользящего среднего для широкого класса практически важных моделей динамики инновационной экономики, в том числе при мультипликативной стохастической компоненте.

3.2. Методика конструирования параметрической ARMA-модели с помощью Z-преобразования

Конструирование параметрических ARMA-моделей возможно с помощью Z-преобразования (преобразования Лорана) [22, 66], которое является модификацией дискретного преобразования Лапласа, сохраняет его основные свойства, исторически появилось в теории цифровых систем управления, но в последние годы стало применяться и в экономике [66].

Z-преобразованием детерминированной функции D_k дискретного действительного аргумента k (функции-оригинала) называется следующая функция комплексной переменной z (функции-изображения):

$$Z[D_k] = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^{-k}.$$

Здесь под детерминированной (решетчатой) функцией D_k понимается сумма и/или произведение аналитических выражений для тренда T_k и колебательных S_k (сезонных и/или циклических) компонент ряда динамики.

Z-преобразование переводит функцию-оригинал D_k , удовлетворяющую некоторым, обычно выполняемым для моделей экономической динамики, условиям [22], в функцию-изображение $Z[D_k]$.

Обратное Z-преобразование (формула обращения) имеет вид [22]

$$Z^{-1} \left[Z[D_k] \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} Z[D_k] z^{k-1} dz = D_k,$$

где $k=1,2,3,\dots, i^2=-1$, а интеграл берется по кривой, содержащей внутри себя все особые точки функции $Z[D_k]$.

Таблица 7

Основные соответствия Z-преобразования

Функция-оригинал	Функция-изображение
1. $D_k = 1$, при $k > 0$, $D_k = 0$, при $k < 0$ - единичная функция Хевисайда	$Z[D_k] = \frac{1}{1-z^{-1}}$
2. $D_k = k\Delta$	$Z[D_k] = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
3. $D_k = \cos \omega k\Delta$	$Z[D_k] = \frac{1-z^{-1}\lambda_0}{1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}}$, где $\lambda_0 = \cos \omega\Delta, \lambda_1 = 2 \cos \omega\Delta$
4. $D_k = e^{-\alpha k\Delta} \cos \omega k\Delta$	$Z[D_k] = \frac{1-\lambda_0 z^{-1}}{1-\lambda_1 z^{-1} + \lambda_2 z^{-2}}$, где $\lambda_0 = e^{-\alpha\Delta} \cos \omega\Delta, \lambda_1 = 2e^{-\alpha\Delta} \cos \omega\Delta, \lambda_2 = e^{-2\alpha\Delta}$
5. $D_k = \sin \omega k\Delta$	$Z[D_k] = \frac{\lambda_0 z^{-1}}{1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}}$, где $\lambda_0 = \cos \omega\Delta, \lambda_1 = 2 \cos \omega\Delta$
6. $D_k = e^{-\alpha k\Delta} \sin \omega k\Delta$	$Z[D_k] = \frac{\lambda_0 z^{-1}}{1-\lambda_1 z^{-1} + \lambda_2 z^{-2}}$, где $\lambda_0 = e^{-\alpha\Delta} \sin \omega\Delta, \lambda_1 = 2e^{-\alpha\Delta} \cos \omega\Delta, \lambda_2 = e^{-2\alpha\Delta}$
7. $D_k = e^{-\alpha k\Delta}$	$Z[D_k] = \frac{1}{1-\lambda z^{-1}}$, где $\lambda = e^{-\alpha\Delta}$

Соотношение между функцией-изображением и функцией-оригиналом зачастую записывают с помощью символа отображения « \rightarrow »:
 $Z[D_k] \rightarrow D_k$.

В приложениях обычно не применяют в каждом конкретном случае формулу обращения, а пользуются известными резуль-

татами для тех или иных функций–оригиналов (таблица 7) и свойствами Z -преобразования.

В предлагаемых ниже методах идентификации моделей достаточно использовать следующие три свойства.

1. Свойство смещения (первая теорема смещения):

$z^{-n}Z[D_k] \rightarrow D_{k-n}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и условии, что при $k - n < 0$ принимается $D_{k-n} = 0$.

2. Свойство линейности:

$Z[AD_k^1 \pm BD_k^2] = AZ[D_k^1] \pm BZ[D_k^2]$, где $A, B \in R$, D_k^1, D_k^2 - функции-оригиналы.

3. Свойство дифференцирования изображения:

$$-z \frac{dZ[D_k]}{dz} \rightarrow (k\Delta)D_k.$$

Применяя свойство дифференцирования изображения, можно существенно расширить класс функций–оригиналов, приведенных в таблице 7, например, для функций

$$(k\Delta)^2, (k\Delta)^3, \dots, (k\Delta)e^{-\alpha k\Delta}, (k\Delta)^2 e^{-\alpha k\Delta}, \dots, (k\Delta) \sin \omega k\Delta, (k\Delta)^2 \sin \omega k\Delta, \dots, (k\Delta)e^{-\alpha k\Delta} \sin \omega k\Delta, (k\Delta)^2 e^{-\alpha k\Delta} \sin \omega k\Delta, \dots, (k\Delta) \cos \omega k\Delta, (k\Delta)^2 \cos \omega k\Delta, \dots, (k\Delta)e^{-\alpha k\Delta} \cos \omega k\Delta, (k\Delta)^2 e^{-\alpha k\Delta} \cos \omega k\Delta,$$

а также для разного вида функций, полученных линейными операциями над ними (свойство линейности), например, для

$$A_0 + A_1 e^{-\alpha k\Delta}, A_0 + A_1(k\Delta) + A_2 \sin \omega k\Delta, \dots \text{ и др.}$$

Для функций вида $\sin(\omega k\Delta + \psi)$, $\cos(\omega k\Delta + \psi)$ можно применить соответствующие формулы синуса и косинуса суммы аргументов, а для показательной функции воспользоваться известным тождеством

$$D_k = A^{-\alpha(k\Delta)} = e^{-\alpha(k\Delta)LnA}, \text{ где } A \geq 0.$$

Важнейшим обстоятельством является то, что получаемое при этом множество функций, имеющих известные изображения, описывает практически все модели, применяемые при мо-

делировании неслучайных компонент рядов экономической динамики.

Поясним суть предлагаемого подхода. Смысл перехода в область изображения $Z[D_k]$ состоит в том, чтобы, выполнив там простые действия по приведению к общему знаменателю и группировке подобных членов, сконструировать при помощи **обратного Z -преобразования разностную схему (разностное уравнение)** для D_k , линейную относительно своих коэффициентов λ_i . Выражая Y_k из соотношения $Y_k = D_k + \xi_k$ (или $Y_k = D_k \cdot \xi_k$, в зависимости от того, как входит стохастическая компонента в ряд динамики), переходим к **ARMA-модели в уровнях ряда динамики**. Коэффициенты λ_i , **линейно входящие теперь в AR-часть ARMA-модели**, можно определять по выборке Y_k известными МНК, ОМНК или другими методами сглаживания.

Главное в предлагаемом подходе заключается в том, что коэффициенты λ_i ARMA-моделей оказываются функциями некоторого числа параметров A_0, A_1, \dots, A_q моделей, существенно нелинейных по параметрам $D_k = f(k\Delta, A_0, A_1, \dots, A_d)$, ($q < d$). В этом смысле ARMA-модели можно называть **параметрическими**.

Тем самым, при моделировании осуществляется **своеобразная перепараметризация модели**: некоторые параметры, существенно нелинейно входящие в неё, трансформируются в линейные коэффициенты λ_i ARMA-модели.

Подход внешне напоминает линеаризацию моделей, но он существенно шире по видам функций, к которым может быть применен.

Существенно отличается он и по механизму своей реализации: включает в себя аналитическое конструирование ARMA-моделей и затем - два этапа вычислений.

Параметризируемые на первом этапе оценки коэффициентов λ_i **ARMA-модели** позволяют рассчитать оценки параметров A_0, A_1, \dots, A_q **модели ряда динамики**, которые затем используются на втором этапе для оценки оставшихся $d - q$ параметров **модели ряда динамики**.

В общем случае конструируемые при реализации предложенного подхода параметрические ARMA-модели будут **обобщенными**: в качестве регрессоров будут выступать произведения номеров наблюдений на уровни ряда динамики, различные в зависимости от вида модели функции уровней.

Общий подход дополняют и несколько специальных приёмов, зависящих от конкретного вида модели динамики используемых, для уменьшения размерности получаемых при его реализации СЛАУ, обеспечения однозначности оценок параметров и др.

Проведём теперь большую детализацию предложенного подхода.

1. Вначале по выборке $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots, Y_n$ выдвигается предположение о какой-либо модели ряда динамики, например, с аддитивной стохастической компонентой ε_k

$$Y_k = f(k\Delta, A_1, A_2, \dots, A_d) + \varepsilon_k,$$

где $d < N$, т.е. объём выборки должен быть больше количества параметров A_i ($i=1, 2, \dots, d$), как для принципиальной возможности их определения, так и для реализации сглаживания стохастической компоненты.

Естественно, что однозначно выбрать адекватную модель сразу сложно. Обязательным является предварительный содержательный качественный и количественный анализ изучаемого процесса по существу: попытка установить внутреннюю структуру и логику процесса, его взаимосвязей с внешней средой, ограничения, накладываемые внешней средой и т.п.

В общем случае, чем больше знаний о возможной модели экономической динамики имеет исследователь (об асимптотах динамической траектории, о частотах и фазах гармоник колебательной компоненты, об аддитивном или мультипликативном характере колебательной и/или стохастической компоненты и т.п.), тем проще и точнее будет реализация подхода.

Зачастую выбор модели осуществляется визуально, исходя из опыта исследователя и представлений о характере динамических процессов и явлений, положений экономической теории.

На этом этапе определенную помощь исследователю может оказать наличие «атласа» распространенных моделей динамики, в том числе довольно сложных с различным сочетанием знаков и значений параметров.

Многообразие моделей при разных параметрах велико и порой неожиданно. На конкретных примерах в пятой главе мы продемонстрируем это утверждение.

Субъективизм исследователя может быть в последующем уменьшен перебором других потенциально возможных моделей для данного динамического ряда.

При этом не требуется предварительная проверка наличия тренда по известным критериям (проверка разностей средних уровней, применение метода Фостера-Стьюарта, метода ранговой корреляции и др.), так как первоначально и не выдвигается гипотеза о наличии или отсутствии тренда, а ищется модель, наиболее адекватная исходному ряду динамики.

2. Для предполагаемой модели детерминированной компоненты D_k конструируется ARMA-модель с помощью Z -преобразования. После применения прямого и обратного Z -преобразований получается разностная схема порядка p , в которой коэффициенты λ_i (их число Ω зависит от вида и сложности модели, способов группирования подобных членов в области изо-

бражения) являются функциями (обычно нелинейными) от параметров A_0, A_1, \dots, A_q исходной модели.

При выполнении обратного Z -преобразования используется свойство смещения Z -преобразования, а при назначении условия $k \geq p$ слагаемые, связанные с числителями изображений обращаются в ноль (конкретно покажем в разделе 4.1 на примере).

Заметим, что при этом неправомерно записать полученную ARMA-модель в виде традиционного объединения (3.1) и (3.2): т.е. в виде

$$Y_k = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_{k-i} + \sum_{i=1}^g \gamma_i \varepsilon_{k-i}.$$

Связано это с тем, что в полученной ARMA-модели авторегрессионная часть содержит члены вида Y_{k-p} , т.е. является авторегрессией p -го порядка, но она может включать и различного рода действия над уровнями Y_{k-i} , например, суммирование, умножение на коэффициенты, на номера наблюдений и т.д.

Далее приведём, применительно к различным моделям динамики, соответствующие формулы, а здесь ограничимся некоторым обобщающим выражением

$$Y_k = \sum_{i=1}^{\Omega} \lambda_i F(Y_{k-1}, Y_{k-2}, Y_{k-2}, \dots, Y_{k-p}) + \zeta_k, \quad (3.3)$$

где запись $F(Y_{k-1}, Y_{k-2}, Y_{k-2}, \dots, Y_{k-p})$ - означает преобразования над уровнями ряда динамики, а ζ_k - обозначение новой стохастической компоненты, которую можно представить через действия над $\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k-2}, \dots, \varepsilon_{k-p}$ и коэффициенты λ_i .

Используя методы сглаживания (они рассмотрены выше и, напомним, их общим обозначением выбран символ $M^o\{\dots\}$), придём к «нормальной» СЛАУ, в силу того, что λ_i входят в ARMA-модель линейно.

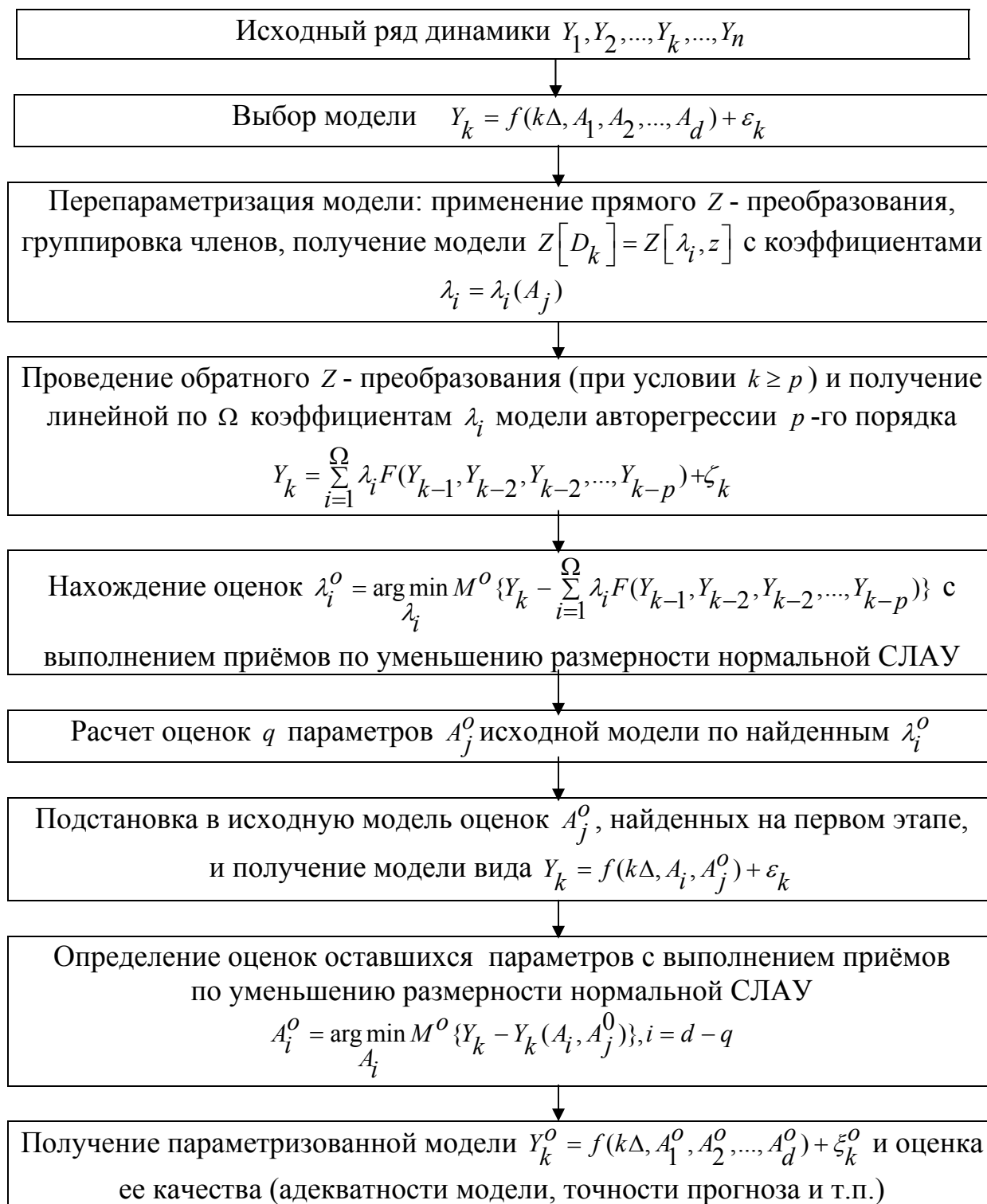


Рис. 13. Блок-схема реализации предложенного общего подхода к моделированию на основе обобщенных параметрических моделей авторегрессии - скользящего среднего

В самом общем случае говорить о нормальных СЛАУ, которые получаются при использовании МНК (ОМНК не всегда корректно), так как символ $M^o \{ \dots \}$ обобщает и квантильную регрессию, реализация которой осуществляется через процедуру линейного программирования. Оправданием может служить то обстоятельство, что до настоящего времени МНК наиболее употребим, к возможности его применения приводят показанные ниже методы устранения (компенсации) гетероскедастичности стохастической компоненты.

Общим ограничением предлагаемого подхода является рекомендация использовать не более 6-8 коэффициентов λ_i , что вызвано проведенными исследованиями по вычислительной погрешности методов при решении нормальных СЛАУ, а при различных соотношениях уровней детерминированных и стохастической компонент в реальных рядах экономической динамики.

При приходе к СЛАУ более высоких порядков можно упростить декомпозицию и/или модели компонент, применить специальные приёмы, предложенные в разделе 4.4.

3. Подставляя в исходную модель найденные на предыдущем этапе оценки параметров, обозначим их A_j^o , получим модель вида $Y_k = f(k\Delta, A_i, A_j^o) + \varepsilon_k$, которую обычно удаётся привести к линейной по параметрам A_i (или по преобразованиям от A_i) и перейти при сглаживании вновь к нормальной СЛАУ. Число параметров, оставшихся для определения, будет равно $i = 1, 2, \dots, d - q$.

Блок-схема предложенного подхода к параметризации рядов динамики на основе обобщенных параметрических ARMA-моделей представлена на рис. 13.

Предложенный подход реализован в настоящее время почти для 100 моделей рядов экономической динамики, которые классифицированы по используемым в них функциям на рис. 14.



Рис.14. Виды моделей, идентифицируемых предложенным подходом

Общее количество идентифицируемых моделей названо с учётом аддитивного и мультипликативного вхождения колебательной и стохастической компонент в структуру ряда динамики, учёта временного фактора и многообразия форм колебательной компоненты.

3.3. Программное обеспечение моделирования и прогнозирования для информационных систем поддержки принятия решений

Моделирование и прогнозирование рядов динамики инновационной экономики предполагает реализацию нескольких **информационных процессов**: сбор, хранение, поиск, представление информации на определенном носителе в определенном виде (визуальном, графическом или текстовом), получение новой информации (например, путём проведения математических расчётов), передачу информации по каналам связи различным адресатам и др.

Указанные информационные процессы реализуются **информационными системами в экономике**, составной частью которых являются **системы поддержки принятия решения (СППР)**.

Теория и практика реализации СППР в настоящее время интенсивно развиваются. Различают **СППР для автоматизации деятельности руководителя, органа управления, дежурного и оператора СЭС**.

СППР руководителя должна, в частности, иметь диалоговые программные средства обеспечения принятия решений на основе математических методов, а также возможность накопления опыта и знаний (в рамках интеллектуальных СППР).

В органе управления СППР используют специалисты, занимающиеся аналитической работой по подготовке решений руководителя и их документальным оформлением. Основу деятельности органа управления составляет оценка различных вариантов решения (проведение прогнозов, оценочных расчётов) и разработка различных документов.

Эффективность функционирования органа управления во многом определяется продуктивностью деятельности специалистов, особенно в области создания и анализа новой информации.

Основные требования к СППР органа управления:

- обеспечение оперативного поиска и отображения всей информации, необходимой для подготовки решений и формирования проектов документов в пределах его компетентности;

- обеспечение возможности ведения оперативных расчетов и моделирования для оценки ситуации и подготовки вариантов решений;

- обеспечение возможности автоматизированной подготовки документов (текстов, графиков, диаграмм и т.п.).

При этом оперативные расчёты и моделирование, а также прогнозирование, в наибольшей степени обеспечивают повышение эффективности и качества управленческих решений.

Построение эконометрических моделей предполагает выполнение множества математических расчетов, широкое использование компьютерных средств обработки информации. Сегодня вычислительная техника на предприятиях и в органах управления зачастую применяется лишь для проведения бухгалтерских расчётов, ведения справочно-информационных систем и осуществления документооборота.

Бесспорно, эти виды деятельности позволяют освободиться управленческим работникам от массы рутинных процессов, связанных с обработкой больших массивов информации, получением всякого рода справок, написанием писем, отчётов и т.д.

Однако использование компьютерных технологий ещё не достигло уровня, при котором экономисты, финансисты, руководители предприятий и организаций могли бы выполнять с помощью компьютера анализ данных и прогнозирование тенденций, необходимые для принятия решений.

До настоящего времени редко проводили сложные аналитические расчёты, связанные с исследованием рынков, имитирующие деятельность своего предприятия с учётом влияния

внешних и внутренних факторов, анализирующие возможности разрешения конфликтных ситуаций и т.д.

Следует иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате моделирования и прогнозирования, могут использоваться как готовые управленческие решения. Они скорее могут рассматриваться как «консультирующие» средства, а принятие управленческих решений остаётся за человеком, опирающимся на свой опыт. Это объясняется чрезвычайной сложностью экономических и социально-экономических процессов. Кроме компьютеров, навыков работы на них, требуется наличие соответствующего программного обеспечения и понимание его возможностей.

При этом известные программные средства анализа рядов динамики не решают поставленных задач, не реализуют предложенные методы, но, тем не менее, частично могут быть использованы.

Существует около тысячи распространяемых на мировом рынке пакетов, решающих в том или ином виде задачи статистического анализа в средах DOS, OS\2 или Windows.

Для этих целей разработаны и широко используются пакеты прикладных программ статистической обработки данных (например, StatGrafics, SPSS, SyStat, Statistica/W, Stadia и др.). При помощи свободно распространяемого статистического пакета Matrixer можно реализовать метод «квантильной регрессии», сведением её к задаче линейного программирования.

Вследствие большой популярности эконометрических исследований на Западе средства построения эконометрических моделей включены во все известные интегрированные офисные средства (Microsoft Office, Perfect Office и т. д.) и табличные процессоры (Excel, Lotus 1-2-3, Quattro Pro и др.). Состав математико-статистических методов эконометрического моделирования весьма разнообразен и **предполагает использование вычислительной техники:** включает анализ систем одновременных экономет-

рических уравнений, корреляционный, регрессионный и спектральный анализы, методы статистического анализа динамических (временных рядов) и др. По данным The Econometrics Journal Online количество разных программных пакетов, используемых в эконометрическом анализе, превышает 120.

Известны универсальные программные средства общего назначения, позволяющие осуществлять статистический анализ временных рядов и, как частный случай, проводить идентификацию неслучайных составляющих (трендов), осуществлять прогноз их будущих значений: SPSS (по некоторым оценкам самый популярный пакет статистических программ в мире), AR-CONTROL, CART, Forecast Expert, Forecast PRO, GENSTAT, MathCAD plus, MS Excel, Matlab & Simulink, Matrixer, Microfit, MetaStock, NCSS, Neuro Shell, PcGive, PV WAVE, RATS, STATA, STATISTICA, STATGRAPHICS, Statistica Neural Networks, StatSoft, SAS, Statistical and Data Analysis Software 2004, TSP, СтатЭксперт, Олимп, Финэксперт, Эвриста, Статистик-Консультант, САНИ, Мезозавр, Статистика + 2003 и STADIA, NCSS, DATADESK, POWERSTAT, JMP, SOLO, ODA, ОЛИМП, РОСТАН и др.[12, 15, 17, 22, 32, 40, 70, 83, 88, 91, 160].

Многие системы и программы прогноза носят при этом узкоспециализированный характер, осуществляя, например, классификацию и снижение размерности объекта моделирования: КВАЗАР, Quattro Pro PALMODA, Класс-мастер, MVSP.

Пакеты технического анализа доступны, но не конкурируют со статистическими программами, поскольку реализуют специфические методики изучения и интерпретации графиков, традиционно используемые на фондовом рынке и рынке FOREX, в основном не предлагают численных значений прогноза, только обозначая возможность появления повышательного, бокового или понижительного тренда.

Применяемые в последнее время для прогнозирования нейрорпакеты, реализуют непараметрический подход, требуют тща-

тельной настройки на конкретную задачу, что под силу лишь специалисту в этой области.

В указанных программных средствах анализируются до двух десятков моделей трендов, реализуется идентификация путем перебора моделей и последующего сравнения невязок, а также осуществляется десезонализация данных путём текущего сглаживания для выделения тренда или сложной тренд-сезонной фильтрацией.

Алгоритмы регрессионного и спектрального анализа входят практически во все пакеты статистических программ, доступны, но **неоправданно сложны** для задачи эконометрического моделирования и прогнозирования рассмотренных выше моделей, предполагают **использование больших выборок** (десятков и даже сотен наблюдений динамического ряда), **не осуществляют структурную идентификацию** моделей экономической динамики.

Пакеты, реализуя известные классические методы, **не позволяют достичь** сформулированной выше цели исследований. Они не работоспособны на малых выборках, не позволяют осуществлять параметризацию колебательных компонент рассматриваемых в пособии видов, моделей трендов в аддитивно-мультипликативном сочетании между собой и со стохастической компонентой.

Тем не менее, при проведении эконометрических исследований на основе разработанных и представленных ниже методов, **пакеты статистических программ могут быть использованы на отдельных этапах:** при предварительном статистическом анализе временных рядов для отбраковки аномальных значений, при определении порядка авторегрессии, проверки статистических гипотез, **для реализации МНК и ОМНК**, расчета числовых и интервальных характеристик точности, использования графических средств и т.д.

Перейдем теперь к иллюстрации предлагаемых методов моделирования рядов динамики инновационной экономики на конкретных примерах.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЯДОВ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ ЛИНЕЙНЫМ ТРЕНДОМ И КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Данная глава посвящена вопросам конструирования обобщенных параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего для моделирования рядов динамики линейным трендом, колебательной и стохастической компонентой.

Данная модель тренда на коротких выборках позволяет передать многообразие возможных нелинейных тенденций, а использование одной из трёх гармоник, входящих в структуру ряда динамики аддитивно и мультипликативно, с постоянными и эволюционирующими амплитудами компонент, описывает широкий класс колебательных компонент.

Рассмотрен и случай эконометрического моделирования моделей указанного вида с мультипликативной стохастической компонентой. В качестве меры приближения предложена относительная невязка.

В данной главе подробно описана методика конструирования обобщенных параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего, используемая далее.

Для компенсации мультиколлинеарности показаны приёмы уменьшения порядка решаемых при параметризации моделей систем линейных алгебраических уравнений, как частного вида для моделей данной главы, так и общего вида, используемых в дальнейшем.

Представлены результаты моделирования предложенных методов на реальных и тестовых выборках, которые показывают их преимущества по сравнению с уже известными.

4.1. Моделирование рядов динамики линейным трендом, стационарной колебательной компонентой и аддитивной стохастической компонентой

При моделировании процессов, содержащих тренд и колебательную компоненту, естественна попытка аппроксимации каждой из компонент простыми выражениями.

«Медленная» компонента ряда динамики (тренд) может быть аппроксимирована с высокой точностью первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора в малой окрестности точки разложения. Малую окрестность точки разложения при такой аппроксимации будем обеспечивать использованием коротких выборок, меньших, чем в известных методах идентификации моделей. Тем самым реализуем возможность представления рядом Тейлора широкого класса нелинейных моделей тренда.

Для приложений важно, что для линейного тренда известны формулы, определяющие его доверительный интервал. При организации «текущей аппроксимации» (точка разложения и выборка перемещаются по оси определяющего параметра) появляется возможность оценки и аппроксимативной общей оценки доверительного интервала нелинейной модели тренда.

