

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

О.А. КУЗНЕЦОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ: МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ
И РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе высшего образования по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2016

УДК 334(075)
ББК 65.050я7
К891

Рецензент: д-р экон. наук, проф. Д. Ю. И в а н о в,
канд. экон. наук, доц. А. В. К у з н е ц о в

Кузнецова, Ольга Александровна

К891 **Экономико-математическое моделирование: модели микроэкономики и рыночного равновесия:** учеб. пособие / *О.А. Кузнецова.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2016. – 96 с.

ISBN 978-5-7883-1082-4

В пособии рассматриваются микроэкономические, макроэкономические, социальные модели, а также модели экономики, учитывающие влияние фактора экологии.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 38.03.05 Бизнес-информатика очной формы обучения.

Подготовлено на кафедре математических методов в экономике.

УДК 334(075)
ББК 65.050я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
I. Модели микроэкономики.....	6
1. Анализ рынка.....	6
1.1. Исследование и прогнозирование конъюнктуры товарного рынка.....	6
1.2. Анализ тенденций и устойчивости развития рыночной конъюнктуры.....	11
1.3. Методологии прогнозирования рыночной доли продукции.....	16
1.4. Определение потребительских свойств продукции.....	18
Вопросы для самоконтроля.....	20
Практическое задание 1. Анализ рынка.....	20
2. Оптимизационные модели.....	23
2.1. Математическая модель оптимизационной задачи.....	23
2.2. Построение моделей транспортной задачи.....	23
Практическое задание 2. Оптимизационные модели.....	26
3. Управление запасами. Основные модели управления запасами....	28
3.1. Модель Уилсона.....	28
3.2. Модель планирования экономического размера партии.....	30
3.3. Модель управления запасами, учитывающая скидки.....	32
Практическое задание 3. Управление запасами.....	34
4. Управление денежными активами.....	36
4.1. Модель Баумола.....	36
4.2. Модель Миллера–Орра.....	37
Практическое задание 4. Управление денежными активами.....	39
5. Исследование систем управления распределением заказа.....	40
5.1. Описание организационной системы.....	40
5.2. Принцип жесткой централизации (оптимизация интересов Центра).....	41
5.3. Оптимизация интересов агентов.....	41
5.4. Механизм прямых приоритетов.....	42
5.5. Механизм обратных приоритетов.....	42
5.6. Механизм внутренних цен.....	43
Вопросы для самоконтроля.....	44
Практическое задание 5. Исследование систем управления распределением заказа.....	44
6. Согласование интересов в системе «Поставщики-Заказчик».....	47
6.1. Описание организационной системы. Постановка задачи....	47
6.2. Согласованные механизмы управления в системе «Поставщики - Заказчик».....	47
Вопросы для самоконтроля.....	51

Практическое задание 6. Согласование интересов в системе «Поставщики-Заказчик».....	51
7. Моделирование инвестиций.....	53
7.1. Оценка экономической эффективности реальных инвестиций.....	53
7.2. Формирование портфеля ценных бумаг.....	55
7.3. Формирование портфеля реальных инвестиций.....	56
7.4. Формирование портфеля реальных инвестиций с учётом принципа пространственной оптимизации.....	57
7.5. Формирование портфеля реальных инвестиций с учётом принципа временной оптимизации.....	58
Практическое задание 7. Моделирование инвестиций.....	58
II. Модели макроэкономики.....	62
8. Построение регрессионной модели.....	62
8.1. Методы отбора факторов.....	62
8.2. Этапы построения эконометрической модели.....	64
9. Макроэкономическое равновесие.....	68
9.1. Совокупный спрос и факторы, его определяющие.....	68
9.2. Классическая модель макроэкономического равновесия.....	69
9.3. Кейнсианский подход к макроэкономическому равновесию.....	69
10. Паутинообразная модель.....	73
10.1. Паутинообразная модель с запаздыванием спроса.....	75
10.2. Паутинообразная модель с запаздыванием предложения.....	77
Практическое задание 10. Паутинообразная модель.....	80
11. Модель общего экономического равновесия.....	81
11.1. Модель Л. Вальраса.....	81
11.2. Модель Д. Патинкина.....	82
Практическое задание 11. Модель общего экономического равновесия.....	83
12. Балансовые модели.....	85
12.1. Модель межотраслевого баланса Леонтьева.....	85
12.2. Модель межотраслевого баланса затрат труда.....	89
Практическое задание 12. Балансовые модели.....	90
Библиографический список.....	93

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит все основные разделы курса «Экономико-математическое моделирование» в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования, не рассмотренные в других курсах.

Математическая модель является основным инструментом исследования и прогноза экономических явлений.

Математические модели представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации.

В современных условиях возникла необходимость учёта в математических моделях экологического фактора.

Математические методы и модели эффективно применяются и на уровне деятельности фирмы, и в макроэкономике – при планировании и анализе экономической деятельности региона и страны.

I. МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

1. АНАЛИЗ РЫНКА

1.1. Исследование и прогнозирование конъюнктуры товарного рынка

Понятие конъюнктуры рассматривается в двух аспектах – в статическом и динамическом.

В «трендовом», или динамическом», понимании конъюнктура рассматривается как совокупность причин и условий, которые взаимосвязаны между собой и которые определяют изменение рынка.

В «структурном», или «статическом», понимании конъюнктура рассматривается как сложившаяся на рынке экономическая ситуация. Она описывается значениями спроса и предложения по отрасли, а также соотношением между ними; уровнем цен; товарными запасами; портфелем заказов; и многими другими параметрами, характеризующими тенденции развития конкретного рынка по отношению к конкретной фирме.

При комплексном анализе рынка изучаются следующие переменные: спрос (объемы спроса); товар (по сравнению с конкурентами); рынок (с учётом тенденций развития), рыночная структура; покупатель (с учётом сегментирования); конкуренты и условия конкуренции; формы и методы сбыта.

Конъюнктура рынка характеризуется динамичностью, пропорциональностью, вариабельностью, цикличностью.

Этапы проведения конъюнктурных исследований:

1) оценка (анализ рыночной конъюнктуры), характеристика масштабов и типологии рынка, его главные пропорции, вектора и скорости изменения основных параметров, уровень устойчивости развития;

2) нахождение причинно-следственных связей, характеризующих ситуацию на рынке;

3) прогнозирование рыночной конъюнктуры на основе причинно-следственных связей, выводы о перспективах развития рынка с учётом маркетинга фирмы;

4) прогнозирование развития рынка (долгосрочное и перспективное).

Характер изменения товарной конъюнктуры возможно прогнозировать на период не более 1 года.

При краткосрочном прогнозировании (до 1,5 лет) учитываются случайные факторы.

При среднесрочном (на 5 лет) и долгосрочном (на 10–15 лет) прогнозировании временные и случайные факторы воздействия на рынок не учитываются.

Все методы прогнозирования можно разделить на несколько групп:

- *методы экспертных оценок* основаны на выявлении и обобщении мнений опытных специалистов-экспертов (методы отличаются простотой, скоростью и дешевизной);

- *методы статистической экстраполяции* (построение линии тренда на основе анализа статистической информации);

- *методы экономико-математического моделирования* представляют собой построение систем уравнений для реализации их посредством ЭВМ;

- *корреляционно-регрессионный анализ* основан на анализе факторов. Посредством анализа определяется сила влияния переменных на результат.

Исследование конъюнктуры рынка с помощью корреляционно-регрессионного анализа проходит в несколько этапов:

1) определение факторных переменных и предварительная обработка статистических данных;

2) определение корреляции между признаками и видами функции;

3) определение параметров многофакторной модели изучаемого явления и анализ качества построенной модели;

4) прогнозирование с использованием построенной модели.

Общий вид многофакторной модели регрессии

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где y - результирующий фактор функции;

x_1, x_2, \dots, x_n - переменные факторы функции.

Графический метод. Графический анализ эффективен при краткосрочном прогнозировании. Графики позволяют оценить динамику отдельных экономических показателей, выявить закономерности их поведения, определить их изменение в будущем.

Показатели конъюнктуры представлены в виде 4 основных групп:

- показатели материального производства характеризуют предложение товара (объём выпуска);
- показатели спроса на товары (величина спроса, цена);
- показатели валютной и кредитно-денежной ситуации, характеризующие как предложение, так и спрос;
- цены как наиболее концентрированные показатели.

К показателям материального производства относятся данные о производстве промышленных товаров (автомобилей, полезных ископаемых, урожае сельскохозяйственных культур). Они подразделяются:

- на абсолютные показатели (натуральные и стоимостные);
- относительные показатели (индексы, темпы роста);
- косвенные показатели.

Абсолютные показатели измеряются в натуральных (обычно все сырьевые рынки: тонны, киловатты в час, баррели) и стоимостных (рынок рекламы, банковских услуг) показателях.

Относительные показатели об изменениях объема производства представляются как индексы, составленные на основе стоимостных показателей по отраслям или отдельным крупным секторам экономики.

Косвенные показатели используются в случае невозможности использования для оценки конъюнктуры абсолютных показателей либо вследствие их недоступности. К косвенным показателям относятся: динамика загрузки производственных мощностей, объём инвестиций и уровень занятости в отрасли.

Спрос на товар определяется по показателям ёмкости, доли и насыщенности рынка.

Спрос на товар – количество денег, которые потребители готовы потратить на определённый вид товара на определённом рынке в определённый момент времени.

Объём рынка – количество товара, предлагаемого на рынке в данный период времени.

Емкость рынка означает возможный объём спроса при определённом уровне цен в определённый период времени.

Емкость национального рынка по любому товару за период рассчитываются на основе данных внутренней и внешней статистики в физических единицах или по стоимости по следующей формуле:

$$E_p = T + Z + I + I_k - \mathcal{E} - \mathcal{E}_k,$$

где T - национальное производство данного товара; Z - остаток товарных запасов на складах предприятий-изготовителей в данной стране; I - импорт; I_k - косвенный импорт; \mathcal{E} - экспорт; \mathcal{E}_k - косвенный экспорт.

Косвенный импорт (экспорт) представляет собой поставки товара, используемого в других более сложных изделиях в виде комплектующих узлов, деталей, материалов. Например, при оценке емкости рынка электродвигателей нужно учитывать электродвигатели, установленные в станках, машинах и оборудовании, ввозимых или вывозимых из страны.

Потенциал товарного предложения (производственный потенциал) рассчитывается следующим образом:

$$Q = \sum_{i=1}^n (N_i \cdot M_i \cdot D_i \cdot R_i \cdot E) - P - K,$$

где Q - производственный потенциал рынка, т. е. объем товаров, который может быть произведен и предложен рынку в течение определенного периода;

N_i - количество предприятий, занимающихся производством данного товара (продукта или услуги);

M_i - мощность предприятия (или средняя мощность по группе);

D_i - степень загрузки производственных площадей;

R_i - степень обеспечения ресурсами, необходимыми для реализации производственной программы;

E - эластичность предложения продукции от цены;

Π - нормативное производственное потребление внутри предприятий;

K - предположительный объем производства конкурентов;

n - число i производственных предприятий.

Мультипликативно-аддитивная модель основана на нормативных и экспертных показателях, считается универсальной и используется как для потребительского рынка средств производства, так для потребительского рынка предметов потребления и услуг. Емкость рынка определяется в разрезе отдельных локальных рынков конкретных товаров и услуг (часто-региональных).

Емкость рынка может быть выражена формулой, построенной по следующей схеме:

$$E = \sum_{i=1}^n (S_i \cdot k \cdot \mathcal{E}_x) + P - (H - I_\phi - I_m) - A - C,$$

где E - емкость рынка (количество или стоимость продуктов и услуг, которые могут быть куплены в определенном периоде);

S_i - численность i -й группы потребителей;

k - уровень (коэффициент) потребления в базисном периоде, или норматив потребления i -й группы потребителей (нормативы: технологические – для средств производства, физиологические – для продуктов питания, рациональные – для непродовольственных продуктов и услуг);

\mathcal{E}_x - коэффициенты эластичности спроса от цен и доходов;

P - объем нормального страхового резерва товаров;

H - насыщенность рынка - объем товаров, имеющихся в домашнем хозяйстве населения, или средств производства на предприятиях на данный момент времени или за его отрезок;

I_ϕ - физический износ товаров;

I_m - моральный износ товаров;

A - альтернативные рыночные формы удовлетворения потребностей (в частности, натуральные источники потребления, черный рынок и т. п.), а также потребление товаров-заменителей;

C - доля конкурентов на рынке.

Доля рынка D_p представляет собой долю продаж фирмы на рынке и рассчитывается по следующей формуле:

$$D_p = P / E_p \times 100,$$

где P - объем реализации товаров фирмы.

Насыщенность рынка H_p (%) - показатель, который определяется отношением числа потребителей, уже купивших товар (Π_m), к общему числу потребителей (Π):

$$H_p = \Pi_m / \Pi \times 100.$$

Чем меньше значение имеет этот показатель, тем перспективнее рынок для сбыта товаров.

1.2. Анализ тенденций и устойчивости развития рыночной конъюнктуры

Анализ рыночной конъюнктуры начинается с характеристики масштаба и типа рынка. Масштаб рынка определяется объемом продажи товаров, а также числом и размером фирм, выступающих на нем в качестве продавцов, как производителей, выводящих свой товар на рынок, так и торговых посредников. Объем продаж определяется размером сбыта произведенной продукции, оптово-посредническим товарооборотом, оптово-потребительским товарооборотом, розничным товарооборотом.

Динамические ряды показателей характеризуют основные параметры рынка, а затем исчисляются темпы роста или прироста (базисные и цепные). Они позволяют оценить вектор, характер и скорость развития.

Динамический вектор колебаний отражает изменения по одному объекту во времени. Пространственный вектор – изменения по разным объектам в один и тот же момент времени.

В первом случае наблюдаются рассмотренные ранее отклонения от основной тенденции развития, во втором – от среднего уровня состояния рынка. Чем больше размах колебаний, т.е. чем неустойчивее рынок и его развитие, тем ненадежнее его оценки и прогнозы, тем выше риск маркетинговых мероприятий.

Прогнозирование ёмкости рынка.

1. Путём формирования **трендовых моделей**, которое заключается в математическом выравнивании динамического ряда фактических значений общего потребления конкретной группы товаров или услуг, имевших место в отдельные моменты времени t , посредством выбора функциональной зависимости и расчета ее параметров, т.е. определение зависимостей вида:

$$E = f(t),$$

где E - величина емкости рынка конкретной группы товаров или услуг;

t - временной параметр.

2. По стадиям жизненного цикла рынка

Логистическая функция

$$E_n(t) = E^* / (1 + a e^{-bt}), \quad (1)$$

где $E_n(t)$ - накопленная (суммарная) емкость рынка к моменту времени t ;

E^* - общая емкость рынка за весь жизненный цикл группы продукции;

a и b - параметры регрессии $a > 0, b > 0$.

Параметр a определяет соотношение между емкостью рынка в момент первых продаж продукции на рынке ($t = 0$) и общей емкостью рынка E^* : $a = E^* / E(t = 0) - 1$. Параметр b характеризует темпы роста объема продаж в каждый момент времени и, следовательно, косвенным образом определяет длительность периода, по истечении которого суммарные продажи на рынке станут составлять общий объем продаж за весь жизненный цикл рынка E^* .

Дифференцированием выражения (1) по времени определяют емкость рынка в каждый момент времени t :

$$E(t) = d E_H(t) / dt = b E_H(t) [E^* - E_H(t)] / E^* \quad (2)$$

3. На ранних стадиях жизненного цикла рынка, при наличии фактических данных о емкости рынка и значениях независимого параметра за ограниченное число временных периодов, не позволяющих выявить достаточно устойчивые и статистически обоснованные взаимосвязи между рассматриваемыми переменными, определяются **коэффициенты эластичности спроса** как отношение темпов прироста потребления определенной группы продукции за какой-либо интервал времени к темпу прироста независимого макроэкономического параметра за тот же период времени

$$\Theta_x = \frac{\Delta E}{\Delta X} \frac{X}{E},$$

Θ_x - показатель эластичности совокупного рыночного спроса по какому-либо фактору x ;

x - значение рассматриваемого фактора в базисном периоде;

Δx - прирост фактора в отчетном периоде по сравнению с базисным периодом;

E - значение емкости рынка в базисном периоде;

ΔE - прирост емкости рынка в отчетном периоде по сравнению с базисным периодом.

$$E_t = E [(X_t / X - 1) \Theta_x + 1].$$

4. Проведение корреляционно-регрессионного анализа по рядам значений емкости рынка и независимого макроэкономического параметра, т.е. формирование функциональных зависимостей общего вида:

$$E = f(x).$$

5. Товары первой необходимости, для которых кривая, характеризующая изменение емкости рынка, имеет вогнутый вид и асимптотически приближается к верхнему пределу, характеризующему уровень насыщения данными товарами (рис.1). Зависимость емкости рынка от уровня доходов по этой группе товаров имеет вид:

$$E = E_I - a e^{-bI},$$

где E - емкость рынка исследуемой группы товаров или услуг;

E_I - верхний предел потребления товаров первой необходимости.

6. Товары второй необходимости, для которых кривая емкости рынка также имеет вогнутый вид и приближается с ростом доходов к верхнему пределу потребления товаров данной группы, который имеет большее значение, чем для товаров первой необходимости; при этом спрос на данную группу товаров появляется после того, как доход достигает определенного размера, после которого возникает возможность приобретения товаров данной группы. Зависимость емкости рынка от среднедушевого дохода для товаров второй необходимости имеет вид:

$$E = E_{II} - a e^{-b(I - I_2)},$$

где E_{II} - верхний предел потребления товаров второй необходимости;

I_2 - пороговое значение дохода; при $I = I_2$ емкость рынка $E = 0$;

a, b - параметры регрессии; $a > 0, b > 0$.

