

**САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
*имени академика С.П. Королева*

**А.Г. Гимадиев, А.Н. Крючков,  
А.Б. Прокофьев, Е.В. Шахматов,  
В.П. Шорин**

# **АВТОМАТИКА И РЕГУЛИРОВАНИЕ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

**Часть 1**  
***Теория автоматического управления.  
Линейные системы***

**САМАРА 2002**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЁВА

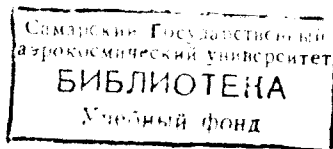
А. Г. Гимадиев, А. Н. Крючков,  
А. Б. Прокофьев, Е. В. Шахматов,  
В. П. Шорин

# АВТОМАТИКА И РЕГУЛИРОВАНИЕ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Часть 1.

Теория автоматического управления.  
Линейные системы

Допущено учебно-методическим объединением высших учебных заведений РФ по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия



САМАРА 2002 (2003)

УДК 621.431.75(075)

А.Г. Гимадиев, А.Н. Крючков, А.Б. Прокофьев, Е.В. Шахматов, В.П. Шорин **Автоматика и регулирование авиационных двигателей и энергетических установок. Часть 1. Теория автоматического управления. Линейные системы. Учебное пособие** – Самарский государственный аэрокосмический университет. - Самара, 2002, 139 с.

**ISBN 5-7883-0246-3**

В настоящем учебном пособии изложены основы теории автоматического управления. Рассмотрены методы исследования линейных систем управления. Приведены критерии устойчивости и методы оценки качества процессов управления. Для практического освоения материала, изложенного в соответствующих главах, в пособии даны примеры и задачи.

Учебное пособие рекомендуется для студентов специальностей, учебный план которых включает курсы «Теория автоматического управления», «Управление техническими системами», «Управление сложными системами», «Автоматическое регулирование воздушно-реактивных двигателей».

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Н.Д. Быстров  
д-р техн. наук, проф. И.С. Загузов

**ISBN 5-7883-0246-3** © А. Г. Гимадиев, А. Н. Крючков,  
А. Б. Прокофьев, Е. В. Шахматов,  
В. П. Шорин, 2002  
© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2002

## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

АР – автоматический регулятор;  
АФЧХ – амплитудно-фазовая частотная характеристика;  
АЧХ – амплитудная частотная характеристика;  
ВВ – возмущающее воздействие;  
ГТД – газотурбинный двигатель;  
ДЛА – двигатель летательного аппарата;  
ИМ – исполнительный механизм;  
ИЭ – источник энергии;  
ЛА – летательный аппарат;  
ОР – объект регулирования;  
ПМ – программный механизм;  
РНД – регулятор непрямого действия;  
РП – регулируемый параметр;  
РПД – регулятор прямого действия;  
РФ – регулирующий фактор;  
САР – система автоматического регулирования;  
САУ – система автоматического управления;  
ТЗ – типовое звено;  
УП – усилитель-преобразователь;  
ФЧХ – фазовая частотная характеристика;  
ЧЭ – чувствительный элемент;  
ЭС – элемент сравнения.

## ВВЕДЕНИЕ

Эффективность функционирования любой современной технической системы обеспечивается за счет изменения или поддержания на заданном уровне основных параметров, определяющих ее работоспособность. Управлять параметрами можно либо вручную, либо в автоматическом режиме. Управление сложными техническими объектами, к которым, например, относятся авиационные и ракетные двигатели, имеющие множество изменяющихся параметров, возможно только средствами автоматики. Создание и функционирование систем автоматического управления базируется на определенных правилах и закономерностях, которые изучаются в теории автоматического управления.

Многолетний опыт чтения лекций по теории автоматического управления для специальностей факультета двигателей летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета накоплен на кафедре автоматических систем энергетических установок. Он базируется на лекционных курсах, прочитанных в разные годы Ю. А. Балашевичем, В. П. Шориным, А. Е. Жуковским, Ю. С. Анисимкиным и другими преподавателями.