Более «быстрая» динамика и многообразие известных видов колебательной компоненты требуют использования при аппроксимации нелинейных функций, например, состоящих из одной или нескольких гармоник. Эконометрическая практика и приведенные результаты в разделе 2.3 пособия говорят о том, что для моделирования реальных видов колебательной компоненты обычно достаточно ограничиться тремя гармониками.

Начнём моделирование ряда динамики с наиболее простого и распространенного случая суммы линейного тренда с пара-

метрами A_1, A_0 , гармоники с амплитудой A_3 , частотой ω , фазой ψ и стохастической гомоскедастической компоненты ξ_k :

$$Y_k = A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega k\Delta + \psi) + \xi_k. \quad (4.1)$$

Модель (4.1) обычно применяют к тренд-сезонным рядам, так как для тренд-циклических рядов модель колебательной компоненты, как правило, сложнее.

Выделим в (4.1) детерминированную компоненту $D_k = A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega k\Delta + \psi)$ и, используя свойство линейности, тригонометрическую формулу $\cos(\omega k\Delta + \psi) = \cos \omega k\Delta \cdot \cos \psi - \sin \omega k\Delta \cdot \sin \psi$, соответствия в таблице 8 раздела 3.2 получим после Z-преобразования:

$$\begin{aligned} Z[D_k] &= Z[A_1 k\Delta] + Z[A_0] + Z[A_3 \cos \psi \cos \omega k\Delta] - Z[A_3 \sin \psi \cos \omega k\Delta] = \\ &= A_1 \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + A_0 \frac{1}{1-z^{-1}} + \\ &+ A_3 \left\{ \cos \psi \frac{1-\lambda_1 z^{-1}}{1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}} - \sin \psi \frac{\lambda_0 z^{-1}}{1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}} \right\} = \\ &= \frac{A_1 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \frac{A_3 \{ \cos \psi - \lambda_0 (\cos \psi + \sin \psi) \}}{1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\lambda_1 = 2 \cos \omega\Delta$, $\lambda_0 = \cos \omega\Delta$.

Приведя правую часть в (4.2) к общему знаменателю, получим

$$\begin{aligned} Z[D_k] &= \frac{A_1 z^{-1}(1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}) + A_0(1-z^{-1})(1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}) + \\ &+ A_3(1-z^{-1})^2 \{ \cos \psi - \lambda_0 z^{-1} (\cos \psi + \sin \psi) \}}{1-2(z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}) + z^{-4} - \\ &- \lambda_1(z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3})}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Умножив левую и правую части (4.3) на знаменатель, будем иметь:

$$\begin{aligned} Z[D_k] - 2Z[D_k] \cdot (z^{-1} - z^{-2} + z^{-3}) + Z[D_k] \cdot z^{-4} - \\ - \lambda_1 Z[D_k] \cdot (z^{-1} - 2z^{-2} + z^{-3}) = \\ = A_1 z^{-1}(1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}) + A_0(1-z^{-1})(1-\lambda_1 z^{-1} + z^{-2}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_3(1-z^{-1})^2\{\cos\psi-\lambda_0z^{-1}(\cos\psi+\sin\psi)\}=(A_3\cos\psi+A_0)+ \\
& +z^{-1}\{A_1-A_0(\lambda_1+1)-A_3A_0(\cos\psi+\sin\psi)-\cos\psi\}- \\
& -z^{-2}\{A_1\lambda_1+A_0(\lambda_1+1)+2A_3\lambda_0(\cos\psi+\sin\psi)+A_3\cos\psi\}- \\
& -z^{-3}\{A_1-A_0-\lambda_0(\cos\psi+\sin\psi)\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Возвратимся в область оригинала, используя свойство сдвига

$$\begin{aligned}
2z^{-1}Z[D_k] &\rightarrow 2D_{k-1}, & 2z^{-2}Z[D_k] &\rightarrow 2D_{k-2}, & 2z^{-3}Z[D_k] &\rightarrow 2D_{k-3}, \\
z^{-4}Z[D_k] &\rightarrow D_{k-4}, & \lambda_1z^{-1}Z[D_k] &\rightarrow \lambda_1D_{k-1}, & 2\lambda_1z^{-2}Z[D_k] &\rightarrow 2\lambda_1D_{k-2}, \\
\lambda_1z^{-3}Z[D_k] &\rightarrow \lambda_1D_{k-3}
\end{aligned}$$

и соотношения

$$\begin{aligned}
Z^{-1}[(A_3\cos\psi+A_0)] &= \delta_k; \\
Z^{-1}[z^{-1}\cdot\{A_1-A_0(\lambda_1+1)-A_3A_0(\cos\psi+\sin\psi)-\cos\psi\}] &= \\
&= \delta_{k-1}\cdot\{A_1-A_0(\lambda_1+1)-A_3A_0(\cos\psi+\sin\psi)-\cos\psi\}; \\
Z^{-1}[z^{-2}\cdot\{A_1\lambda_1+A_0(\lambda_1+1)+2A_3\lambda_0(\cos\psi+\sin\psi)+A_3\cos\psi\}] &= \\
&= \delta_{k-2}\cdot\{A_1\lambda_1+A_0(\lambda_1+1)+2A_3\lambda_0(\cos\psi+\sin\psi)+A_3\cos\psi\}; \\
Z^{-1}[z^{-3}\cdot\{A_1-A_0-\lambda_0(\cos\psi+\sin\psi)\}] &= \\
&= \delta_{k-3}\cdot\{A_1-A_0-\lambda_0(\cos\psi+\sin\psi)\};
\end{aligned}$$

где $\begin{cases} \delta_w = 1, w = 0 \\ \delta_w = 0, w \neq 0 \end{cases}$ - дискретный аналог дельта-функции.

Из последних соотношений видно, что при назначении $k \geq 4$ все слагаемые функции-оригинала правой части выражения (4.4) будут равны нулю.

Тогда приходим к следующему **разностному уравнению для уровней детерминированной компоненты**

$$D_k = \lambda_1(D_{k-1} - 2D_{k-2} + D_{k-3}) + 2(D_{k-1} - D_{k-2} + D_{k-3}) - D_{k-4}. \tag{4.5}$$

В дальнейшем будем широко использовать **назначение соответствующих условий** на выбор номера начального наблюдения при разработке методов параметризации той или иной модели, что даст возможность положить равным нулю числи-

тель изображения модели при выполнении обратного Z -преобразования.

Для того, чтобы получить возможность идентификации параметров модели через наблюдаемые уровни Y_k (напомним, что и D_k и ξ_k являются ненаблюдаемыми, определены декомпозицией ряда), из (4.1) выразим $D_k = Y_k - \xi_k$ и подставим в (4.5).

Тогда будем иметь модель обобщенной авторегрессии-скользящего среднего для **уровней ряда динамики**

$$Y_k = \lambda_1(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}) + 2(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3}) - Y_{k-4} + \zeta_k, \quad (4.6)$$

где ζ_k – значения новой стохастической компоненты, образованной, как легко показать, той же весовой суммой значений стохастической компоненты от ξ_{k-1} до ξ_{k-4} , как и Y_k в (4.6):

$$\zeta_k = \lambda_1(\xi_{k-1} - 2\xi_{k-2} + \xi_{k-3}) + 2(\xi_{k-1} - \xi_{k-2} + \xi_{k-3}) - \xi_{k-4}.$$

При гомоскедастичности стохастической компоненты в (4.1) компонента ζ_k будет также гомоскедастичной. Для простоты будем для (4.6) и аналогичных моделей порой употреблять термины ARMA-модель или авторегрессия.

Идентификацию модели (4.1) будем осуществлять в два этапа.

На первом этапе из (4.6) можем найти параметр λ_1 , точнее его оценку λ_1^0 , методами статистического сглаживания, например, МНК. Для этого реализуем условие

$$\lambda_1^0 = \arg \min_{\lambda_1} \sum_{k=4}^N \nu_k \{Y_k - \lambda_1(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}) - 2(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3}) + Y_{k-4}\}^2,$$

где N – объём выборки, ν_k – весовой коэффициент, используемый при целесообразности (необходимости) взвешивания отдельных невязок.

Далее будем пользоваться **обобщенной формой записи оператора сглаживания $M^0\{\dots\}$** (под которой подразумевают-

ся МНК, ОМНК, квантильная регрессия или др.), который будем выбирать в зависимости от свойств стохастической компоненты:

$$\lambda_1^o = \arg \min_{\lambda_1} M^o \{ Y_k - \lambda_1 (Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}) - 2(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3}) + Y_{k-4} \}.$$

Условие для нахождения МНК-оценки λ_1^o реализуется взятием частной производной по λ_1 от усредненной невязки, приравниванием полученного выражения нулю и получения тем самым **линейного уравнения относительно λ_1^o , называемого «нормальным»**.

При параметризации других моделей экономической динамики конструируемые ARMA-модели могут содержать несколько коэффициентов λ_i . Тогда необходимые условия минимумов соответствующих усредненных невязок приводят к **нормальным СЛАУ**.

По полученной оценке λ_1^o можно рассчитать, с учетом обозначений в (4.2), оценку частоты модели ω^o по формуле

$$\omega^o = (1/\Delta) \arccos(\lambda_1^o / 2) \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При реализации метода идентификации определенные трудности могут быть в связи с неоднозначностью определения $\arccos(\lambda_1^o / 2)$: **среди ряда значений (периодов) колебательной компоненты следует выбирать то, которое соответствует экономическому содержанию задачи и имеет максимальное значение коэффициента детерминации**.

Итак, через коэффициент λ_1 , который входит в регрессию (4.6) линейно, **осуществляется перепараметризация нелинейного параметра ω гармонической колебательной компоненты**.

Второй нелинейный параметр ψ в коэффициентах данной авторегрессии не отражен, как и параметры A_1, A_0 .

Их оценки найдём на **втором этапе идентификации, используя ω^0** . Для этого представим (4.1) в виде

$$Y_k = A_1 k \Delta + A_0 + A_4 \sin \omega^0 k \Delta + A_5 \cos \omega^0 k \Delta, \quad (4.7)$$

где введены обозначения $A_4 = A_3 \cos \psi$, $A_5 = A_3 \sin \psi$.

Для параметризации A_1, A_0, A_4, A_5 , линейно входящих в (4.7), реализуем следующее условие

$$A_1^0, A_0^0, A_4^0, A_5^0 = \arg \min_{A_1, A_0, A_4, A_5} M^0 \{ Y_k - A_1 k \Delta - A_0 - A_4 \sin \omega^0 k \Delta - A_5 \cos \omega^0 k \Delta \}, \quad (4.8)$$

которое приводит к нормальной СЛАУ четвертого порядка.

Обратим внимание на то, что в данном случае **суммирование при выполнении сглаживания можно начинать с $k = 0$** . Эта особенность выполнения операции сглаживания будет характерной для вторых этапов всех предлагаемых ниже методов идентификации.

Решение данной СЛАУ любым из известных методов определит оценки искомым параметров модели A_1^0, A_0^0 и позволит рассчитать

$$A_3^0 = \left((A_4^0)^2 + (A_5^0)^2 \right)^{1/2},$$

а также $\psi^0 = \pm \arctg(A_5^0 / A_4^0)$.

Заметим, что при выборе знака в оценке ψ^0 следует учитывать знаки $\sin \psi$ и $\cos \psi$, получающиеся при решении СЛАУ. В дальнейшем знак \pm будет в аналогичных формулах опущен, а данное замечание - учитываться.

Необходимо принимать во внимание и неоднозначность расчёта обратной тригонометрической функции.

После получения всех оценок параметров модели (4.1) **можно рассчитать сглаженные значения ряда динамики**

$$Y_k^0 = A_1^0 k \Delta + A_0^0 + A_3^0 \cos(\omega^0 k \Delta + \psi^0)$$

как для наблюдений, принадлежащих используемой статистической выборке, так и для **будущих, прогнозных значений**.

Через Y_k^o можно, в соответствии с приведенными выше формулами, рассчитать точность модели и точность прогноза.

Можно найти и оценки остатков (стохастической компоненты) $\xi_k^o = Y_k - Y_k^o$ для проверки их на автокорреляцию (для ответа на вопрос о необходимости её устранения или компенсации) или для использования в анализе «связных рядов» динамики.

При идентификации модели (4.1) целесообразно рассмотреть и практически важный частный случай, **когда частота ω сезонной компоненты известна**, например, определяется годовым периодом. Расчет ω^o в этом случае не нужен, а значение частоты (будем использовать тоже обозначение ω^o) можно сразу подставить в (4.8), т.е. перейти ко второму этапу идентификации.

В ряде случаев можно допустить ещё одно упрощение: осуществить (организовать) первое наблюдение динамического ряда в момент нулевого значения гармоника, тем самым обеспечив $\psi = 0$.

Тогда (4.7) примет более простой вид

$$Y_k = A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \sin \omega^o k\Delta + \xi_k, \quad (4.9)$$

а условие нахождения оценок параметров, приводящее к СЛАУ третьего порядка, будет следующим

$$A_1^o, A_0^o, A_3^o = \arg \min_{A_1, A_0, A_3} M^o \{Y_k - A_1(k\Delta) - A_0 - A_3 \sin \omega^o k\Delta\}. \quad (4.10)$$

Напомним сделанное ранее замечание о том, что, **как показала практика**, авторегрессии дают удовлетворительные статистические характеристики своих коэффициентов на выборках примерно **в три-четыре раза больших, чем порядок авторегрессии**. Таким образом, можно предполагать, что требуемый

объём выборки для идентификации данных моделей с 4-м порядком авторегрессии составляет от 12 до 16 наблюдений.

С учётом условия Котельникова-Шеннона (шаг дискретизации Δ должен быть в 5-10 раз меньше периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ гармонической компоненты) можно подсчитать, что «классический метод» сезонной декомпозиции, предполагающий от 4 до 12 периодов, потребует от 20 до 120 наблюдений. Выигрыш в количестве наблюдений предложенным методом **в разы: от** $\frac{20}{16} = 1,25$ **до** $\frac{120}{12} = 10$.

Сравним теперь методы по требуемой длительности реализации или, другими словами, по требуемому интервалу стационарности принятой модели (4.1).

Предложенный метод даёт возможность параметризации на длительности от $\frac{12T}{10}$ до $\frac{16T}{5}$, т.е. от одного до трёх периодов гармонической компоненты. Последнее означает возможность моделирования рядов динамики на коротких выборках.

При наличии длинных рядов динамики можно осуществлять моделирование **путём текущего сглаживания по короткой выборке** и отслеживать возможную эволюцию модели (4.1) на больших по объёму выборках.

Конечно же, вопрос определения требуемого объёма выборки для обеспечения требуемой точности **не так прост**: объём выборки зависит от принятой характеристики точности, от соотношения мощности стохастической компоненты и параметров модели (в теории измерений в этих случаях говорят о соотношении мощностей помехи и полезного сигнала), от закона распределения стохастической компоненты и т.п. Аналитическое решение данного вопроса весьма сложно, поэтому к нему вернёмся ниже в 4.5 при обсуждении результатов вычислительного эксперимента на модельных и реальных выборках.

Начнём теперь последовательно усложнять модель колебательной компоненты и тем самым приближать её к реальным условиям экономической практики.

В экономической литературе часто рассматривают задачу **моделирования колебательной компоненты суммой двух гармоник**, при этом одну из них обычно относят к сезонной компоненте с периодом около года, а другую – к квартальной компоненте. В принципе, могут быть и другие экономические интерпретации гармоник: например, вторую гармонику можно связать с экономическими циклами и т.д.

В этом случае для ряда динамики будет предложено выражение

$$Y_k = A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \sin(\omega_1 k \Delta + \psi_1) + A_6 \sin(\omega_2 k \Delta + \psi_2) + \xi_k. \quad (4.11)$$

Конструирование разностного уравнения для детерминированной компоненты ряда (4.11) и выражение его через наблюдения ряда Y_k на первом этапе идентификации практически аналогично тому, как это было сделано для суммы линейного тренда и гармоники, поэтому перейдем к конечным результатам.

Тогда при $k \geq 6$ ряду (4.11) будет соответствовать следующая модель авторегрессии шестого порядка

$$Y_k = 2Y_{k-1} - 3Y_{k-2} + 4Y_{k-3} - 3Y_{k-4} + 2Y_{k-5} - Y_{k-6} + (\lambda_1 + \lambda_2)(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + 2Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5}) - \lambda_1 \lambda_2 (Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + Y_{k-4}) + \zeta_k, \quad (4.12)$$

где $\lambda_1 = 2 \cos \omega_1 \Delta$, $\lambda_2 = 2 \cos \omega_2 \Delta$, ζ_k - новая стохастическая компонента, образованная такой же весовой суммой значений стохастической компоненты $\xi_{k-1}, \dots, \xi_{k-6}$, как и Y_k в (4.12).

При гомоскедастичности стохастической компоненты в (4.11) ζ_k в (4.12) также гомоскедастична.

В (4.12) вновь видим перепараметризацию частот ω_1, ω_2 , нелинейно входящих в модель (4.11), в линейные коэффициенты $(\lambda_1 + \lambda_2)$ и $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ авторегрессии. Определение оценок λ_1^o, λ_2^o из

(4.12) предполагает составление соответствующей нормальной СЛАУ второго порядка для нахождения $\mu_1^o = (\lambda_1^o + \lambda_2^o)$ и $\mu_2^o = \lambda_1^o \cdot \lambda_2^o$:

$$\mu_1^o, \mu_2^o = \arg \min_{\mu_1, \mu_2} M^o \{Y_k - (2Y_{k-1} - 3Y_{k-2} + 4Y_{k-3} - 3Y_{k-4} + 2Y_{k-5} - Y_{k-6}) - \mu_1(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + 2Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5}) + \mu_2(Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + Y_{k-4})\}.$$

После очевидного расчёта через μ_1^o и μ_2^o оценок λ_1^o, λ_2^o можно определить

$$\omega_1^o = \arccos(\lambda_1^o / 2) / \Delta, \quad \omega_2^o = \arccos(\lambda_2^o / 2) / \Delta.$$

Подстановка ω_1^o и ω_2^o в исходную модель даёт

$$Y_k = A_1 k \Delta + A_0 + A_4 \sin \omega_1^o k \Delta + A_5 \cos \omega_1^o k \Delta + A_7 \sin \omega_2^o k \Delta + A_8 \cos \omega_2^o k \Delta + \xi_k, \quad (4.13)$$

где приняты обозначения $A_4 = A_3 \cos \psi_1$, $A_5 = A_3 \sin \psi_1$, $A_7 = A_6 \cos \psi_2$, $A_8 = A_6 \sin \psi_2$.

Для параметризации $A_1, A_0, A_4, A_5, A_7, A_8$, линейно входящих в (4.13), условие минимизации усредненной тем или иным образом невязки приводит к СЛАУ шестого порядка, из решения которой будем иметь $A_1^o, A_0^o, A_4^o, A_5^o, A_7^o, A_8^o$, а затем рассчитывать параметры модели

$$A_3^o = \left((A_4^o)^2 + (A_5^o)^2 \right)^{1/2}, \quad A_6^o = \left((A_7^o)^2 + (A_8^o)^2 \right)^{1/2}, \quad \psi^o = \arctg(A_5^o / A_4^o).$$

Ориентировочно необходимый объём выборки для идентификации модели (4.11) составляет от 18 до 24 наблюдений.

Естественно, что любое априорное знание абсолютных значений частот или фаз в модели (4.11) или соотношений между ними существенно упростит идентификацию, уменьшит порядок СЛАУ на первом этапе идентификации. Впрочем, к обсуждению этого вопроса придем в разделе 4.4, накопив опыт разработки методов идентификации для других моделей динамики.

Большей сложностью и лучшим приближением к многообразию реальных рядов динамики обладает моделирование

ряда динамики суммой линейного тренда, колебательной компоненты, состоящей из трёх гармоник, и стохастической компоненты ξ_k :

$$Y_k = A_1 k \Delta + A_0 + F_1 \sin(\omega_1 k \Delta + \varphi_1) + F_2 \sin(\omega_2 k \Delta + \varphi_2) + F_3 \sin(\omega_3 k \Delta + \varphi_3) + \xi_k. \quad (4.14)$$

Наибольшее разнообразие видов колебательной компоненты позволяет отобразить модель (4.14) в случае, когда амплитуды, частоты и фазы каждой из гармоник не предполагаются известными (например, связанными условиями ряда Фурье), а могут принимать различные значения.

Построение модели авторегрессии для (4.14) уже показанными приёмами через прямое и обратное Z -преобразование даст при $k \geq 8$ следующую авторегрессию 8-го порядка:

$$Y_k = 2Y_{k-1} - 4Y_{k-2} + 6Y_{k-3} - 6Y_{k-4} + 6Y_{k-5} - 4Y_{k-6} + 2Y_{k-7} - Y_{k-8} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + 3Y_{k-3} - 4Y_{k-4} + 3Y_{k-5} - 2Y_{k-6} + Y_{k-7}) - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \cdot (Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + 2Y_{k-4} - 2Y_{k-5} + Y_{k-6}) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5}) + \zeta_k, \quad (4.15)$$

где $\lambda_1 = 2 \cos \omega_1 \Delta$, $\lambda_2 = 2 \cos \omega_2 \Delta$, $\lambda_3 = 2 \cos \omega_3 \Delta$, а ζ_k - новая стохастическая компонента ζ_k , образованная такой же весовой суммой значений стохастической компоненты $\xi_{k-1}, \dots, \xi_{k-8}$ что и Y_k в (4.15).

Соответствующая нормальная СЛАУ при сглаживании стохастической компоненты в (4.15) и расчёте коэффициентов будет иметь третий порядок.

Заметим, что и решения СЛАУ для (4.15), и решения нормальной СЛАУ для (4.12), позволяют находить коэффициенты авторегрессий по теореме Виета для многочлена второй и третьей степеней соответственно.

После определения оценок коэффициентов $\lambda_1^o, \lambda_2^o, \lambda_3^o$ рассчитаем по очевидным формулам параметры $\omega_1^o, \omega_2^o, \omega_3^o$ и представим после этого (4.14) в виде

$$Y_k = A_1 k \Delta + A_0 + F_{11} \sin \omega_1^o k \Delta + F_{12} \cos \omega_1^o k \Delta + F_{21} \sin \omega_2^o k \Delta + F_{22} \cos \omega_2^o k \Delta + F_{31} \sin \omega_3^o k \Delta + F_{32} \cos \omega_3^o k \Delta \varphi_3 + \xi_k, \quad (4.16)$$

где приняты обозначения

$$F_{11} = F_1 \cos \varphi_1, \quad F_{12} = F_1 \sin \varphi_1, \quad F_{21} = F_2 \cos \varphi_2,$$

$$F_{22} = F_2 \sin \varphi_2, \quad F_{31} = F_3 \cos \varphi_3, \quad F_{32} = F_3 \sin \varphi_3.$$

Параметризация (4.16) требует решения СЛАУ восьмого порядка для получения оценок $A_1^o, A_0^o, F_{11}^o, F_{12}^o, F_{21}^o, F_{22}^o, F_{31}^o, F_{32}^o$ и последующего расчёта параметров

$$F_1^o = \left((F_{11}^o)^2 + (F_{12}^o)^2 \right)^{1/2}, \quad \varphi_1^o = \arctg(F_{12}^o / F_{11}^o),$$

$$F_2^o = \left((F_{21}^o)^2 + (F_{22}^o)^2 \right)^{1/2}, \quad \varphi_2^o = \arctg(F_{22}^o / F_{21}^o),$$

$$F_3^o = \left((F_{31}^o)^2 + (F_{32}^o)^2 \right)^{1/2}, \quad \varphi_3^o = \arctg(F_{32}^o / F_{31}^o).$$

При идентификации модели (4.14) **проблема снижения размерности СЛАУ становится более острой**, чем в модели (4.11).

Одним из вариантов решения этой проблемы является рассмотрение частных случаев, когда известны какие-то из параметров модели (4.14), например, отдельные частоты, или соотношения между ними, как это было показано для импульсов в разделе 2.3.

В разделе 4.4 будут показаны специальные приёмы, позволяющие уменьшить размерность решаемых СЛАУ.

Можно предполагать, что требуемый объём выборки для удовлетворительной по точности параметризации авторегрессионной модели (4.15), имеющей 8-й порядок, составляет от 24 до 32 наблюдений.

При идентификации моделей (4.11) и (4.14) условия Котельникова-Шеннона должны выполняться для гармоники с наибольшей частотой: шаг дискретизации должен быть в 5-10 раз меньше её периода. Естественно, что для гармоники с низкой частотой число наблюдений на периоде будет больше.

Упомянутый в разделе 2.3 известный метод многомасштабной десезонализации потребует использования выборки на длительности от 4 до 12 периодов **самой низкочастотной компоненты**. Так что выигрыш по объёму выборки или интервалу стационарности моделей предложенным методом в этих случаях будет ещё значительнее, чем для модели (4.1). Для сравнения отметим, что применение известных спектральных методов параметризации модели (4.11) потребует 60-80 и более наблюдений.

4.2. Моделирование рядов динамики линейным трендом, колебательной компонентой с эволюционирующей амплитудой и аддитивной стохастической компонентой

Заложим теперь в модель ряда динамики с линейным трендом возможность эволюции амплитуды колебательной компоненты. Используем предложенную в разделе 2.3 структуру $Y_k = T_k(1 + D \cdot S_k) + \varepsilon_k$ вхождения мультипликативной стохастической компоненты ε_k при $T_k = A_1(k\Delta) + A_0$ и $S_k = \sin(\omega k\Delta + \psi)$:

$$\begin{aligned} Y_k &= \{A_1(k\Delta) + A_0\} \{1 + D \sin(\omega k\Delta + \psi)\} + \xi_k = \\ &= A_1(k\Delta) + A_0 + D\{A_1(k\Delta) + A_0\} \sin(\omega k\Delta + \psi) + \xi_k = \\ &= A_1(k\Delta) + A_0 + DA_1(k\Delta) \sin(\omega k\Delta + \psi) + DA_0 \sin(\omega k\Delta + \psi) + \xi_k. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Проведенные преобразования в (4.17) показывают, что её можно рассматривать как расширение модели (2.27) путем дополнения её линейным трендом, т.е. представлением в виде

$$Y_k = A_1(k\Delta) + A_0 + A_3(k\Delta) \sin(\omega k\Delta + \psi) + \xi_k.$$

Амплитуда колебательной компоненты в (4.17) изменяется по закону $D(A_1 k \Delta + A_0)$, т.е. пропорционально с коэффициентом D уровням тренда.

Для (4.17) по той же методике, что и для моделей (4.1), (4.11) и (4.14), при $k \geq 6$ получим авторегрессию шестого порядка из уровней ряда динамики

$$Y_k = 2\lambda_1 (Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + 2Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5}) - \lambda_1^2 (Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + Y_{k-4}) + 2Y_{k-1} - 3Y_{k-2} + 4Y_{k-3} - 3Y_{k-4} + 2Y_{k-5} - Y_{k-6} + \zeta_k, \quad (4.18)$$

где $\lambda_1 = 2 \cos \omega \Delta$, а ζ_k – стохастическая компонента, образованная такой же весовой суммой значений $\xi_{k-1}, \dots, \xi_{k-6}$, как и Y_k в (4.18).

Составим и затем решим нормальное СЛАУ второго порядка (или квадратное уравнение) для определения оценки λ_1 :

$$\lambda_1^0, (\lambda_1^2)^0 = \arg \min_{\lambda_1, \lambda_1^2} M^0 \{ Y_k - \lambda_1^2 (Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + 2Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5}) - \lambda_1^2 (Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + Y_{k-4}) + 2Y_{k-1} - 3Y_{k-2} + 4Y_{k-3} - 3Y_{k-4} + 2Y_{k-5} - Y_{k-6} \}.$$

Через найденную оценку коэффициента λ_1^0 рассчитаем оценку частоты гармонической колебательной компоненты $\omega^0 = (1/\Delta) \arccos(\lambda_1^0 / 2)$.