7. Предметы роскоши, потребление которых не имеет верхнего предела, по мере роста доходов возрастает быстрыми темпами и возникает после того, как доход превышает нижнее пороговое значение, до достижения которого возможность приобретать товары данной группы отсутствует. Кривая емкости рынка товаров роскоши имеет выпуклую форму и описывается функциональной зависимостью:

$$E = a (I - I_3)^n,$$

где I_3 - пороговое значение дохода; при $I > I_3$ емкость рынка $E = 0$;

n - показатель степени, $n > 2$;

a - параметр регрессии, $a > 0$.

8. Многофакторные модели прогнозирования емкости рынка

В литературе представлены следующие примеры многофакторных моделей [4]:

а) в зависимости от уровня текущих доходов потребителей и среднего уровня цен на все потребительские товары в рассматриваемом периоде:

$$E_t = A_0 + A_1 \cdot I_t + A_2 \cdot P_t,$$

где P_t - средний уровень цен на все потребительские товары в планируемом периоде времени;

E_t - емкость рынка в планируемом периоде;

I_t - уровень дохода потребителей в планируемом периоде;

A_0, A_1, A_2 - коэффициенты регрессии;

б) расчет ёмкости рынка, основанный на расчете затрат потребителей. Формула для расчета:

$$E = N \cdot K \cdot F \cdot P,$$

где N - количество потенциальных потребителей в данном сегменте; K - процент покупателей, готовых к приобретению исследуемого товара; F - средняя частота/количество покупок в данном сегменте за исследуемый период; P - средняя цена товара.

9. Нормативный метод потребления. Ёмкость рынка определяется на основе статистической информации о годовых нормах потребления на одного жителя и общей численности населения. Итоговый результат получается путем перемножения нормы потребления на одного жителя на значение общей численности населения.

10. Расчет ёмкости рынка, основанный на расчете приведения объемов продаж для различных регионов. В расчетах используются данные о реальном объеме реализации продукции в одном регионе и факторы, определяющие продажи. С помощью факторов, определяющих продажи, определяются коэффициенты приведения продаж одного региона к другому (коэффициенты приведения численности населения, средней заработной платы, урбанизации, цены, особенности потребления и т. д.).

11. **Метод оценки общей емкости рынка** используется при оценке текущего спроса при внедрении нового или снятии с производства устаревшего товара:

а) собирается информация об общей численности населения и среднем уровне доходов на душу населения. Полученный общий объем доходов далее сокращается: из него выделяют долю средств на группу товаров (напр., бытовая химия). Из нее выделяют расходы на вид товара (моющие средства). Затем следует выделение из них рас-

ходов на подвид товаров (шампуни) и, отсюда – расходы на картофельные полуфабрикаты;

б) определяется максимальная доля потенциального рынка для конкретной фирмы. Здесь используются данные о сегментах рынка – количество потребителей шампуня, количество продукции, производимой конкурентом. На основании расчетов делается вывод о максимально возможном объеме реализации товара, превышение которого грозит фирме убытками от нереализованной продукции.

$$OE = H \cdot ПП \cdot X \cdot СП \cdot ПБ \cdot СЦ,$$

где OE – общая емкость рынка шампуня для женщин,

H - численность населения,

$ПП$ - процент жителей, потребляющих шампунь,

X - среднее число потребления одним потребителем в год,

$СП$ - среднее потребление шампуня одним потребителем за 1 раз,

$ПБ$ - процент женщин среди потребителей,

$СЦ$ - средняя цена шампуня.

1.3. Методологии прогнозирования рыночной доли продукции

Для целей прогнозирования доли рынка применяются методы, в основе которых лежит использование двух основных подходов: эвристического и экономико-математического.

1. Метод средней оценки по индивидуальным экспертным мнениям. Заключается в выведении взвешенного среднего арифметического из всех оценок, полученных в результате однократного опроса экспертов.

$$f = o \cdot w_o + p \cdot w_p + v \cdot w_v,$$

где w_o (w_p и w_v) - вероятность наступления ситуации, при которой доля рынка будет соответствовать оценке оптимистического (o), пессимистического (p) и наиболее вероятного (v) результатов, которые объединяются в итоговую оценку (f).

Обобщенная оценка по мнениям всех экспертов выводится как простая или взвешенная средняя величина из итоговых оценок отдельных экспертов.

2. Метод потребительской оценки с использованием цепи Маркова представляется наиболее целесообразной процедурой прогнозирования доли рынка в рамках эвристического подхода.

Алгоритм прогнозирования возможной доли присутствия продукции на рынке на планируемый период t посредством данного метода включает следующие этапы:

1) определение исходной доли рынка, занимаемой каждым видом продукции в предыдущий планируемому период времени;

2) формирование матрицы изменения предпочтений потребителей в отношении рассматриваемых товаров. В строках матрицы указывается, какая часть потребителей продукции, соответствующей рассматриваемой строке, переходит к потреблению других видов продукции, указанных в столбцах матрицы. В столбцах матрицы указывается, какая часть потребителей других видов продукции, указанных в строках матрицы, переходит на потребление продукции, соответствующей рассматриваемому столбцу;

3) определение прогнозной доли рынка за отчетный период в соответствии с выражением

$$F_{it} = \sum_{i=1}^n F_{it-1} \cdot z_{ij},$$

где i - порядковый номер строки матрицы;

j - порядковый номер столбца матрицы;

F_{jt} - доля рынка, принадлежащая продукции вида j в планируемый период времени t ;

F_{it-1} - доля рынка, принадлежащая продукции вида i в предыдущий планируемому период времени;

z_{ij} - соответствующий элемент матрицы коэффициентов изменения потребительских предпочтений.

Таким образом, данный метод позволяет осуществить переход к динамическому прогнозированию показателя доли рынка на определенное число периодов в перспективе. Однако высокая степень его адекватности фактическим данным соответствует ситуациям, характе-

ризующимся неизменностью потребительских вкусов, действий конкурентов, а также ценовой политики и других составляющих комплекса маркетинга. В остальных случаях степень совпадения фактических и планируемых с помощью данного метода объемов продаж достаточно низка.

Определить ёмкость рынка с помощью цепей Маркова. Даны исходные доли рынка, занимаемой каждым видом продукции в предыдущий планируемый период времени. 20 % принадлежит продукции А, 45 % – продукции В, 35 % – продукции С. Сформировать матрицу изменения предпочтений потребителей в отношении рассматриваемых товаров. 62 % потребителей предшествующего периода продолжают приобретать продукцию А, 20 и 18 % переходят к приобретению продукции видов В и С соответственно. В столбцах матрицы указывается, какая часть потребителей других видов продукции, указанных в строках матрицы, переходит на потребление продукции, соответствующей рассматриваемому столбцу. Так, в соответствии со вторым столбцом данной матрицы на потребление продукции В переходят 20 % потребителей продукции А, 31 % потребителей продукции С и остается 19 % первоначальных потребителей продукции В.

Определить прогнозные доли рынка за отчетный период.

Например, для продукции В:

$$FВ = 20 \% \times 0,20 + 45 \% \times 0,19 + 35 \% \times 0,31 = 23,4 \%$$

Количественный анализ направленности и силы воздействия всех показателей, определяющих спрос на конкретную продукцию, является основой экономико-математического подхода к прогнозированию доли рынка.

1.4. Определение потребительских свойств продукции

Анализ свойств товаров с помощью дифференцированной оценки.

Для выяснения степени соответствия продукта субъективным представлениям потребителей существует несколько возможностей:

а) опрос потребителей, как они оценивают качество товара;

б) дифференцированная оценка отдельных элементов и свойств продукта.

Существуют два вида моделей: компенсационные и некомпенсационные.

Линейно-компенсационные модели

Модель Розенберга

$$A_j = \sum_{i=1}^n (V_i \cdot I_{ij}),$$

где A_j - субъективная пригодность продукта (отношение к продукту);

V_i - важность мотива для потребителя;

I_{ij} - субъективная оценка пригодности продукта j для удовлетворения мотива i .

Потребители оценивают продукт с точки зрения его пригодности для удовлетворения своих потребностей.

Модель Фишбейна – является более практичной.

$$M_j = \sum_{k=1}^n (X_k \cdot Y_{ik}),$$

где M_j - оценка потребителями марки j ;

X_k - важность характеристики K марки j с точки зрения потребителя;

Y_{ik} - оценка характеристики K марки j с точки зрения потребителей.

Собрав таким образом данные о многих продуктах, можно получить:

а) общие оценки продуктов, которые могут служить индикаторами предпочтений потребителей;

б) информацию о том, как воспринимаются потребителем отдельные продукты;

в) информацию о важности различных характеристик для общей оценки.

Модели с идеальной точкой

$$Q_j = \sum_{k=1}^n (W_k \times [Y_{jk} - I_k] r),$$

$$M_j = \sum_{k=1}^n (V_k \cdot [Y_{jk} - I_k] r),$$

где выражение в скобках [] берется как модуль;

M_j - оценка потребителями марки j ;

V_k - важность характеристики k ($k = 1, \dots, n$);

Y_{jk} - оценка характеристики k марки j с точки зрения потребителей;

I_k - идеальное значение характеристики k с точки зрения потребителей;

r - параметр, означающий при $r = 1$ постоянную, а при $r = 2$ убывающую пользу.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение конъюнктуры рынка.
2. Опишите факторы конъюнктуры рынка.
3. Дайте определение фактической емкости рынка.
4. Дайте определение потенциальной емкости рынка.
5. Какие показатели используются для расчета емкости рынка?
6. Назовите основные методы определения емкости рынка.
7. Приведите формулы расчета емкости рынка по нормам потребления.
8. Дайте определение качеству продукции.

Практическое задание 1.

Анализ рынка

Задача 1.1. Определить потенциал фирмы. $N_i = 20$, $W_i = 150$, $\Theta_x = 0,4$, $F_j = 5$, $n = 1$.

Задача 1.2. Определить потенциал рынка: на рынке присутствуют 2 предприятия, мощность каждого предприятия – 150, степень загрузки производственных площадей – 80 %, степень обеспечения ресурсами, необходимыми для реализации производственной программы, равна, 1. Эластичность предложения от цен на сырье и готовую продукцию равна 10 %, внутреннее производственное потребление – 20 %.

Задача 1.3. Определить емкость рынка при следующих условиях: численность группы потребителей составляет 2000 человек, уровень потребления в базисном периоде равен 2, коэффициенты эластичности спроса от цен и доходов – 0,2. Величина страхового резерва товаров равен 150 единицам, насыщенность рынка – 300 единиц, физический износ товаров составляет 50 единиц, моральный износ товаров равен 20 единицам.

Задача 1.4. Определить ёмкость рынка при следующих условиях: потребление фруктов – 20 кг/г на человека, количество населения – 1000 чел., структура потребления фруктов приведена в табл. 1, цена яблок – 5 руб./кг.

Таблица 1. Структура потребления фруктов

Яблоки	10
Груши	5
Прочее	25

Задача 1.5. Определить ёмкость рынка. Даны исходные данные по долям рынка, занимаемым каждым видом продукции в предыдущий планируемому период времени. 20 % принадлежит продукции А, 45 % — продукции В, 35 % — продукции С. В следующем периоде прогнозируется изменение предпочтений потребителей: 4 % потребителей группы А перейдут в группу В, 10 % потребителей группы В перейдут к потреблению товаров группы С и 15 % потребителей группы С перейдут к потреблению товаров группы В.

Сформировать матрицу изменения предпочтений потребителей в отношении рассматриваемых товаров.

Задача 1.6. Сравнить отношение потребителя к продуктам по модели Розенберга. Существует два мотива использования продукта для потребителя: удобство и качество.

По первому продукту важность удобства для потребителя по пятибальной шкале составляет 3 единицы, важность качества для потребителя по пятибальной шкале составляет 5 единиц; субъективная оценка удобства продукта равна 4, а субъективная оценка качества продукта равна 1.

По второму продукту важность удобства для потребителя по пятибальной шкале составляет 2 единицы, важность качества для потребителя по пятибальной шкале составляет 5 единиц; субъективная оценка удобства продукта равна 5, а субъективная оценка качества продукта равна 1.

Задача 1.7. Сравнить отношение потребителя к продуктам по модели Фишбейна. Существует две характеристики использования продукта для потребителя: цена и качество.

По первому продукту важность цены с точки зрения потребителя равна 4; оценка цены с точки зрения потребителей равна 5. Важность качества с точки зрения потребителя равна 3; оценка качества с точки зрения потребителей равна 2.

По второму продукту важность цены с точки зрения потребителя равна 4; оценка цены с точки зрения потребителей равна 4. Важность качества с точки зрения потребителя равна 3; оценка качества с точки зрения потребителей равна 4.

Задача 1.8. Определить отношение потребителя к продукту по модели с идеальной точкой. Существует две характеристики использования продукта для потребителя: цена и качество.

Важность цены продукта с точки зрения потребителя равна 4; оценка цены продукта с точки зрения потребителей равна 5. Важность качества с точки зрения потребителя равна 3; оценка качества с точки зрения потребителей равна 2. При убывающей пользе товара.

Идеальное значение цены продукта с точки зрения потребителя равна 5; идеальное значение качества с точки зрения потребителя равна 4. При убывающей пользе товара.

2. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

2.1. Математическая модель оптимизационной задачи

Оптимизационные модели – это математические модели, позволяющие найти максимум или минимум заданного показателя. Оптимизационные модели используются для решения задач управленческой, производственной деятельности.

Примеры целевых функций:

а) целевая функция модели максимизации дохода торговой компании

$$D = \sum (y_i \cdot k_i) - \sum (x_i) - \sum \left(\frac{y_i \cdot k_i}{z_i \cdot k_i} \cdot P_i \right) - 0,06 \cdot \sum (y_i \cdot k_i) - 184000 \rightarrow \max ;$$

б) целевая функция модели максимизации дохода торгового представителя

$$ЗП = \sum \left(\frac{y_i \cdot k_i}{z_i \cdot k_i} \cdot P_i \right) \rightarrow \max,$$

где y_i - закупочная стоимость реализованного товара, x_i - стоимость закупленного товара, z_i - нормативная сумма реализации товара, k_i - торговая наценка по видам товара, P_i - процент торгового представителя.

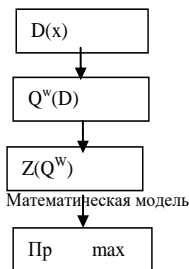
Варианты визуального представления математической модели представлены на рис. 1.

Одним из видов оптимизационных моделей является транспортная задача.

2.2. Построение моделей транспортной задачи

Задача о размещении (транспортная задача) – часто это логистическая задача о перемещении грузов между несколькими пунктами построенная на минимизации стоимостных или временных затрат на перевозку. Величина транспортных расходов задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

Блок-схема математической модели



$$\begin{cases} \text{Пр} = p_0 V - Z(Q^w) \max \\ Z(Q^w) = ax^2 \\ Q_w = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \\ D(x) = f(x) \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Рис. 1. Варианты визуального представления математической модели

Исходные параметры модели ТЗ

1) n - количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения;

2) a_i - запас продукции в пункте отправления A_i ($i = 1, n$) (ед.);

3) b_j - спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j = 1, m$) (ед.).

4) c_{ij} - тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j (руб.).

Искомые параметры модели ТЗ

1) x_{ij} - количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j (ед.);

2) $L(x)$ - транспортные расходы на перевозку всей продукции (руб.).

Этапы построения модели

1. Определение переменных.
2. Проверка сбалансированности задачи.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание ЦФ.
5. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, i = 1, n, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = 1, m, \\ \forall x_{ij} \geq 0, (i = 1, n, j = 1, m). \end{array} \right.$$

ЦФ представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 1).

Суммарный запас продукции во всех пунктах отправления должен равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления. ТЗ является **сбалансированной** (закрытой), если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j,$$

иначе – **несбалансированной** (открытой). В этом случае необходимо ввести дополнительный **фиктивный** пункт потребления с нулевой стоимостью, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

$$b_\phi = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j.$$

Также величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина $c^{\text{ф}}$ может быть любым положительным числом.

Задача о назначениях – частный случай ТЗ. Примером типичной задачи о назначениях является распределение работников по различным видам работ, минимизирующее суммарное время выполнения работ либо максимизирующее суммарную полезность.

Переменные задачи о назначениях определяются следующим образом

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{й рабочий работает на } j - \text{м станке,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Практическое задание 2. Оптимизационные модели

Задача 2.1. На конференцию прибывают научные сотрудники, организационный комитет должен разместить их в 4 гостиницах: “А”, “В”, “С” и “К”, в которых забронировано соответственно 8, 4, 12 и 16 мест. Двадцать пять научных сотрудников прибывают на железнодорожный вокзал, пять прибывают в аэропорт, а десять человек прибывают на автовокзал. Транспортные расходы при перевозке из пунктов прибытия в отели приведены в табл. 2.

Таблица 2. Матрица затрат на перевозку

Пункт прибытия, i	Гостиницы, j			
	А	В	С	К
Железнодорожный вокзал	10	0	20	11
Аэропорт	12	7	9	20
Автовокзал	0	14	16	18

Требуется составить математическую модель задачи для определения плана перемещения прибывших из пункта прибытия в гостиницы при условии минимизации затрат.