Перейдем к оценке параметров A_1, A_0, ψ , представив (4.17) в виде:

$$Y_k = A_1(k\Delta) + A_0 + A_2(k\Delta) \sin \omega^0 k \Delta + A_3 \sin \omega^0 k \Delta + A_4(k\Delta) \cos \omega^0 k \Delta + A_5 \cos \omega^0 k \Delta + \xi_k,$$

где введены обозначения $A_2 = A_1 D \cos \psi$, $A_3 = A_0 D \cos \psi$, $A_4 = A_1 D \sin \psi$, $A_5 = A_0 D \sin \psi$.

Очевидна возможность определения оценок параметров A_1, A_0, D, ψ путём решения нормальной СЛАУ шестого порядка, реализующей условие

$$A_0^o, A_1^o, A_2^o, A_3^o, A_4^o, A_5^o = \arg \min_{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6} M^o \{Y_k - A_1(k\Delta) - A_0 - A_2(k\Delta) \sin \omega^o k\Delta - A_3 \sin \omega^o k\Delta - A_4(k\Delta) \cos \omega^o k\Delta - A_5 \cos \omega^o k\Delta\}.$$

Решения дают оценки параметров $A_1^o, A_0^o, A_2^o, A_4^o$, а оценки параметра D^o и фазу ψ^o можем рассчитать по формулам

$$D^o = ((A_2^o)^2 + (A_4^o)^2)^{1/2} / A_1^o, \quad \psi^o = \arctg(A_4^o / A_2^o) = \arctg(A_5^o / A_3^o).$$

Требуемый объём выборки для осуществления сглаживания в модели (4.17) лежит в диапазоне от 18 до 24 наблюдений.

Рассмотрим моделирование рядов динамики **линейным трендом и выражением (2.27) для колебательной компоненты**

$$\begin{aligned} Y_k &= A_1(k\Delta) + A_0 + A_3(k\Delta) \sin(\omega k\Delta + \psi) + \xi_k = \\ &= A_1(k\Delta) + A_0 + A_4(k\Delta) \sin \omega k\Delta + A_5(k\Delta) \cos \omega k\Delta + \xi_k, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $A_4 = A_3 \cos \psi, A_5 = A_3 \sin \psi$.

Модель (4.19) можно рассматривать как частный случай (4.17). При $k \geq 6$ **будут справедливы регрессия (4.18)**, обозначения в ней и формула для оценки частоты ω^o .

В сравнении с (4.17) для модели (4.19) будет проще второй этап идентификации, так как в нём будет меньшее количество параметров. Оценки $A_1^o, A_0^o, A_4^o, A_5^o$ можно найти из соответствующей нормальной СЛАУ **четвертого порядка**, а не шестого, как для (4.19). Для параметризации гармоника следует воспользоваться формулами

$$A_3^o = \left((A_4^o)^2 + (A_5^o)^2 \right)^{1/2}, \quad \psi^o = \arctg(A_5^o / A_4^o).$$

Продолжим усложнение эволюционирующей модели колебательной компоненты. Пусть теперь она состоит из линейного тренда, **аддитивной колебательной компоненты из суммы трёх гармоник, у которых амплитуды изменяются по линейному закону**, и аддитивной стохастической компоненты:

$$\begin{aligned} Y_k &= A_1 k\Delta + A_0 + k\Delta \{F_1 \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + \\ &+ F_2 \sin(\omega_2 k\Delta + \varphi_2) + F_3 \sin(\omega_3 k\Delta + \varphi_3)\} + \xi_k. \end{aligned} \quad (4.20)$$

В данном случае моделируется изменение амплитуд каждой из трёх гармоник по линейным законам $F_1 A_1 \cdot (k\Delta)$, $F_2 A_1 \cdot (k\Delta)$, $F_3 A_1 \cdot k\Delta$ с различными (в общем случае и по знаку, и по величине) коэффициентами F_1, F_2, F_3 .

Построение модели авторегрессии для (4.20) приведёт к авторегрессии 14-го порядка и потребует для получения удовлетворительных точностных характеристик параметров выборки от 32 до 56 наблюдений.

Требование такого объёма выборки лишает интереса к использованию модели (4.20) при анализе инновационной динамики. Однако, как будет показано в разделе 4.4, с помощью специального приёма можно существенно уменьшить порядок авторегрессии, сделав тем самым данную модель реализуемой на практике.

Расширением модели (4.20) является модель с переменной амплитудой колебательной компоненты, состоящая из линейного тренда, **мультипликативной компоненты из суммы 3-х гармоник** и аддитивной стохастической компоненты

$$\begin{aligned}
 Y_k = & (A_1 k\Delta + A_0) \{1 + F_1 \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + F_2 \sin(\omega_2 k\Delta + \varphi_2) + \\
 & + F_3 \sin(\omega_3 k\Delta + \varphi_3)\} + \xi_k = (A_1 k\Delta + A_0) \times \\
 & \times \{F_1 \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + F_2 \sin(\omega_2 k\Delta + \varphi_2) + F_3 \sin(\omega_3 k\Delta + \varphi_3)\} + \xi_k.
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

Преобразуя (4.21), получим

$$\begin{aligned}
 Y_k = & A_1(k\Delta) + A_0 + F_1^*(k\Delta) \cdot \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + \\
 & + F_2^*(k\Delta) \cdot \sin(\omega_2 k\Delta + \varphi_2) + F_3^*(k\Delta) \cdot \sin(\omega_3 k\Delta + \varphi_3) + \\
 & + F_1'' \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + F_2'' \sin(\omega_2 k\Delta + \varphi_2) + \\
 & + F_3'' \sin(\omega_3 k\Delta + \varphi_3) + \xi_k,
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

где $F_1^* = A_1 F_1$, $F_2^* = A_1 F_2$, $F_3^* = A_1 F_3$, $F_1'' = A_0 F_1$, $F_2'' = A_0 F_2$, $F_3'' = A_0 F_3$.

Модель авторегрессии для (4.22) будет иметь вновь 14-й порядок и единственным путём его уменьшения, как и по-

рядка нормальных СЛАУ, используемых при идентификации, является сокращение числа параметров модели.

Сделать это возможно путём задания, например, значений отдельных частот колебательной компоненты или соотношения частот между гармониками (например, принять $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_3 = 3\omega_1$). Упростит идентификацию и априорное знание соотношения между амплитудами гармоник (например, в виде коэффициентов ряда Фурье $F_2 = -\frac{1}{3}F_1$, а $F_3 = \frac{1}{3}F_1$) и т.д.

Лишь в подобных существенно ограничивающих область применения случаях можно рекомендовать использование модели (4.21).

4.3. Моделирование рядов динамики линейным трендом, колебательной компонентой и мультипликативной стохастической компонентой

В разделе 2.1 пособия указано, что эконометрика в качестве одной из двух возможных форм вхождения стохастической компоненты ε_k в структуру модели ряда динамики рассматривает мультипликативную. Суть этой структуры в том, что случайная компонента воздействует пропорционально детерминированной части модели.

Записывается такая модель обычно как мультипликация всех детерминированных компонент (например, трендовой T_k и сезонной S_k) и стохастической ε_k :

$$Y_k = T_k \cdot S_k \cdot \varepsilon_k. \quad (4.23)$$

Моделирование и прогнозирование рядов динамики структуры (4.23) на коротких выборках известными методами практически невозможно, так как сезонная и стохастиче-

ская компоненты рассматриваются в относительных единицах (в индексах) и определяются на длительности от 4 до 12 периодов сезонной компоненты.

При мультипликативном вхождении стохастической компоненты ε_k в структуру ряда динамики **используются только непараметрические модели трендов и сезонных компонент. Эконометрическое моделирование при этом невозможно.**

В силу того, что относительные значения ε_k в (4.23) варьируются случайным образом около единицы, то для эконометрического моделирования в абсолютных значениях стохастическая компонента должна быть записана в размерном виде, т.е. в виде $(1 + \varepsilon_k)$.

Могут иметь место и другие структуры вхождения стохастической компоненты в ряд динамики. Например, могут быть две различные мультипликативные стохастические компоненты для отдельных слагаемых суммы $T_k + S_k$.

Принципиально возможен и случай, когда одна компонента ряда динамики искажена аддитивно одной стохастической компонентой, а вторая - мультипликативно другой стохастической компонентой. Так, например, известно рассмотрение модели

$$Y_k = \xi_k \cdot \exp(-\alpha k \Delta) + \varepsilon_k,$$

где ξ_k и ε_k - две различные стохастические компоненты [82].

Как и для колебательной компоненты, обычно **априори неизвестна структура вхождения стохастических компонент** в ряд динамики. Исследователь должен иметь возможность рассмотрения различных вариантов вхождения стохастической компоненты в ряд динамики и выбрать тот из них, который даёт лучшую точность моделирования и прогнозирования.

Вначале **рассмотрим случай, когда детерминированная часть ряда образована суммой тренда и колебательной компоненты:**

$$Y_k = (T_k + S_k) \cdot (1 + \varepsilon_k) = T_k + S_k + (T_k + S_k)\varepsilon_k = T_k + S_k + \eta_k, \quad (4.24)$$

где стохастическая компонента $\eta_k = (T_k + S_k)\varepsilon_k$ - будет гетероскедастической (даже при гомоскедастичности ε_k).

Последнее обстоятельство обязательно должно быть учтено при разработке методов моделирования, что продемонстрируем на примере ряда динамики

$$Y_k = \{A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega k \Delta + \psi)\}(1 + \varepsilon_k). \quad (4.25)$$

Для детерминированной компоненты $D_k = T_k + S_k$ и в этом случае будет справедливо разностное уравнение (4.5) и обозначения в нём, но теперь запись его через наблюдения Y_k предполагает реализацию подстановки

$$D_k = \frac{Y_k}{1 + \varepsilon_k}.$$

После выполнения прямого и обратного Z -преобразований для детерминированной компоненты D_k и указанной подстановки, получим несколько слагаемых, над которыми выполним операцию деления на детерминированную и стохастическую части с помощью приёма, показанного на примере только одного слагаемого $\frac{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_k)}{1 + \varepsilon_{k-1}}$:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_k)}{1 + \varepsilon_{k-1}} &= \left(\frac{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_k)}{1 + \varepsilon_{k-1}} + 1 - 1 \right) = Y_{k-1} + Y_{k-1} \frac{1 + \varepsilon_k - 1 - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} = \\ &= Y_{k-1} + Y_{k-1} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}}. \end{aligned}$$

Выполняя аналогичные действия со всеми слагаемыми, получим в результате обобщенную параметрическую модель авторегрессии-скользящего среднего четвертого порядка для (4.25)

$$Y_k = \lambda_1 (Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}) + 2(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3}) - Y_{k-4} + \varkappa_k, \quad (4.26)$$

где $\chi_k = \lambda_1 \left\{ Y_{k-1} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} - 2Y_{k-2} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{1 + \varepsilon_{k-2}} + Y_{k-3} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3}}{1 + \varepsilon_{k-3}} \right\} +$

$$+ 2 \left\{ Y_{k-1} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} - Y_{k-2} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{1 + \varepsilon_{k-2}} + Y_{k-3} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3}}{1 + \varepsilon_{k-3}} \right\} - Y_{k-4} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-4}}{1 + \varepsilon_{k-4}}$$

- новая стохастическая компонента, являющаяся моделью скользящего среднего из значений стохастической компоненты ε_k , $\lambda_1 = 2 \cos \omega \Delta$.

Видим, что для модели (4.25) с мультипликативной стохастической компонентой авторегрессионная часть модели (4.26) имеет тот же самый вид, что и для модели (4.1) с аддитивной стохастической компонентой. Различие в стохастических компонентах η_k и χ_k .

В (4.26) χ_k имеет явно выраженный гетероскедастический характер: её значения (а следовательно, и дисперсия) зависят от значений уровней $Y_{k-1}, Y_{k-2}, Y_{k-3}, Y_{k-4}$.

Модель (4.26) даёт возможность существенного уменьшения гетероскедастичности относительно простым путём, не требующим априорных сведений и сложных расчётов.

Будем параметр λ_1 оценивать **не по абсолютному значению усредненной невязки**, как это было предложено для (4.6), а **по относительному значению усредненной невязки** (по относительной погрешности).

Для этого разделим (4.26) почленно на Y_{k-1} :

$$\frac{Y_k}{Y_{k-1}} = \lambda_1 \left(1 - \frac{2Y_{k-2}}{Y_{k-1}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-1}} \right) + 2 \left(1 - \frac{Y_{k-2}}{Y_{k-1}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-1}} \right) - \frac{Y_{k-4}}{Y_{k-1}} + \gamma_k,$$

где

$$\gamma_k = \frac{\chi_k}{Y_{k-1}} = \lambda_1 \left\{ \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} - 2 \frac{Y_{k-2}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2})}{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_{k-2})} + \frac{Y_{k-3}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3})}{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_{k-3})} \right\} +$$

$$+ 2 \left\{ \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} - \frac{Y_{k-2}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2})}{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_{k-2})} + \frac{Y_{k-3}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3})}{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_{k-3})} \right\} - \frac{Y_{k-4}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-4})}{Y_{k-1}(1 + \varepsilon_{k-4})}$$

- относительная невязка.

Теперь оценку λ_1^o позволяет определить условие

$$\lambda_1^o = \arg \min_{\lambda_1} M^o \left\{ \frac{Y_k}{Y_{k-1}} - \lambda_1 \left(1 - \frac{2Y_{k-2}}{Y_{k-1}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-1}} \right) - 2 \left(1 - \frac{Y_{k-2}}{Y_{k-1}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-1}} \right) + \frac{Y_{k-4}}{Y_{k-1}} \right\},$$

приводящее к линейному уравнению относительно λ_1^o . При этом минимизируется не абсолютная невязка \varkappa_k , а относительная γ_k , значения которой зависят уже не от абсолютных значений уровней $Y_{k-1}, Y_{k-2}, Y_{k-3}, Y_{k-4}$, а от близких к единице отношений $\frac{Y_{k-2}}{Y_{k-1}}, \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-1}}, \frac{Y_{k-4}}{Y_{k-1}}$.

Вариация этих отношений, а следовательно, и изменение дисперсии в функции наблюдений (т.е. гетероскедастичность) будет существенно меньше, т.е. гетероскедастичность принципиально имеет место, но уменьшена.

Следует ожидать малых значений усредненной оператором $M^o \{ \dots \}$ невязки в виду малости значений стохастической компоненты и присутствия в выражении для γ_k разностей малых величин

$$(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}), (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}), (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3}), (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-4}).$$

Естественно, что коррекцию гетероскедастичности можно проводить не только путём почленного деления выражения (4.25) на Y_{k-1} , но и на Y_{k-2} или на Y_{k-3} . При этом, естественно, $Y_{k-1}, Y_{k-2}, Y_{k-3}$ не должны принимать нулевые значения.

После очевидного расчёта по λ_1^o значения частоты $\omega^o = \frac{1}{\Delta} \arccos \frac{\lambda_1^o}{2}$ представим (4.25) в следующем виде:

$$Y_k = \{ A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega^o k \Delta + \psi) \} (1 + \varepsilon_k) = A_1 k \Delta + A_0 + A_4 \cos \omega^o k \Delta + A_5 \sin \omega^o k \Delta + \varepsilon_k \{ A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega^o k \Delta + \psi) \}, \quad (4.27)$$

где использованы обозначения $A_4 = A_3 \sin \psi, A_5 = A_3 \cos \psi$.

Стохастическая компонента $\varepsilon_k \{ A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega^o k \Delta + \psi) \}$ в (4.27) вновь гетероскедастична. Для устранения гетероскеда-

стичности разделим левую и правую части этого выражения на Y_k . После этого будем иметь

$$1 = A_1 \frac{k\Delta}{Y_k} + A_0 \frac{1}{Y_k} + A_4 \frac{\cos \omega^0 k\Delta}{Y_k} + A_5 \frac{\sin \omega^0 k\Delta}{Y_k} + \gamma_k, \quad (4.28)$$

где $\gamma_k = \varepsilon_k \frac{A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega^0 k\Delta + \psi)}{Y_k}$ - ряд значений новой (от-

носительной) стохастической компоненты.

Параметры A_1, A_0, A_4, A_5 , линейно входящие в (4.28), могут быть определены из СЛАУ четвёртого порядка, к которому приводит условие

$$A_1^0, A_2^0, A_4^0, A_5^0 = \arg \min_{A_1, A_0, A_4, A_5} M^0 \left\{ 1 - A_1 \frac{k\Delta}{Y_k} - A_0 \frac{1}{Y_k} - A_4 \frac{\cos \omega^0 k\Delta}{Y_k} - A_5 \frac{\sin \omega^0 k\Delta}{Y_k} \right\}.$$

Что же касается оценок амплитуды и фазы гармоники, то они определяются по формулам

$$A_3^0 = \left((A_4^0)^2 + (A_5^0)^2 \right)^{1/2}, \quad \psi^0 = \arctg(A_5^0 / A_4^0).$$

Стохастическую компоненту γ_k в (4.28) представим, после подстановки $D_k = (1 + \varepsilon_k) \{A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega k\Delta + \psi)\}$ из (4.25), в виде

$$\gamma_k = \frac{\varepsilon_k \{A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega^0 k\Delta + \psi)\}}{(1 + \varepsilon_k) \{A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega k\Delta + \psi)\}}. \quad (4.29)$$

В силу того, что $|\cos(\omega^0 k\Delta + \psi)| \leq 1$ и $|\cos(\omega k\Delta + \psi)| \leq 1$ в (4.29), сокращая практически одинаковые множители в числителе и знаменателе, можно прийти к выводу о **гомоскедастичности и малости величины** стохастической компоненты

$$\gamma_k \approx \frac{\varepsilon_k}{1 + \varepsilon_k}$$

при оценке параметров A_1, A_0, A_3, ψ .

Практически необходимый объём выборки для идентификации модели (4.24) составляет от 12 до 16 наблюдений.

Рассмотрим теперь идентификацию модели с параметрическими мультипликативными множителями вида

$$Y_k = (A_1 k \Delta + A_0) \cos(\omega k \Delta + \psi)(1 + \varepsilon_k). \quad (4.30)$$

В соответствии с методикой идентификации предыдущих моделей динамики, используя свойства и таблицу 8 соответствий Z -преобразований, приведенную в разделе 3.2, получим для детерминированной компоненты $D_k = (A_1 k \Delta + A_0) \cos(\omega k \Delta + \psi)$ следующее разностное уравнение:

$$D_k = 2\lambda_1(D_{k-1} + D_{k-3}) - \lambda_1^2 D_{k-2} - D_{k-4} - D_{k-2},$$

где $\lambda_1 = 2 \cos \omega \Delta$.

Осуществляя в последнее соотношение подстановку $D_k = \frac{Y_k}{1 + \varepsilon_k}$ из (4.30), выполняя соответствующие группировки, разделяя тем же приёмом, что и для модели (4.25), детерминированные и стохастические компоненты, будем иметь обобщенную параметрическую модель авторегрессии-скользящего среднего вида

$$Y_k = 2\lambda_1(Y_{k-1} + Y_{k-3}) - \lambda_1^2 Y_{k-2} - Y_{k-4} - 2Y_{k-2} + \zeta_k, \quad \text{где} \quad (4.31)$$

$$\zeta_k = 2\lambda_1 \left(Y_{k-1} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3}}{1 + \varepsilon_{k-3}} Y_{k-3} \right) - \lambda_1^2 \left(Y_{k-2} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{1 + \varepsilon_{k-2}} \right) -$$

$$- Y_{k-4} \left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-4}}{1 + \varepsilon_{k-4}} \right) - 2Y_{k-2} \left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{1 + \varepsilon_{k-2}} \right)$$

- гетероскедастическая стохастическая компонента.

Для уменьшения гетероскедастичности очевидна целесообразность почленного деления (4.31) на какое-то наблюдение, например, на Y_{k-2} . Тогда (4.31) примет вид

$$\frac{Y_k}{Y_{k-2}} = 2\lambda_1 \left(\frac{Y_{k-1}}{Y_{k-2}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-2}} \right) - \lambda_1^2 - \frac{Y_{k-4}}{Y_{k-2}} - 2 + v_k, \quad \text{где}$$

$$v_k = \frac{\zeta_k}{Y_{k-2}} = 2\lambda_1 \left(\frac{Y_{k-1}}{Y_{k-2}} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-2}} \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-3}}{1 + \varepsilon_{k-3}} \right) - \lambda_1^2 \left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{1 + \varepsilon_{k-2}} \right) -$$

$$- \frac{Y_{k-4}}{Y_{k-2}} \left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-4}}{1 + \varepsilon_{k-4}} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}}{1 + \varepsilon_{k-2}} \right).$$

На первом этапе идентификации будем иметь нормальную СЛАУ второго порядка при реализации условия

$$\lambda_1^o, (\lambda_1^2)^o = \arg \min_{\lambda_1, \lambda_1^2} M^o \left\{ \frac{Y_k}{Y_{k-2}} - 2\lambda_1 \left(\frac{Y_{k-1}}{Y_{k-2}} + \frac{Y_{k-3}}{Y_{k-2}} \right) + \lambda_1^2 + \frac{Y_{k-4}}{Y_{k-2}} + 2 \right\}$$

для расчёта λ_1^o и, затем, $\omega^o = \frac{1}{\Delta} \arccos \frac{\lambda_1^o}{2}$.

На втором этапе идентификации, подставив ω^o в (4.30), выполнив преобразование исходного выражения, получим:

$$\begin{aligned} Y_k &= (A_1(k\Delta) + A_0) \cos(\omega^o k\Delta + \psi) (1 + \varepsilon_k) = \\ &= A_2(k\Delta) \cos \omega^o k\Delta - A_3(k\Delta) \sin \omega^o k\Delta + A_4 \cos \omega^o k\Delta - A_5 \sin \omega^o k\Delta + \\ &+ \varepsilon_k (A_1 k\Delta + A_0) \cos(\omega^o k\Delta + \psi), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $A_2 = A_1 \cos \psi$, $A_3 = A_1 \sin \psi$, $A_4 = A_0 \cos \psi$, $A_5 = A_0 \sin \psi$, а стохастическая компонента $\varepsilon_k (A_1 k\Delta + A_0) \cos(\omega^o k\Delta + \psi)$ вновь обладает свойством гетероскедастичности.

Для исключения гетероскедастичности стохастической компоненты разделим (4.32) почленно на Y_k :

$$1 = A_2 \frac{k\Delta}{Y_k} \cos \omega^o k\Delta - A_3 \frac{k\Delta}{Y_k} \sin \omega^o k\Delta + A_4 \frac{\cos \omega^o k\Delta}{Y_k} - A_5 \frac{\sin \omega^o k\Delta}{Y_k} + \theta_k, \quad (4.33)$$

где $\theta_k = \frac{\varepsilon_k (A_1 k\Delta + A_0) \cos(\omega^o k\Delta + \psi)}{Y_k}$ - стохастическая компонента.

Из соотношения (4.33), решая соответствующую нормальную СЛАУ четвертого порядка, определяемую условием

$$\begin{aligned} A_2^o, A_3^o, A_4^o, A_5^o &= \arg \min_{A_2, A_3, A_4, A_5} M^o \left\{ 1 - A_2 \frac{k\Delta}{Y_k} \cos \omega^o k\Delta + \right. \\ &+ A_3 \frac{k\Delta}{Y_k} \sin \omega^o k\Delta - A_4 \frac{\cos \omega^o k\Delta}{Y_k} + A_5 \frac{\sin \omega^o k\Delta}{Y_k} \left. \right\}, \end{aligned}$$

можно найти оценки всех параметров модели:

$$A_1^o = \left((A_2^o)^2 + (A_3^o)^2 \right)^{1/2}, \quad A_0^o = \left((A_4^o)^2 + (A_5^o)^2 \right)^{1/2}, \quad \psi^o = \arctg(A_5^o / A_4^o).$$

Невязка (стохастическая компонента) при параметризации модели (4.33) будет равна

$$\theta_k = \frac{\varepsilon_k (A_1 k \Delta + A_0) \cos(\omega^0 k \Delta + \psi)}{Y_k} = \frac{\varepsilon_k (A_1 k \Delta + A_0) \cos(\omega^0 k \Delta + \psi)}{(A_1 k \Delta + A_0) \cos(\omega k \Delta + \psi) (1 + \varepsilon_k)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_k \cos(\omega^0 k \Delta + \psi)}{\cos(\omega k \Delta + \psi) (1 + \varepsilon_k)} \approx \frac{\varepsilon_k}{(1 + \varepsilon_k)}.$$

Видим, что стохастическая компонента θ_k гомоскедастична, а по величине даже меньше, чем ε_k . Необходимый объём выборки для параметризации модели (4.30) - от 12 до 16 наблюдений.

Обобщая, можно заключить, что, **рассматривая принципиально новую задачу** параметрического моделирования и прогнозирования ряда динамики двух моделей с мультипликативной стохастической компонентой, **удалось простыми приёмами обеспечить высокую точность на малых выборках.**

В дальнейшем рассмотрим методы идентификации и других моделей динамики с мультипликативной помехой.

Предложенное обеспечение практической гомоскедастичности стохастической компоненты означает, что если нет автокорреляции или аномальности закона распределения, то возможно применение МНК при сглаживании.

4.4. Приёмы уменьшения порядка решаемых при параметризации моделей систем линейных алгебраических уравнений

Предложенные методы параметризации моделей экономической динамики приводят, как уже показано в пособии на многочисленных примерах, к формированию нормальных СЛАУ, порядок которых в некоторых случаях оказывается довольно высоким.

При этом **устойчивость решения СЛАУ** (слабая обусловленность матрицы системы линейных алгебраических уравне-

ний - близость её определителя к нулю) в методах параметризации рядов динамики существенно хуже устойчивости решения СЛАУ в детерминированной постановке за счёт **мультиколлинеарности**. Здесь уже не удаётся решать СЛАУ, порядок которых равен нескольким десяткам.

Термин «**коллинеарность**» означает линейную связь между независимыми факторными (определяющими) переменными, тогда как мультиколлинеарность - между более, чем двумя факторными переменными. Мультиколлинеарность анализируется обычно для множественных регрессий, а для рядов динамики в качестве факторных переменных множественной регрессии выступают члены авторегрессии.

Строгая (perfect) мультиколлинеарность – наличие **линейной функциональной связи** между независимыми факторными переменными (иногда также и между зависимой или определяемой переменной). **Нестрогая (imperfect) мультиколлинеарность** – наличие **сильной линейной корреляционной связи** между независимыми факторными переменными (иногда также и между определяемой переменной).

Строгая мультиколлинеарность нарушает одно из условий Гаусса-Маркова и делает построение регрессии невозможным.

Нестрогая мультиколлинеарность, имеющая место для авторегрессий, затрудняет работу, но не препятствует получению правильных выводов. Её наличие отнюдь не означает, что модель неверно специфицирована, а обсуждение необходимости её уменьшения начинается лишь тогда, когда она существенно влияет на результаты идентификации модели. При этом однозначных критериев «силы» мультиколлинеарности не существует.

Для множественной регрессии обычно называют следующие причины мультиколлинеарности:

- ошибочное включение в уравнение двух или более линейно зависимых переменных. **Для рядов динамики** это означает, по сути, неверную спецификацию модели;

- две или более факторные переменные, в «нормальной» ситуации «слабо»коррелируемые между собой становятся в конкретных условиях выборки сильнокоррелированными. В одной выборке мультиколлинеарность может быть сильной, а в другой – слабой. **В рядах динамики мультиколлинеарность зависит от добавления (или исключения) нескольких наблюдений в выборке или просто от смены выборки того же объёма;**

- в модель включается факторная переменная, сильнокоррелирующая с определяемой переменной. **Для рядов динамики** это вновь означает неверную спецификацию модели.