Задача 2.2. В процессе реструктуризации на фирме происходит перераспределение обязанностей (O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7) между сотрудниками (C1, C2, C3, C4, C5). Результаты тестирования каждого сотрудника по 10-балльной шкале даны в виде матрицы С. Распределить обязанности между сотрудниками таким образом, чтобы суммарная эффективность оказалась максимальной. При этом должно соблюдаться условие: для выполнения обязанностей O2 и O6 требуется по 2 сотрудника, для выполнения прочих обязанностей требуется по 1 сотруднику.

Таблица 3. Матрица оценок сотрудников С

	C1	C2	C3	C4	C5
O1	7	5	7	6	7
O2	6	4	8	4	9
O3	8	6	4	3	8
O4	7	7	8	5	7
O5	5	9	7	9	5
O6	6	8	6	4	7
O7	7	7	8	6	4

3. УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1. Модель Уилсона

Математические модели управления запасами (УЗ) позволяют найти оптимальный уровень запасов некоторого товара, минимизирующий суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара, а также убытки от его дефицита. Модель Уилсона является простейшей моделью УЗ и описывает ситуацию закупки продукции у внешнего поставщика, которая характеризуется следующими *допущениями*:

- интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной;
- заказ доставляется со склада, на котором хранится ранее произведенный товар;
- время поставки заказа является известной и постоянной величиной;
- каждый заказ поставляется в виде одной партии;
- затраты на осуществление заказа не зависят от размера заказа;
- затраты на хранение запаса пропорциональны его размеру;
- отсутствие запаса (дефицит) является недопустимым.

Входные параметры модели Уилсона

- 1) v - интенсивность (скорость) потребления запаса, ед.тов./ед.т;
- 2) s - затраты на хранение запаса, руб./ ед.тов. · ед.т;
- 3) K - затраты на осуществление заказа, включающие оформление и доставку заказа, руб.;
- 4) t_0 - время доставки заказа, ед.т.

Выходные параметры модели Уилсона

- 1) Q - размер заказа, ед.тов.;
- 2) L - общие затраты на управление запасами в единицу времени, руб./ед.т;
- 3) τ - период поставки, т.е. время между подачами заказа или между поставками, ед.т;

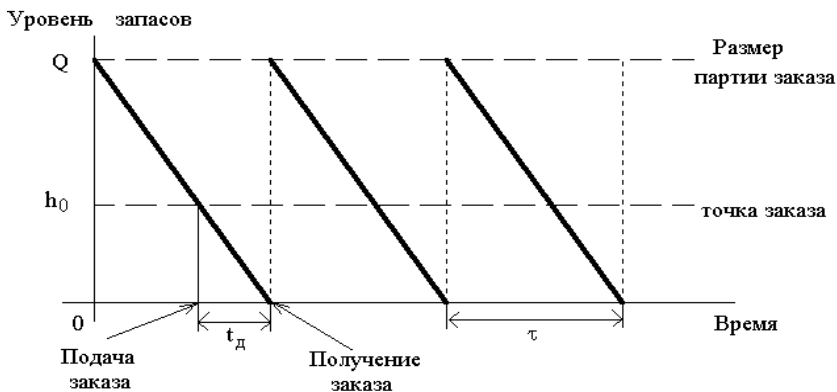


Рис.2. График циклов изменения запасов в модели Уилсона

4) h_0 - **точка заказа**, т.е. размер запаса на складе, при котором надо подавать заказ на доставку очередной партии, ед.тов.

Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона графически представлены на рис.2. Максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа Q .

Формулы модели Уилсона

$$Q_w = \sqrt{\frac{2Kv}{s}},$$

где Q_w - оптимальный размер заказа;

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2};$$

$$\tau = \frac{Q}{v};$$

$$h_0 = v \cdot t_d.$$

График затрат на УЗ в модели Уилсона представлен на рис.3.

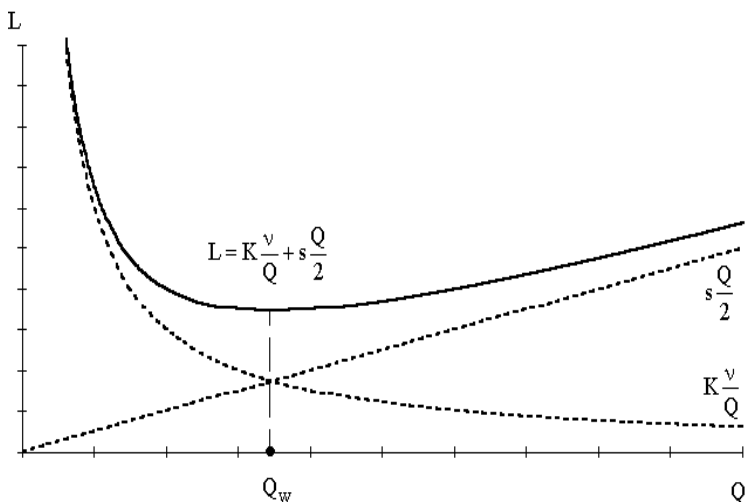


Рис.3. График затрат на УЗ в модели Уилсона

3.2. Модель планирования экономического размера партии

Модель Уилсона, используемую для моделирования процессов закупки продукции у внешнего поставщика, можно модифицировать и применять в случае собственного производства продукции. На рис.4 схематично представлен некоторый производственный процесс. На первом станке производится партия деталей с интенсивностью λ деталей в единицу времени, которые используются на втором станке с интенсивностью v , дет. / ед.т.

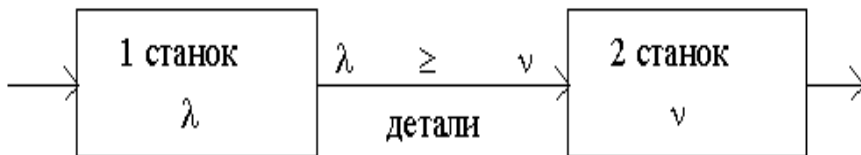


Рис. 4. Схема производственного процесса

Входные параметры модели планирования экономического размера партии:

1) λ - интенсивность производства продукции первым станком, ед.тов. / ед.т;

2) ν - интенсивность потребления запаса, ед.тов. / ед.т;

3) s - затраты на хранение запаса, руб. / ед.тов. · ед.т;

4) K - затраты на осуществление заказа, включающие подготовку (переналадку) первого станка для производства продукции, потребляемой на втором станке, руб.;

5) t_{II} - время подготовки производства (переналадки), ед.т.

Выходные параметры модели планирования экономического размера партии

1) Q - размер заказа, ед.тов.;

2) L - общие затраты на управление запасами в единицу времени, руб. / ед.т;

3) τ - период запуска в производство партии заказа, т.е. время между включениями в работу первого станка, ед.т;

4) t_0 - точка заказа, т.е. размер запаса, при котором надо подавать заказ на производство очередной партии, ед.тов.

Изменение уровня запасов происходит следующим образом (рис.5):

- в течение времени t_1 работают оба станка, т.е. продукция производится и потребляется одновременно, вследствие чего запас накапливается с интенсивностью $(\lambda - \nu)$;

- в течение времени t_2 работает только второй станок, потребляя накопившийся запас с интенсивностью ν .

Формулы модели экономического размера партии

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu\lambda}{s(\lambda - \nu)}}$$

где * - оптимальность размера заказа;

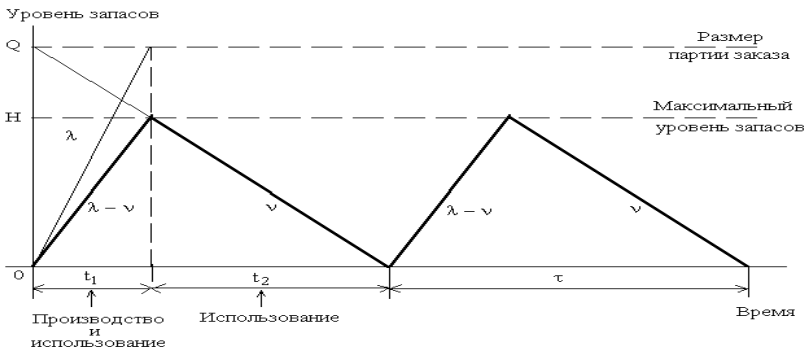


Рис. 5. График циклов изменения запасов в модели планирования экономического размера партии

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q(\lambda - v)}{2\lambda};$$

$$\tau = \frac{Q(\lambda - v)}{v};$$

$$\tau = \frac{Q}{v};$$

$$h_0 = v \cdot t_n.$$

3.3. Модель управления запасами, учитывающая скидки

Уравнение общих затрат для ситуации, когда учитываются затраты на покупку товара, имеет вид

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} + c \cdot v;$$

где c - цена товара, руб. / ед.тов.; $c \cdot v$ - затраты на покупку товара в единицу времени, руб. / ед.т. Если цена закупки складированного товара постоянна и не зависит от Q , то ее включение в уравнение общих за-

трат приводит к перемещению графика этого уравнения параллельно оси Q и не изменяет его формы (рис. 6). Т.е. в случае постоянной цены товара ее учет не меняет оптимального решения Q_w .

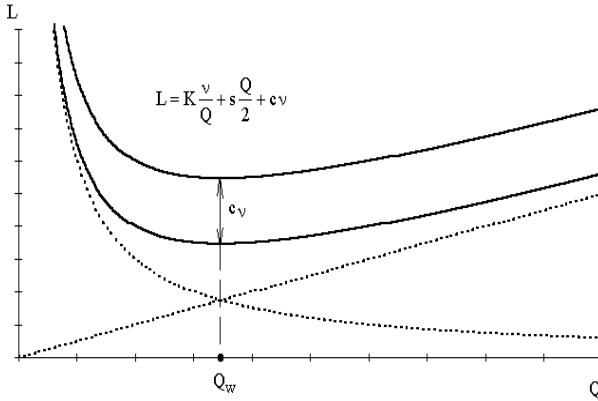


Рис. 6. График затрат на УЗ с учетом затрат на покупку

Если на заказы большого объема предоставляются скидки, то заказы на более крупные партии повлекут за собой увеличение затрат на хранение, но это увеличение может быть компенсировано снижением закупочной цены. Таким образом, оптимальный размер заказа может изменяться по сравнению с ситуацией отсутствия скидок. Поэтому затраты на приобретение товара необходимо учитывать в модели покупок со скидками.

Новые входные параметры модели, учитывающей скидки

1) Q_{p1}, Q_{p2} - **точки разрыва цен**, т.е. размеры покупок, при которых начинают действовать соответственно первая и вторая скидки, ед.тов.;

2) c_1, c_2 - соответственно исходная цена, цена с первой скидкой, цена со второй скидкой, руб. / ед.тов.

Влияние единственной скидки на общие затраты на УЗ показано на рис.6

Чтобы определить оптимальный размер заказа Q^* , необходимо проанализировать, в какую из трех областей попадает точка разрыва цены Q_{p1} (рис.6). Правило выбора Q^* для случая с одной скидкой имеет вид:

$$Q^* = \begin{cases} Q_w, & \text{если } 0 \leq Q_{p1} < Q_w & (\text{область I}), \\ Q_{p1}, & \text{если } Q_w \leq Q_{p1} < Q_1 & (\text{область II}), \\ Q_w, & \text{если } Q_{p1} \geq Q_1 & (\text{область III}). \end{cases}$$

Практическое задание 3.

Управление запасами

Задача 3.1. Продажи продуктового киоска составляют 1000 брикетов киселя в год. Спрос характеризуется равномерным распределением. Цена брикета составляет 20 рублей. Доставка стоит 500 рублей. Стоимость хранения составляет 2 рубля за брикет в год. Определить оптимальную величину запаса.

Задача 3.2. Продажи продуктового киоска составляют 1000 брикетов киселя в год. Спрос характеризуется равномерным распределением. Цена брикета составляет 20 рублей. Доставка стоит 500 рублей. Время доставки составляет 4 дня. Стоимость хранения составляет 2 рубля за брикет в год. Определить оптимальную величину запаса, частоту заказов и точку заказа. Магазин работает 250 дней в году.

Задача 3.3. Предприятие производит 1000 брикетов киселя в месяц. Брикеты используются для производства готового киселя. Спрос на брикеты составляет 400 штук в месяц. Стоимость хранения составляет 2 рубля за брикет в год. Стоимость производства брикета составляет 10 рублей. Стоимость подготовки производства составляет 2000 рублей. Определить оптимальную величину партии и частоту запуска производства.

Задача 3.4. Продажи продуктового киоска составляют 1000 брикетов киселя в год. Спрос характеризуется равномерным распределением. Цена брикета составляет 20 рублей. Доставка стоит 500 рублей. Стоимость хранения составляет 2 рубля за брикет в год. Скидка в 5 %

предоставляется с объёма закупки в 100 брикетов. Определить оптимальную величину запаса и общие затраты на управление запасом.

Задача 3.5. Продажи продуктового киоска составляют 1000 брикетов киселя в год. Спрос характеризуется равномерным распределением. Цена брикета составляет 20 рублей. Доставка стоит 500 рублей. Стоимость хранения составляет 2 рубля за брикет в год. Продавец предоставляет две скидки: 5 % предоставляется при покупке 100 брикетов, 7 % – при покупке 200 брикетов. Определить оптимальную величину запаса и общие затраты на управление запасом.

Задача 3.6. Продажи киоска составляют 5000 коробок конфет в месяц. Спрос характеризуется равномерным распределением. Цена коробки составляет 200 рублей. Доставка стоит 1000 рублей. Стоимость хранения составляет 20 рублей за коробку в год. Продавец предоставляет две скидки: 2 % предоставляется при покупке 200 коробок, 4 % при покупке 400 коробок. Определить оптимальную величину запаса и общие затраты на управление запасом.

4. УПРАВЛЕНИЕ ДЕНЕЖНЫМИ АКТИВАМИ

4.1. Модель Баумола

Модель была разработана в 1952 году Уильямом Баумолом на базе модели определения оптимального объема запаса Уилсона.

Модель Баумола приемлема для предприятий, денежные расходы которых стабильны и прогнозируемы.

Основные предположения модели Баумола:

1. Устойчивая потребность предприятия в денежных средствах.
2. Все денежные поступления предприятие немедленно инвестирует в высоколиквидные ценные бумаги.
3. Стоимость перевода инвестиций в денежные средств не зависит от конвертируемой суммы (фиксирована на одну операцию).
4. Предприятие начинает работу, имея максимальные целесообразные остатки денежных средств.

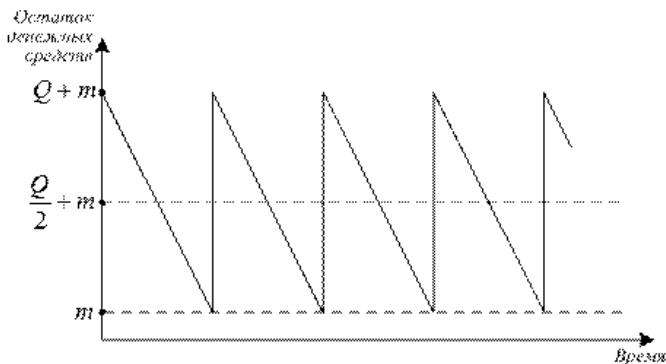


Рис. 7. Модель Баумола

При этом, как уже отмечалось, предполагается, что предприятие начинает работать, имея максимальный целесообразный уровень денежных средств $Q + m$. Затем предприятие равномерно (в силу устойчивой потребности) расходует эти средства в течение некоторого периода времени (рис. 7).

$$Q = \sqrt{\frac{2 * V * c}{r}},$$

где V - прогнозируемая потребность в денежных средствах в периоде (год, квартал, месяц); c - расходы по конвертации денежных средств в ценные бумаги; r - приемлемый и возможный для предприятия процентный доход по краткосрочным финансовым вложениям, например, в государственные ценные бумаги.

Таким образом, средний запас денежных средств составляет $Q/2$, а общее количество сделок по конвертации ценных бумаг в денежные средства (k) равно:

$$k = V : Q.$$

Общие расходы (ОР) по реализации такой политики управления денежными средствами составят:

$$OP = c * k + r * \frac{Q}{2}.$$

4.2. Модель Миллера–Орра

В 1966 г. Мертон Миллер и Дэниел Орр (M.H.Miller, D.Orr) разработали модель управления денежными средствами, в которой поступление и расходование денег от периода к периоду являются независимыми случайными событиями.

Отличительной чертой модели является наличие точки возврата, суммы денег, до которой предприятие корректирует величину денежных средств на расчётном счёте при достижении верхнего или нижнего предела запаса денег. Корректировка величины суммы денег на счёте происходит за счёт приобретения (в случае избытка денег) либо продажи (в случае недостачи) ценных бумаг.

При высокой изменчивости денежных потоков или большой стоимости конвертации предприятию следует увеличить размах вариации (разницы между максимальным и минимальным запасом денежных средств) и наоборот.

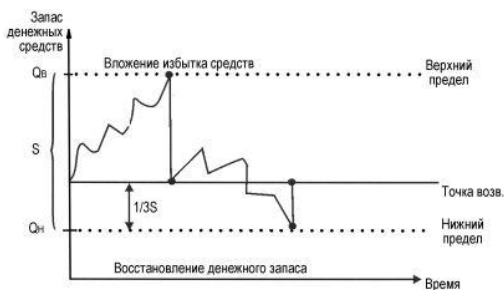


Рис. 8. Модель Миллера–Орра

Реализация модели осуществляется в несколько этапов:

1. Устанавливается минимальная величина денежных средств (O_h), которую целесообразно постоянно иметь на расчетном счете (она определяется экспертным путем исходя из средней потребности предприятия в оплате счетов, возможных требований банка и др.).