Оценки коэффициентов при мультиколлинеарности остаются несмещенными, но весьма **чувствительными к изменению спецификации** и отдельных наблюдений выборки: существенно меняют свои значения и даже знак. Значение коэффициента детерминации может при этом оставаться достаточно высоким, но оценки коэффициентов, кроме неэффективности, могут быть даже статистически незначимы.

Иногда коэффициенты авторегрессии могут принять принципиально неверные значения с точки зрения теории (например, может оказаться, что рассчитываемые через коэффициенты регрессии параметры должны рассчитываться при условиях $\cos \omega\Delta > 1$ или $\exp(-\alpha\Delta) < 0$ и т.д.).

Может оказаться, что коэффициенты будут неоправданно большими или малыми с точки зрения экономического содержания.

Мультиколлинеарность зависит от многих факторов: соотношения шага дискретизации и динамики уровней ряда (например, излишне частый опрос показателя может сделать практически неразличимыми значения соседних наблюдений), от мощности стохастической компоненты, от объёма выборки, от порядка СЛАУ и т.д.

Методы уменьшения мультиколлинеарности известны, но или довольно сложны, предполагают или **наличие дополни-**

тельных статистических данных о ряде динамики, или **требуют увеличения объёма выборки**, что не всегда возможно в принципе и **совершенно не приемлемо** при моделировании инновационной экономики. В качестве простых методов уменьшения мультиколлинеарности можно назвать изменение спецификации модели (в том числе в сторону упрощения), использование первых разностей вместо самих факторных переменных.

Выше отмечалось, что **использование априорных сведений** о некоторых параметрах ряда (знание частот, фаз, соотношения частот) уменьшает количество неизвестных параметров, размерность соответствующих нормальных СЛАУ и, естественно, мультиколлинеарность. **Однако такое решение далеко не всегда возможно, сужает область применения** предложенных методов моделирования и прогнозирования.

Вычислительный эксперимент на модельных и натурных данных показал, что мультиколлинеарность не играет существенной роли при идентификации широкого класса моделей экономической динамики, если порядок СЛАУ не превышает 6-8-й.

К таким, и даже меньшим, порядкам СЛАУ удаётся привести реализацию практически всех предложенных в пособии методов идентификации при помощи нескольких приёмов, которые покажем на конкретных примерах.

1-й прием. Для уменьшения шестого порядка нормальной СЛАУ второго этапа идентификации (после нахождения ω^o) модели (4.17)

$$\begin{aligned}
 Y_k &= (A_1 k \Delta + A_0) \{1 + D \sin(\omega^o k \Delta + \psi)\} + \xi_k = \\
 &= A_1 (k \Delta) + A_0 + A_2 (k \Delta) \sin \omega^o k \Delta + A_3 \sin \omega^o k \Delta + \\
 &+ A_4 k \Delta \cos \omega^o k \Delta + A_5 \cos \omega^o k \Delta + \xi_k
 \end{aligned}$$

можно использовать приём, названный **«гармонической суммой»**.

Запишем выражение для уровня ряда динамики Y^* , отстающего **на половину** определенного (или априори известного) **периода** колебательной компоненты от текущего наблюдения Y_k :

$$Y^* = A_1 \left(k + (1/2)N^* \right) \Delta + A_0 + \left(A_1(k\Delta) + A_0 + A_1(1/2)N^* \Delta \right) \times \\ \times D \sin \left(\omega^0 \left(k + (1/2)N^* \right) \Delta + \psi \right) + \xi_k^*,$$

где $N^* = T^0 / \Delta$ - число наблюдений на периоде колебательной компоненты $T^0 = 2\pi / \omega^0$, $\xi_k^* = \xi_{k+T^0/2}$ - стохастическая компонента.

Например, при ежемесячных наблюдениях $N^* = 12$, а при квартальных $N^* = 4$. Тогда сумма $Y_k + Y^*$, которую назовём «гармонической суммой», будет иметь вид

$$\Delta_k^* = Y_k + Y^* = A_1 \Delta \left(2k + (1/2)N^* \right) + 2A_0 + \\ + D_2 (1/2)N^* \Delta \sin \left(\omega^0 \left(k + (1/2)N^* \right) \Delta \right) + \\ + D_3 (1/2)N^* \Delta \cos \left(\omega^0 \left(k + (1/2)N^* \right) \Delta \right) + \chi_k^\otimes, \quad (4.33)$$

где $D_2 = A_1 D \cos \psi$, $D_3 = A_1 D \sin \psi$, $\chi_k^\otimes = \xi_k + \xi_k^*$ - новая стохастическая компонента.

Из выражения (4.33) очевидна возможность получения оценок $A_1^0, A_0^0, D_2^0, D_3^0$ из соответствующей нормальной СЛАУ четвертого порядка, а затем рассчитать

$$D = ((D_2)^2 + (D_3)^2)^{1/2} / A_1, \quad \psi = \text{arctg} (D_3 / D_2).$$

Видим, что предложенный метод «гармонической суммы» позволяет **существенно уменьшить порядок СЛАУ** на втором этапе идентификации: с шестого, который был получен в разделе 4.1, до четвертого, уменьшив тем самым мультиколлинеарность.

Следует заметить, что количество наблюдений, минимально необходимых для обеспечения точности, остаётся таким же, что и в предложенном ранее методе (т.е. от 16-ти до 20-ти). При этом, однако, **увеличивается необходимый интервал наблюдения** - на величину половины периода гармонической колеба-

тельной компоненты (на интервал наблюдения длительностью в шесть наблюдений). Но и данный интервал наблюдения существенно меньше, чем в известных методах моделирования.

Предложенный приём можно определить как модификацию модели авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего (ARIMA), в котором используется первая разность уровней ряда, разнесенных на известный период колебательной компоненты [73]. Сравнивая предложенный приём с ARIMA-моделью, отметим, что в «гармонической сумме» интервал наблюдения меньше на половину периода гармонической компоненты. Кроме того, сама частота гармонической компоненты может быть определена в нём по исходной выборке.

2-й прием обладает большой общностью и может быть применен для уменьшения порядка нормальных СЛАУ при идентификации предложенными методами всех моделей динамики. Его можно назвать **вариацией параметра** и считать модификацией приёма, предложенного Л.М. Койком для динамических моделей с распределенным лагом в независимых переменных [8].

Продемонстрируем его на примере уменьшения шестого порядка нормальной СЛАУ второго этапа идентификации (после нахождения ω^0) той же модели (4.17):

$$Y_k = (A_1 k \Delta + A_0) \{1 + D \sin(\omega^0 k \Delta + \psi_i)\} + \xi_K = \\ = A_1 k \Delta + A_0 + A_6 k \Delta \sin(\omega^0 k \Delta + \psi_i) + A_7 \sin(\omega^0 k \Delta + \psi_i) + \xi_K,$$

где $A_6 = DA_1, A_7 = DA_0$, а ψ_i - значения начальной фазы, которые будем считать известными с некоторого произвольного первого значения (например, нулевого), а затем изменять с произвольным фиксированным шагом, например, 0,1; 0,01; 0,001, в возможном диапазоне значений.

Для каждого ψ_i можем рассчитать значения $A_{1i}^o, A_{0i}^o, D_i^o$ из получающейся нормальной СЛАУ четвертого порядка.

Из всех возможных значений ψ_i выберем то значение ψ_i^o , при котором будет минимальна усредненная невязка (или ближе к единице значение коэффициента детерминации). Возможности современной вычислительной техники позволяют легко выполнить указанные расчёты.

Получающиеся при этом значении ψ_i^o оценки $A_{1i}^o, A_{0i}^o, D_i^o$ и принимаются в качестве лучших (наиболее точных) при моделировании.

Как видим, данный приём, уменьшая порядок СЛАУ с шестого до четвертого, **не требует**, в отличие от первого, **увеличения интервала наблюдения на половину периода гармонической компоненты** и, в силу этого, лучше при моделировании динамики инновационной экономики.

Приведем иллюстрацию этого приёма на выборке (Таблица 8 и рис.15), широко использованной в научной дискуссии о применении метода классической сезонной декомпозиции [33].

Напомним, что в классическом методе декомпозиции предполагается знание периода (в данном случае 12 месяцев) и отсутствует аналитическое выражение модели. Строго говоря, выборка такого объема слишком мала для применения указанного метода – усреднение сезонных отклонений проводится всего по двум периодам. Применение приема вариации параметра (в данном случае периода T) для указанной выборки позволило получить результаты, представленные в таблице 9 и рис.16.

Таблица 8

Тестовая выборка

Номер наблюдения	Значение уровня наблюдения	Номер наблюдения	Значение уровня наблюдения
1	8174,4	13	8991,84
2	5078,33	14	5586,16
3	4507,2	15	4957,92
4	2257,19	16	2482,91
5	3400,69	17	3740,76
6	2968,71	18	3265,58
7	2147,14	19	2361,85
8	1325,56	20	1458,12
9	2290,95	21	2520,05
10	2953,34	22	3248,67
11	4216,28	23	4637,91
12	8227,569	24	9050,326

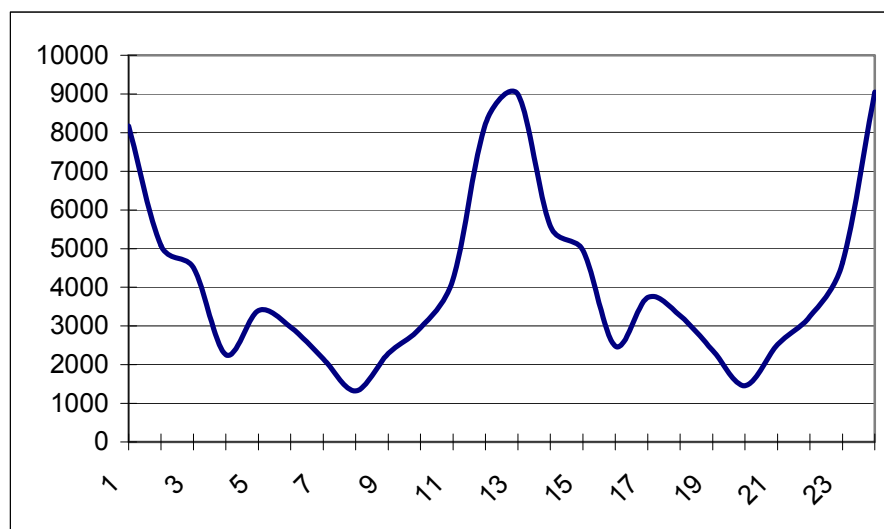


Рис. 15. Графическое изображение значений уровней тестовой выборки

Таблица 9

Значения R^2 и периода колебательной компоненты модели (4.1)

T	10	11	12	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13	14
R^2	0,390	0,577	0,695	0,707	0,711	0,714	0,716	0,717	0,718	0,716	0,714	0,712	0,709

По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что в данном случае оценка периода сезонной компоненты оказалась равной $12,7\Delta$, т.е. 12,7 месяцев, так как $\Delta=1$ месяц, а не 12, как предполагалось ранее.



Рис. 16. Графическая иллюстрация способа определения периода T сезонной компоненты по критерию R^2 , используя вариацию параметра T

Приведенный пример параметризации периода является, в большей степени, иллюстрацией к предложенному приему вариации параметров. Для тестовой выборки предположение о 12-месячном периоде сезонности логически вытекает из годового температурного цикла, установленного природой, который нельзя опровергнуть, но учесть его вариации целесообразно. В принципе данный прием может быть реализован и для **вари-**

ции двумя параметрами модели авторегрессии – например, методом покоординатного спуска [1].

В экономике достаточно много процессов и явлений, где не существует столь явных априорных знаний о периоде колебаний и в этих случаях предложенный приём особенно эффективен.

Что же касается данного примера, то альтернативой рассмотренной модели (4.1) могут быть (4.11) или (4.14) или даже модели с переменной амплитудой гармоник: в силу явного визуального отличия от гармонической колебательной компоненты.

3-й приём включает в себя комплексное использование приёма вариации параметра и преобразование исходной модели.

Рассмотрим модель (4.20). Разделим в ней почленно неслучайные компоненты на $k\Delta$:

$$\begin{aligned} \frac{D_k}{k\Delta} = & A_1 + \frac{A_0}{k\Delta} + F_1 \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + \\ & + F_2 \sin(\omega_2 k\Delta + \varphi_2) + F_3 \sin(\omega_3 k\Delta + \varphi_3). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Каждое из слагаемых (4.34) имеет прямое и обратное Z-преобразование, что в соответствии с приведенной выше методикой позволяет сконструировать следующее разностное уравнение седьмого порядка

$$\begin{aligned} x_k = & x_{k-1} - 3x_{k-2} + 3x_{k-3} - 3x_{k-4} + 3x_{k-5} - x_{k-6} + x_{k-7} + \\ & + \mu_1(x_{k-1} - x_{k-2} + 2x_{k-3} - 2x_{k-4} + x_{k-5} - x_{k-6}) + \mu_2(-x_{k-2} + \\ & + x_{k-3} - x_{k-4} + x_{k-5}) + \mu_3(x_{k-3} - x_{k-4}) + \frac{A_0}{\Delta} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \right. \\ & + \frac{3}{k-2} - \frac{3}{k-3} + \frac{3}{k-4} - \frac{3}{k-5} + \frac{1}{k-6} - \frac{1}{k-7} - \mu_1 \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-2} + \right. \\ & + \frac{2}{k-3} - \frac{2}{k-4} + \frac{1}{k-5} - \frac{1}{k-6} \left. \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-3} + \frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-5} \right) - \\ & \left. - \mu_3 \left(\frac{1}{k-3} - \frac{1}{k-4} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $x_k = \frac{D_k}{k\Delta}$, $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\mu_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$, $\mu_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Выражая x_k в (4.35) через уровни ряда динамики ($Y_k = x_k(k\Delta) + \xi_k$), можно получить модель авторегрессии

$$\begin{aligned}
Y_k = & Y_{k-1} - 3Y_{k-2} + 3Y_{k-3} - 3Y_{k-4} + 3Y_{k-5} - Y_{k-6} + Y_{k-7} + \\
& + \mu_1(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5} - Y_{k-6}) + \mu_2(-Y_{k-2} + \\
& + Y_{k-3} - Y_{k-4} + Y_{k-5}) + \mu_3(Y_{k-3} - Y_{k-4}) + A_0 \left\{ 1 - \frac{k}{k-1} + \right. \\
& + \frac{3k}{k-2} - \frac{3k}{k-3} + \frac{3k}{k-4} - \frac{3k}{k-5} + \frac{k}{k-6} - \frac{k}{k-7} - \mu_1 \left(\frac{k}{k-1} - \frac{k}{k-2} + \right. \\
& + \frac{2k}{k-3} - \frac{2k}{k-4} + \frac{k}{k-5} - \frac{k}{k-6} \left. \right) + \mu_2 \left(\frac{k}{k-2} - \frac{k}{k-3} + \frac{k}{k-4} - \frac{k}{k-5} \right) - \\
& \left. - \mu_3 \left(\frac{k}{k-3} - \frac{k}{k-4} \right) \right\} + \zeta_k,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

где ζ_k - гомоскедастическая стохастическая компонента, образуемая взвешенной суммой из $\xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots, \xi_{k-6}$, такой же, как и для Y_k в (4.36).

Параметризация модели по данной авторегрессии потребует от 21 до 28 наблюдений, в то время как для авторегрессии четырнадцатого порядка, построенной ранее для (4.20), требуется выборка в два раза больше.

Для (4.36) может быть получена нормальная СЛАУ седьмого порядка, решение которой может быть неустойчиво. При признаках сильной мультиколлинеарности можно воспользоваться приёмом вариации параметра A_0 , что позволит перейти к решению СЛАУ 3-го порядка.

Благодаря этому приему становится возможна параметризация моделей с «эволюционирующей» сезонностью, с высокой степенью сложности колебательной компоненты (имеется в виду наличие 3-х гармонических членов с произвольными соотношениями частот, фаз и амплитуд).

4.5. Тестирование обобщенных параметрических ARMA-моделей для линейного тренда с колебательной компонентой

Практическая ценность разработанных методов моделирования и прогнозирования рядов динамики определяется сравнением с известными методами **по точности моделирования и прогнозирования на одних и тех же реальных и модельных выборках.**

Для оценки уменьшения погрешности из-за возможной нестационарности вида и параметров модели, для расширения области применения методов моделирования и прогнозирования на «молодые» экономические процессы и явления **предметом сравнения явился и объём выборки, при котором достигается одинаковая точность.**

Для определения области применения разработанных методов **точностные характеристики** предлагаемых методов моделирования и прогнозирования **целесообразно определить в широком диапазоне сочетаний параметров моделей и стохастической компоненты** в форме тестовых экспериментов.

Необходимым условием сравнения точности предложенных методов моделирования и прогнозирования рядов динамики (с известными методами) явилась разработка соответствующего программного обеспечения, реализующего предложенные методы на тестовых и реальных данных.

Созданный программный комплекс позволил исследовать точность предложенного метода моделирования и прогнозирования модели (4.1) на модельных выборках. Численный эксперимент заключался в использовании программы генерации случайной выборки ξ_k (стохастической компоненты) с нормальным законом распределения вероятностей значений с нулевым математическим ожиданием и регулируемой (назначаемой) дисперсией. Данная компонента суммировалась с генерируемой детерминированной компонентой $D_k = A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \sin(\omega k \Delta + \psi)$, с известными назначаемыми параметрами, и мощностью (дисперсией), определяемой по известным формулам [3].

Исследовалась точность определения в условиях воздействия стохастической компоненты генерируемых параметров модели при различных соотношениях мощностей стохастической и

детерминированной компонент (соотношениях «шум/сигнал»). Данная методология исследования точности широко применяется в теории и практике измерений, позволяя оценить диапазон, в котором обеспечивается удовлетворительная точность анализируемого метода обработки данных – в нашем случае предложенного метода моделирования и прогнозирования. Обычно метод обработки данных считают помехозащищенным, если он обеспечивает удовлетворительную точность при отношении мощностей шума и сигнала в диапазоне 0,1-0,2.

Результаты проведенного исследования по критерию коэффициента детерминации R^2 при различных значениях выборки (числа наблюдений) в функции соотношения мощностей «шум/сигнал» представлены на рис. 17. Для обеспечения независимости исследований от конкретной выборки расчет проводился на пяти различных выборках и результаты усреднялись. Сколь либо ощутимых изменений результата исследований при большем количестве выборок не наблюдалось.

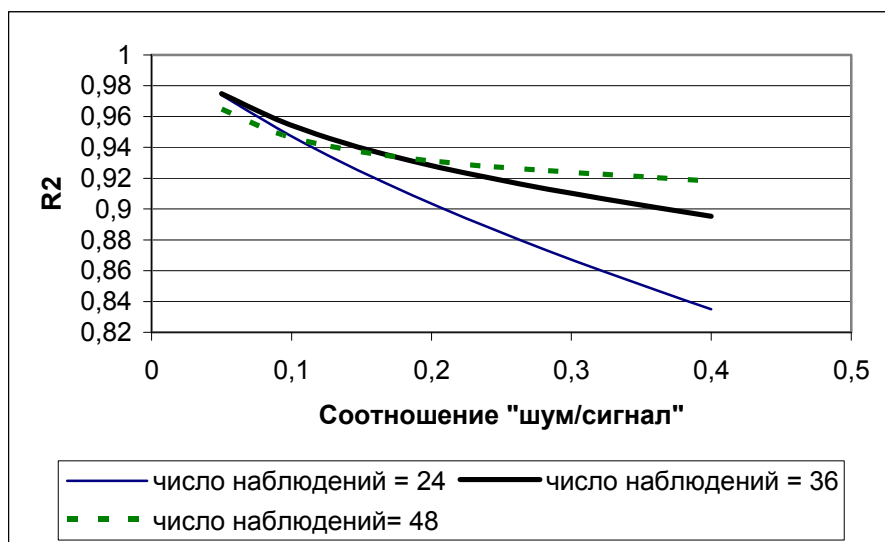


Рис. 17. Результаты исследования точности метода параметризации модели (4.1) по критерию R^2 в функции числа наблюдений и соотношений мощностей «шум/ сигнал»

Из рис. 17 видим, что предложенный способ параметризации модели (4.1) имеет высокую помехозащищенность (устойчивость к помехе) в определении параметров модели даже при

значительном соотношении «шум/сигнал». Уменьшение значений R^2 не более чем на 10% предложенный метод обеспечивает в диапазоне отношения мощностей «шум/сигнал» до 0,3, причём устойчивость параметризации возрастает с увеличением числа наблюдений.

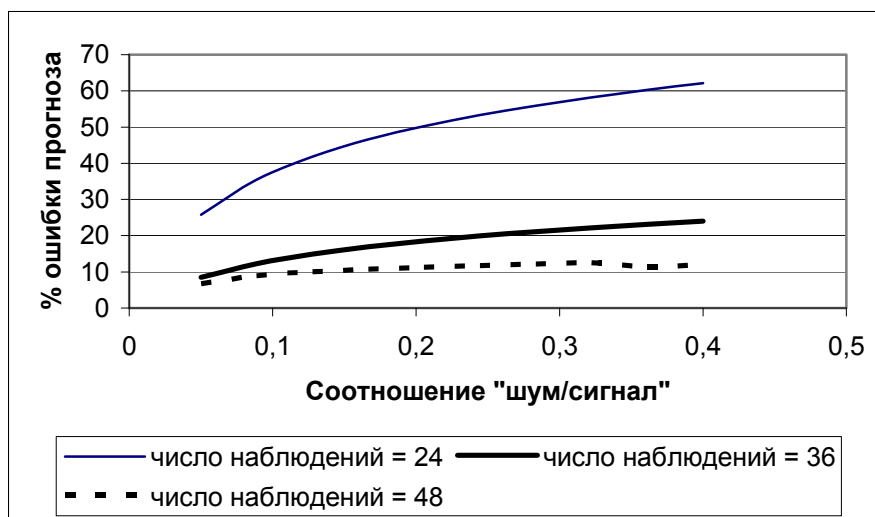


Рис. 18. Результаты исследования точности МАРЕ-ошибки прогноза для модели (4.1) в функции числа наблюдений и соотношений мощностей «шум/сигнал»

Рис.18 показывает изменение МАРЕ-ошибок прогноза на период равный 10% от числа наблюдений в функции тех же параметров.

Ошибка прогноза, представленная на рис. 18, оказывается более чувствительной к действию помехи, но также укладывается в категорию высокой точности [8].

На рис. 19 показаны фактические значения подписного тиража некоторой газеты, условно названной для соблюдения коммерческой тайны «ИС», в г. Самара ежемесячно с января 2002 года по декабрь 2005 года.

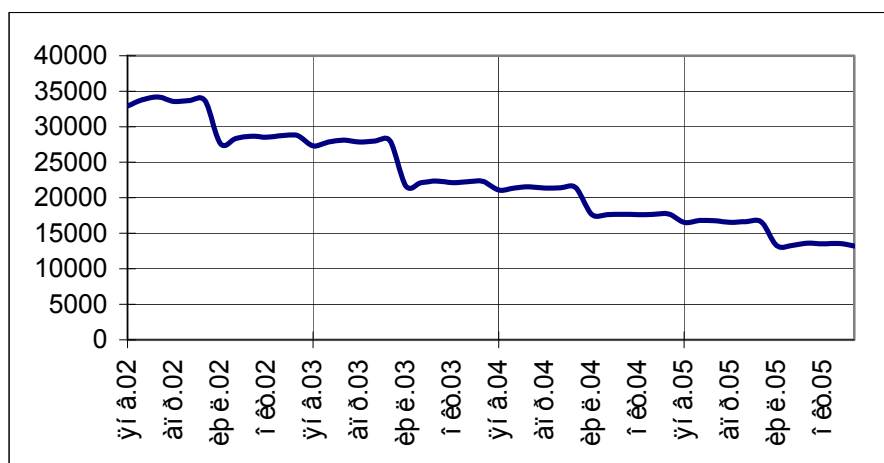


Рис.19. Подписной тираж газеты «ИС» (тыс.шт.)

Проводя сглаживание различными способами, можно увидеть, что колеблемость носит выраженный «пилообразный» характер, что и показано на рис. 20. Налицо плавный рост подписного тиража в первые месяцы года (возможно, за счет мероприятий по привлечению подписчиков типа промо-акций, стимулирующих мероприятий и т.п.). Затем наступает резкий сезонный спад (потери до 4 тысяч подписчиков) при летней «полугодовой» подписной кампании с 1 июля, последующий рост аналогичный росту 1-го полугодия и менее значительный (до 1000 подписчиков) спад при зимней подписной кампании.

Предположим и параметризируем на реальных данных самую простую модель (4.1) динамики подписного тиража: сумму линейного тренда и гармонической колеблемости и стохастической компоненты

$$Y_k = A_1 k \Delta + A_0 + A_3 \sin(\omega k \Delta + \psi) + \xi_k.$$

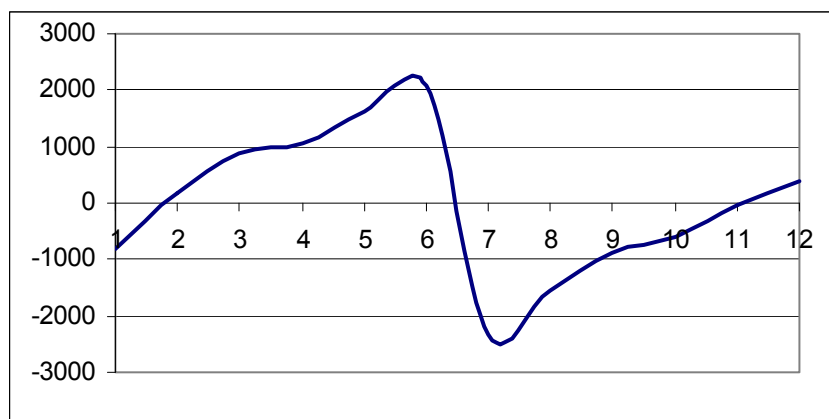


Рис. 20. Стационарная сезонная компонента тиража газеты «ИС»

Осуществим моделирование динамики подписного тиража известным непараметрическим методом классической сезонной декомпозиции и сравним результаты.

В [55] приведены полные расчеты с получением МНК-оценок, а в рамках данного пособия ограничимся лишь итоговыми результатами, представленными в таблице 10 и на рис. 21 и 22.

Таблица 10

Коэффициент детерминации, ошибка прогноза и аналитические выражения моделей в функции объёма выборки в методе параметрической авто-регрессии

Кол-во наблюдений	R^2	Ошибка прогноза %	Аналитическое выражение модели
12	0,9138	64,60	$y(t)=39765,07-2997,38t+7448,17\cos(0,52t+3,68)$
15	0,8661	17,65	$y(t)=30907,15+84,62t+3522,06\cos(0,52t-1,08)$
18	0,8701	11,40	$y(t)=32106,08-193,26t+2627,09\cos(0,52t-1,24)$
21	0,8758	5,69	$y(t)=33473,48-466,08t+1440,58\cos(0,52t-1,34)$
24	0,8945	6,77	$y(t)=33244,68-423,08t+1538,66\cos(0,52t-1,5)$
27	0,9011	3,78	$y(t)=33560,55-488,85t+1725,11\cos(0,52t-1,28)$
30	0,9235	4,89	$y(t)=33472,01-474,85t+1684,14\cos(0,52t-1,23)$
33	0,9362	4,60	$y(t)=33747,24-505,91t+1474,71\cos(0,52t-1,3)$
36	0,9421	7,65	$y(t)=33606,79-491,2t+1528,77\cos(0,52t-1,39)$
39	0,9531	6,56	$y(t)=33595,62-489,81t+1465,35\cos(0,52t-1,37)$
42	0,9552	3,55	$y(t)=33380,33-468,79t+1335,36\cos(0,52t-1,24)$
45	0,9624	7,27	$y(t)=33399,96-470,36t+1323,24\cos(0,52t-1,24)$
48	0,9646	12,92	$y(t)=33256,23-459,88t+1393,07\cos(0,52t-1,33)$

Графическая иллюстрация сравнения точности моделирования с использованием предложенного метода авторегрессий и метода классической сезонной декомпозиции по критерию адекватности модели и точности прогноза приведена, соответственно, на рис. 21 и 22.

Из рис. 21 видно, что метод авторегрессии на короткой выборке в 24 наблюдения уже обеспечивает высокую точность моделирования, причём, в принципе, нет необходимости в увеличении этого объёма. При одинаковой точности **выигрыш по объёму выборки предложенного метода в сравнении с известным – более чем в два раза.**

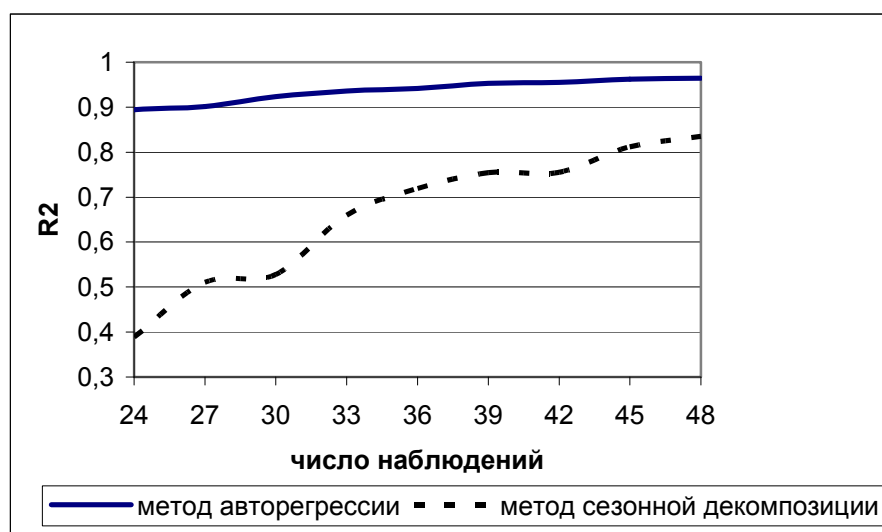


Рис. 21. Сравнение значений R^2 от числа наблюдений для методов классической сезонной декомпозиции и авторегрессии

Рис. 22 показывает, что имеется и **выигрыш в точности прогнозирования – в полтора-два раза.**

Достаточно нагляден и пример внедрения более точных методов моделирования и прогнозирования на предприятиях сферы услуг. По данным за 2000–2002 гг. ОАО «Авиакомпания «Самара»» предложенными методами параметризована мо-

дель (4.1) суммарного (на внутренних и внешних авиалиниях) эксплуатационного пассажирооборота (в тыс. пассаж. км.):

$$Y_k = -115,71(k\Delta) + 52681,86 + 15747,26 \cos(0,52k\Delta + 2,68),$$

где Δ - месяц.

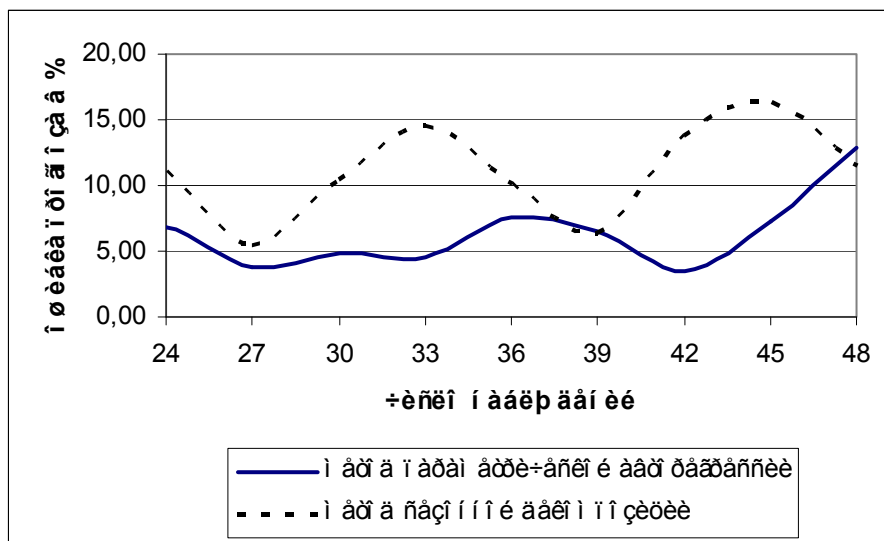


Рис. 22. Сравнение относительных ошибок прогноза в функции количества наблюдений для методов классической сезонной декомпозиции и авторегрессии

При этом оказалось, что $R^2=0,8216$, а MAPE-оценка 17,51% при полугодовом прогнозе. Реальная выборка, модельные и прогнозные значения представлены на рис.23.

Учитывая масштабы данного бизнеса и высокие потери из-за возможных необоснованных управленческих решений можно утверждать, что предложенный метод моделирования на малом числе наблюдений дает прогноз высокой точности на достаточно большом периоде упреждения.

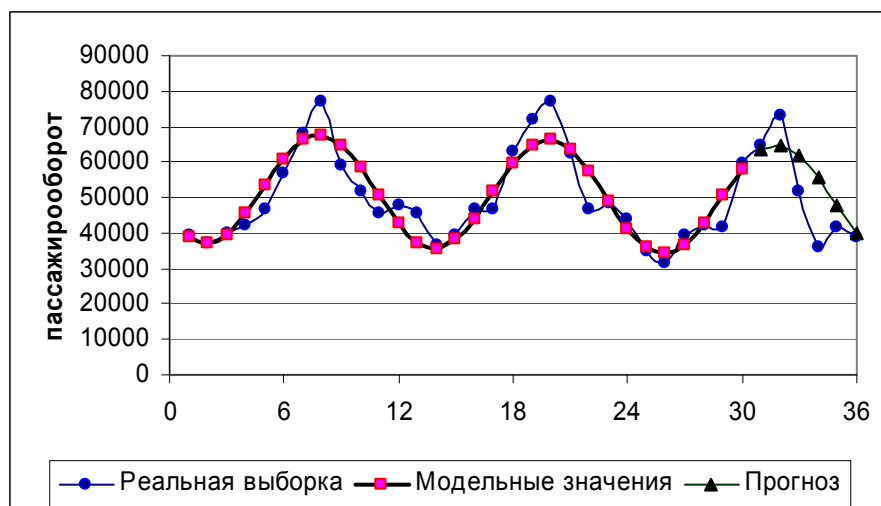


Рис. 23. Моделирование эксплуатационного пассажирооборота ОАО «Авиакомпания «Самара»»

Экономический эффект будет определяться совокупностью эффектов:

- от удовлетворения спроса на пассажироперевозки,
- экономии топлива,
- организации технического обслуживания,
- работы персонала, вспомогательных служб,
- и т.д.

Известны результаты моделирования потребления электроэнергии (в млн кВт/час) жителями региона на довольно короткой выборке - за 16 кварталов [73, С.313], приведенные в таблице 11.

Таблица 11

Потребление электроэнергии жителями региона

6,0	4,4	5,0	9,0	7,2	4,8	6,0	10,0
8,0	5,6	6,4	11,0	9,0	6,6	7,0	10,8

Там же детально показано применение метода сезонной декомпозиции и определен коэффициент детерминации $R^2 = 0,914971$.

Осуществлена по той же выборке параметризация предложенным методом модели (4.1)

$$Y_k = 0,26 \cdot (k\Delta) + 5,38 + 2,17 \sin(1,7k\Delta + 0,45)$$

с коэффициентом детерминации 0,92. Из рис. 24, на котором представлены реальные и модельные значения, видим, что параметрическое моделирование обеспечило несколько лучшее значение коэффициента детерминации, но, главное - возможность аналитического прогнозирования и визуальную близость уровней.

Приведем теперь исследования более сложной модели (4.11), состоящей из суммы линейного тренда, двух гармоник и стохастической компоненты.

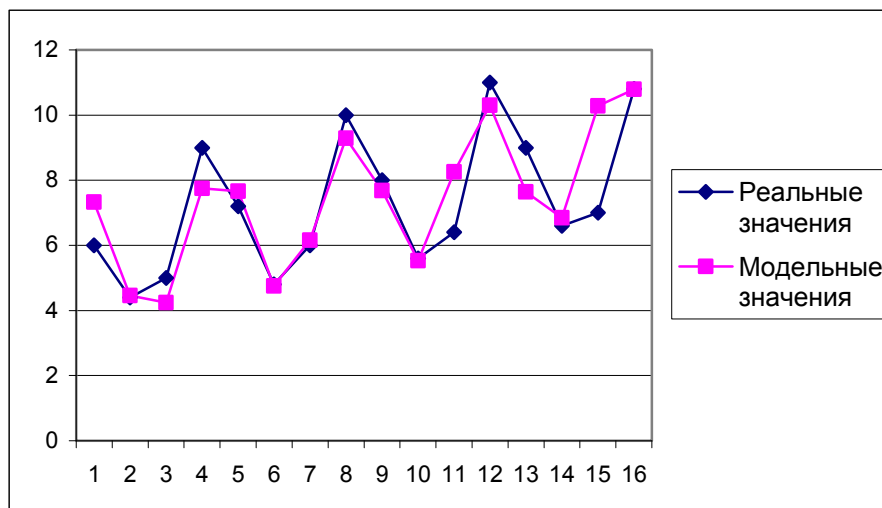


Рис. 24. Моделирование выражением (4.1) расхода электроэнергии жителями региона

При помощи вычислительного комплекса выполнен анализ помехозащищенности предложенного метода параметризации модели (4.11) на тестовых выборках. Для этого генерировались выборки рядов детерминированных компонент, с которыми суммировалась также генерируемая программой случайных чисел стохастическая компонента с нормальным законом распределения и регулируемой мощностью. Расчёты R^2 при различных соотношениях мощностей помехи (стохастической компоненты) и полезного сигнала (ряда уровней детерминированных компонент модели (4.11)) для различных объёмов выборки, приведенные на рис. 25 и 26, показали высокую помехоза-

щищенность предложенного способа моделирования при различных объёмах выборки N . До отношения шум/сигнал в 20% уменьшение коэффициента детерминации незначительно при выборке в 12-18 наблюдений. Для обеспечения независимости результатов моделирования от конкретных выборок результаты усреднялись для пяти различных генерируемых выборок помехи.

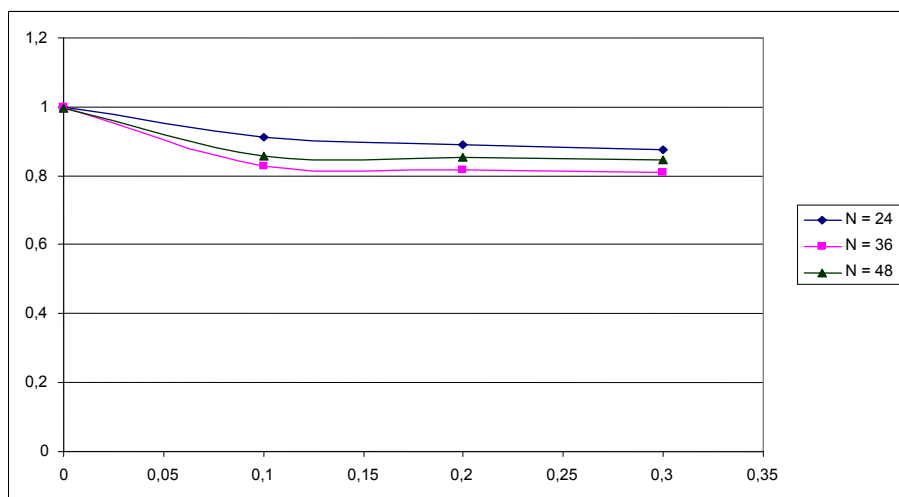


Рис. 25. Зависимость коэффициента детерминации от отношения мощностей шум/сигнал при $N = 24, 36, 48$

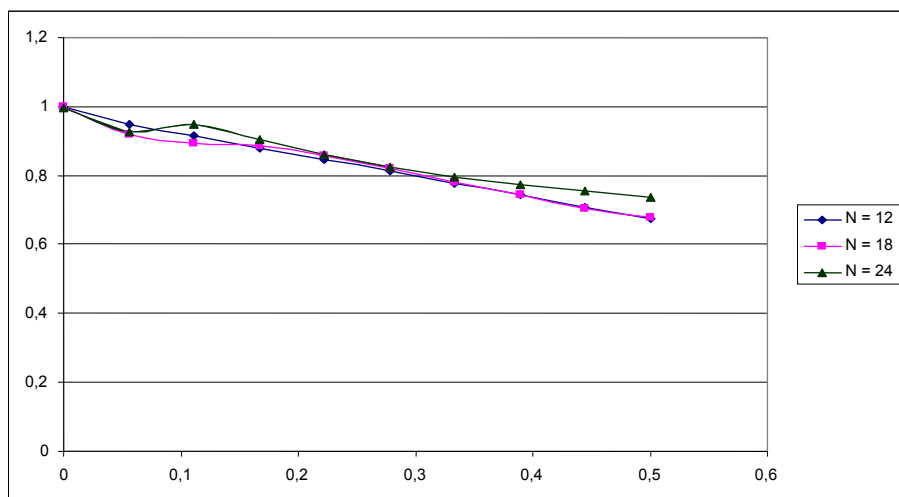


Рис. 26. Зависимость коэффициента детерминации от отношения мощностей шум/сигнал при $N = 12, 18, 24$

Ещё одной положительной характеристикой данного метода моделирования явились результаты исследований точности при изменении диапазона значений параметров модели (4.11): соотношения амплитуд гармоник $\frac{A_3}{A_6} = [1,5; 2; 3; 5; 10]$ и соотношения частот

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = [2; 3; 5; 12; 25]$ (при соблюдении условий Котельникова-

Шеннона). В целях исключения влияния других параметров на результаты для них выставлялись фиксированные (для фаз гармоник - нулевые) значения. Для каждой пары значений рассматривались три выборки – 24, 36 и 48 наблюдений. На каждом из указанных объёмов выборки помеха генерировалась пять раз и результаты усреднялись. Результаты представлены на рис. 27-29.

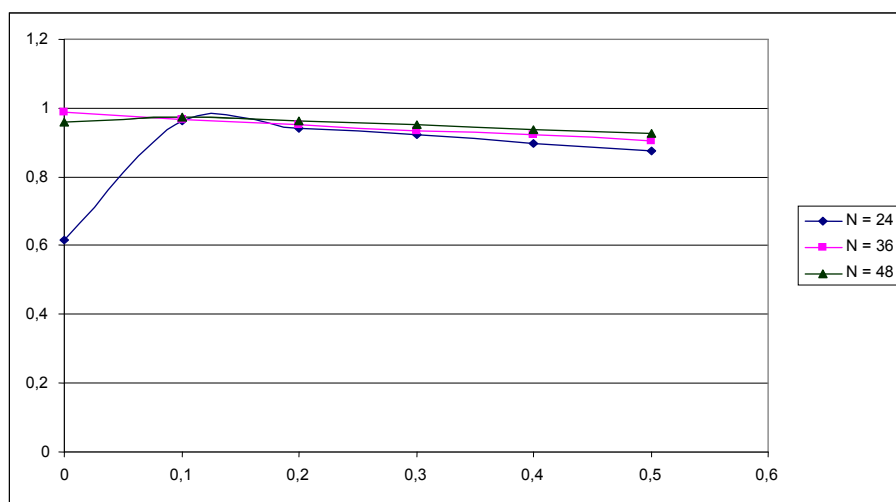


Рис. 27. Зависимость коэффициента детерминации при параметризации модели (4.11) предложенным методом от соотношения мощностей помеха/ полезный сигнал при отношении амплитуд гармоник 10 и отношении частот гармоник 5

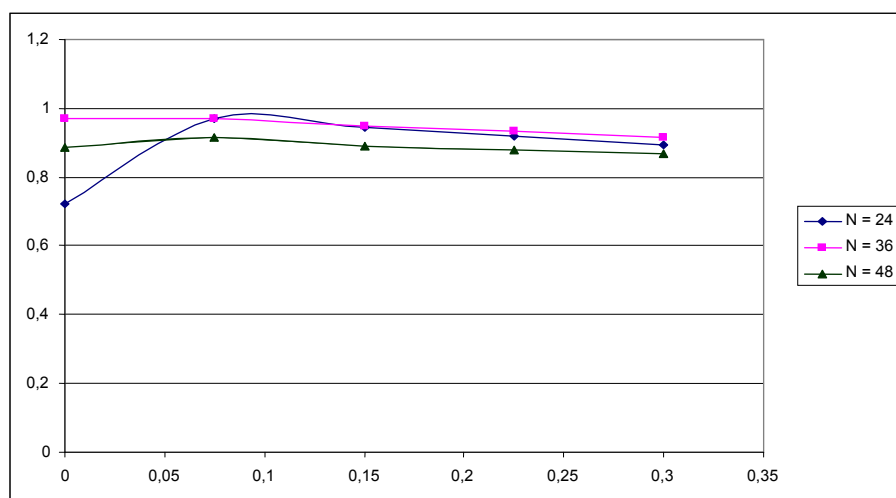


Рис. 28. Зависимость коэффициента детерминации при параметризации модели (4.11) предложенным методом от соотношения мощностей помеха/ полезный сигнал при отношении амплитуд гармоник 3 и отношении частот гармоник 2

Оказалось, что при изменении указанных величин в 5-25 раз точностные характеристики почти не меняются, что означает возможность применения данного метода моделирования и прогнозирования для объектов разной физической или экономической природы.

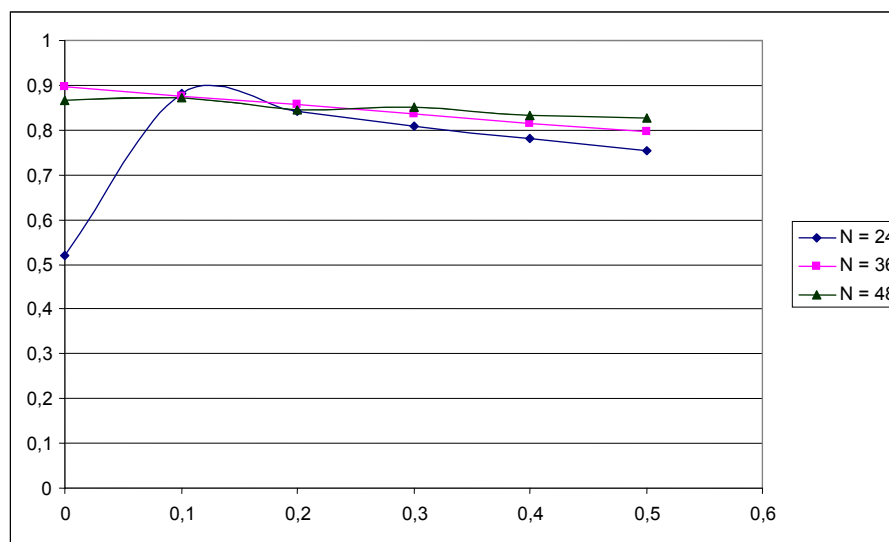


Рис. 29. Зависимость коэффициента детерминации при параметризации модели (4.11) предложенным методом от соотношения мощностей помеха/ полезный сигнал при отношении амплитуд гармоник 3 и отношении частот гармоник 25

Перейдём теперь к **тестированию предложенного метода параметризации на реальной выборке**. Модель (4.11) визуально близка динамике годового сбора зерновых в Самарской области в тыс. тонн (рис. 30) и, в силу этого, рассмотрим возможность использования её для моделирования и прогнозирования валового сбора зерна.

Следует отдавать себе отчёт в том, что данный объект моделирования весьма сложен: модель определяемого показателя существенно эволюционирует – зависит от комплекса природных условий (распределения температуры и осадков со времени сева до времени сбора урожая), от внесения удобрений, от управленческих воздействий и т.д. Отметим, что, как правило,

наиболее высокую эволюцию имеет высокочастотная гармоника: например, статистика говорит о чередовании высоких урожаев сериями – то по два, то по три года.

При моделировании использовались разные выборки годовых валовых сборов зерна разного объема: от 8 до 20 годовых наблюдений. Напомним, что выборки, используемые в известных методах многомасштабной параметризации, требуют анализа от 4 до 12 периодов самой низкочастотной из двух гармоник, что с учётом теоремы Котельникова-Шеннона предполагает выборки от 24 до 100 наблюдений, т.е. от 24 до 100 лет.

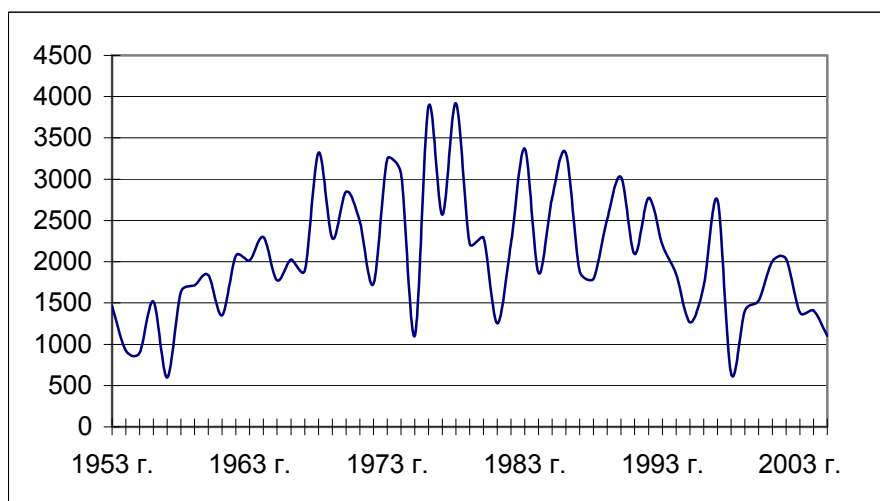


Рис. 30. Валовой сбор зерна по Самарской области в 1953 - 2005 гг. (в хозяйствах всех категорий; в весе после доработки)

Естественно, что применение известной методики неоправданно, так как такие статистические данные просто отсутствуют, но, главное, за такой интервал времени могут (и должны) существенно измениться технологии в сельском хозяйстве, засеваемые площади, востребованность тех или иных объёмов зерна, экономические и организационные условия производства зерна.

В качестве оценки точности моделирования принималось значение коэффициента согласия R^2 , а в качестве оценки точности прогнозирования - среднее значение модуля разности ре-

альных и прогнозных значений, отнесенных к реальным значениям, т.е. МАРЕ-оценка.

Для каждого объема выборки решалась соответствующая система нормальных СЛАУ. Для снижения размерности и уменьшения тем самым вычислительных погрешностей и мультиколлинеарности использовался прием вариации параметра.

В данном случае для различных объемов выборки осуществлялся перебор значений одной из идентифицируемых частот и выбор того из них, которое обеспечивает максимальное значение коэффициента детерминации - $\text{Max } R^2$. Шаг перебора частоты обеспечивал 100 оценок параметров модели, из которых выбирались лучшие по принятому критерию. Набор параметров модели, при котором достигался $\text{Max } R^2$ использовался для прогноза на один шаг (на один год) и при этом рассчитывалась МАРЕ-ошибка прогноза.

Результаты моделирования и прогнозирования ряда динамики наблюдений урожайности для различных объемов выборки при горизонте прогноза в один год приведены в таблице 12.

Таблица 12

Результаты моделирования и прогнозирования валового сбора зерна в Самарской области на 2006 г.

Объем выборки	В качестве критерия принимался $\text{Max } R^2$ и при этих значениях параметров рассчитывалась соответствующая МАРЕ - ошибка		Принимался комплексный критерий $\text{Max}((R^2 - \text{МАРЕ-ошибка})/100)$ и при этих значениях параметров рассчитывалась соответствующая МАРЕ - ошибка	
	$\text{Max } R^2$	МАРЕ-ошибка	R^2	МАРЕ-ошибка
N				
8	0,91	5,7	0,9	1,67
10	0,88	11,49	0,83	8,18
12	0,90	16,10		
14	0,68	27,64		
16	0,67	41,56		
18	0,75	42,69		
20	0,73	47,50		

Кроме указанных критериев точности (максимального значения R^2 и MAPE-ошибка прогноза) здесь же приведены значения и предложенного **комплексного критерия**, заключающегося в расчёте максимального значения для каждой исследуемой модели ($(R^2 - \text{MAPE})/100$).

Комплексный критерий позволяет выбирать тот набор значений параметров модели (4.11), который обеспечивает его максимальное значение, т.е. **даёт и лучшее моделирование, и лучшее прогнозирование.**

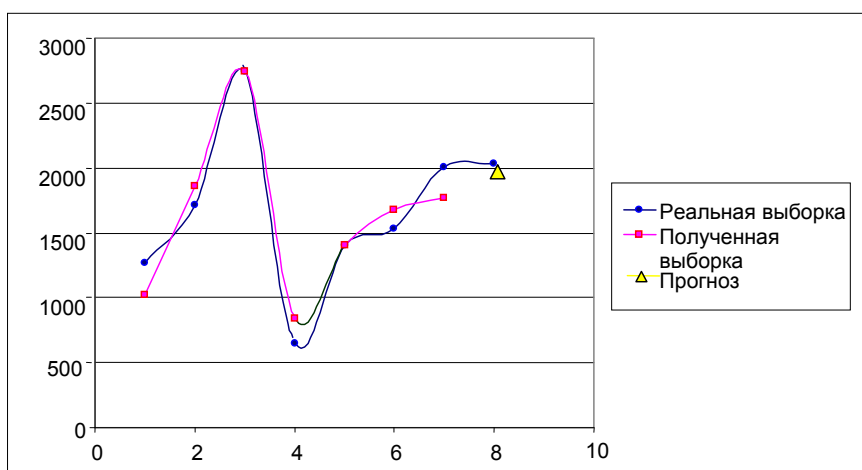


Рис. 31. Реальная выборка валового сбора зерна объёмом $N = 8$, её моделирование выражением (4.11) и ошибка прогноза на один шаг

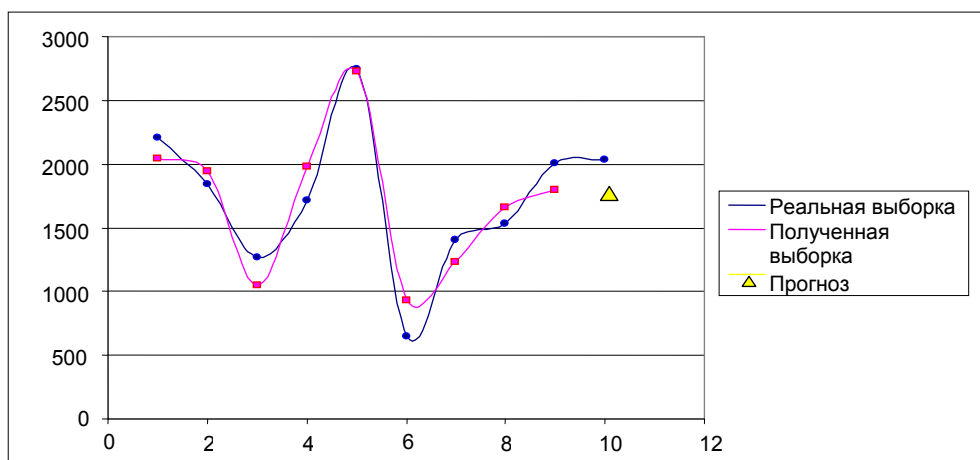


Рис. 32. Реальная выборка валового сбора зерна объёмом $N = 10$, её моделирование выражением (4.11) и ошибка прогноза на один шаг

На рис. 31-32 приведены некоторые результаты моделирования в функции объёма выборки: от минимально возможных 8 наблюдений до 20.