2. По статическим данным определяется вариация ежедневного поступления средств на расчетный счет (V).

3. Определяются расходы (P_x) по хранению средств на расчетном счете (обычно их принимают в сумме ставки ежедневного дохода по краткосрочным ценным бумагам, циркулирующим на рынке) и расходы (PT) по взаимной трансформации денежных средств и ценных бумаг (эта величина предполагается постоянной; аналогом такого вида расходов, имеющим место в отечественной практике, являются, например, комиссионные, уплачиваемые в пунктах обмена валюты).

4. Рассчитывают размах вариации остатка денежных средств на расчетном счете (S):

$$S = 3\sqrt[3]{\frac{3 \cdot PT \cdot V}{4 \cdot P_x}}.$$

5. Рассчитывают верхнюю границу денежных средств на расчетном счете (O_b), при превышении которой необходимо часть денежных средств конвертировать в краткосрочные ценные бумаги:

$$O_b = O_h + S.$$

6. Определяют точку возврата (T_e) – величину остатка денежных средств на расчетном счете, к которой необходимо вернуться в случае, если фактический остаток средств на расчетном счете выходит за границы интервала (O_h, O_b).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 4.

Управление денежными активами

Задача 4.1. Определить сумму пополнения расчётного счёта и частоту проведения операций. Расходы денежных средств предприятия в течение года составляют 2 млрд. руб. Доходность государственных ценных бумаг равна 6 %. Стоимость конвертации составляет 1000 рублей за операцию.

Задача 4.2. Определить сумму пополнения расчётного счёта и частоту проведения операций. Расходы денежных средств предприятия в течение года составляют 2 млрд. руб. Доходность ликвидных акций равна 16 %. Стоимость конвертации составляет 1000 рублей за операцию.

Задача 4.3. Определить политику управления средствами на расчетном счете. Расходы предприятия отличаются волатильностью, среднее квадратическое отклонение в день – 2000 рублей, минимальный запас денежных средств составляет 500 тыс. рублей, доходность ликвидных ценных бумаг – 12 % в год, затраты на конвертацию ценных бумаг – 1000 рублей.

Задача 4.4. Определить политику управления средствами на расчетном счете. Расходы предприятия отличаются волатильностью, среднее квадратическое отклонение в день – 5000 рублей, минимальный запас денежных средств составляет 20 тыс. рублей, доходность ликвидных ценных бумаг – 4 % в год, затраты на конвертацию ценных бумаг – 500 рублей.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЗАКАЗА

При моделировании деятельности активных систем основной сложностью является вопрос выбора механизмов управления элементами системы.

В активной системе каждый элемент обладает собственной целевой функцией. Элементы такой системы называются агентами. Управление в активной системе (распределение материальных и денежных ресурсов) осуществляется Центром, виртуальным или реальным. Для холдинга таким центром является головное предприятие.

При распределении ограниченных ресурсов (заказа) существует два варианта: равновесная и неравновесная ситуация.

Равновесная ситуация возникает тогда, когда суммарные заявки агентов равны величине ограниченного ресурса (заказа). В этом случае Центр производит распределение ресурса (заказа) в соответствии с заявками агентов.

Неравновесная ситуация возникает тогда, когда суммарные заявки агентов больше.

5.1. Описание организационной системы

В качестве целевой функции центра примем максимизацию прибыли фирмы:

$$F(x_i) = \Pi(x_i) = Rp - \sum z_i \rightarrow \max, \quad (i = 1, 2),$$

где $\Pi(x)$ - прибыль центра; Rp - доход центра; x_i - план i -го агента.

$$z_i = a_i x_i^2 - \text{затраты } i\text{-го агента (издержки центра)} \quad (i = 1, 2).$$

Весь ресурс должен быть распределён между агентами:

$$\sum x_i = R, \quad x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2).$$

Фонд заработной платы каждого подразделения составляет определенный процент от прибыли, зарабатываемой этим подразделением. Поэтому в качестве целевой функции агентов будем рассматривать максимизацию зарабатываемой прибыли:

$$f_i(y_i) = p y_i - a_i y_i^2 \rightarrow \max, \quad (i = 1, 2),$$

где $f_i(y_i)$ - прибыль i -го агента, y_i - распределение заказа с точки зрения i -ого агента, $p \cdot y_i$ - доход i -го агента, $a_i y_i^2$ - затраты (издержки) i -го агента. ($i = 1, 2$).

Ограничением является:

$$y_i \geq 0, \quad (i = 1, 2).$$

5.2. Принцип жесткой централизации (оптимизация интересов Центра)

Главная цель деятельности центра - это максимизация своей прибыли. Поэтому постановку задачи можно представить следующей системой уравнений:

$$F(x) = \Pi(x) = Rp - (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2) \rightarrow \max.$$

На распределение ресурса центром наложены следующие ограничения:

$$\sum x_i = R, \quad x_i \geq 0, \quad (i = 1, 2).$$

Прибыль центра будет определена подстановкой найденных значений x_1 и x_2 в целевую функцию Центра.

5.3. Оптимизация интересов агентов

Фонд заработной платы каждого подразделения составляет определенный процент от прибыли, зарабатываемой этим подразделением. Поэтому в качестве целевой функции агентов будем рассматривать максимизацию зарабатываемой прибыли:

$$f_i(y_i) = p y_i - a_i y_i^2 \rightarrow \max,$$

$$y_i \geq 0.$$

Решение ЦФ находим через производную:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = p - 2a_i y_i = 0.$$

Найдем прибыль каждого агента. Она определяется путём подстановки оптимальной с точки зрения агента величины заказа в целевую функцию агента:

5.4. Механизм прямых приоритетов

Рассмотрим сущность этого механизма. Распределение ресурсов происходит пропорционально заявкам агентов. Если целевая функция агента является строго возрастающей от x_i , то все агенты будут сообщать максимальные заявки на ресурс. Если в системе заданы ограничения на величину максимальной заявки $s_i \leq D_i$, то все агенты в равновесной ситуации заявят величину $s_i = D_i$. Принцип этого механизма можно сформулировать следующим образом: *«больше просишь – больше получишь»*.

s_1^* - заявка первого агента;

s_2^* - заявка второго агента.

Распределение ресурса между двумя агентами будем находить по следующей формуле:

$$x_i(s_i) = \begin{cases} \frac{s_i}{\sum s_i}, & \text{если } \sum s_i > R; \\ s_i, & \text{если } \sum s_i \leq R \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

После чего определяются прибыли агентов и прибыль Центра путём подстановки найденных значений x_i в целевые функции агентов и Центра соответственно.

Разница между максимально возможной прибылью центра и прибылью центра при использовании механизма прямых приоритетов находится по формуле:

$$\Delta\Pi = \Pi_{\max} - \Pi_{\text{прям.приор.}}$$

Коэффициент эффективности использования механизма прямых приоритетов:

$$K_{\text{эф}} = \Pi_{\max} / \Pi_{\text{прям.приор.}}$$

5.5. Механизм обратных приоритетов

Механизм обратных приоритетов называют механизмом распределения ресурса пропорционально эффективности. При распределении ресурса приоритет агента тем выше, чем меньшее количество он заказывает, т.е. приоритет обратно пропорционален заявке на ресурс.

Центр руководствуется следующими рассуждениями: если агенты планируют получить одинаковую прибыль, но при этом агенты запрашивают различные количества ресурса, то агент, запрашивающий меньшее количество ресурса, будет использовать его эффективнее. Принцип этого механизма можно сформулировать в следующем образом: *«больше просишь – меньше получишь»*.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = s_i \\ x_i = \frac{\frac{A_i}{s_i}}{\sum (\frac{A_i}{s_i})} R \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{если } \sum s_i > R; \\ \text{если } \sum s_i \leq R \end{array} \quad (i = 1, 2).$$

После чего определяются прибыли агентов и прибыль Центра по механизму обратных приоритетов:

$$\Delta\Pi = \Pi_{max} - \Pi_{обр.приор.}$$

Найдем коэффициент эффективности использования механизма обратных приоритетов:

$$K_{эф} = \Pi_{max} / \Pi_{обр.приор.}$$

5.6. Механизм внутренних цен

Постановку задачи можно представить следующей системой уравнений:

$$F(x) = \Pi(x) = Rp - (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2) \rightarrow \max,$$

$$\sum x_i = R, x_i \geq 0,$$

$$x_i^* = \arg \max(\alpha y_i - \alpha_1 y_i^2),$$

где a - внутрифирменная цена;

$\alpha y_1 - \alpha_1 y_1^2$ - целевая функция первого агента;

$\alpha y_2 - \alpha_1 y_2^2$ - целевая функция второго агента.

Внутрифирменная цена a определяется из следующей формулы:

$$a = \frac{R}{\sum s_i} p, \quad (i = 1, 2).$$

Найдем количество ресурса x_i с использованием механизма прямых приоритетов:

$$x_i = \frac{s_i}{\sum s_i} R, \quad (i = 1, 2),$$

Найдем внутренние прибыли для агентов, общую прибыль для центра и фактические прибыли:

$$\Pi_1^{вн} = ax_1 - \alpha_1 x_1^2,$$

$$\Pi_2^{вн} = ax_2 - \alpha_2 x_2^2,$$

$$\Pi_{общая} = Rp - (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2),$$

$$\Pi_1^{факт} = (\Pi_1^{вн} / \sum (\Pi_1^{вн} + \Pi_2^{вн})) \Pi_{общая},$$

$$\Pi_2^{факт} = (\Pi_2^{вн} / \sum (\Pi_1^{вн} + \Pi_2^{вн})) \Pi_{общая},$$

Разницу между максимально возможной прибылью центра и прибылью центра при использовании механизма обратных приоритетов:

$$\Delta\Pi = \Pi_{max} - \Pi_{общая}.$$

Коэффициент эффективности использования механизма обратных приоритетов:

$$K_{эф} = \Pi_{max} / \Pi_{общая}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение активной системы.
2. Дать определение равновесной ситуации.
3. Дать определение неравновесной ситуации.
4. Объяснить смысл механизма жёсткой централизации.
5. Объяснить смысл механизма прямых приоритетов.
6. Объяснить смысл механизма обратных приоритетов.
7. Объяснить смысл механизма внутренних цен.

Практическое задание 5.

Исследование систем управления распределением заказа

Задача 5.1. Корпорация производит сахар. Торговый дом корпорации заключил договор на производство сахара количеством $R = 500\,000$ т. Выполнение заказа можно поручить двум производственным предприятиям, входящим в холдинг. Цена 1 тонны продукции

$p = 80$ руб. Функции затрат предприятий зависят от объема выполненного заказа: $c_1(x_1) = 12x_1^2$ и $c_2(x_2) = 20x_2^2$.

Составить математическую модель прибыли Торгового дома.

Определить: оптимальный план для центра; распределение заказа с позиции оптимизации интересов центра; прибыль центра при оптимальном с позиции центра распределении заказа.

Задача 5.2. По данным задачи 5.1 составить математическую модель прибыли первого производственного предприятия.

Определить: оптимальный план для первого производственного предприятия; распределение заказа с позиции оптимизации интересов первого производственного предприятия; прибыль первого производственного предприятия при оптимальном с позиции первого производственного предприятия распределении заказа.

Задача 5.3. По данным задачи 5.1 составить математическую модель прибыли второго производственного предприятия.

Определить: оптимальный план для второго производственного предприятия; распределение заказа с позиции оптимизации интересов второго производственного предприятия; прибыль второго производственного предприятия при оптимальном с позиции второго производственного предприятия распределении заказа.

Задача 5.4. По условиям задачи 5.1 определить распределение заказа между производственными предприятиями в ситуации, когда заявки равны 300000 и 200000 тонн соответственно.

Задача 5.5. По условиям задачи 5.1 определить распределение заказа между производственными предприятиями в случае ситуации, когда заявки равны по 500000 тонн от каждого производственного предприятия; определить прибыль каждого агента и центра, эффективность механизма прямых приоритетов при распределении заказа.

Задача 5.6. По условиям задачи 5.1 определить распределение заказа между производственными предприятиями в ситуации, когда заявки равны по 500000 тонн от каждого производственного предприятия; определить прибыль каждого производственного предприятия и центра, эффективность механизма обратных приоритетов при распределении заказа.

Задача 5.7. По условиям задачи 5.1 определить распределение заказа между производственными предприятиями в ситуации, когда заявки агентов равны оптимальным из задачи 5.2 и 5.3 определить прибыль каждого производственного предприятия и центра, эффективность механизма внутренних цен при распределении заказа.

Задача 5.8. По условиям задачи 5.1 определить распределение заказа между производственными предприятиями в ситуации, когда заявка первого производственного предприятия на 20 % больше оптимального, а второго – 250000 тонн; определить прибыль каждого производственного предприятия и центра, эффективность механизма внутренних цен при распределении заказа.

Задача 5.9. По условиям задачи 5.1 определить распределение заказа между производственными предприятиями в ситуации, когда заявка первого производственного предприятия равна 347 (уменьшение на 20 % от оптимального), а второго – 250 штук; определить прибыль каждого производственного предприятия и центра, эффективность механизма внутренних цен при распределении заказа.

6. СОГЛАСОВАНИЕ ИНТЕРЕСОВ В СИСТЕМЕ «ПОСТАВЩИКИ-ЗАКАЗЧИК»

Часто вопрос согласования интересов возникает в активной системе среди неаффилированных между собой субъектов.

6.1. Описание организационной системы. Постановка задачи

Производственная система состоит из заказчика и двух поставщиков. Каждый поставщик производит один вид комплектующих. Заказчик собирает из двух комплектующих конечное изделие.



Рис. 9. Описание организационной системы

6.2. Согласованные механизмы управления в системе «Поставщики-Заказчик»

Для исследований процессов взаимодействия поставщиков и заказчика сформулируем модель принятия решений поставщиками и заказчиками.

В качестве целевой функции поставщиков рассматривается максимизация прибыли. Целевые функции поставщиков имеют вид:

$$f_1(y_1) = p_1 \cdot y_1 - (0,2y_1^2 + 2y_1 + 4) \rightarrow \max,$$

$$f_2(y_2) = p_2 \cdot y_2 - (0,4y_2^2 + y_2 + 2) \rightarrow \max.$$

Поставщики не могут производить комплектующих больше, чем максимально возможный объем из-за ограниченности основных фондов:

$$0 \leq y_i \leq Q_i^{\max}, \quad (i = 1, 2),$$

где Q_i^{\max} - максимально возможный объем выпуска комплектующих i -м поставщиком.

Оптимальным решением для этих моделей является:

$$y_i^{opt} = \min(y_i^*; Q_i), \quad (i = 1, 2),$$

где y_i^* - объем выпуска комплектующих i -м поставщиком, максимизирующий его прибыль.

Для нахождения y_i^* про дифференцируем целевую функцию $f_i(y_i)$ по y_i и приравняем нулю:

$$df_i(y_i)/dy_i = 0, \quad (i = 1, 2).$$

Рассчитаем, сколько готовых изделий можно собрать из комплектующих, произведенных поставщиками:

$$y_{01}^{opt} = y_1^{opt} / b_1,$$

$$y_{02}^{opt} = y_2^{opt} / b_2.$$

В качестве целевой функции заказчика рассмотрим максимизацию прибыли:

$$F(x_0) = p_0 \cdot x_0 - \sum p_i \cdot b_i \cdot x_0 - c_0(x_0) \rightarrow \max, \quad (i = 1, 2).$$

На объем выпуска готовых изделий наложено ограничение, связанное с невозможностью или нецелесообразностью производить готовых изделий больше, чем максимально возможный объем выпуска Q_0^{max} или спрос на изделие R :

$$0 \leq x_0 \leq \min(Q_0^{max}; R).$$

Модель принятия решений для заказчика примет вид:

$$F(x_0) = p_0 \cdot x_0 - \sum p_i \cdot b_i \cdot x_0 - (2 \cdot x_0^2 + 4 \cdot x_0 + 6) \rightarrow \max, \quad (i = 1, 2),$$

$$x_0 \leq \min(Q_0^{max}; R).$$

Определим оптимальный объем выпуска готовых изделий заказчиком, максимизирующий его прибыль:

$$x_0^{opt} = \min(x_0^*; Q_0^{max}; R).$$

Для нахождения x_0^* про дифференцируем целевую функцию $F(x_0)$ по x_0 и приравняем нулю:

$$dF(x_0)/dx_0 = p_0 - p_1 \cdot b_1 - p_2 \cdot b_2 - 4x_0 - 4 = 0.$$

Так как оптимальное значение выпуска конечных изделий не равно оптимальному значению выпуска комплектующих $x_0^{opt} \neq y_0^{opt}$, то в системе имеет место несоответствие экономических интересов между поставщиками и заказчиком.