Анализ данных, приведенных в таблице 4, и графиков на рис. 31-33 позволяет утверждать, что модель (4.11) и предложенный метод её параметризации с приемлемой точностью осуществляют моделирование и прогнозирование. При этом точность моделирования и прогнозирования оказалась выше на малых выборках (8-10 наблюдений), что обусловлено, видимо, высокой эволюцией ряда динамики.

Исследования позволили сделать еще один вывод – комплексный критерий качества моделирования обладает высокой точностью и моделирования и прогноза.

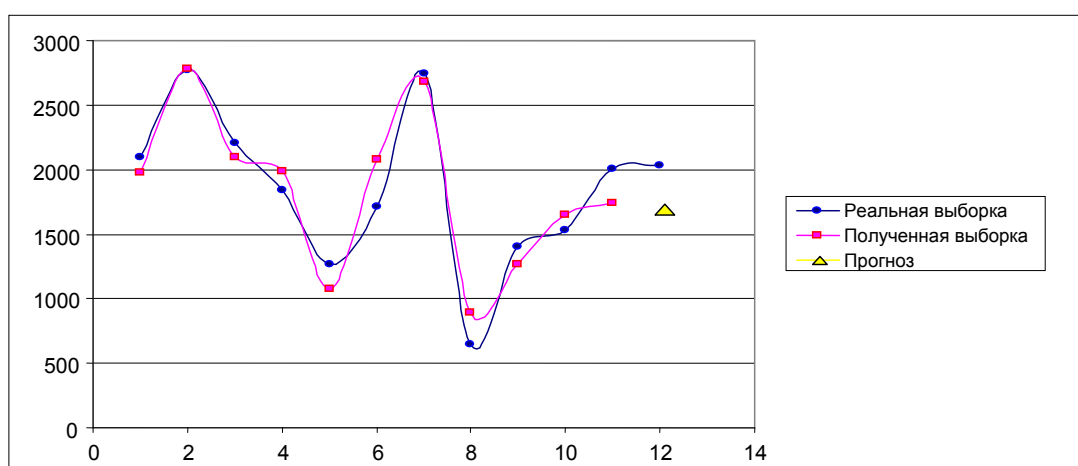


Рис. 33. Реальная выборка сбора зерна объёмом $N = 12$, её моделирование выражением (4.11) и ошибка прогноза на один шаг

Обобщая результаты эксперимента по тестированию предложенного метода параметризации модели (4.11) и прогнозирования с её помощью на модельных и реальных данных, можем заключить, что предложенный метод **имеет преимущества** перед известными методами **по объёму требуемой выборки и точности, обладает практической ценностью.**

Продемонстрированные в данном разделе приложения говорят только о том, что адекватность предложенных моделей вы-

сокая, а при сравнении с известными методами и большая. Получили традиционный для статистики ответ: **опытные данные не противоречат модели.**

Спецификация одним моделированием, как правило, не заканчивается: другая модель может дать лучшие показатели точности: например, при моделировании тиража газеты альтернативой предложенной модели вполне может быть «пилообразная» колебательная компонента, а при моделировании эксплуатационного пассажирооборота целесообразно рассмотреть и «куполообразную» компоненту.

Известно применение и других моделей динамики инновационной экономики, для которых актуальна разработка методов параметризации на коротких выборках ряда динамики, рассмотренная ниже.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИННОВАЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ ЛОГИСТИЧЕСКИМ ТРЕНДОМ ВЕРХУЛСТА

В данной главе рассматриваются вопросы моделирования характерных для динамики инновационной экономики логистических трендов.

Даны многочисленные примеры временной и пространственной динамики показателей, описываемых логистическими трендами.

Из моделей логистических тенденций для первоначального рассмотрения выбрана наиболее популярная – модель Верхулста (Перла-Рида).

Показаны недостатки известных методов её параметризации (необходимость априорного знания уровня насыщения, удобная, но не соответствующая эконометрической теории структура вхождения стохастической компоненты).

Предложены новые, основанные на обобщенных параметрических моделях авторегрессии-скользящего среднего, методы эконометрического моделирования, позволяющие осуществить параметризацию на коротких выборках с компенсацией гетероскедастичности и при аддитивной, и при мультипликативной стохастической компоненте.

5.1. Примеры временной и пространственной экономической динамики с логистическими трендами

В экономике и социологии многочисленны примеры так называемых **логистических процессов**, которые сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу («уровню насыщения»). В ряде приложений тот же характер динамики имеет не рост, а уменьшение уровней показателя.

Логистическую динамику не следует путать с **логистикой**, наукой о планировании, организации, управлении, контроле и регулировании движения материальных и информационных потоков в пространстве и во времени от их первичного использования до конечного потребителя.

Приведем некоторые примеры логистических процессов:

- изменение спроса на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня насыщения;
- рост систем разнообразной природы в зависимости от их возраста или увеличения масштаба (доля жилищ в городах, имеющих горячее водоснабжение или центральное отопление);
- доля неграмотных жителей среди населения;
- доля насыщения рынка новыми товарами и услугами, в том числе описание числа пользователей российского Интернета;
- оценка изменения числа семей, имеющих радио и телевидение;
- рост населения страны в страховых исследованиях;
- развитие биологических популяций;
- развитие тех или иных показателей технологических нововведений;
- динамика антисоциального поведения (коллективного протеста, тактики террористов, распространения наркотиков) [44, 46, 60, 68, 89];
- и т.д.

Известен и любопытный пример моделирования процесса демократизации логистической кривой. По мнению американских политологов, демократия начала распространяться по земному шару с XV века, к 1990 году 40% населения избрало демократические формы правления, а к 2100 году её примет уже 90% населения [49].

Известно моделирование логистической кривой и относительного (в процентах) показателя эффективности Интернет-рекламы, измеряемого отношением числа нажатий на рекламное объявление (кликов) к числу показов этого объявления, называемый «откликом» или «коэффициентом проходимости». При ограниченном числе пользователей с ростом числа показов коэффициент проходимости уменьшается по логистической кривой. При этом по оси ординат откладывают значения коэффициента проходимости, а по оси абсцисс – число рекламных показов.

Аппроксимация кривой позволит определить число показов, после которых дальнейшие затраты на показ не имеют практического смысла с точки зрения окупаемости рекламы. Таким образом, назначение цены баннерной рекламы за число показов (наиболее распространенный способ тарификации в Интернет-рекламе) приводит в заблуждение рекламодателей и не отражает её реальной эффективности. Возможной альтернативой может служить назначение цены баннерной рекламы в зависимости от числа уникальных хостов (в данном случае - пользователей, просматривающих страницы), которым был показан баннер необходимое число раз. Таким образом, ограничение числа показов для одного пользователя освобождает рекламное место для демонстрации новых рекламных обращений без увеличения общей посещаемости сервера.

Изменения тенденций нарастания или снижения ёмкости рынка в экономическом анализе принимаются, в общем случае, закономерными и обосновываются посредством **концепции**

жизненного цикла продукта. Согласно данной концепции конкретная группа товаров или услуг, рынок которых моделируется и прогнозируется, является средством удовлетворения определенной базовой потребности потребителей. Вследствие научно-технического прогресса способы удовлетворения базовой потребности обычно переходят на более высокий качественный уровень, что влечет за собой вытеснение с рынка данной группы продукции новой группой продукции, обладающей большей привлекательностью для потребителей.

Достаточно общей может быть следующая характеристика структурного изменения динамики в кривых роста. При сохранении знака первой производной (положительной при росте показателя и отрицательной при убывании) в логистических моделях существует точка (значение) определяющей переменной, в которой вторая производная меняет знак. В случае роста определяемого параметра знак второй производной меняется с плюса на минус, а в случае его убывания – с минуса на плюс. В обоих случаях определяемый параметр выходит на стационарный режим (постоянный уровень насыщения или убывания), в котором первая производная равна нулю.

Именно логистические модели для СЭС, функционирующих в условиях инновационных и кризисных процессов, позволяют решить проблемы, связанные с возможной недооценкой или переоценкой уровня насыщения при выводе нового товара на рынок и, соответственно, недополучением прибыли или получением убытков за счет перепроизводства.

Вместе с тем, логистические закономерности динамики следует обобщать с определенной осторожностью, для относительно коротких интервалов значений определяющей переменной, допускать возможность её дополнения другими тенденциями и структурных (качественных) изменений. Выявленная тенденция может быть нарушена, например, вследствие резких экономических изменений. Примерами могут быть дефолт 1998 года, тех-

нический (технологический) переворот, который выводит на рынок товар с принципиально новыми потребительскими свойствами, и т.п. Таким образом, для логистических тенденций актуальна задача их идентификации на возможно малой длительности реализации.

При моделировании социальных процессов [49] используются более сложные негладкие кривые, содержащие **логистический тренд и колеблемость некоторого общего вида** около него.

Известны и так называемые **длинные волны экономической динамики**, появление которых объясняется неравномерностью инновационной активности. Базисные нововведения, связанные с радикальной перестройкой производства, внедряются неравномерным или случайным образом, впрыскиваясь в экономику и диффундируя в ней. Они самоорганизуются в кластеры, конституирующие новые технологические направления.

Большинство исследователей склоняются к тому, что именно на периоды депрессий приходятся основные инновации: технологические, организационные новшества. В условиях благоприятной конъюнктуры предприниматели предпочитают избегать чрезмерного риска, связанного с коренной перестройкой производства, пытаются ограничиться рационализацией и усовершенствованием существующих технологических процессов. В периоды депрессий, когда само существование огромного количества хозяйствующих единиц ставится под угрозу, предприниматели оказываются вынуждены рисковать, понимая, что незначительные улучшения не приведут к кардинальному улучшению ситуации.

Через 10–15 лет после базисных нововведений начинается повышение экономической конъюнктуры, создаются благоприятные условия для дополняющих нововведений. Вторичные инновации, частичные усовершенствования доводят до совершенства то фундаментальное новое, что возникло в фазе депрессии. Формируется новый технологический уклад, жизненный цикл

которого составляет от 100 до 130 лет. Технологические уклады доминируют в экономике, последовательно сменяя друг друга, вызывая тем самым колебания траектории экономического развития.

Как показано на рис. 34, в экономике одновременно действуют несколько (как правило, не больше двух) технологических укладов с периодом жизни 100–150 лет.

Зарождение нового технологического уклада по времени совпадает с началом падения эффективности доминирующего уклада, в результате **суммарная** траектория экономической эволюции испытывает колебания вокруг повышающегося тренда.

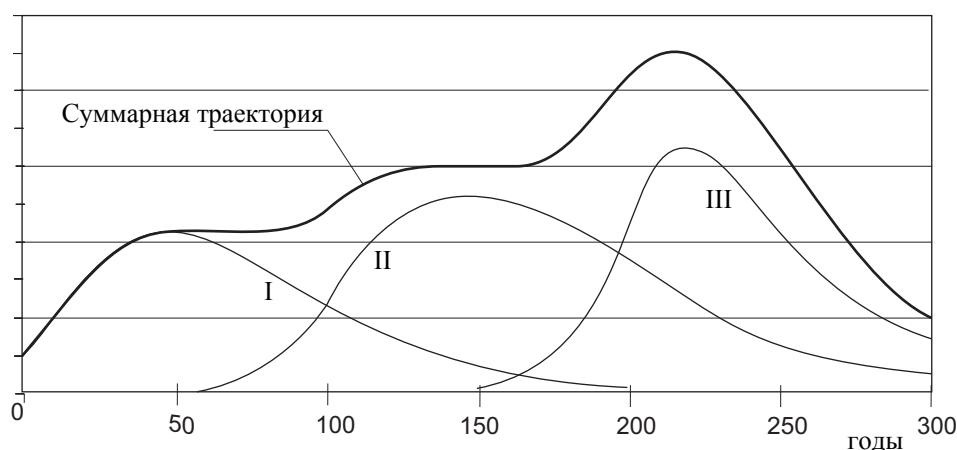


Рис. 34. Траектория экономической эволюции

Большинство теорий экономической эволюции исходят из чисто экономических предпосылок, однако ряд экономистов уделяет большое внимание и социальным факторам. Некоторые зарубежные ученые (К.Перес, И.Миллендорфер) являются сторонниками интегрированного подхода, объясняющего явление периодичности взаимодействием технико-экономических и социальных сфер.

Одной из причин кризисов **называется рассогласование скоростей инноваций в экономической и социальных областях.**

Еще один вид логистической динамики с колебаниями, моделирующий замену технологий [44, 62], представлен на рис. 35, где по оси ординат откладываются значения технологически значимого параметра, а по оси абсцисс – десятки лет.

Технологический скачок, показанный на рис. 35, является разностью технологических пределов новой и старой технологий. Динамика показателей, представленная графиками на рис. 34 и 35, может быть использована для моделирования государственного «антициклического» регулирования.

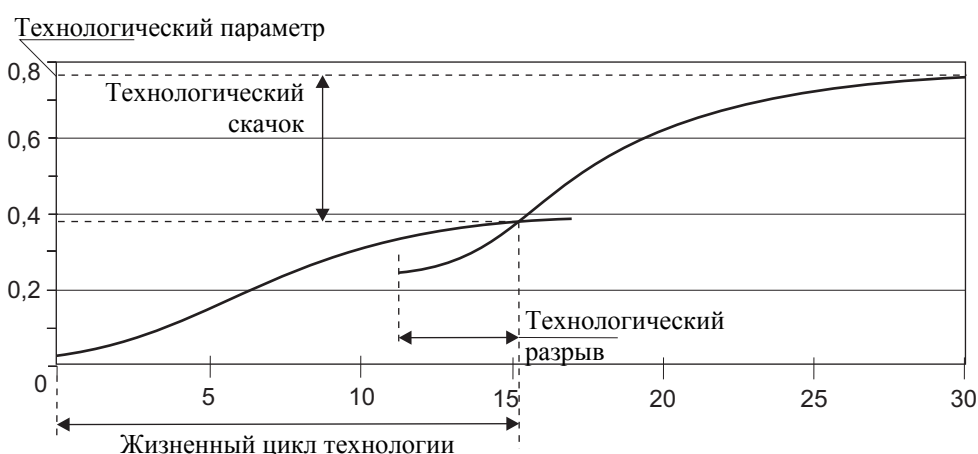


Рис. 35. Логистическая динамика замены технологий

Подобного рода кривые могут иметь место и для других приложений, например, при моделировании сбыта в зависимости от маркетинговых приёмов, разнесённых во времени и количественно определенных бюджетами для каждого из них.

Уникальным свойством логистического тренда является его способность прогнозировать качественные (их можно назвать и структурными) изменения в развитии динамики, характеризующиеся сменой знака производной.

Решение этой задачи позволило бы уже на первом этапе экономического анализа рассчитать всю траекторию развития, определить сроки перехода от ускоренного роста к замедленному росту, что чрезвычайно важно при планировании производ-

ства и оценке эффективности инноваций, маркетинговой программы реализации нового вида товара (услуги) и т.д.

Экономическая теория, определив качественно характер эволюции, зачастую не отвечает однозначно на вопрос о виде измеряемого и прогнозируемого экономического параметра, о моделях логистической динамики, которые целесообразно использовать в конкретных случаях, поэтому рассмотрим ряд кандидатов в инструментарий моделирования эволюции, динамики инновационной экономики.

Можно, конечно упрощенно, логистическую тенденцию считать объединением трёх разных по типу тенденций: параболической с ускоряющимся ростом на первом этапе, линейной - на втором этапе и гиперболической с замедляющимся ростом - на третьем этапе.

Однако весомее доводы в пользу рассмотрения всего цикла развития как особого единого типа тенденций со сложными переменными свойствами, но с постоянным направлением изменений в сторону увеличения (или уменьшения) уровней.

Из всех приведенных в разделе 2.2 данного пособия тринадцати моделей логистических трендов наибольшее распространение имеют следующие восемь:

модель Верхулста (Перла-Рида) (2.14)

$$T_{29k} = \frac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1(k\Delta))};$$

обобщенная логистическая модель (2.15)

$$T_{32k} = \frac{1}{A_0 + \sum_{I=1}^m A_I \exp(-\alpha_I k)};$$

модель Джонсона (2.16) $T_{33k} = A \exp(-\alpha_1 / (a_2 - k\Delta));$

двойная экспоненциальная модель (2.17)

$$T_{34k} = A \exp(-B \exp(-Ck\Delta));$$

модель Гомперца (2.18) $T_{35k} = A \cdot B^{Ck\Delta};$

модель (2.19) $T_{36k} = A_1 \exp \left\{ -A_2 \left(1 - \exp(-a_1 k \Delta) \right) / a_1 \right\}$;

модель Рамсея (2.21) $T_{38k} = C(1 - (1 + \alpha(k\Delta)) \exp(-\alpha k \Delta))$;

кинематическая функция (2.24) $T_{42k} = A(k\Delta)^\pi \exp(\alpha k \Delta)$.

Функции Верхулста и Гомперца употребляют в экономических исследованиях при исследовании закономерностей спроса.

Модель Рамсея была предложена первоначально для обеспечения робастности оценок регрессии [21, 89], а затем применена для эконометрического моделирования финансовых рядов.

Модели $T_{39}(t)$, $T_{40}(t)$, $T_{41}(t)$, $T_{43}(t)$ допускают использование лишь на локальных участках траектории и, в силу этого, не представляют значительного интереса для разработки новых методов идентификации.

Наиболее распространена в настоящее время модель Верхулста, поэтому начнём рассмотрение вопросов моделирования и прогнозирования рядов динамики с логистической тенденцией с неё.

5.2. Свойства и приложения логисты Верхулста (Перла-Рида)

Графики функции Верхулста, как показал проведенный вычислительный эксперимент, при тех или иных сочетаниях знаков и значений их параметров могут иметь существенно разный характер.

Наиболее распространенным в приложениях является случай, относящийся к возрастающей логистической тенденции, когда A_0 и A_1 имеют положительные знаки, а показатель экспоненты отрицателен. Рассмотрим его более подробно. На рис. 36 показан ха-

рактически изменение модели Верхульста при $A_0 = 0,5; A_1 = 4$ при различных значениях α_1 (Ряд 2: $\alpha_1 = 0,3$; Ряд 3: $\alpha_1 = 0,5$; Ряд 4: $\alpha_1 = 0,8$).

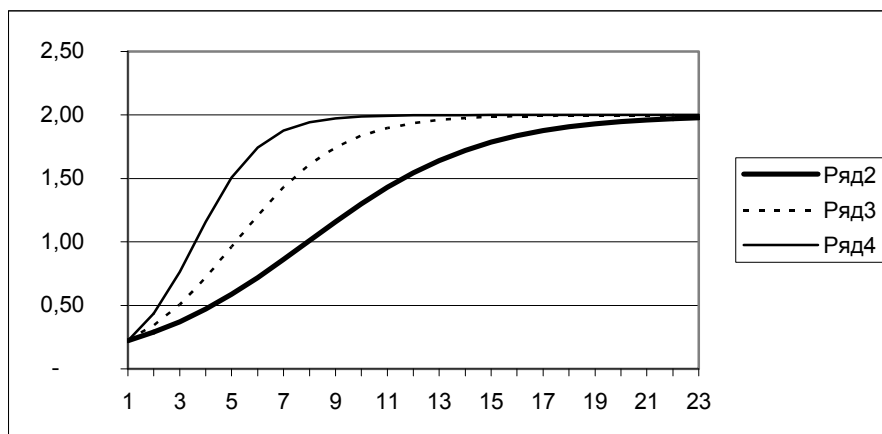


Рис. 36. Характер изменения модели Верхульста в функции значений α_1

Влияние значений основания показательной степени в знаменателе рассматриваемой модели принципиально аналогично действию значений α_1 . Рис. 37 демонстрирует характер изменения модели Верхульста для $A_0 = 0,5; \alpha_1 = 0,35$ при различных значениях A_1 (Ряд 2: $A_1 = 2$; Ряд 3: $A_1 = 5$; Ряд 4: $A_1 = 25$).

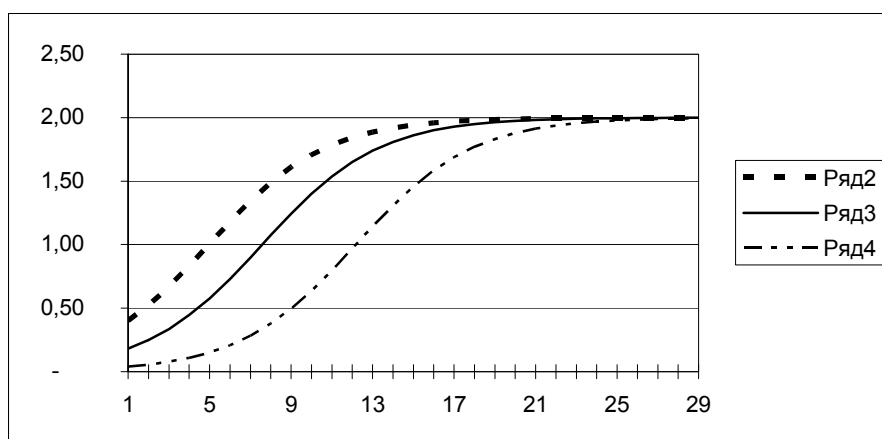


Рис. 37. Характер изменения модели Верхульста в функции значений A_1

Характеристическими параметрами для логистических тенденций (покажем их на примере логисты Верхульста) являются: $T_{29}(0) = 1/(A_0 + A_1)$ – начальное значение логистической тенденции

(при $t = 0$); $t^{**} = -\ln(A_0/A_1)/\alpha_1$ - момент времени, в котором вторая производная функции Верхулста равна нулю (точка перегиба).

Кривая Верхулста имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба; $T_{29}(\infty) = 1/A_0$ - установившееся значение (при $t \rightarrow \infty$) или «уровень насыщения»; $t^* = -\ln(A_0(1-\beta)/A_1\beta)/\alpha_1$ - момент времени, в котором значение траектории достигает доли β от «уровня насыщения», т.е. $T_{29}(t^*) = \beta/A_0$.

До момента времени t^{**} первая и вторая производные тенденции, описываемые функцией (2.14), положительны, после него первая производная сохраняет свой знак (т.е. рост функции продолжается), а вторая производная (ускорение или скорость роста функции) становится отрицательной.

Значение t^* характеризует важный момент «практического» достижения уровня «насыщения» - доли β от «уровня насыщения» - в отличие от асимптотического значения $1/A_0$ при $t \rightarrow \infty$. Значения β можно назначать 0,9; 0,95 или 0,99, как это принято в статистике и в теории надежности.

Для других логистических моделей параметры t^{**} и t^* будут иметь тот же смысл. Прогнозирование моментов времени t^{**} и t^* , особенно по начальному или среднему участку кривой, является исключительно важным для принятия упреждающих управленческих решений.

Для отражения закономерностей изменения объема продаж конкретной группы продукции, проходящей все стадии жизненного цикла рынка, часто используются S-образные функциональные зависимости, которые аппроксимируют накопленные к каждому моменту времени совокупные продажи [10, 11, 25].

Функцию Верхулста для этого случая удобно представить в виде

$$T_{29}(t) = \frac{E}{1 + D \exp(-\alpha_1 t)}, \quad (5.1)$$

где параметр D определяет соотношение между ёмкостью рынка в момент первых продаж продукции на рынке ($t = 0$) и общей ёмкостью рынка E , т.е. $D = E / E(t=0) - 1$, а **параметр α_1 характеризует темпы роста объёма продаж в каждый момент времени** и, следовательно, косвенным образом определяет длительность периода, по истечению которого суммарные продажи на рынке станут составлять общий объём продаж за весь жизненный цикл рынка E .

Дифференцирование выражения (5.1) по времени определяет **ёмкость рынка в каждый момент времени t** :

$$dT_{29}(t) / dt = \alpha_1 T_{29}(t) \{E - T_{29}(t)\} / E.$$

Примером «пространственной» определяющей переменной в логистической функции могут быть и затраты на маркетинг (с некоторым шагом в денежных единицах): совокупные затраты предприятия (фирмы) на анализ рыночных возможностей, на разработку комплекса маркетинговых мероприятий, претворение их в жизнь и проведение маркетингового контроля [10, 11].

При реализации маркетинговой программы, когда начинают поступать сигналы с рынка, возможна такая ситуация, что субъективная оценка окажется ошибочной. Планирование бюджета маркетинга может основываться на целевой прибыли или исходить из оптимизации прибыли. Известно, что зависимость спроса от маркетинговых затрат имеет нелинейный характер, проходит через последовательную смену фаз медленного и быстрого роста и ограничивается размерами максимально доступного потенциала рынка, т. е. описывается логистической кривой.

Использование S -образных кривых позволяет на ранних стадиях скорректировать величину маркетингового бюджета, что даст возможность более экономно и эффективно расходовать средства предприятия.

Известно применение модели Верхулста для определения уровня спроса в зависимости от маркетинговых затрат, в кото-

рой в качестве аргумента выступают затраты на маркетинг (размерность в ден. ед.), $1/(A_0 + A_1)$ – характеризует **начальный уровень спроса**, который действует на рынке без каких-либо маркетинговых затрат (в шт.), $1/A_0$ – является **максимально достижимым уровнем спроса** (в шт.), а α_1 – **коэффициент восприимчивости рынка** (размерность – 1/ден. ед.).

Значения параметров A_0 и α_1 связаны с действием целого ряда факторов роста и ограничений, специфичных для каждого продукта, рынка и средств стимулирования продаж.

Модель показывает, что эффективность маркетинговых затрат неодинакова по мере роста размеров маркетингового бюджета. После охвата наиболее доступных сегментов рынка и перехода в область нерасширяемого спроса предприятию требуется все бОльшие средства для охвата новых потребительских групп. Существует как некий предельный уровень спроса, после которого дополнительные затраты на маркетинг перестают окупаться ростом объёмов продаж и становятся неэффективными, так и минимально необходимый бюджет, ниже которого вообще нецелесообразно производить затраты на маркетинговые исследования. Не учитывая в полной мере всё множество факторов, влияющих на величину маркетингового бюджета, данная модель, тем не менее, даёт опорные точки динамики взаимодействия прибыли и маркетинговых затрат, что особенно **важно для новых или слабоизученных рынков товаров и услуг**.

Обнаружение факта прохождения точки перегиба (она является точкой перехода в **область нерасширяемого спроса**) является сигналом для принятия новых маркетинговых или технологических решений по продвигаемой на рынок продукции. Целесообразно прогнозировать значение точки перегиба задолго до момента её достижения, чтобы иметь резерв времени для подготовки и реализации соответствующих мероприятий.

До настоящего времени параметры A_0 и α_1 часто оценивают экспертно, а не параметризуют по статистическим данным, что не обеспечивает надежное (в смысле точности) применение модели, причём чувствительность логистической модели к вариации параметров оказывается довольно высокой.

Многочисленные примеры приложений логистических кривых для технологов, инженеров и бизнесменов даны в [44, 75]. При этом по оси ординат могут быть отложены значения технологического параметра, у которого в качестве уровня насыщения выступает физическое или естественное ограничение (доли рынка для старого вида товара и для нового вида товара, сегментирующего рынок), а по оси абсцисс – время или инвестиции.

Для приложений интерес представляют и случаи другого сочетания знаков и значений параметров модели Верхулста, представленные на рис. 38. Ряд 2 относится к кривой с параметрами $A_0 = 0,5$; $A_1 = 0,05$; $\alpha_1 = -0,2$. Вид данной кривой во многом подобен рассмотренному выше случаю, в частности есть точка перегиба, но убывающая тенденция имеет в качестве горизонтальной асимптоты ось абсцисс, а начальное значение логистической кривой равно $1/(A_0 + A_1)$. В ряде 3 модель Верхулста имеет параметры $A_1 = -0,99$; $\alpha_1 = 0,1$; $A_0 = 1,5$. Начальное значение определяется тем же выражением, что и выше, но асимптотой является прямая $T_{29}(\infty) = 1/A_0 = 2/3$. Ряд 4 иллюстрирует модель Верхулста, у которой $A_1 = 1$, $\alpha_1 = 0,1$, $A_0 = -1,5$. Начальное значение кривой равно $1/(A_0 + A_1)$, а асимптотой является прямая $T_{29}(\infty) = 1/A_0 = -2/3$.

В знаменателях двух последних моделей слагаемые имеют различные знаки, поэтому при определенном сочетании значений параметров знаменатель функции Верхулста может принять нулевое значение и, в силу этого, возможно существование точек разрыва второго рода.

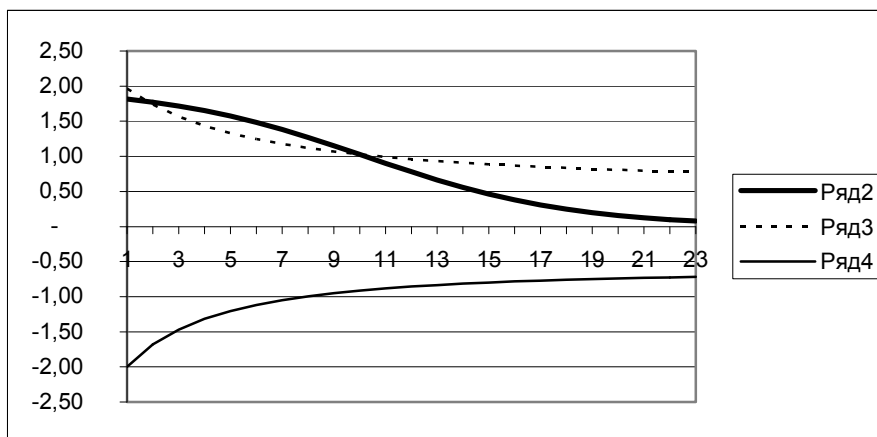


Рис. 38. Характер изменения графиков модели Верхулста при трёх указанных сочетаниях знаков и значений параметров

На рис. 39 показаны ещё три других возможных сочетания знаков и значений параметров в модели Верхулста.

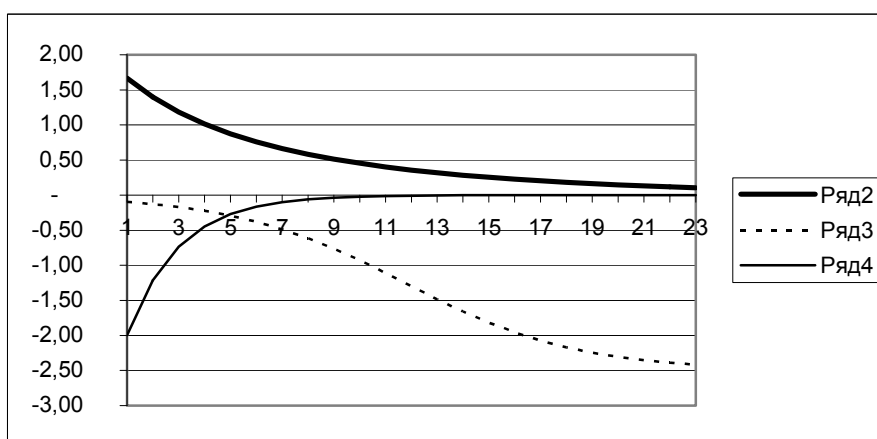


Рис. 39. Характер изменения графиков модели Верхулста при трёх других сочетаниях знаков и значений параметров

В ряде 2 параметры имеют следующие значения: $A_1 = 1,1; \alpha_1 = -0,1; A_0 = -0,5$. В ряде 3 имеем: $A_1 = -10; \alpha_1 = 0,3; A_0 = -0,4$, а в ряде 4 $A_1 = 0,5; \alpha_1 = -0,5; A_0 = -0,001$. Для рядов 2 и 4 с положительными показателями экспонент асимптотой является ось абсцисс. Ряд 3 – логистическая кривая, расположенная в четвёртом квадранте.

Для комплексного восприятия на одном квадранте наиболее популярных в экономической практике видов кривой Верхулста

дан рис. 40, в котором ряд 1 (сплошная возрастающая кривая с насыщением) имеет следующие параметры: $A_0 = 1$, $A_1 = 25$, $\alpha_1 = 0,4$.

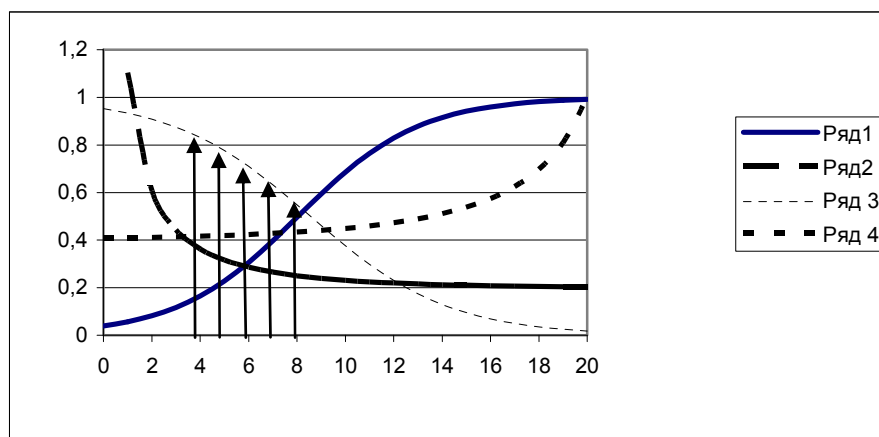


Рис. 40. Комплекс наиболее часто употребляемых видов кривой Верхульста и иллюстрация построения модели зависимости спроса от цены с переменной эластичностью (на значениях ряда 3)

Ряд 2 (жирная пунктирная возрастающая линия) характеризует логистическую динамику при положительных значениях A_0 и α_1 , но при отрицательном значении A_1 . График кривой Верхульста начинается на оси ординат в точке $(A_0 - A_1)$. При этом предполагается, что $|A_0| > |A_1|$, а при $t \rightarrow \infty$ кривая асимптотически приближается к прямой $Y = 1/A_0$. Ряд 4 рассмотрен как частный случай $A_0 = 5$; $A_1 = -5$; $\alpha_1 = 0,2$, в котором для значения $t = 0$ график логисты асимптотически приближается к оси ординат, т.е. имеет разрыв второго рода. Ряд 3 (тонкая пунктирная убывающая кривая) на рис. 40 аналогичен по свойствам ряду 2 на рис. 36, имеет лишь другие параметры: $A_0 = 1$; $A_1 = 0,05$; $\alpha_1 = -0,35$.

Заметим, что при одинаковых значениях A_0 и A_1 ряды 1 и 3 начинаются из одной точки на оси ординат, но для рядов рис. 40 это условие равенства значений A_0 и A_1 не накладывалось для наглядной демонстрации разного характера кривых.

Для ряда 4 рис. 40 имеем, как и для ряда 2, $A_0 > 0$ и $A_1 > 0$; $|A_0| > |A_1|$ (на рис. 38 заданы следующие значения параметров $A_0 = 2,5$; $A_1 = -0,05$, но $\alpha_1 < 0$ ($\alpha_1 = -0,17$). Такой же характер стремящейся к бесконечности логистической тенденции будем иметь и при $A_0 < 0$; $A_1 > 0$; $|A_0| < |A_1|$, но при $\alpha_1 > 0$.

Отметим, что выражение (2.14) получается в результате интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$dT / dt = K_1 T + K_2 T^2, \quad (5.2)$$

где $K_1, K_2 \in R$ [32].

На рис. 40 можно проиллюстрировать и **новый предлагаемый метод использования логисты для моделирования зависимости спроса от цены с переменной эластичностью**.

Дело в том, что постулируемое порой представление зависимости спроса от цены товара (или услуги) в виде линейной функции является весьма упрощенным. Более соответствует действительности предположение о зависимости коэффициента эластичности спроса от величины самой цены. Многие исследования рекомендуют принять зависимость спроса от цены именно в виде S-образной убывающей кривой, т.е. кривую Верхулста вида ряда 3, изображенную на рис. 38, если ось ординат отражает спрос, а ось абсцисс – цену товара (услуги).

Предлагаемый метод заключается в экспериментальном определении спроса при нескольких значениях цены. Возможности такого «активного эксперимента» в экономической практике СЭС, как уже отмечалось выше, ограничены, поэтому число назначаемых цен должно быть невелико - на рис. 38 таких точек пять.

Если значения цены задавать с постоянным шагом, то приходим, по сути, к постановке задачи разработки метода эконометрического моделирования на малой выборке, что и будет достигнуто ниже на основе обобщенной параметрической авторегрессии – скользящего среднего.

5.3. Моделирование рядов динамики моделью Верхулста с аддитивной стохастической компонентой

Проблема определения параметров столь популярного, имеющего многочисленные приложения вида логистического тренда, как Верхулста, не нашла до настоящего времени эффективного решения по точности. Так, в [13, 14, 15, 38] предлагается осуществлять логарифмирование обратных величин уровней Y_k ряда динамики для того, чтобы свести задачу к идентификации моделей, линейных по параметрам, а затем применить МНК.

При этом стохастическая компонента не рассматривается аддитивной или мультипликативной с детерминированной моделью Верхулста, как это требует эконометрика, а делаются «искусственные» предположения о том, что стохастическая компонента с нормальным распределением является аргументом экспоненциальной функции, которая, свою очередь, умножается на экспоненциальную функцию в знаменателе функции Верхулста. Предполагается также априорное знание (обоснование) уровня насыщения $1/A_0$ из некоторых физических или общих экономических соображений [64], хотя именно этот параметр зачастую представляет интерес для идентификации, последующее логарифмирование экспоненциальной модели уровней ряда для сведения задачи параметризации к линейной по параметрам модели и применения МНК.

Данный метод может быть проиллюстрирован следующей цепочкой формул

$$Y_k = \frac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1(k\Delta)) \exp \varepsilon_k} \Rightarrow \frac{1}{Y_k} = A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1(k\Delta)) \exp \varepsilon_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y_k} - A_0 = Y_k^1 = A_1 \exp(-\alpha_1(k\Delta)) \exp \varepsilon_k \Rightarrow \ln Y_k^1 = \ln A_1 - \alpha_1(k\Delta) + \varepsilon_k,$$

где $Y_k^1 = \frac{1}{Y_k} - A_0$ - «новый» ряд динамики, рассчитываемый по исходному ряду Y_k и «известному значению» $\frac{1}{A_0}$.

Другие методы, описанные в [38, 68], предлагают некоторые эвристические разностные схемы для решения уравнения (5.2) и последующей идентификации с применением МНК. К достоинствам этих методов можно отнести лишь то, что стохастическая компонента входит в структуру ряда в соответствии с одной из теоретических структур эконометрики - аддитивно.

Достаточно очевидным путём обеспечения линейности модели Верхулста по параметрам с принятием аддитивной или мультипликативной структур вхождения стохастической компоненты является разложение её в ряд, например, Тейлора или Маклорена [51]. При этом коэффициенты разложения будут связаны (нелинейно) с параметрами модели Верхулста. Определив, например, по МНК оценки коэффициентов ряда можно через них параметризовать модель Верхулста. Недостатком данного метода является возможность применения лишь на локальном участке логистической кривой. На длительных интервалах значений определяющей переменной он дает значительные погрешности.

Покажем, что повышение точности моделирования и прогнозирования логистической динамики можно достичь путём конструирования соответствующих обобщенных параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего с помощью Z-преобразования.

Примем аддитивной стохастическую компоненту ξ_k в уравнениях ряда динамики Y_k , моделируемого трендом Верхулста. Тогда

$$Y_k = \frac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)} + \xi_k = \frac{1 + \xi_k (A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta))}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)}. \quad (5.3)$$

Перейдя в (5.3) к обратным величинам отсчетов $Z_k = 1/Y_k$, получим

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)}{1 + \xi_k (A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta))} \Rightarrow \\ \Rightarrow z_k &= A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta) + \theta_k, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\theta_k = -\xi_k z_k (A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)) = \frac{-\xi_k (A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta))^2}{1 + \xi_k (A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta))}$ – стохастическая компонента, которая обладает принципиально гетероскедастическим свойством, даже при гомоскедастичности ξ_k , так как зависит от номера наблюдения.

Вместе с тем следует ожидать, что значения стохастической компоненты θ_k будут невелики, так как сомножитель ξ_k существенно меньше $(A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta))$.

Детерминированная часть выражения (5.4) представляет собой **обобщенную экспоненциальную функцию с аддитивной стохастической компонентой**, к которой можно применить Z -преобразование для конструирования разностной схемы и последующего перехода к модели авторегрессии.

Используя Z -преобразования для $D_k = A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)$ (соответствующие изображения для $A_0, A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)$ приведены в разделе 3.2) и свойство линейности, получим

$$\begin{aligned} Z[D_k] &= \frac{A_0}{1 - z^{-1}} + \frac{A_1}{1 - \lambda_1 z^{-1}} = \frac{A_0(1 - \lambda_1 z^{-1}) + A_1(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(\lambda_1 + 1) - \lambda_1 z^{-2}} \Rightarrow \\ Z[D_k](1 - z^{-1})(\lambda_1 + 1) - \lambda_1 z^{-2} &= A_0(1 - \lambda_1 z^{-1}) + A_1(1 - z^{-1}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где введен коэффициент $\lambda_1 = \exp(-\alpha\Delta)$ и выполнены действия по приведению к общему знаменателю и группировки подобных членов.

После обратного Z-преобразования при $k \geq 2$ получим

$$D_k - D_{k-1} = \lambda_1(D_{k-1} - D_{k-2}). \quad (5.6)$$

Выражая D_k через z_k (с учётом соотношения $z_k = D_k + \theta_k$), получим при $k \geq 1$ для ряда (5.4) следующую авторегрессию первых разностей уровней

$$\nabla z_k = \lambda_1 \nabla z_{k-1} + \varphi_k, \quad (5.7)$$

где

$$\lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \Delta), \nabla z_k = z_k - z_{k-1}, \nabla z_{k-1} = z_{k-1} - z_{k-2},$$

$\varphi_k = \theta_k - \theta_{k-1} - \lambda_1(\theta_{k-1} - \theta_{k-2})$ - новая стохастическая гетероскедастическая (в силу гетероскедастичности θ_k в (5.4)) компонента.

Здесь символ ∇ использован для взятия разности, чтобы не путать с шагом дискретизации Δ .

Значения компоненты φ_k малы в силу малости значений $\theta_k, \theta_{k-1}, \theta_{k-2}$ и соответствующих действий вычитания, но её дисперсия переменна из-за гетероскедастичности θ_k .

На первом этапе идентификации определим оценку параметра α_1 , реализуя условие

$$\lambda_1^o = \arg \min_{\lambda_1} M^o \{ \nabla z_k - \lambda_1 \nabla z_{k-1} \} \Rightarrow \alpha_1^o = -\text{Ln} \lambda_1^o / \Delta. \quad (5.8)$$

На втором этапе идентификации, используя полученную оценку α_1^o , проведём расчёт параметров A_0 и A_1

$$A_0^o, A_1^o = \arg \min_{A_0, A_1} M^o \{ z_k - A_0 - A_1 \exp(-\alpha_1^o k \Delta) \}. \quad (5.9)$$

Заметим, что в (5.9), как и в (5.8), минимизируется гетероскедастическая невязка θ_k , что является недостатком метода и требует реализации специальных операторов сглаживания.

Для нахождения оценки α_1^o необходимо решать СЛАУ первого порядка, а оценки A_0^o , A_1^o являются решением соответствующей СЛАУ второго порядка.

Оценка координаты точки перегиба исходной логистической тенденции по статистическим данным будет равна

$$k^{**} = Ln(A_0^o / A_1^o) / (\alpha_1^o \Delta), \quad (5.10)$$

а оценку момента достижения практического насыщения определит соотношение

$$k^* = Ln\{A_0^o(1-\beta) \setminus A_1^o\} / (\alpha_1^o \Delta). \quad (5.11)$$

В качестве k^{**} , k^* следует принимать номера наблюдений ряда динамики, т.е. целые значения после округления.

Можно по выборке рассчитать помехозащищенную оценку начального значения функции Верхулста $Y_0^o = 1 / (A_0^o + A_1^o)$ и спрогнозировать оценку уровня насыщения при $k \rightarrow \infty$: $Y_\infty^o = 1 / A_0^o$.

Недостатками предложенного метода является **гетероскедастический характер** стохастической компоненты φ_k и **нелинейное преобразование исходной выборки** Y_k (переход к обратным значениям z_k), которое приводит к параметризации (5.7) сглаживанием не по значениям выборки Y_k , а по их обратным значениям Z_k .

Дело в том, что в общем случае **статистические характеристики оценок выборок после нелинейного преобразования отличны от характеристик оценок исходной выборки.**

Для уменьшения указанных недостатков можно предложить **другой метод параметризации модели Верхулста (5.3).** Для этого вновь воспользуемся разностным уравнением (5.6) для $D_k = A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)$ и сделаем в нём подстановку

$$D_k = \frac{1}{Y_k - \xi_k} \text{ из (5.3):}$$

$$\frac{1}{Y_k - \xi_k} - \frac{1}{Y_{k-1} - \xi_{k-1}} = \lambda_1 \left(\frac{1}{Y_{k-1} - \xi_{k-1}} - \frac{1}{Y_{k-2} - \xi_{k-2}} \right), \quad (5.12)$$

где, как и в (5.7), $\lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \Delta)$.

После приведения преобразований по разделению детерминированной и стохастической компонент в (5.12) (аналогичным тем, что выполнены в разделе 4.3), будем иметь авторегрессию второго порядка

$$Y_{k-2}(Y_{k-1} - Y_k) - \lambda_1 Y_k (Y_{k-2} - Y_{k-1}) = \eta_k, \quad \text{где} \quad (5.13)$$

$$\eta_k = Y_{k-2}(\xi_{k-1} - \xi_k) - \lambda_1 Y_k (\xi_{k-2} - \xi_{k-1}) + \xi_{k-2}(Y_{k-1} - Y_k) - \lambda_1 \xi_k (Y_{k-2} - Y_{k-1}) - \xi_{k-2}(\xi_{k-1} - \xi_k) + \lambda_1 \xi_k (\xi_{k-2} - \xi_{k-1})$$

– стохастическая компонента, представляющая собой модель скользящего среднего и обладающая свойством гетероскедастичности, так как включает в себя наблюдения Y_k, Y_{k-1}, Y_{k-2} .

К полученному выражению (5.13) можно, в принципе, привести и (5.7), но оно более конструктивно, так как раскрывает структуру стохастической компоненты и позволяет предложить способ компенсации её гетероскедастичности.

Разделив, для уменьшения гетероскедастичности стохастической компоненты, почленно (5.13) на Y_{k-2} , будем иметь

$$Y_k = Y_{k-1} - \lambda_1 Y_k \frac{Y_{k-2} - Y_{k-1}}{Y_{k-2}} + \gamma_k, \quad \text{где} \quad (5.14)$$

$$\gamma_k = \lambda_1 \frac{Y_k}{Y_{k-2}} (\xi_{k-2} - \xi_{k-1}) - \xi_{k-2} \frac{Y_{k-1} - Y_k}{Y_{k-2}} + \lambda_1 \xi_k \frac{Y_{k-2} - Y_{k-1}}{Y_{k-2}} - (\xi_{k-1} - \xi_k) + \frac{\xi_{k-2}(\xi_{k-1} - \xi_k) - \lambda_1 \xi_k (\xi_{k-2} - \xi_{k-1})}{Y_{k-2}}$$

– стохастическая компонента.

Из (5.14) можно определить λ_1 из условия

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= \arg \min_{\lambda_1} M^O \left\{ Y_k - Y_{k-1} + \lambda_1 Y_k \frac{Y_{k-2} - Y_{k-1}}{Y_{k-2}} \right\} = \\ &= \arg \min_{\lambda_1} M^O \left\{ \nabla Y_k + \lambda_1 \nabla Y_{k-2} \frac{Y_k}{Y_{k-2}} \right\}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

приводящего к линейному нормальному алгебраическому уравнению для оценки λ_1^o и последующего расчёта $\alpha_1^o = -\ln \lambda_1^o / \Delta$.

Видим, что выражение (5.15) с точностью до множителя $\frac{Y_k}{Y_{k-2}}$ во втором слагаемом совпадает с (5.8), но оперирует с уровнями ряда динамики, а не с их обратными значениями.

Рассмотрим теперь стохастическую компоненту γ_k в (5.14). Изменение величин первых трёх слагаемых в выражении для γ_k зависит не от абсолютных значений уровней ряда, а от относительных значений и, следовательно, диапазон их вариации в этом случае существенно меньше.

При осуществлении декомпозиции ряда динамики уровни стохастической компоненты принимают, как уже указывалось, существенно меньшими уровней наблюдений. Поэтому четвертое слагаемое $(\xi_{k-1} - \xi_k)$ в выражении для γ_k мало, а пятым слагаемым

$$\frac{\xi_{k-2}(\xi_{k-1} - \xi_k) + \lambda_1 \xi_k (\xi_{k-2} - \xi_{k-1})}{Y_{k-2}},$$

содержащим алгебраическую сумму произведений малых величин, деленную на существенно большую величину Y_{k-2} , можно пренебречь.

Таким образом, гетероскедастичность γ_k не **исключена полностью, но существенно уменьшена.**

Подставив найденную оценку α_1^o в (5.3)

$$Y_k = \frac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1^o k \Delta)} + \xi_k,$$

преобразуем полученное выражение к виду

$$A_0 Y_k + A_1 Y_k \exp(-\alpha_1^o k \Delta) = 1 + A_0 \varepsilon_k + A_1 \varepsilon_k \exp(-\alpha_1^o k \Delta).$$

Группируя, получим

$$A_0 Y_k = 1 + A_0 \varepsilon_k - A_1 \exp(-\alpha_1^0 k \Delta) (Y_k - \varepsilon_k). \quad (5.16)$$

Вновь учтем то обстоятельство, что одним из условий декомпозиции ряда динамики на детерминированную и стохастическую компоненту было их различие по величинам уровней, поэтому в (5.16) можно принять $Y_k - \varepsilon_k \approx Y_k$.

Тогда стохастическую компоненту $A_0 \varepsilon_k$ в (5.16) можно считать гомоскедастической. Запишем следующее условие для оценки параметров A_1^0, A_0^0 :

$$A_1^0, A_0^0 = \arg \min_{A_1, A_0} M^0 \{1 - A_0 Y_k - A_1 Y_k \exp(-\alpha_1^0 k \Delta)\},$$

приводящее к нормальной СЛАУ второго порядка.

Итак, второй метод идентификации модели Верхулста реализуется через уровни ряда динамики, а не через их обратные величины, а стохастическая компонента на первом и на втором этапах практически гомоскедастична, необходимый объём выборки тот же, что и в первом методе – от 6 до 8 наблюдений.

Некоторым **недостатком второго метода является то**, что стохастическая компонента на втором этапе идентификации пропорциональна значениям A_0 , а это может снизить точность идентификации при малых уровнях насыщения в логистической тенденции.

5.4. Моделирование рядов динамики моделью Верхулста с мультипликативной стохастической компонентой

Рассмотрим теперь случай мультипликативной структуры стохастической компоненты с логистической тенденцией Верхулста

$$Y_k = \frac{1 + \xi_k}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)}. \quad (5.17)$$

В этом случае детерминированная компонента $D_k = A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 k \Delta)$, для которой справедливо разностное уравнение (5.6) $D_k - D_{k-1} = \lambda_1 (D_{k-1} - D_{k-2})$, будет выражаться через уровни ряда динамики Y_k следующим образом

$$D_k = \frac{1 + \xi_k}{Y_k}.$$

Тогда, в соответствии с приведенной выше методикой, получим следующую модель авторегрессии второго порядка:

$$Y_{k-2}(Y_{k-1} - Y_k) = \lambda_1 Y_k (Y_{k-2} - Y_{k-1}) + \eta_k, \quad (5.18)$$

где, как и в (5.7), $\lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \Delta)$, а гетероскедастическая стохастическая компонента $\eta_k = Y_{k-2}(\xi_{k-1} Y_k - \xi_k Y_{k-1}) + \lambda_1 Y_k (\xi_{k-1} Y_{k-2} - \xi_{k-2} Y_{k-1})$ имеет перед значениями стохастической компоненты $\xi_k, \xi_{k-1}, \xi_{k-2}$ множители из произведений двух наблюдений ряда динамики $Y_{k-2} \cdot Y_{k-1}, Y_{k-2} \cdot Y_k, Y_k \cdot Y_{k-1}$ соответственно.

Это приводит к мысли, что для обеспечения гомоскедастичности стохастической компоненты при идентификации модели (5.17) следует рассматривать в качестве модели авторегрессии результат почленного деления (5.18) на один из этих множителей, например, на $Y_{k-2} \cdot Y_{k-1}$, т.е.

$$\frac{Y_{k-1} - Y_k}{Y_{k-1}} Y_{k-2} = \lambda_1 Y_k \frac{Y_{k-2} - Y_{k-1}}{Y_{k-2} Y_{k-1}} + \gamma_k, \quad (5.19)$$

где $\gamma_k = \xi_{k-1} \frac{Y_k}{Y_{k-1}} - \xi_k + \lambda_1 (\xi_{k-1} \frac{Y_k}{Y_{k-1}} - \xi_{k-2} \frac{Y_k}{Y_{k-2}})$ - стохастическая компонента, гетероскедастичность которой существенно уменьшена, так как её дисперсия зависит уже не от абсолютных значений уровней ряда динамики, а от отношений $\frac{Y_k}{Y_{k-1}}, \frac{Y_k}{Y_{k-1}}, \frac{Y_k}{Y_{k-2}}$, диапазон изменения которых существенно меньше.

Из (5.19) найдем оценку λ_1^o , реализуя условие

$$\lambda_1^o = \arg \min_{\lambda_1} M^o \left\{ \frac{Y_{k-1} - Y_k}{Y_{k-1}} Y_{k-2} - \lambda_1 Y_k \frac{Y_{k-2} - Y_{k-1}}{Y_{k-2} Y_{k-1}} \right\}, \quad (5.20)$$

которое приводит к линейному алгебраическому уравнению.

Определив затем $\alpha_1^o = -\ln \lambda_1^o / \Delta$, представим (5.17) в виде

$$Y_k = \frac{1 + \xi_k}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1^o k \Delta)}.$$

Выполнив преобразование $A_0 Y_k + A_1 Y_k \exp(-\alpha_1^o k \Delta) + 1 = \xi_k$, получим метод параметризации A_0, A_1 путём реализации условия:

$$A_0^o, A_1^o = \arg \min_{A_0, A_1} M^o \left\{ Y_k - \frac{A_1}{A_0} Y_k \exp(-\alpha_1^o k \Delta) - \frac{1}{A_0} \right\},$$

с гомоскедастической стохастической компонентой ξ_k . Искомые оценки являются решением нормальной СЛАУ второго порядка.