Определим максимальную прибыль поставщиков:

$$f_1^{max}(y_1^{opt}) = p_1 \cdot y_1^{opt} - 0,2 (y_1^{opt})^2 - 2 y_1^{opt} - 4,$$

$$f_2^{max}(y_2^{opt}) = p_2 \cdot y_2^{opt} - 0,4 \cdot (y_2^{opt})^2 - y_2^{opt} - 2.$$

Определим прибыль поставщиков при выполнении плана заказчика:

$$x_0 b_1$$

$$x_0 b_2$$

$$f_1(x_0 \cdot b_1) = p_1 \cdot x_0 \cdot b_1 - 0,2 (x_0 \cdot b_1)^2 - 2x_0 \cdot b_1 - 4,$$

$$f_2(x_0 \cdot b_2) = p_1 \cdot x_0 \cdot b_2 - 0,4 (x_0 \cdot b_2)^2 - x_0 \cdot b_2 - 2.$$

Найдем убыток i -го поставщика при выполнении плана заказчика Δf_i , который определяется как разность между максимальной прибылью поставщика и прибылью поставщика при выполнении плана заказчика:

$$\Delta f_i = f_i^{max}(y_i^{opt}) - f_i(x_0 b_i),$$

$$\Delta f_1 = f_1^{max}(y_1^{opt}) - f_1(x_0 b_1), \quad (i = 1, 2);$$

$$\Delta f_2 = f_2^{max}(y_2^{opt}) - f_2(x_0 b_2).$$

Найдем суммарные убытки поставщиков:

$$\sum \Delta f_i = \Delta f_1 + \Delta f_2 \quad (i = 1, 2).$$

Найдем максимальную прибыль заказчика:

$$F^{max}(x_0^{opt}) = p_0 x_0^{opt} - p_1 b_1 x_0^{opt} - p_2 b_2 x_0^{opt} - (2(x_0^{opt})^2 + 4x_0^{opt} + 6).$$

Найдем количество готовых изделий y_0^{opt} , которые может собрать заказчик при реализации поставщиками собственных стратегий:

$$y_0^{opt} = \min (y_1^{opt}; y_2^{opt}).$$

Прибыль заказчика при реализации поставщиками собственных стратегий найдем по формуле:

$$F(y_0^{opt}) = p_0 y_0^{opt} - p_1 b_1 y_0^{opt} - p_2 b_2 y_0^{opt} - (2(y_0^{opt})^2 + 4y_0^{opt} + 6).$$

Определим дополнительный эффект заказчика ΔF от согласования своих интересов с интересами поставщиков. Рассчитаем этот эффект как разность между максимальной прибылью заказчика и прибылью заказчика при реализации поставщиками собственных стратегий:

$$\Delta F = F^{max}(x_0^{opt}) - F(y_0^{opt}).$$

Согласование экономических интересов поставщиков и заказчика возможно путем перераспределения дополнительного эффекта ΔF

между поставщиками. Распределение дополнительного эффекта ΔF может быть осуществлено с помощью выплат премии S (функции стимулирования) или применения договорных цен.

Рассмотрим сначала согласование интересов поставщиков и заказчика с помощью функции стимулирования.

Для согласования экономических интересов поставщиков и заказчика необходимо, чтобы для функции стимулирования выполнялись следующие условия:

$$\sum \Delta f_i \leq S \leq \Delta F, \quad (i = 1, 2).$$

В этой формуле:

$\sum \Delta f_i$ - нижняя граница для функции стимулирования,

ΔF - верхняя граница для функции стимулирования.

Из этого двойного неравенства видно, что условия согласования экономических интересов поставщиков и заказчика с помощью функции стимулирования выполняются.

Таким образом, для предложенного механизма управления определены границы изменения функции стимулирования.

Рассмотрим согласование экономических интересов поставщиков и заказчика на основе изменения договорных цен.

Для определения нижней границы договорных цен комплектующих поставщиков воспользуемся условием:

$$\Delta p_i \geq \Delta f_i / y_i, \quad (i = 1, 2).$$

Определим нижнюю границу договорной цены комплектующих деталей первого поставщика:

$$\Delta p_1 \geq \Delta f_1 / y_1^{opt}.$$

Аналогично определим нижнюю границу договорной цены комплектующих деталей первого поставщика:

$$\Delta p_2 \geq \Delta f_2 / y_2^{opt}.$$

Суммарное увеличение доходов поставщиков от изменения договорных цен не может быть больше дополнительного эффекта заказчика. Поэтому для верхней границы договорных цен поставщиков должно выполняться условие:

$$\sum y_i^{opt} \Delta p_i \leq \Delta F, \quad (i = 1, 2).$$

Зададим значение верхней границы договорной цены первого поставщика $p - 1$ руб. При этом значении выполняется условие согласования экономических интересов первого поставщика и заказчика:

$$35,45 \leq \Delta p_1 \leq 45.$$

Тогда верхняя граница договорной цены второго поставщика определится:

$$\Delta p_2 \leq (\Delta F - y_1^{opt} * \Delta p_1) / y_2^{opt}.$$

Проверяем условие согласования экономических интересов второго поставщика и заказчика:

$$58,36 \leq \Delta p_2 \leq 73,93.$$

Условия согласования экономических интересов поставщиков и заказчика на основе изменения договорных цен выполняются. Таким образом, для предложенного механизма управления определены границы изменения договорных цен.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое дополнительный эффект заказчика?
2. Будет ли прибыль заказчика при реализации поставщиками собственных стратегий больше или меньше, чем при реализации стратегии заказчика?
3. Как образуются убытки поставщиков?
4. В чём заключается смысл механизма управления с помощью выплат премии S (функции стимулирования)?
5. В чём заключается смысл механизма управления с помощью применения договорных цен?

Практическое задание 6.

Согласование интересов в системе «Поставщики-Заказчик»

Задача 6.1. Предприятие занимается изготовлением двухколёсных велосипедов. Объём производства равен 200 штук в год. Затраты на сборку велосипедов описаны функцией $C_0(x_0) = 2x_0^2 + 4x_0 + 6$. Произ-

водственная мощность предприятия составляет 800 штук. Спрос на велосипеды составляет 900 штук в год.

У предприятия есть два поставщика: первый изготавливает рамы, второй – колёса.

Цена готового изделия $p_0 = 2000$ руб., цена комплектующих 1-го поставщика – 740 руб., цена комплектующих 2-го поставщика – 100 руб.

Затраты первого и второго поставщика описаны функциями

$$C_1(y_1) = 0,2y_1^2 + 2y_1 + 4,$$

$$C_2(y_2) = 0,4y_2^2 + y_2 + 2.$$

Производственные мощности поставщиков равны: 1800 шт, 1500 шт. соответственно.

Необходимо определить величину выплаты премии поставщикам, используя согласованные механизмы управления в производственной системе.

Задача 6.2. По условиям задачи 6.1 рассчитать договорные цены, используя согласованные механизмы управления в производственной системе.

7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ

7.1. Оценка экономической эффективности реальных инвестиций

Инвестиции – вложение любых видов активов (основные средства, оборотные средства, нематериальные активы, ценные бумаги, собственный труд) в любые виды имущества, на любой срок, с целью получения прибыли или без этой цели, для которых характерно наличие риска.

Реальные инвестиции – приобретение любого вида имущества, помимо ценных бумаг и денежных инструментов.

Финансовые инвестиции – вложение в ценные бумаги.

Реальные и финансовые инвестиции отличаются по видам риска, по ликвидности и по способу определения доходности.

Доход от финансовых инвестиций может быть получен за счёт процентов, начисляемых на цену акции либо за счёт разницы между ценой покупки и продажи ценной бумаги.

Доходность реальных инвестиций определяется дисконтированными показателями NPV и IRR .

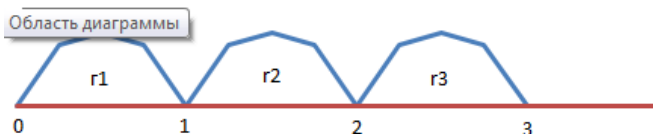


Рис. 10. Схема изменения стоимости денежных средств

$$NPV = -\sum_{t=1}^m \frac{I_t}{(1+r)^t} + \sum_{t=1}^T \frac{P_t}{(1+r)^t}.$$

В случае, когда осуществляются разовые инвестиции

Таблица 4. Денежный поток

C_0	C_1	C_2	C_3
-10	+7	+18	+20

C_i - номер периода, отрицательный денежный поток – инвестиции, положительный денежный поток – поступления от инвестиционного проекта.

Если $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 5\%$, то

$$NPV = -\frac{10}{(1+0,05)^0} + \frac{7}{(1+0,05)^1} + \frac{18}{(1+0,05)^2} + \frac{20}{(1+0,05)^3},$$

что равнозначно

$$NPV = -10 + \frac{7}{(1+0,05)} + \frac{18}{(1+0,05)(1+0,05)} + \frac{20}{(1+0,05)(1+0,05)(1+0,05)}.$$

Если $r_0 = 5\%$, $r_1 = 7\%$, $r_2 = 8\%$, $r_3 = 10\%$.

$$NPV = \frac{-10}{(1+0,05)^0} + \frac{7}{(1+0,07)} + \frac{18}{(1+0,08)(1+0,07)} + \frac{20}{(1+0,1)(1+0,08)(1+0,07)}.$$

В случае, когда инвестиции осуществляются дольше одного периода

Таблица 5. Денежный поток

C_0	C_1	C_2	C_3
-10	-7	+18	+20

Если $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 5\%$, то

$$NPV = -10 - \frac{7}{(1+0,05)} + \frac{18}{(1+0,05)(1+0,05)} + \frac{20}{(1+0,05)(1+0,05)(1+0,05)}.$$

Методика расчёта *IRR*

Расчёт *IRR* осуществляется в два этапа.

1. Выбираются два значения ставки дисконтирования, соответствующие требованиям:

$$NPV_1(r_1) \geq 0,$$

$$NPV_2(r_2) < 0.$$

Сделать подстановку выбранных ставок дисконтирования и соответствующих значений *NPV* в формулу

$$r_B^* = r_1 + \frac{NPV_1}{NPV_1 - NPV_2} \cdot (r_2 - r_1).$$

Таким образом будет найдено приблизительное значение IRR . Чем больше разница между r_1 и r_2 , тем менее точным будет полученное значение.

2. Для получения уточнённого значения IRR выбираются два новых значения ставки дисконтирования, соответствующие требованиям:

$$NPV_1(r_1) \geq 0,$$

$$NPV_2(r_2) < 0,$$

$$r_2(\%) - r_1(\%) = 1(\%).$$

Сделать подстановку выбранных ставок дисконтирования и соответствующих значений NPV в формулу для расчёта IRR .

7.2. Формирование портфеля ценных бумаг

Наиболее распространёнными инструментами для инвестирования на фондовом рынке являются акции и облигации.

Общая модель получения дохода по акции

$Pr = \sum x_i p_i^{np} - \sum x_i p_i^{nok} + \sum \%_i x_i p_i^{nok} - \% \text{ брокера} (\sum x_i p_i^{np} + \sum x_i p_i^{nok}) \rightarrow \max,$
 x_i - количество акций i -го вида, p_i^{np} - цена продажи акций i -го вида, $\%_i$ акций i -го вида, p_i^{nok} - цена покупки акций i -го вида, $\%$ брокера – выплаты брокеру за осуществление посреднической деятельности.

Математическая модель для формирования портфеля ценных бумаг будет зависеть от множества условий. В условиях единовременного вложения всей суммы денег на определённый период при получении дохода только от роста цены акции возможны следующие варианты в зависимости от отношения инвестора к риску.

1. Агрессивный инвестор. Стремится максимизировать свою доходность без учёта риска.

$$\begin{cases} F(x) = Pr = \sum x_i p_i^{np} - \sum x_i p_i^{nok} - \% \text{ брокера} (\sum x_i p_i^{np} + \sum x_i p_i^{nok}) \rightarrow \max \\ \sum x_i p_i^{nok} \leq S \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

2. Более осторожный инвестор. Стремится максимизировать свою доходность, но и не собирается допускать уровень риска больше заранее определённого показателя.

$$\begin{cases} F(x) = Pr = \sum x_i p_i^{np} - \sum x_i p_i^{нок} - \% \text{ брокера } (\sum x_i p_i^{np} + \sum x_i p_i^{нок}) \rightarrow \max \\ \sum (x_i p_i^{нок} / S) \beta_i \leq \beta_{\max} \\ \sum x_i p_i^{нок} \leq S \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

3. Консервативный инвестор. Стремится минимизировать риск вложений без учёта доходности.

$$\begin{cases} \sum (x_i p_i^{нок} / S) \beta_i \rightarrow \min \\ \sum x_i p_i^{нок} \leq S \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

4. Разумный консерватор. Инвестор, который стремится минимизировать риск, но при этом желает получить определённый уровень доходности на свои вложения.

$$\begin{cases} \sum (x_i p_i^{нок} / S) \beta_i \rightarrow \min \\ \sum x_i p_i^{np} - \sum x_i p_i^{нок} - \% \text{ брокера } (\sum x_i p_i^{np} + \sum x_i p_i^{нок}) \rightarrow \max \\ \sum x_i p_i^{нок} \leq S \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Можно включить в математическую модель уравнение определения прогнозной цены продажи акции, например, по методу экспертных оценок

$$p_i^{нок} = (p_1 + p_2 + p_3) / 3,$$

p_1, p_2, p_3 - прогнозные значения цены, по мнению 3 экспертов.

7.3. Формирование портфеля реальных инвестиций

При формировании портфеля реальных инвестиций необходимо учитывать динамику положительных и отрицательных денежных потоков. Особенность определения доходности портфеля заключается в том, что NPV портфеля считается как сумма NPV проектов. Для того, чтобы рассчитать IRR портфеля, необходимо суммировать годовые денежные потоки всех проектов, входящих в портфель.

При отборе проектов, включаемых в портфель, необходимо исключить все проекты, не проходящие по следующим критериям: инвестиционные вложения в проект должны быть меньше располагае-

мой для инвестирования суммы $I_i \leq I$, NPV проекта должен быть больше нуля ($NPV_i > 0$), IRR проекта должен быть больше ставки дисконтирования проекта ($IRR_i > r$).

При формировании портфеля реальных инвестиций используются принципы пространственной и временной оптимизации.

Пространственная оптимизация инвестиций заключается в том, что вся сумма инвестиций распределяется в один и тот же период между несколькими проектами. Существуют варианты инвестирования в полные проекты либо в части проектов.

Временная оптимизация инвестиций реализуется в случае невозможности одновременного финансирования всех проектов, но финансирования прочих проектов в последующие периоды. В этом случае возможны варианты ежегодного поступления денежных средств из внешних источников либо рефинансирование положительных денежных потоков от предыдущих инвестиционных проектов.

7.4. Формирование портфеля реальных инвестиций с учётом принципа пространственной оптимизации

Этапы формирования портфеля реальных инвестиций.

1. Отбор проектов для включения в портфель по критерию $I_i \leq I$.
2. Отбор проектов для включения в портфель по критерию $NPV_i > 0$.
3. Отбор проектов для включения в портфель по критерию $IRR_i > r$.
4. Формирование всех возможных вариантов проектов по критерию $\sum I_i \leq I$.
5. Расчёт NPV проектов.
6. Выбор портфеля по критерию максимизации NPV .

Используемая математическая модель выглядит следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum NPV_i \rightarrow \max \\ NPV_i > 0 \\ IRR_i > r \\ I_i \leq I \\ \sum I_i \leq I. \end{array} \right.$$

7.5. Формирование портфеля реальных инвестиций с учётом принципа временной оптимизации

Этапы формирования портфеля реальных инвестиций с учётом принципа временной оптимизации.

1. Отбор проектов для включения в портфель по критерию $I_i \leq I$.
2. Отбор проектов для включения в портфель по критерию $NPV_i > 0$.
3. Отбор проектов для включения в портфель по критерию $IRR_i > r$.
4. Формирование всех возможных вариантов проектов по критерию $\Delta I_j \geq 0$.
5. Расчёт NPV проектов
6. Выбор портфеля по критерию максимизации NPV .

Используемая математическая модель выглядит следующим образом.

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum x_{ij} \rightarrow \max \\ \sum x_j \leq I_j + \Delta I_{j-1} \\ \Delta I_j = \Delta I_{j-1} + \sum x_j \\ I_j = \Delta I_{j-1} \\ \Delta I_j \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0. \end{array} \right.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ 7.

Моделирование инвестиций

Задача 7.1. Сформировать оптимальный по критерию минимизации риска портфель из ценных бумаг при следующих исходных данных:

Цена покупки акции $A = 1$ рубль, цена покупки акции $B = 3$ рубля, цена покупки акции $C = 2$ рубля.

Прогнозные данные состояния экономики представлены в табл. 6.

Записать математическую модель оптимального портфеля ценных бумаг.

Таблица 6. Прогнозные данные состояния экономики

Состояние экономики	Вероятность состояния экономики	Прогнозная цена продажи А	Прогнозная цена продажи В	Прогнозная цена продажи С
Значительный рост	0,1	4	2	8
Незначительный рост	0,2	3	3	6
Стабилизация	0,3	2	5	4
Незначительное падение	0,3	1	7	1
Значительное падение	0,1	1	8	1

Задача 7.2. Сформировать оптимальный по критерию максимизации доходности портфель из ценных бумаг при следующих исходных данных:

Цена покупки акции $A = 1$ рубль, цена покупки акции $B = 3$ рубля, цена покупки акции $C = 2$ рубля.

Прогнозные данные состояния экономики представлены в табл. 7.

Таблица 7. Прогнозные данные состояния экономики

Состояние экономики	Вероятность состояния экономики	Прогнозная цена продажи А	Прогнозная цена продажи В	Прогнозная цена продажи С
Значительный рост	0,1	4	2	8
Незначительный рост	0,2	3	3	6
Стабилизация	0,3	2	5	4
Незначительное падение	0,3	1	7	1
Значительное падение	0,1	1	8	1

Записать математическую модель оптимального портфеля ценных бумаг.

Задача 7.3. Инвестор приобретает ценную бумагу A на 100 тыс. руб., для чего занимает их под 12 %. Ожидаемая доходность актива A равна 26 %. Составить математическую модель дохода инвестора. Определить ожидаемую доходность для инвестора.

Задача 7.4. Сформировать оптимальный инвестиционный портфель предприятия по критерию максимизации дохода, если имеется три независимых проекта – A , B , V . Данные по проектам представлены в табл. 8. Предприятие располагает инвестиционными ресурсами в размере 150 тыс. руб. Ставка дисконтирования равна 10 %.

Таблица 8. Денежные потоки по проектам

Проект	Инвестиции, тыс. руб.	Доходы по годам, тыс. руб.		
		1-й	2-й	3-й
А	-100	50	80	70
В	-70	30	40	60
С	-50	60	40	30

Задача 7.5. Сформировать оптимальный инвестиционный портфель предприятия по критерию максимизации дохода, если имеется три независимых проекта – *A*, *B*, *C* (данные по проектам представлены в табл.9). Предприятие располагает инвестиционными ресурсами в размере 150 тыс. руб. Ставка дисконтирования по проекту *A* равна 10 %, по проекту *B* – 12 %, по проекту *C* – 20 %.

Таблица 9. Денежные потоки по проектам

Проект	Инвестиции, тыс. руб.	Доходы по годам, тыс. руб.		
		1-й	2-й	3-й
А	-100	50	80	70
В	-70	30	40	60
С	-50	60	40	30

Задача 7.6. Сформировать оптимальный инвестиционный портфель предприятия по критерию максимизации дохода, если имеется три независимых проекта – *A*, *B*, *C* (данные по проектам представлены в табл. 10). Предприятие ежегодно располагает инвестиционными ресурсами в размере 100 тыс. руб. Ставка дисконтирования равна 10 %.

Таблица 10. Денежные потоки по проектам

Проект	Инвестиции, тыс. руб.	Доходы по годам, тыс. руб.		
		1-й	2-й	3-й
А	-100	50	80	70
В	-70	30	40	60
С	-50	60	40	30

Задача 7.7. Сформировать оптимальный инвестиционный портфель предприятия по критерию максимизации дохода, если имеется три независимых проекта – *A*, *B*, *C* (данные по проектам представлены в табл. 11). Предприятие располагает инвестиционными ресурсами в

размере 100 тыс. руб. Есть возможность рефинансирования доходов от предыдущих инвестиций. Ставка дисконтирования равна 10%.

Таблица 11. Денежные потоки по проектам

Проект	Инвестиции, тыс.руб.	Доходы по годам, тыс. руб.		
		1-й	2-й	3-й
А	-100	50	80	70
В	-70	30	40	60
С	-50	60	40	30

II. МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИКИ

8. ПОСТРОЕНИЕ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Макроэкономические модели описывают состояние совокупного взаимодействия множества однотипных объектов.

Экономико-математическое моделирование заключается в построении модели, описывающей взаимосвязь между различными переменными на основе статистических данных и их влияние на результат.

Этапы моделирования:

Идентификация модели заключается в анализе специфических свойств рассматриваемых явлений и процессов и обосновании класса моделей, наиболее подходящих для их описания.

Отбор переменных, входящих в модель, а также сбор статистической информации об их значениях в прошлые периоды времени либо по совокупности других аналогичных объектов.

На третьем этапе происходит выбор математического уравнения (системы уравнений), связывающих включенные в модель переменные и соответствующие типу и форме модели.

На основании статистической информации проводится оценка параметров выбранного варианта модели.

По результатам проверки качества построенной модели делается вывод о ее устойчивости и возможности использования в ходе дальнейшего исследования.

Если качество модели признано неудовлетворительным, то необходимо изменить состав переменных либо форму модели.

Особенности обоснования формы модели

Часто выбрать форму модели возможно, построив график зависимости фактического результата от фактора.

Наиболее часто используемые виды функций представлены в табл. 12.

8.1. Методы отбора факторов

Факторы, включаемые в модель, отбираются на основе статистических данных в результате содержательного и количественного анализа.

Таблица 12. Виды регрессионных функций

Вид функции	Уравнение регрессии
Линейная	$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \dots + \alpha_n x_{nt} + \varepsilon_t$
Правая полулогарифмическая	$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_{1t} + \dots + \alpha_n \ln x_{nt} + \varepsilon_t$
Степенная	$y_t = \alpha_0 \cdot x_{1t}^{\alpha_1} \cdot x_{2t}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_{nt}^{\alpha_n} + \varepsilon_t$
Гиперболическая	$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 / x_{1t} + \dots + \alpha_n / x_{nt} + \varepsilon_t$
Логарифмическая гиперболическая	$\ln y_t = \alpha_0 + \alpha_1 / x_{1t} + \dots + \alpha_n / x_{nt} + \varepsilon_t$
Обратная линейная (функция Торнквиста)	$1/y_t = \alpha_0 + \alpha_1 / x_{1t} + \dots + \alpha_n / x_{nt} + \varepsilon_t$

Любое явление может быть выражено разными факторами или их комбинациями. В процессе содержательного анализа устанавливается наличие взаимосвязи между факторами. При этом факторы, выражающие одну и ту же причину и тесно взаимосвязанные между собой, включать в модель нецелесообразно.

Для отбора факторов, включаемых в модель, используют два основных подхода:

- *априорный* - предварительное исследование факторов на наличие связи и силы влияния между рассматриваемыми переменными и по влиянию на зависимую переменную y , для чего часто используется корреляционный анализ;

- *апостериорный* – предполагает включение в модель всех возможных переменных, потом последовательное исключение факторов и оценка изменения качества модели.

Признаками хорошей модели являются:

1. Небольшое число факторов.
2. Простая форма модели.

Парная регрессия – уравнение связи двух переменных y и x :

$$y = f(x),$$

y - зависимая переменная (результативный признак);

x - независимая, объясняющая переменная (признак-фактор).

Множественная регрессия - уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

где y - зависимая переменная (результативный признак); x_1, x_2, \dots, x_p - независимые переменные (факторы).

Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчётах.

Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное воздействие их на моделируемый показатель.

Прежде всего, так же как и в парной регрессии, необходимо отобрать необходимые факторы. Они должны отвечать следующим требованиям:

- 1) быть количественно измеримыми (качественным факторам придают количественную определённость, например, представляя баллы);
- 2) не должны быть коррелированными между собой и тем более находиться в точной функциональной связи.

Отбор факторов обычно проводится в две стадии: на первой отбираются факторы исходя из сути проблемы; на второй – на основе матрицы показателей корреляции и определения t -статистики для параметров регрессии.

8.2. Этапы построения эконометрической модели

Процесс построения и анализа эконометрической модели является достаточно сложным и может быть разбит на ряд этапов. Выделим следующие четыре этапа:

1. Постановка проблемы (определение и формулировка конечных целей моделирования и набора, участвующих в модели показателей – факторов)

В качестве цели исследования обычно рассматривают анализ экономического процесса (системы), прогноз экономических показателей, имитацию развития экономического процесса при изменении экзогенных переменных и пр.

При выборе переменных модели необходимо теоретически обосновать целесообразность включения переменной в модель, но при этом в модель включают лишь главные, наиболее существенные факторы, оказывающие решающее воздействие на изучаемый процесс (один из основных принципов моделирования). Объясняющие переменные не должны быть связаны функциональной или тесной корреляционной связью, так как это может привести к невозможности оценки параметров модели или получению неустойчивых, не имеющих реального смысла оценок. Для отбора переменных применяют различные статистические методы. Но в любом случае определяющим при включении в модель факторных переменных является экономический (качественный) анализ процесса (системы).

Все переменные, участвующие в модели, целесообразно разделить на следующие группы:

- экзогенные (внешние, в определенной степени управляемые, планируемые);

- эндогенные, т.е. такие переменные, значения которых формируются в процессе и внутри анализируемой системы (явления) под влиянием экзогенных переменных и взаимодействия друг с другом (объясняемые переменные). В регрессионной модели с одним уравнением рассматривается одна эндогенная переменная. В системах одновременных уравнений – несколько.

Предопределенные, т.е. выступающие как факторные или объясняющие переменные. Множество этих переменных формируется на основе экзогенных переменных и лаговых эндогенных, т. е. таких, значения которых измерены в прошлом по отношению к рассматриваемому периоду времени, а следовательно, уже известны, фиксированы.

Такое деление позволяет лучше структурировать проблему и может облегчить процесс корректировки модели.

2. Спецификация модели

Спецификация – это выбор формы связи между переменными:
 $y = f(x)$.

Спецификация опирается на имеющиеся экономические теории, специальные знания и интуитивные представления об анализируемой экономической системе. Качественный анализ изучаемого явления, знание экономической теории может подсказать конкретную функциональную форму связи. Немаловажная роль здесь отводится и анализу имеющейся статистической информации: графическое представление исходных данных, расчет показателей роста и прироста и пр. При рассмотрении конкретных классов статистических моделей (производственные функции, функции спроса и т.д.) возможно применение некоторых специфических приемов при подборе уравнения, основанных на знании свойств соответствующего класса функций.

3. Идентификация модели (статистическое оценивание неизвестных параметров модели)

Задачей этапа идентификации является подбор функции $y = f(x)$ из параметрического семейства функций, наилучшим способом описывающей зависимость наблюдаемых значений y от наблюдаемых значений x . Существуют различные методы расчета параметров эконометрической модели: классический метод наименьших квадратов (МНК), обобщенный МНК и т. д. Этапом индентифкации заканчивается построение эконометрической модели.

4. Верификация модели (проверка качества)

После этапа идентификации возникают вопросы:

- насколько удачно построена модель, т. е. можно ли рассчитывать на то, что ее использование для прогнозирования и имитационных расчетов даст результаты, достаточно адекватные реальной действительности;

- какова точность прогнозных и имитационных расчетов, основанных на построенной модели.

Получение ответов на эти вопросы составляет содержание проблемы верификации эконометрической модели. Методы верификации основаны на процедурах статистической проверки гипотез и на статистическом анализе характеристик точности различных приемов статистического оценивания.

Следует также отметить принцип ретроспективных расчетов, используемый при верификации эконометрических моделей. Суть принципа состоит в следующем: исходные статистические данные делятся на две части: обучающую выборку, включающую некоторую часть наблюдений, и экзаменующую выборку, включающую остальную часть исходных данных. Далее осуществляются этапы спецификации и идентификации для обучающей выборки. В полученную модель подставляют экзогенные переменные из экзаменующей выборки и получают модельные значения (ретроспективно прогнозные) эндогенных переменных. Сравнение этих модельных значений с соответствующими реальными значениями экзаменующей выборки позволяет проанализировать адекватность модельных выводов реальной действительности и их точность.

9. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

9.1. Совокупный спрос и факторы, его определяющие

Совокупный спрос (AD) – это связь между совокупным объемом выпуска, на который предъявлен спрос, и общим уровнем цен в экономике (рис. 11).

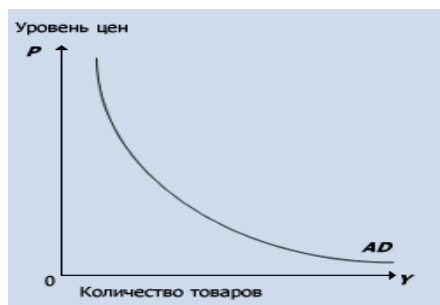


Рис. 11. Совокупный спрос

Кривая совокупного спроса показывает нам количество товаров и услуг (Y), которое потребители (домашние хозяйства, фирмы, государство, иностранцы) готовы приобрести при каждом возможном уровне цен (P).

Математическая модель спроса описывается уравнением.

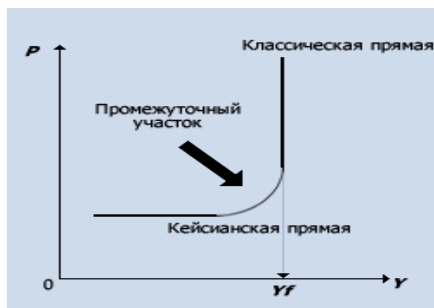


Рис. 12. Совокупное предложение

Равновесие – это такое положение в экономике, при котором лица, принимающие экономические решения, не имеют никаких побудительных мотивов к изменению своих планов.

В теории макроэкономического равновесия выделяют два подхода: классический и кейнсианский.

9.2. Классическая модель макроэкономического равновесия

Как и в микроэкономике, равновесие в макроэкономике между уровнем цен и реальным объемом производства определяется точкой пересечения кривых совокупного спроса и совокупного предложения.

Макроэкономическое равновесие предполагает взаимодействие совокупного спроса и совокупного предложения для определения общего уровня цен и валового национального продукта в условиях свободного рынка. Это, в свою очередь, позволит обсудить два наиболее важных вопроса, стоящих как перед обществом в целом, так и перед правительствами стран, имеющих рыночную экономику: инфляцию и безработицу.

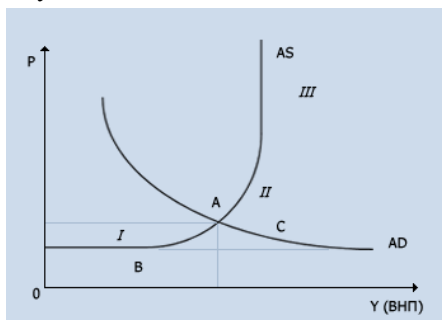


Рис. 13. Макроэкономическое равновесие

9.3. Кейнсианский подход к макроэкономическому равновесию

Специфика данного подхода заключается в следующем:

- равновесие национального дохода возможно и в условиях полной занятости;

- жесткость цен;

- сбережения являются функцией дохода, т.е. $S = S_0 + (1-MPC) \cdot Y$, инвестиции и сбережения определяются разными факторами. Если вспомнить, что произведенный национальный доход определяется как $Y = C + S$, а используемый $НД - Y = C + I$, то тогда $C + I = C + S$, и можно записать, что $I(r) = S(Y)$, где r - рыночная норма процента.

Данное равенство и является условием макроэкономического равновесия.

Наряду с классической моделью равенства совокупного спроса и совокупного предложения, можно вывести вариант равновесия в модели «доходы-расходы», называемую еще «кейнсианский крест» (см. рис. 14).

Точка E_0 на рис. 14 показывает такое положение равновесия национальной экономики, когда $НД$ равен потребительским расходам, а $S = 0$, т.е. ситуация стагнирующей экономики. При добавлении частных инвестиций ($Y = C + I$), а затем и государственных расходов ($Y = C + I + O$) национальная экономика будет стремиться к состоянию полной занятости (P).

Данное состояние может наступить и под воздействием эффекта мультипликатора, о чем речь шла выше.

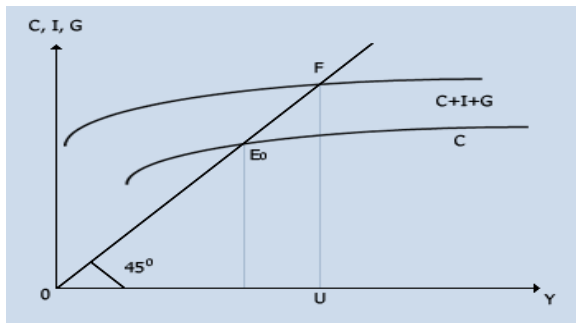


Рис.14. Кейнсианский крест

Следует отметить, что увеличение предельной склонности к сбережению при увеличении уровня $НД$ не всегда благоприятно отражается на состоянии национальной экономики. В условиях стагнирующей экономики (т.е. в период застоя всей экономической деятельности) в сочетании с неполной занятостью сокращение потребления приведет к затовариванию и снижению национального дохода, т.е. проявляется «парадокс бережливости».

Графически нарушение макроравновесия будет иметь вид, отображенный на рис.15.

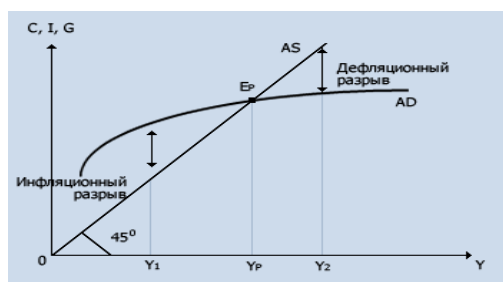


Рис.15. Нарушение макроравновесия

В положении Y_1 при $AD > AS$ в условиях полной занятости происходит инфляционный разрыв, т.е. $I > S$, следовательно, недостаток сбережений понизит уровень инвестиций, в результате чего снижается производство, которое при растущем спросе усиливает инфляцию.

В положении Y_2 при $AS > AD$ в условиях полной занятости происходит дефляционный разрыв, т.е. $S > I$. Данную ситуацию характеризует рост производства при низком текущем спросе, что приводит национальную экономику в состояние спада.

Макроэкономическое равновесие возможно E_p , при $НД = Y_p$, где $AS = AD$ и $I = S$.

Свойства макроэкономического равновесия:

1. Инфляция всегда является следствием превышения совокупного спроса над совокупным предложением, так как при отсутствии

превышения совокупного спроса нет основания для роста цен. Хотя превышение совокупного спроса может происходить по различным причинам, в том числе и вследствие дефицита госбюджета и денежной экспансии.

2. Макроэкономическое равновесие не гарантирует полной занятости.