Необходимый объём выборки для параметризации модели (5.17) – от 6 до 8 наблюдений ряда динамики.

Итак, можем заключить, что и для логистического тренда Верхулста подход на основе обобщенных параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего позволил предложить новые методы параметризации на коротких выборках, не требующие априорных знаний о параметрах тенденций, допускающие классические структуры вхождения стохастической компоненты (аддитивные и мультипликативные по отношению к детерминированной компоненте).

Тестирование предложенных методов целесообразно осуществлять в сравнении как с известными методами, так и с методами параметризации логистических тенденций других моделей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа познакомила с постановкой задачи статистического моделирования и прогнозирования динамики показателей инноваций.

Основным содержанием пособия являются математические методы и инструментальные средства моделирования и прогнозирования. Примеры на реальных статистических данных и показанные приложения являлись скорее иллюстрацией математических методов.

Все предложенные методы являются оригинальными реализациями предложенного **общего подхода на основе обобщенных параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего**. В этом определении дано соотношение предложенного подхода с известными методами, общим названием которых является авторегрессионные методы (AR, MA, ARMA, ARIMA, ARHC, GARCH и др.).

Можно назвать этот метод и **перепараметризацией**, что отражает суть подхода – существенно нелинейные параметры модели трансформируются (перепараметризуются) в линейные коэффициенты обобщенных моделей авторегрессии-скользящего среднего. После этого можно использовать МНК и его расширения.

К обобщенным параметрическим моделям авторегрессии – скользящего среднего при помощи Z -преобразования (преобразования Лорана) легко приводится большинство известных моделей экономической динамики.

При этом подчеркнем, что реализуются **параметрические модели**, которые могут иметь достаточно сложную структуру: мультипликацию сезонных или циклических компонент с трендом, и даже мультипликацию стохастических компонент. Тем

самым эконометрическое моделирование позволяет учесть реальную сложность практических задач.

Полезность предложенных методов проявилась не только в возможном усложнении моделей, приближении их к реальной практике и осуществлении прогноза по аналитическим выражениям, но и в реализации этих операций на коротких выборках.

Показанный в пособии выигрыш в уменьшении объёма выборок убедителен - в разы по сравнению с известными методами.

Методы имеют высокие показатели и по помехозащищённости, диапазону изменения параметров моделей.

Возможность усложнения моделей, практический отказ от априорных сведений об объекте моделирования, реализация методов на коротких выборках позволяют моделировать «молодые» инновационные процессы, осуществлять мониторинг параметров и моделей, оценивать тем самым эффект от инноваций и планировать соответствующие управленческие решения.

Материалы пособия являются развитием результатов авторов, изложенных в [51-56]. Однако показаны лишь методы моделирования десяти моделей, в то время как уже получены результаты более чем для девяноста моделей. Возможно, позднее удастся познакомить читателя и с ними.

ГЛОССАРИЙ

Автокорреляция – наличие зависимости между последующими и предшествующими уровнями динамического ряда.

Агрегирование – преобразование одной модели в другую с меньшим числом переменных и ограничений (агрегированную модель), дающее приближенное по сравнению с исходной описание изучаемого объекта или процесса.

Адаптивность – свойство системы, заключающееся в способности системы приспосабливаться к изменившимся условиям.

Аддитивность – свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям.

Аппроксимация – процесс замены одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным объектам.

Априори – термин, означающий знание, полученное до или независимо от опыта.

Вектор – упорядоченная совокупность n действительных чисел.

Верификация модели – проверка истинности, адекватности модели, проверка соответствия ее поведения предположениям экспериментатора.

Вероятностная (стохастическая) зависимость – зависимость между двумя случайными величинами, причем каждому значению одной из них соответствует определенное распределение другой.

Вероятностная модель – модель, которая содержит случайные элементы.

Взвешенный метод наименьших квадратов – обобщенный метод наименьших квадратов для моделей с гетероскедастичностью.

Временной (динамический) ряд – последовательность наблюдений некоторого признака в последовательные моменты времени.

Выборка из генеральной совокупности – часть единиц генеральной совокупности.

Генеральная совокупность – совокупность всех мыслимых результатов наблюдения, которые могут быть получены в данных условиях.

Гетероскедастичность модели – свойство дисперсии остатков ξ_i модели, когда для каждого значения факторов X_i модели остатки ξ_i имеют различную дисперсию.

Гомоскедастичность модели - свойство постоянства дисперсий остатков ξ_i модели для каждого значения факторов X_i .

Декомпозиция – процедура системного анализа, заключающаяся в разбиении целого на части с целью их детального изучения.

Дисконтирование – приведение экономических показателей к сопоставимому по времени виду с помощью коэффициентов дисконтирования.

Дискретная модель – экономико-математическая модель, все переменные и параметры которой являются дискретными величинами.

Дискретная (случайная) величина – множество возможных значений (случайной) величины, число которых конечно или счётно.

Доверительная вероятность – достоверность (надежность) определения неизвестного значения параметра с помощью оценки параметра.

Доверительный интервал – случайный (по расположению своего центра и размеру) интервал, который с некоторой дове-

рительной вероятностью покрывает истинное значение искомого параметра.

Зависимая переменная – в регрессионной модели некоторая переменная Y , являющаяся функцией регрессии с точностью до случайного возмущения.

Задачи регрессионного анализа – установление формы зависимости между переменными, оценка функции регрессии, прогноз значений зависимой переменной.

Идентификация – процесс отождествления некоторой модели объекту.

Идентификация ряда – построение адекватной объекту модели, т.е. такой модели, в которой математическое ожидание ряда остатков ξ_i равно нулю, а все регрессоры значимы.

Измерение – процесс моделирования, в ходе которого объект измерения получает отображение в некоторой модели, представляющую собой соответствующую шкалу измерений.

Индекс – относительная величина, характеризующая изменение уровней сложных социально-экономических показателей во времени, пространстве или по сравнению с базисом.

Инерционность экономического объекта – свойство экономических объектов, претерпевая изменения под действием внешних факторов, незначительно и постепенно изменять при этом свою структуру, направление и степень взаимосвязи между элементами.

Инновация – “изобретение”, “нововведение”, “новшество”, “новаторство” и т.п. Инновацию можно рассматривать как явление, как процесс и как одно из направлений деятельности. Под инновациями как *явлением* понимаются материализованные изменения в товаре, технологиях, организационной структуре и коммуникациях, обусловленные научно-

техническим прогрессом и вызванные стремлением предприятия к получению конкурентных преимуществ. *Процесс инноваций* представляет собой регулируемую совокупность действий, осуществляемых для последовательного изменения инноваций как явления. *Инновационная деятельность* представляет собой одно из направлений предпринимательской деятельности, нацеленное на получение конкурентных преимуществ посредством инноваций.

Интервальный ряд динамики – ряд числовых значений определенного статистического показателя, характеризующего размеры изучаемого явления за определенные промежутки (периоды, интервалы) времени.

Квантиль уровня Q – такое значение x_Q случайной величины, при котором функция её распределения принимает значение, равное Q .

Классификация – научный подход, заключающийся в дифференциации всего множества объектов и последующем их объединении в определенные группы на основе какого-либо признака.

Количественные признаки – признаки, имеющие числовое выражение, которые могут быть измерены по каждой единице совокупности.

Комплекс моделей – совокупность моделей, предназначенных для решения одной сложной задачи, каждая из которых описывает ту или иную сторону моделируемого объекта либо процесса на своем соответствующем этой стороне «языке».

Коэффициент детерминации (R^2) – одна из оценок адекватности регрессионной модели, мера качества уравнения регрессии (мера качества подгонки регрессионной модели к наблюдаемым значениям). Характеризует долю вариации зависимой переменной, обусловленной регрессией или изменчиво-

стью объясняющих переменных. Модель считается тем лучше, чем ближе R^2 к единице, т.е. регрессия тем точнее описывает зависимость между объясняющими и зависимыми переменными.

Лаг – смещение изменения одного показателя по сравнению с изменением другого.

Лаг временной – направление и продолжительность отставания одного из взаимосвязанных уровней временного ряда от уровней другого ряда.

Лаговые переменные – переменные, взятые в предыдущий момент (или моменты) времени и выступающие в качестве эндогенных и/или экзогенных переменных.

Линейная модель – модель, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней признаются линейными.

Метод – совокупность средств, приемов и способов для достижения поставленной цели.

Методология – учение о научном методе познания, способы организации теоретической и практической деятельности, совокупность методов, применяемых в какой-либо науке.

Моделирование – исследование, построение и изучение моделей реально существующих предметов и явлений.

Модель – 1) отображение или аналог явления или процесса в основных существенных для него чертах; 2) условный образ объекта или процесса, используемый исследователем для упрощения их познания; 3) логическое или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса; 4) преднамеренно упрощенная имитация некоторой части реальной действительности.

Моментный ряд – ряд числовых значений определенного статистического показателя, характеризующего изучаемое явление на определенные даты, моменты времени.

Мониторинг – систематическое наблюдение за состоянием объектов и процессов.

Мультиколлинеарность – высокая взаимная коррелированность объясняющих переменных. При построении эконометрических моделей мультиколлинеарность вызывает ряд проблем: 1) проблемы при вычислениях из-за слабой обусловленности матрицы систем нормальных уравнений (её определитель близок к нулю); 2) снижается точность оценки параметров моделей из-за указанной выше проблемы; 3) неточность оценки параметров модели приводит к неточности интерпретации влияния факторов на результирующий показатель; 4) существенно снижается устойчивость оценок параметров модели, т.е. малейшие помехи могут привести к значительным изменениям оценок параметров модели; 5) прогнозная ценность таких моделей низка из-за неустойчивости модели, которая может давать сильную вариацию прогнозных значений.

Нестационарный процесс – процесс, при котором быстро изменяющиеся условия функционирования СЭС оказывают существенное влияние на ее характеристики, вызывая их изменение.

Объем выборки – конечное число элементов выборки.

Параметр модели – относительно постоянный показатель, характеризующий моделируемую систему, процесс или явление.

Период упреждения – отрезок времени от момента, для которого имеются последние статистические данные об изучаемом объекте, до момента, к которому относится прогноз.

Прогноз – научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем или об альтернативных путях и сроках достижения этих состояний.

Прогнозирование – научно обоснованное выявление состояния и вероятных путей развития явлений и процессов.

Робастная оценка – оценка, которая в наихудшем случае имеет наименьшую дисперсию.

Робастность – свойство статистической оценки не сильно реагировать на возможные отклонения от рассматриваемой модели.

Свойство – сторона предмета, обуславливающая его различие или сходство с другими предметами и проявляющаяся во взаимодействиях с ними.

Сглаживание – выравнивание уровней ряда динамики путем применения методов усреднения.

Системный анализ – методология исследования объектов посредством представления их в качестве систем и анализа этих систем.

Спецификация моделей – один из этапов построения экономико-математической модели, на котором на основании предварительного анализа экономического объекта или процесса в математической форме выражаются обнаруженные связи и соотношения, а значит, параметры и переменные, представляющиеся на данном этапе существенными для цели исследования.

Спрос – конкретная потребность, предъявляемая на рынке, т.е. потребность, обеспеченная деньгами, для её приобретения.

Статистическая закономерность – форма проявления причинной связи, выражающаяся в последовательности, регулярности, повторяемости событий с достаточно высокой степенью вероятности, если причины, порождающие события, не изменятся или изменятся незначительно.

Статистическое моделирование – способ исследования процессов поведения вероятностных систем в условиях, когда неизвестны внутренние взаимодействия в этих системах.

Стационарный временной ряд – временной ряд, вероятностные свойства которого не изменяются во времени.

Тенденция – основное направление, закономерность развития.

Товары Гиффона – товары “благ низшего порядка” – крупы, картофель, хлеб, искусственные жиры, синтетическая одежда, дешевые вещи и т.п. При незначительной цене за единицу дешевых товаров и с ростом цен на товар, объем спроса на них со стороны потребителей с низкими доходами начинает расти, что противоречит классической постановке закона спроса, в соответствии с которым, с ростом цен на товар объемы его приобретения должны уменьшаться. Этот парадокс был изучен и описан в середине XIX века Р. Гиффоном. Существует несколько точек зрения, объясняющих поведение товаров Гиффона (ограничение бюджета потребителя и др.)

Тренд – главная тенденция изменения уровней временного ряда. Компонента модели, описывающая влияние долговременных факторов, т.е. длительную тенденцию изменения моделируемого признака.

Трендовая модель – динамическая модель, в которой развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд ее основных показателей.

Уровень ряда динамики – значение отдельного наблюдения ряда динамики.

Устойчивость модели – способность динамической модели описывать движение по намеченной траектории, несмотря на действующие на неё возмущения.

Фактор – источник воздействия на систему, отражающегося на значении переменных модели этой системы.

Фиктивные переменные – чаще всего дихотомические (бинарные, булевы) переменные, принимающие всего два значения «0» или «1» в зависимости от совпадения или несовпадения с факторным признаком.

Функция правдоподобия – функция, выражающая плотность вероятности (вероятность) совместного появления результатов выборки x_1, x_2, \dots, x_n :

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \varphi(X_1, \theta)\varphi(X_2, \theta), \dots, \varphi(X_j, \theta), \dots, \varphi(X_n, \theta)$$

$$\text{или } L(X_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \varphi(X_i, \theta).$$

Цель – осознанный образ предвосхищаемого результата, на достижение которого направлены действия человека.

Экзогенные переменные – переменные внешние по отношению к моделируемой системе.

Эконометрика – научная дисциплина, предметом которой является изучение количественной стороны экономических процессов и явлений средствами математического и статистического анализа.

Эконометрическая модель – экономико-математическая модель, параметры которой оцениваются с помощью методов математической статистики.

Экономико-математическая задача – задача анализа, прогнозирования, проектирования, планирования, управления экономическим объектом, решаемая средствами математической формализации на основе экономико-математических моделей.

Экономико-математическая модель – математическое описание экономического процесса, явления или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими.

Экономико-математическое моделирование – описание экономических процессов и явлений в виде экономико-математических моделей.

Экономико-статистический анализ – разработка экономических основ на широком применении традиционных статистических и математико-статистических методов с целью контроля адекватного отражения исследуемого явления.

Эндогенные величины – переменные, изменение которых происходит внутри моделируемой системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. - 432 с.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика: Теория вероятностей и прикладная статистика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. - 656 с.
3. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. - М.: Финансы и статистика, 2001. - 227 с.
4. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. - М.: Мир, 1971. - 408 с.
5. Бессонов В. О проблемах измерений в условиях кризисного развития российской экономики.//Вопр. статистики. - 1996. - № 7. - С. 18 - 32.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып.2. - М.: Мир, 1974. - 197 с.
7. Болдин М.Б., Симонова Г.И., Тюрин Ю.Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. - М.: 1997. - 246 с.
8. Бородич С.А. Эконометрика. - Минск: Новое знание. 2001.- 408 с.
9. Брандт З. Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров. - М.: Мир: ООО «Изд-во АСТ», 2003. - 686 с.
10. Бушуев Л.И. Методы прогнозирования объема продаж//Маркетинг в России и за рубежом. - 2002. - № 1 (27). - С.15 - 30.
11. Быковская И.В., Плотников С.В., Подчернин В.М. К вопросу о формировании маркетингового бюджета//Маркетинг в России и за рубежом. - 2001. - № 6. - С.46 - 52.
12. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. - М.: Финансы и статистика, 1981. - 294 с.

13. Власов М.П., Шимко П.Д. Моделирование экономических процессов. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. - 409 с.
14. Гришин А.Ф., Кочерова Е.В. Статистические модели. Построение, оценка, анализ. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 416 с.
15. Гришин А.Ф., Котов-Дарти С.Ф., Ягунов В.Н. Статистические модели в экономике. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. - 344 с.
16. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Радио и связь, 1986. - 512 с.
17. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. - М.: ЮНИТИ, 1995. - 215 с.
18. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. - М.: Экономика, 1985. - 259 с.
19. Губанов В.А., Ковальджи А.К. Выделение сезонных колебаний на основе вариационных принципов//Экономика и математические методы. - 2001. - Т. 37, № 1. - С.91 - 102.
20. Губанов В.А. Выделение тренда из временных рядов макроэкономических показателей//Тр. Института народнохозяйственного прогнозирования РАН/Гл. ред. А.Г. Коровкин. - М.: МАКС-Пресс, 2005. - С.58 – 65.
21. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. - М.: Финансы и статистика, 1981. - 302 с.
22. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. - М.: Наука, 1971. - 288 с.
23. Доугерти К. Введение в эконометрику. - М.: ИНФА, 2001. - 402с.
24. Дуброва Т.А. Статистические методы прогнозирования. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. - 206 с.
25. Дятлов А.Н., Артамонов С.Ю. Оптимизация маркетингового бюджета фирмы с использованием моделей S-образных кривых функций спроса//Экономический журнал ВШЭ. - 1999. - № 4. - С. 32 - 40.

26. Зарова Е.В., Хасаев Г.Р. Эконометрическое моделирование и прогнозирование развития региона в краткосрочном периоде. - М.: Экономика, 2004. - 149 с.
27. Кашьяп Р.А., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. - М.: Наука, 1983. - 384 с.
28. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Введение в количественный экономический анализ. - М.: Статистика, 1977. - 435 с.
29. Кендэл М. Временные ряды.- М.: Финансы и статистика, 1981. - 320 с.
30. Клейнер Г.Б., Смоляк С.А. Эконометрические зависимости: принципы и методы построения. - М., 2000. - 104 с.
31. Кобринский Н.Е. Информационные фильтры в экономике (Анализ одномерных временных рядов). - М.: Статистика, 1978. - 287 с.
32. Кобринский Н.Е., Кузьмин В.И. Точность экономико-математических моделей. - М.: Финансы и статистика, 1981. - 324 с.
33. Кошечкин С.А. Алгоритм прогнозирования объёма продаж в MS EXCEL//Маркетинг в России и за рубежом. - 2001. - № 5 (25). - С.35 - 42.
34. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. - 311 с.
35. Лобанова Е. И. Прогнозирование с учетом цикличности экономического роста//Экономические науки. - 1991. - № 1. – С. 25 - 30.
36. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной математической науки. - М.: Дело, 2003. - 520 с.

37. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 416 с.
38. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей. - М.: Финансы и статистика, 1986. - 326 с.
39. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. - М.: Дело, 2004. - 576 с.
40. Маленво Э. Статистические методы эконометрики. - М.: Статистика, 1975. - 424 с.
41. Моделирование экономических процессов/Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. - 351 с.
42. Моторин В.И. Критерии и методы декомпозиции макроэкономических показателей: Препринт. WP2/2005/02. - М.: ГУ ВШЭ, 2005. - 60 с.
43. Нижегородцев Р.М. Среднесрочное прогнозирование динамики макроэкономических параметров при помощи гармонических трендов//Теория активных систем: Тр. междунар. науч.-практич. конф. - М.: ИПУ РАН. - 2003. Т.1. - С.120 - 126.
44. Нижегородцев Р.М. Информационная экономика. Кн. 1. Информационная вселенная: Информационные основы экономического роста. - М.-Кострома, 2002. - 163 с.
45. Орехов Н.А., Лёвин А.Г., Горбунов Е.А. Математические методы и модели в экономике. - М.: ЮНИТИ, 2004. - 303 с.
46. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. - М.: Энергоатомиздат, 1996. - 554 с.
47. Половников В.А., Горчаков А.А. Модели и методы экономического прогнозирования. - М.: МЭСИ, 1980. - 116 с.
48. Постан М.Я. Обобщенная логистическая кривая: её свойства и оценка параметров//Экономика и математические методы. - 1993. - Т. 29. Вып.2. – С. 305 – 310.

49. Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. - М.: Логос, 1998. - 279 с.
50. Садовникова Н.А., Шмойлова Р.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. - М.: МЭСИ, 2004. - 200 с.
51. Семёнычев В.К. Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии. - Самара: АНО «Изд-во СНЦ РАН», 2004. - 243 с.
52. Семёнычев В.К. Общий подход к идентификации экономической динамики моделями авторегрессии//Вест. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. - Самара: СГАУ, - 2004. № 4 (6). - С.63 - 68.
53. Семёнычев В.К. Использование Z-преобразования для идентификации моделей временных, «невременных» и пространственно-временных рядов//Вест. СамГТУ. Сер. Технические науки. – Самара, 2005. - № 33. - С.353 - 357.
54. Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В. Моделирование логистической тенденции с учетом типовых помех//Вест. СамГТУ. Сер. Технические науки. – Самара, 2005. - № 31. - С.112 - 117.
55. Семёнычев Е.В. Моделирование экономических показателей деятельности печатных СМИ с учётом сезонной компоненты//Проблемы менеджмента организаций. Проблемы экономики современных промышленных комплексов. Методические и практические аспекты финансирования и кредитования. Математические модели современных экономических процессов: Всесоюз. науч.-практич. конф.: Сб. ст./Самар. гос. аэрокосм. ун-т. - Вып.1. - Самара, 2005.- С. 41-45.
56. Семёнычев Е.В. Параметрическое моделирование и прогнозирование рядов экономической динамики с колебательной компонентой: автореф. дис. ... канд. эконом. наук/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2006. - 24 с.
57. Сергиенко А.Б., Цифровая обработка сигналов. - СПб.: Питер, 2006. – 751 с.

58. Скопина И.В. Оценка тенденций развития, колеблемости и цикличности конкурентного потребительского рынка// Маркетинг в России и за рубежом. - 2003. - № 6 (38). - С.49 - 57.
59. Слуцкий Е.Е. Избранные труды. - М.: Изд-во АН СССР, 1960. - 325 с.
60. Степанов Н.П. Использование моделирования как метода исследования процесса нововведения (по материалам зарубежной экономической литературы)//Инновационные процессы: сб. тр. - М.: ВНИИСИ, 1992. - С. 146 - 173.
61. Стерник Г.М. Статистический подход к прогнозированию цен на жилье//Экономика и математические методы. - 1998. - Т. 34. Вып. 1. - С.85 - 90.
62. Твисс Б. Прогнозирование для технологов и инженеров. Практическое руководство для принятия лучших решений. - Н.Новгород: Парсек - НН, 2001. - 256 с.
63. Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю. Эконометрика. - М.: Экзамен, 2003. - 512 с.
64. Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге.-М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.- 159 с.
65. Френкель А.А., Горелик Н.А. Моделирование сезонных колебаний в экономических процессах//Экономика и математические методы. - 1977. - Т. 13. Вып. 2. - С. 372 - 377.
66. Чернышев С.Л. Моделирование экономических систем и прогнозирование их развития. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 232 с.
67. Четвериков Н.С. Методика вычисления сезонной волны в кратковременных рядах//Статистические исследования. - М.: Наука, 1975. - С. 146 - 151.
68. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. - М.: Статистика, 1977. - 192 с.
69. Шатаев И.М. Сезонные колебания в бытовом обслуживании. - М.: Легкая индустрия, 1977.- 49 с.

70. Швырков В.В., Швыркова Т.С. Моделирование внутригодовых колебаний спроса. - М.: Статистика, 1973. – 174 с.
71. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. - 367 с.
72. Щелобаева И.С. Моделирование интервальных оценок при прогнозировании тренд-сезонных экономических процессов: автореф. дис. ... канд. эконом. наук/ВЗФЭИ. - М., 2003. - 18 с.
73. Эконометрика/Под ред. И.И.Елисейевой. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 575 с.
74. Экономико-математические методы и прикладные модели/Под ред. В.В.Федосеева. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. - 304 с.
75. Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. - М.: Прогресс, 1974. – 380 с.
76. Andrews D.F. A robust method for multiple linear regression. //Technometrics. - 1974. - V. 16. № 4.
77. Bridges E. New technology adoption in innovative marketplace. //Inter Journal of Forecasting. - 1991. - vol.7, № 2. - P. 257 - 270.
78. Brooks C. Introductory Econometrics for Finance. – Cambridge University Press, 2002. - 340 p.
79. Diebold F. and Lopez J. Modeling Volatility Dynamics, in K. Hoover (ed.), Macro econometrics: Developments, Tensions, and Prospects. - Boston: Kluwer Academic Press, 1995. -P.427 - 472.
80. Durbin J., Murphy M.J. Seasonal adjustment based an a mixed-additive-multiplicative model//Statist. Sos., ser.A. - vol. 138, n.3. - P. 385 – 410.
81. Gali J., Gertler V. Inflation dynamics: A structural econometric analysis//Journal of Monetary Economics. - 1999. - № 44. – P. 195 - 222.
82. Goldfield S.U., Quandt R.E. Nonlinear methods in econometrics. –Amsterdam: Nort – Holland, 1977.
83. Jonston J. and Di Nargo J. Econometric Methods. - Mc Graw – Hill, 1997. - 328 p.

84. Koenker G. and Bassett, Jr. Regression Quantiles//Econometrica. – 1978. - Vol.46, No1 (January).
85. Hannan E.J. The estimation of season variation. Ark. Mat. 1. - 1951. - 257 p.
86. Life Cycles and Long Waves//T.Vasko, R.Aytes. Springer. - 1990. – 328 p.
87. Muller W. Quantile Regression/Institute fur Angewandte Mathematic: Universitat Heidelberg: Preprints. - Germany, 1991, April. - N. 624. - P. 551 - 571.
88. Hendry D. Dynamic Econometrics. - Oxford University Press, 1995. – 304 p.
89. Ramsay J.O. A comparative study of several robust estimates of slope, intercept a scale in linear regression//JASA.-1977.- v.72, № 3.
90. Ramu Ramanathan. Introductory Econometrics with Applications. - 4th ed. - Harcourt Inc, 1998. – 363 p.
91. Theil P., Wage S. Some observations on adaptive forecasting// Management Science. - 1964. - Vol.10. - P. 21 - 62.
92. Winters P.R. Forecasting sales by exponentially weighted moving averages//Management Science. - 1960. - Vol. 6, № 3. - P.68 - 79.

ИЗБРАННЫЕ ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТ

www.gks.ru	Сайт Госкомстата РФ. Основные социально-экономические показатели России. Российская государственная статистика (1802 – н.в). Методология. Электронные версии официальных публикаций Госкомстата России. Ссылки на международные статистические ресурсы и национальные статистические службы.
www.cbr.ru	Центральный Банк Российской Федерации. Макроэкономическая статистика.
www.minfin.ru	Официальный сайт Министерства Финансов РФ. Публикация квартальных отчетов исполнения федерального бюджета РФ.
www.nalog.ru	Официальный сайт Министерства Российской Федерации по налогам и сборам.
www.economy.gov.ru	Министерство экономического развития и торговли Российской Федерации.
www.cea.gov.ru	Центр экономической конъюнктуры при правительстве Российской Федерации.
www.iet.ru	Сайт Института экономики переходного периода. Публикации.
www.finmarket.ru	Агентство Финмаркет. Статистика и графики основных макроэкономических показателей РФ и мира.
www.beafnd.org	Фонд Бюро экономического анализа. Публикации по макроэкономической тематике.
www.cemi.rssi.ru	Сайт ЦЭМИ (Центрального экономико-математического института РАН). Ссылки на сайты периодических журналов РАН (в т.ч. Экономико-математические методы и др.)
http://stat.hse.ru	Статистическая база данных по российской экономике.

Учебное издание

*Семёнычев Валерий Константинович,
Семёнычев Евгений Валериевич*

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ.
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ИННОВАЦИЙ
Часть 1**

Учебное пособие

Технический редактор Е. А. С и м а н о в с к и й
Редакторская обработка Н. С. К у п р и я н о в а
Корректорская обработка О. Ю. Д ь я ч е н к о
Доверстка А. А. Н е ч и т а й л о

Подписано в печать 26.10.06. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,78. Усл. кр.-отт. 12,91. Печ. л. 13,75.
Тираж 50 экз. Заказ . ИП-11/2006.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.