3. В состоянии макроэкономического равновесия объем импорта может превышать объем экспорта, следовательно, государство накапливает внешний долг. В противоположной ситуации увеличиваются валютные запасы.

4. В условиях макроэкономического равновесия правительство несет расходы по предоставлению общественных товаров и услуг своим гражданам. Если государственные затраты превышают поступления от налогов, дефицит финансируется или за счет внешних займов, или за счет дополнительной эмиссии денег. Такое положение сказывается на состоянии совокупного спроса и совокупного предложения, о чем будет рассказано в других главах.

10. ПАУТИНООБРАЗНАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования динамики рыночных цен вводятся следующие допущения.

Функция предложения (производство только одного продукта) описывается зависимостью предложения Q от цены p (остальные факторы неизменны):

$$Q = S(p). \quad (1)$$

Кривая предложения монотонно возрастает, задается уравнением $p = MC(Q)$ и представляет собой геометрическое место точек минимумов линий постоянной прибыли.

Функция спроса – множество точек на плоскости QP , в которых цена принимает максимально возможное значение на линиях постоянной полезности:

$$Q = D(p). \quad (2)$$

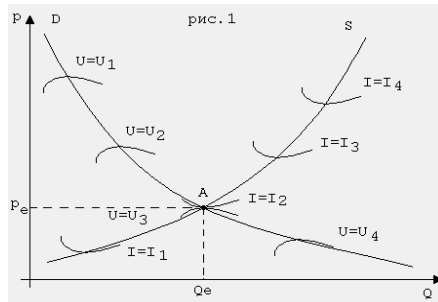


Рис. 16. Модель равновесия

Потребитель предъявляет спрос на определенный товар, исходя из своих предпочтений и бюджетных ограничений.

Точкой равновесия (точка A на рис.1) является пересечение кривых спроса и предложения. Цена $p = p_e$ называется равновесной. Если цена на рынке выше равновесной, то предложение превышает спрос и возникает затоваривание. В этой ситуации товаропроизводители (продавцы) многих видов товаров готовы пойти на снижение цены с целью привлечения большего числа покупателей (например, если речь

идет о скоропортящихся товарах). Следовательно, при значениях цены выше равновесной происходит давление на нее в сторону уменьшения.

Если же цена на рынке ниже равновесной, то спрос превышает предложение и товар становится дефицитным. В этой ситуации часть покупателей готова заплатить за товар более высокую цену, но снизить риск и с уверенностью приобрести товар (например, если образуется очередь покупателей, то стоящие в ее конце могут не получить товара). Таким образом, при значениях цены ниже равновесной происходит давление на нее в сторону увеличения. Эти две тенденции приводят к тому, что на рынках многих видов товаров, как правило, устанавливается равновесие, при котором спрос равен предложению.

Динамические неравновесные модели рынка используются для анализа изменения переменных (цена, спрос, предложение) во времени в случае, когда цена в начальный момент отличается от равновесной. При этом процесс установления равновесной цены может быть описан различными моделями при использовании одних и тех же функций спроса (2) и предложения (1).

Различают два подхода – непрерывный, в котором динамика цен описывается дифференциальным уравнением

$$D_p / d_t = a(D(P) - S(p)),$$

и дискретный, когда переменные на промежутке времени $[t, t+1)$ принимаются неизменными. В последнем случае последовательным интервалам времени $[t, t+1)$ соответствуют значения цены p_t , спроса D_t и предложения S_t .

Существенным является очередность действий, при запаздывании предложения процесс выражается как

$$S(P_{t+1}) = D(P_t), \tag{3}$$

при запаздывании спроса – в этом случае получаем процесс

$$D(P_{t+1}) = S(P_t). \tag{4}$$

Здесь предполагается, что функции предложения и спроса удовлетворяют следующим условиям:

$$S'(P) > 0, D'(P) < 0.$$

Графически итерационный процесс достижения равновесия изображается на плоскости Q_p^0 в виде паутины, которая «намотана» на кривые спроса и предложения.

Дискретные модели позволяют последовательно отразить процедуры принятия решений.

10.1. Паутинообразная модель с запаздыванием спроса

Паутинообразная модель (модель A), в которой спрос отстает от предложения на один период $D(P_{t+1}) = S(P_t)$, представлена рис. 17.

Последовательность действий:

1) объем предложения на рынке S_{t+1} в каждый период времени $t+1$ определяется значением цены предыдущего периода при помощи функции предложения $S_{t+1} = S(P_t)$;

2) на рынке в каждый период $t+1$ устанавливается равновесная цена P_{t+1} , причем эта цена является решением уравнения $D(P_{t+1}) = S_{t+1}$;

3) потребитель предъявляет спрос, который при цене P_{t+1} в каждый момент времени равен предложению S_{t+1} , вследствие чего потребитель приобретает все, что ему предложено.

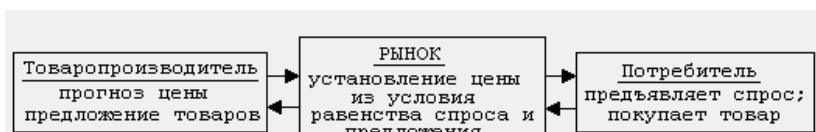


Рис. 17. Концептуальная схема модели динамики цен

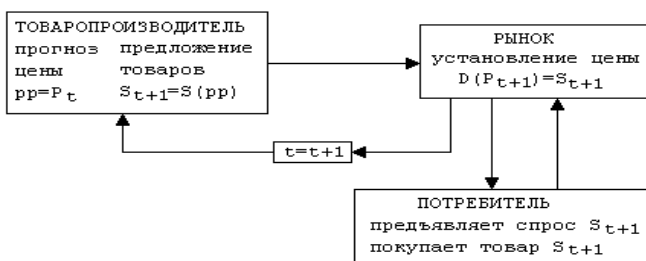


Рис. 18. Блок-схема паутинообразной модели

Принятое в модели A взаимодействие подсистем «потребитель», «товаропроизводитель» и «рынок» может быть представлено в виде блок-схемы, изображенной на рис.18.

Достижение равновесия в паутинообразной модели зависит от угловых коэффициентов функций:

$$\begin{aligned} D(P) &= Q_e - d(P - p_e), \\ S(P) &= Q_e + s(P - p_e). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь p_e — равновесное значение цены; Q_e — соответствующее равновесное значение спроса и предложения; d и s — угловые коэффициенты функций спроса и предложения.

Итерационный процесс (4) может быть представлен в виде

$$Q_e - d(P_{t+1} - p_e) = Q_e + s(P_t - p_e),$$

или

$$P_{t+1} - p_e = -s(P_t - p_e) / d.$$

Это значит, что числовая последовательность $y_t = P_t - p_e$, которая определяет отклонение текущей цены от равновесной, представляет собой знакочередующуюся геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -s / d$.

$$y_{t+1} = qy_t. \quad (6)$$

Поэтому при $s < d$ последовательность y_t стремится к нулю, что означает достижение в конце концов равновесия на рынке (рис.19).

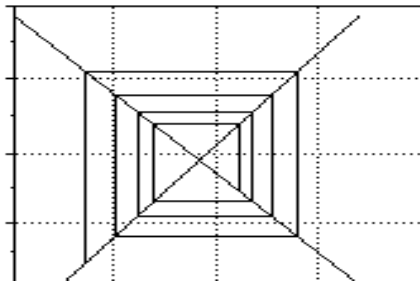


Рис. 19. Паутинообразная модель A при $s < d$

При $s > d$ последовательность y_t неограниченно возрастает и амплитуда колебаний цен увеличивается (рис. 20).

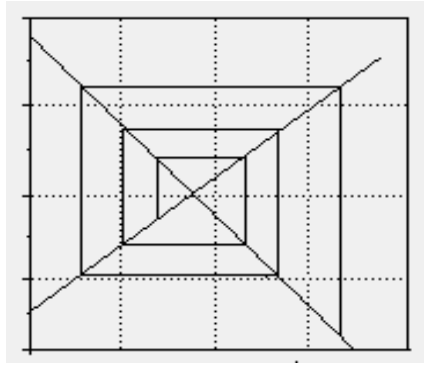


Рис. 20. Паутинообразная модель при $s > d$

При $s = d$ последовательность y_t принимает равные по абсолютной величине значения (рис. 20).

10.2. Паутинообразная модель с запаздыванием предложения

Модификация паутинообразной модели с запаздыванием предложения (модель **B**):

1) при определении объема предложения в каждый период времени товаропроизводитель ориентируется на спрос в предыдущий период $S_{t+1} = D(P_t)$;

2) цена предлагаемого товара устанавливается товаропроизводителем на уровне, определяемом в соответствии с функцией предложения $P_{t+1} = P(S_{t+1})$;

3) объем потребления не может превосходить ни объема предложения, ни объема спроса.

$$D_t = D(P_t) \quad C_t = \min(S_t, D_t).$$

Модель можно представить в виде блок-схемы, изображенной на рис. 21. Из этой блок-схемы видно, что в рассматриваемой модели происходит отставание предложения: $S(P_{t+1}) = D(P_t)$.

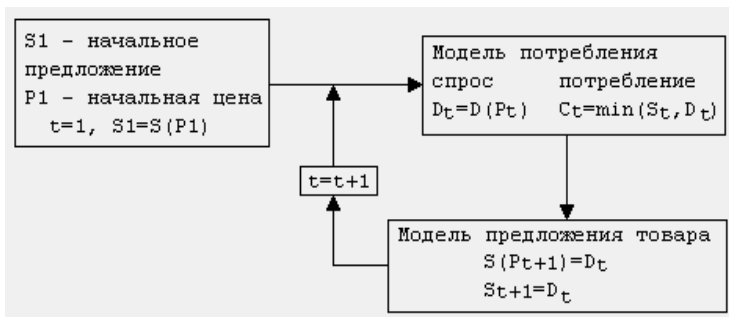


Рис. 21. Блок-схема паутинообразной модели В

Если же спрос меньше предложения (т.е. имеет место избыточное предложение товара), то потребление равно спросу, а непроданный товар приводит к затовариванию. Таким образом, в данной модели связь между потреблением C_t , спросом D_t и предложением S_t в каждый период времени t можно представить в виде

$$C_t = \min(S_t, D_t).$$

Последнее означает, что график кривой потребления модели **B** представляет собой линию *SAD* (рис. 22).

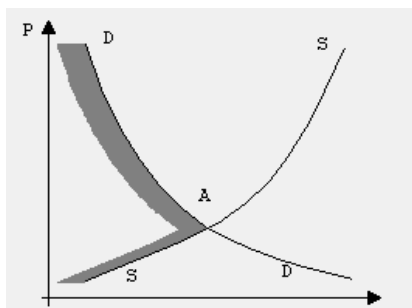


Рис. 22. Кривые спроса (*DD*), предложения (*SS*) и потребления (отмечена штриховкой)

Отметим, что в модели **B**, в отличие от модели **A**, динамическая спираль «наматывается» уже против часовой стрелки. Таким образом, изменение гипотез о поведении потребителя и товаропроизводителя привело к изменению направления движения по спирали на противоположное.

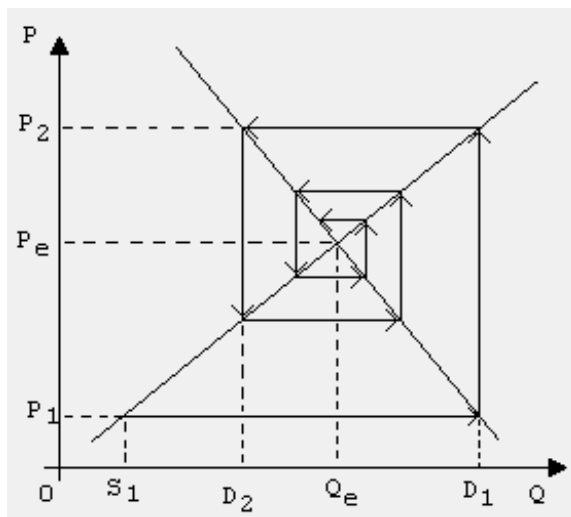


Рис. 23. Паутинообразная модель **B**

Поэтому в модели **B** при линейных функциях спроса и предложения (5) колебания цен затухают и на рынке достигается равновесие при $s > d$.

Если же $s < d$, то в этом случае колебания цен увеличиваются, а при $s = d$, как и в модели **A**, происходит колебание цен с постоянной амплитудой. Как видим, изменение гипотез модели **A** привело не только к смене направления «наматывая» спирали, но, следовательно, и к изменению условия сходимости итерационного процесса на противоположное.

Практическое задание 10. Паутинообразная модель

Задача 10.1. Спрос со стороны потребителей описывается уравнением $Q_d = 200 - 5P$; а предложение фирмы на рынке описывается уравнением $Q_s = 50 + P$. Определить, будет ли найдена равновесная цена при условии запаздывания спроса в паутинообразной модели. Определить направление движения спирали.

Задача 10.2. Спрос со стороны потребителей описывается уравнением $Q_d = 200 - 5P$; а предложение фирмы на рынке описывается уравнением $Q_s = 50 + P$. Определить, будет ли найдена равновесная цена при условии запаздывания предложения в паутинообразной модели. Определить направление движения спирали.

Задача 10.3. Спрос со стороны потребителей описывается уравнением $Q_d = 200 - 2P$; а предложение фирмы на рынке описывается уравнением $Q_s = 50 + 7P$. Определить, будет ли найдена равновесная цена при условии запаздывания спроса в паутинообразной модели. Определить направление движения спирали.

Задача 10.4. Спрос со стороны потребителей описывается уравнением $Q_d = 200 - 2P$; а предложение фирмы на рынке описывается уравнением $Q_s = 50 + 7P$. Определить, будет ли найдена равновесная цена при условии запаздывания предложения в паутинообразной модели. Определить направление движения спирали.

11. МОДЕЛЬ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

11.1. Модель Л.Вальраса

Для достижения равновесия на рынках нескольких товарных рынках используются модели общего экономического равновесия.

Основа модели Л. Вальраса заключается в предположении, что стоимость требуемых экономикой товаров равна стоимости продаваемых товаров. Таким образом, для каждого лица доход равен его расходам, включая его займы и сбережения.

Рассматривается ценовая экономика, где доход каждого участника определяется стоимостью товаров, имеющихся в его распоряжении. Поэтому индивиды совершают обмен при следующих бюджетных ограничениях:

$$P_A Q_{A0} = P_A Q_{A1} + P_B Q_{B1} + P_H Q_{H1},$$

$$P_B Q_{B0} = P_A Q_{A2} + P_B Q_{B2} + P_H Q_{H2},$$

$$P_H Q_{H0} = P_A Q_{A3} + P_B Q_{B3} + P_H Q_{H3}.$$

При том, что каждый потребитель обладает собственной функцией полезности:

$$U_i = (Q_{Ai} - a_i)^{\alpha_i} \cdot (Q_{Bi} - b_i)^{\beta_i} \cdot (Q_{Hi} - h_i)^{\gamma_i},$$

где Q_{ij} - объем потребления j -го блага ($j = A, B, H$) i -м индивидом.

Функции спроса потребителей на каждое из благ выводятся из максимизации функции полезности при заданном бюджетном ограничении; используем для этого функцию Лагранжа.

$$\Phi_i = (Q_{Ai} - a_i)^{\alpha_i} \cdot (Q_{Bi} - b_i)^{\beta_i} \cdot (Q_{Hi} - h_i)^{\gamma_i} - \lambda (P_A Q_A + P_B Q_B + P_H Q_H - P_i Q_{i,j}) \rightarrow \max.$$

Условия ее максимизации

$$\frac{\alpha_i (Q_{Bi} - b_i)}{\beta_i (Q_{Ai} - a_i)} = \frac{P_A}{P_B}, \quad \frac{\alpha_i (Q_{Hi} - h_i)}{\gamma_i (Q_{Ai} - a_i)} = \frac{P_A}{P_H}, \quad \frac{\alpha_i (M_i / P - m_i)}{\delta_i (Q_{Ai} - a_i)} = \frac{P_A}{P},$$

$$P_A Q_{A_i} + P_B Q_{B_i} + P_H Q_{H_i} = P_i Q_{ij}^D.$$

Таким образом, функции спроса будут иметь следующий вид:

$$Q_{Ai}^D = a_i + \frac{\alpha_i (P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) P_A},$$

$$Q_{Bi}^D = b_i + \frac{\beta_i (P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) P_B},$$

$$Q_{Hi}^D = h_i + \frac{\gamma_i (P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) P_H}.$$

Общее экономическое равновесие обеспечивается системой цен, которые приравнивают объемы спроса на блага имеющимся запасам.

$$\sum_{i=1}^3 Q_{Ai}^D = Q_{A0}; \quad \sum_{i=1}^3 Q_{Bi}^D = Q_{B0}; \quad \sum_{i=1}^3 Q_{Hi}^D = Q_{H0}.$$

Для определения уровня цен (P) и вектора денежных (номинальных) цен используется уравнение количественной теории денег:

$$P = \frac{MV}{\tilde{P}_A Q_{A0} + \tilde{P}_B Q_{B0} + \tilde{P}_H Q_{H0}}.$$

11.2. Модель Д. Патинкина

В процессе развития закона Вальраса Дон Патинкин предложил модель, включающую, помимо наличия запасов, определённую сумму денег.

Поэтому индивиды совершают обмен при следующих бюджетных ограничениях:

$$M_{01} + P_A Q_{A0} = P_A Q_{A1} + P_B Q_{B1} + P_H Q_{H1} + M_1,$$

$$M_{02} + P_B Q_{B0} = P_A Q_{A2} + P_B Q_{B2} + P_H Q_{H2} + M_2,$$

$$M_{03} + P_H Q_{H0} = P_A Q_{A3} + P_B Q_{B3} + P_H Q_{H3} + M_3.$$

Функции полезности каждого потребителя включают запас денег:

$$U_i = (Q_{A1} - a_i)^{\alpha_i} \cdot (Q_{B1} - b_i)^{\beta_i} \cdot (Q_{H1} - h_i)^{\gamma_i} \left(\frac{M_i}{P} - m_i \right)^{\delta_i},$$

где Q_{ij} - объем потребления j -го блага ($j = A, B, H$) i -м индивидом; M_i/P - реальные кассовые остатки i -го индивида.

Функции спроса приобретают следующий вид:

$$Q_{Ai}^D = a_i + \frac{\alpha_i(M_{0i} + P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i - P m_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)P_A},$$

$$Q_{Bi}^D = b_i + \frac{\beta_i(M_{0i} + P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i - P m_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)P_B},$$

$$Q_{Hi}^D = h_i + \frac{\gamma_i(M_{0i} + P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i - P m_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)P_H},$$

$$M_i^D = P m_i + \frac{\delta_i(M_{0i} + P_j Q_{0ij} - P_A a_i - P_B b_i - P_H h_i - P m_i)}{(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)}.$$

Система номинальных (денежных) цен, обеспечивающая общее экономическое равновесие, должна приравнять объемы спроса имеющимся запасам

$$\sum_{i=1}^3 Q_{Ai}^D = Q_{A0}; \quad \sum_{i=1}^3 Q_{Bi}^D = Q_{B0}; \quad \sum_{i=1}^3 Q_{Hi}^D = Q_{H0}; \quad \sum_{i=1}^3 M_i^D = \sum_{i=1}^3 M_{0i}.$$

К условиям равновесия на рынках добавляется уравнение количественной теории денег:

$$MV = P_A Q_{A0} + P_B Q_{B0} + P_H Q_{H0}.$$

Практическое задание 11.

Модель общего экономического равновесия

Задача 11.1. Меновое хозяйство состоит из трех индивидов, потребляющих три вида благ – A , B и H . Исходные запасы благ и денег следующие: $Q_{A0} = 30$; $Q_{B0} = 40$; $Q_{H0} = 50$; $M_{01} = 14$ $M_{02} = 18$; $M_{03} = 18$. Коэффициенты функции полезности равны $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$, $h_1 = 5$, $h_2 = 10$, $h_3 = 7$, $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,4$, $\alpha_3 = 0,1$, $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 0,2$, $\beta_3 = 0,6$, $\gamma_1 = 0,3$, $\gamma_2 = 0,4$, $\gamma_3 = 0,3$. Скорость обращения денег равна 3.

Определить равновесный вектор цен по модели Вальраса.

Задача 11.2. Меновое хозяйство состоит из трех индивидов, потребляющих три вида благ – A , B и H . Исходные запасы благ и денег следующие: $Q_{A0} = 30$; $Q_{B0} = 40$; $Q_{H0} = 50$; $M_{01} = 14$ $M_{02} = 18$; $M_{03} = 18$. Коэффициенты функции полезности равны $a_1 = 4$, $a_2 = 1$,

$a_3 = 5$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$, $h_1 = 5$, $h_2 = 10$, $h_3 = 7$, $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,4$, $\alpha_3 = 0,1$, $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 0,2$, $\beta_3 = 0,6$, $\gamma_1 = 0,3$, $\gamma_2 = 0,4$, $\gamma_3 = 0,3$. Скорость обращения денег равна 3.

Определить равновесный вектор цен по модели Патинкина.

Задача 11.3. Как изменится вектор цен в задаче 11.1, если скорость обращения денег увеличится в два раза?

Задача 11.4. Как изменится вектор цен в задаче 11.1, если скорость обращения денег уменьшится в два раза?

Задача 11.5. Как изменится вектор цен в задаче 11.1, если денежная масса увеличится на 20 %?

12. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

12.1. Модель межотраслевого баланса Леонтьева

Межотраслевой баланс в экономике - это метод анализа взаимосвязей между различными секторами экономической системы. Межотраслевой баланс можно использовать для определения оптимального взаимозависимого производства, например, в корпорации. В этом контексте и будем его рассматривать.

Цель балансового анализа - определить, сколько продукции должно произвести каждое предприятие корпорации для того, чтобы максимизировать совокупную прибыль, в зависимости от прогнозируемого спроса конечного потребления на продукцию всех предприятий.

Принципиальная схема МОБ (межотраслевого баланса) в стоимостном выражении представлена на рис. 24.

Межотраслевой баланс состоит из четырех частей (квадрантов), пронумерованных от I до IV.

Каждое предприятие одновременно является производящим и потребляющим. Когда предприятия рассматриваются как производящие, они обозначены индексом i , а потребляющие – j . Если $i = j$, то это одно и то же предприятие.

Производственные отрасли (j)	Потребляющие отрасли Потребности отрасли (i)				Конечный продукт	Валовый продукт (ВП)
	1	2		n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{1n}		y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	y_1	x_2
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{nn}		y_1	x_n
Амортизация Оплата труда Чистый доход	c_1 v_1 m_1		c_n v_n m_n			
Валовый продукт	x_1	x_2		x_n		$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j$

Рис. 24. Схема межотраслевого баланса

I квадрант (левая верхняя четверть) отражает структуру производства и производственного потребления промежуточного продукта. В первом квадранте может находиться матрица A либо матрица X . Матрица A заполнена числами a_{ij} , где a_{ij} - коэффициент, отражающий долю затрат предприятия i на производство единицы продукции предприятием j . Матрица X заполнена числами x_{ij} , где x_{ij} - объем продукции i -го предприятия, использованной для производства всей продукции j -го предприятия. Величины x_{ij} измеряются в деньгах, поэтому их можно складывать.

По строке величины $x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{in}$ показывают суммарный объем продукции i -го предприятия, потраченный на внутреннее потребление (промежуточный продукт). Значения x_{ij} в случае $i = j$ показывает объем продукции, потреблённой тем же предприятием, которое произвело её.

По столбцу величины $x_{1j}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nj}$ показывают структуру себестоимости продукции j -го предприятия.

В первом столбце II квадранта отражен конечный продукт u , который и есть объем выпуска всех предприятий (ВВП), во втором столбце – валовый выпуск продукции. Валовой продукт отрасли (X_i) равен сумме промежуточного (x_i) и конечного (y_i) продуктов:

$$\sum_{j=1}^n X_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n Y_j, \quad i, j = \overline{1, n},$$

X_i – валовой продукт i -й отрасли.

Во II квадранте может быть отражена структура конечного продукта. Если исчисляется конечный продукт, произведенный внутри страны, то это будет валовой внутренний продукт (ВВП). Структура конечного продукта для экономики государства может быть представлена в виде уравнения:

$$ВВП_{рас} = C + I + G + NX,$$

где C – потребление домашних хозяйств; I – валовые частные инвестиции; G – государственные закупки товаров и услуг; NX – чистый экспорт, т.е. экспорт минус импорт.

В нижней строке II квадранта записаны суммы по столбцам:

— потребление всех домашних хозяйств;

- валовые частные инвестиции всего народного хозяйства;
- валовые государственные закупки товаров и услуг; это часть ВВП, потребляемая государством;
- валовой чистый экспорт;
- валовой внутренний продукт народного хозяйства;
- сумма валовых продуктов отраслей.

В III квадранте отражается добавленная стоимость:

$$W + A + \% + P,$$

где W - заработная плата наемных работников; A - амортизация основного капитала; $\%$ - чистый процент (доход от облигаций, срочных вкладов в банке, сберегательных сертификатов и т.д., т.е. от любых финансовых активов); P - прибыль корпораций.

Обозначим добавленную стоимость j -й отрасли через V_j .

В нижней строке III квадранта располагаются валовые объемы продукции отраслей X_j . Они равны сумме перенесенной и добавленной стоимостей:

$$\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n V_j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

В IV квадранте доходы связываются с расходами.

Предполагается, что потоки продукции x_i между предприятиями зависят линейно от объёма валовой продукции, также линейно зависят от нормы материалоёмкости a_{ij} , которая определяет затраты продукции i -го предприятия на производство продукции j -й отрасли;

x_{ij} - объем выпуска i -го сектора (объем товаров и услуг, произведенных в одном из n производящих секторов), $i=1, 2, \dots, n$;

y_i - конечный продукт i -го сектора (объем продукции i -го сектора, потребляемой в секторе конечного спроса);

a_{ij} - количество продукции i -го сектора, которое расходуется при производстве одной единицы продукции j -го сектора (коэффициенты прямых затрат).

Количественная взаимосвязь между отраслями хозяйства математически в элементарном виде может быть представлена формулами:

$$X_{ij} = a_{ij}X_j,$$

$$a_{ij} = x_{ij} / x_j.$$

Модель межотраслевого баланса может быть представлена системой линейных уравнений:

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + Y_1,$$

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + Y_2,$$

$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + Y_n,$$

где Y характеризует размер конечного потребления данной отрасли народного хозяйства.

$$x_i = \sum_{j=1}^n (b_{ij} + y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Соотношения баланса, записанные через коэффициенты прямых затрат, имеют вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j + y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или, что то же самое,

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если матрица обратима, то решение такой задачи определяется как $X = (E - A)^{-1} Y$, где E - единичная матрица.

Матрица $D = (E - A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

Пусть вектор $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ есть вектор цен. Для базового периода принимается, что цены всех продуктов $P_i = 1, i = 1, n$.

В матричном виде уравнение для цен будет иметь следующий вид

$$P = A^T P + v. \quad (2)$$

Решая уравнение (2) относительно P , получим

$$P = (I - A^T)^{-1} v = B^T v. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) называют моделью равновесных цен.

Отношение $v_j = V_j / X_j$ называют долей добавленной стоимости, а вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$ - вектор долей добавленной стоимости.

Структуру добавленной стоимости можно представить, например, следующим образом:

$$V_j = V_j^1 + V_j^2 + V_j^3,$$

где V_j^1 - заработная плата; V_j^2 - прибыль предпринимателя; V_j^3 - налоги.

Соответственно можно записать структуру доли добавленной стоимости:

$$v_j = v_j^1 + v_j^2 + v_j^3.$$

При изменении заработной платы на $\Delta\%$ изменение доли добавленной стоимости выразится следующим образом:

$$v_j = (v_j^1 + \Delta v_j^1/100) + v_j^2 + v_j^3.$$

12.2. Модель межотраслевого баланса затрат труда

Модель межотраслевого баланса также используется для определения прямых и полных затрат труда на единицу продукции и спроса на работников по отраслям. При этом межотраслевой продуктовый баланс в натуральном выражении используется как исходная модель.

Предполагается, что труд выражается в единицах труда одинаковой степени сложности. Обозначим затраты живого труда в производстве j -го продукта через L_j , объем выпущенной продукции, как и прежде, X_j . Тогда коэффициент прямых затрат труда:

$$t_j = \frac{L_j}{X_j}.$$

Определим полные затраты труда как сумму прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенного на продукт через израсходованные средства производства.

Формирование полных затрат труда в модели происходит по схеме, представленной на рис. 25,

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11}T_1 & a_{12}T_1 & \dots & a_{1n}T_1 \\
 a_{21}T_2 & a_{22}T_2 & \dots & a_{2n}T_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1}T_n & a_{n2}T_n & \dots & a_{nn}T_n \\
 \hline
 t_1 & t_2 & \dots & t_n \\
 T_1 & T_2 & \dots & T_n
 \end{array}
 \downarrow$$

Рис. 25. Порядок формирования полных затрат труда

где T_j - полные затраты труда на единицу j -го продукта; t_j - прямые затраты труда на единицу j -го продукта; $a_{ij}T_i$ - затраты овеществленного труда, перенесенного на j -й продукт через i -е средство производства.

Таким образом:

$$T_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}T_i + t_j,$$

Иначе, если известны коэффициенты полных материальных затрат b_{ij} , можно записать:

$$T_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}t_j,$$

Более компактно соотношение можно записать в матричном виде:

$$T = tB,$$

где $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ - вектор-строка коэффициентов полных затрат труда; $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ - вектор-строка коэффициентов прямых затрат труда.

Аналогично трудовым затратам в межотраслевой модели могут быть учтены показатели фондоемкости изделий.

Практическое задание 12.

Балансовые модели

Задача 12.1. Задана модель экономики, в которой выделены четыре сектора: три производящих сектора (промышленность, сельское

хозяйство, транспорт) и домашние хозяйства в качестве сектора конечного спроса. Структура экономики описана в таблице межотраслевого баланса (объемы указаны в единицах стоимости).

Вычислить вектор выпуска для вектора конечного спроса $Y = (100, 50, 120)$.

Таблица 13. Исходные данные к задаче 12.1

	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	16	120	60	246
Промышленность	30	10	180	100	320
Транспорт	15	14	140	80	249

Задача 12.2. По заданной таблице межотраслевого баланса из задачи 1 построить матрицу коэффициентов прямых затрат и матрицу полных затрат.

Провести анализ эффекта распространения ценовых параметров для следующих вариантов имитационных значений долей добавленной стоимости:

- а) при росте доходов занятых по найму (заработной платы) на 10 %;
- б) при сокращении доходов занятых по найму на 10 %;
- в) при росте предпринимательского дохода (прибыли) на 10 %.

Задача 12.3. В табл. 13 приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден.ед.

Найти:

- 1) плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;
- 2) необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 5 %, а промышленности – на 1 %.

Задача 12.4. По данным, представленным в табл. 13: построить таблицу межотраслевого баланса в стоимостном выражении. Найти изменения валовых выпусков при увеличении конечного выпуска первой отрасли – на 20 %, третьей – на 10 % и неизменном конечном выпуске второй отрасли. Как следует изменить цены на продукцию отраслей, если поставлены задачи увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20 %, а в третьей – на 10 %.

Задача 12.5. Для трёхотраслевой экономической системы заданы коэффициенты прямых материальных затрат и вектор конечной продукции, представленные в табл. 14. Кроме того, в дополнение к исходным данным заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трёх отраслях: $L_1 = 1160$, $L_2 = 460$, $L_3 = 875$.

Таблица 14. Коэффициенты прямых материальных затрат и конечная продукция

Производящие отрасли	Коэффициенты прямых затрат			Конечная продукция
	1	2	3	
1	0,3	0,1	0,4	200
2	0,2	0,5	0,01	100
3	0,3	0,1	0,2	0,2

Рассчитать коэффициенты полных материальных затрат. Найти объемы валовой продукции трёх отраслей. Заполнить схему межотраслевого материального баланса. Определить коэффициенты прямой трудоёмкости. Рассчитать коэффициенты полной трудоёмкости. Составить межотраслевой баланс затрат труда.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабешко, Л. О. Основы эконометрического моделирования: учеб. пособие / Л.О. Бабешко. – Изд. 3-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2007. – 432 с.
2. Бочаров, В.В. Инвестиции / В.В. Бочаров. – СПб.: Питер, 2002. – 288 с.
3. Волкова, Л. Определение емкости рынка / Л. Волкова // <http://market.narod.ru/MR/emk.html>
4. Гераськин, М. И. Инвестиционный менеджмент: модели и методы: учеб. пособие / М.И. Гераськин, О.А. Кузнецова. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007. – 84 с.
5. Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Изд-во «ДИС», 1998. – 368 с.
6. Источник: <http://center-yf.ru/data/Marketologu/Emkost-rynka.php>>Емкость рынка<
7. Красс, М.С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.
8. Ковалёв, В.В. Методы оценки инвестиционных проектов / В.В. Ковалев. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 144 с.
9. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей: учебник / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
10. Кузнецова, О.А. Эконометрическое моделирование: учеб. пособие / О.А.Кузнецова, М.С. Татарникова. – Самара: Изд-во СГАУ, 2012. – 44 с.
11. Кундышева, Е.С. Экономико-математическое моделирование: учебник / под науч. ред. проф. Б.А. Сулакова. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2008. – 424 с.
12. Прогнозирование емкости рынка отдельных групп товаров и услуг / И.В. Петухова, Н.В. Петухова // Маркетинг в России и за рубежом. – №5. – 2000.

13. Ример, М.И. Экономическая оценка инвестиций / М.И. Ример, А.Д. Касатов, Н.Н. Матиенко. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 480 с.
14. Хачатрян, Н.К. Математическое моделирование экономических систем / Н.К. Хачатрян. – М.: Изд-во «Экзамен», 2008. – 158 с.
15. Хачатрян, С.Р. Прикладные методы математического моделирования экономических систем: научно-метод. пособие / С.Р. Хачатрян. – М.: Изд-во «Экзамен», 2002. – 192 с.
16. Хачатрян, С.Р. Методы и модели решения экономических задач: учеб. пособие / С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М.: Изд-во «Экзамен», 2005. – 384 с.
17. Шапкин, А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций / А.С. Шапкин. – 2-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^о», 2003. – 544 с.

Учебное издание

Кузнецова Ольга Александровна

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:
МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ И РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ**

Учебное пособие

Редактор Ю.Н. Литвинова
Компьютерная вёрстка Т.С. Зинкина

Подписано в печать 30.10.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,0.
Тираж 100 экз. Заказ . Арт. 30/2016.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