В учебном пособии изложены общие сведения о системах автоматического управления, основные понятия теории автоматического управления как науки о системах, отражены вопросы анализа линейных и линеаризуемых систем, оценки устойчивости и качества процессов регулирования.

В заключительном разделе приводятся контрольные вопросы, примеры и задачи, позволяющие закрепить теоретический материал.

Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и инженеров, специализирующихся в области автоматического регулирования и управления сложными техническими системами.

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О САУ

## 1.1. ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ КАК НАУКА О СИСТЕМАХ. ТЕРМИНОЛОГИЯ

Автоматическое управление – это процесс поддержания или изменения по заданной программе одной или нескольких величин в различных машинах, устройствах и технических аппаратах без непосредственного участия человека.

Принято режим работы системы с изменением выходного параметра  $x_{\text{вых}}$  в широких пределах называть режимом управления, а режим с выполнением закона  $x_{\text{вых}} = \text{const}$  – режимом регулирования при действии всего потока факторов (возмущений).

Устройство, в котором необходимо поддерживать или изменять по заданной программе какую-либо величину, называется объектом регулирования (ОР), а сама величина – регулируемым параметром (РП).

Устройство (прибор), с помощью которого осуществляется регулирующее воздействие на объект регулирования, называется автоматическим регулятором (АР).

Всякое внешнее воздействие на объект регулирования, приводящее к отклонению регулируемого параметра, называется возмущающим воздействием (ВВ).

Совокупность объекта управления (регулирования) и автоматического регулятора, взаимодействующих между собой, называется системой автоматического регулирования (САР). Совокупность нескольких САР, реализованных на одном объекте и выполняющих все поставленные перед объектом функции, называют системой автоматического управления (САУ).

Наука, изучающая принципы действия и построения систем автоматического регулирования, называется теорией автоматического регулирования (ТАР), а систем автоматического управления – теорией автоматического управления (ТАУ).

## 1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ САУ

### 1.2.1. Классификация САУ по принципу регулирования

По принципу регулирования САУ подразделяются на системы, действующие по отклонению регулируемого параметра, или замкнутые САУ, и на системы, действующие по возмущающему воздействию или разомкнутые САУ.

В замкнутой САУ имеется взаимозависимость работы всех элементов системы друг от друга. Характерным для разомкнутой САУ является то, что работа системы не зависит непосредственно от результата её воздействия на ОР.

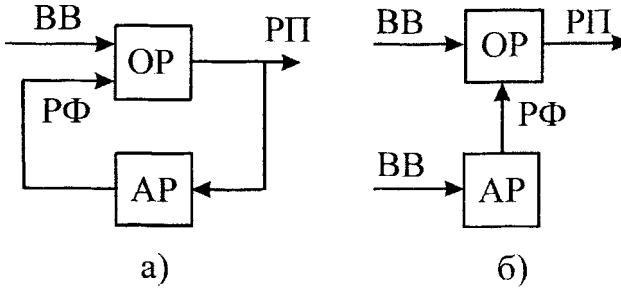


Рис. 1.1 Схема замкнутой (а) и разомкнутой (б) САУ.

Преимуществом замкнутых САУ (рис. 1.1, а) является то, что в них регулятор парирует действие любых внешних возмущений, а недостаток - регулятор вступает в действие только тогда, когда уже появилось отклонение регулируемого параметра.

Преимуществом разомкнутых САУ (рис. 1.1, б) является то, что возмущающее воздействие одновременно поступает как на объект, так и на регулятор, что при соответствующем его быстродействии практически исключает отклонение регулируемого параметра. Недостатком разомкнутых САУ является трудность учета всех возможных возмущающих воздействий и соответственно построения стольких каналов регулирования, сколько ВВ.

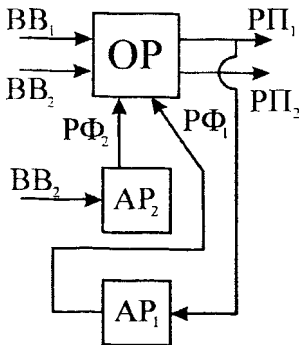


Рис. 1.2 Схема комбинированной САУ.

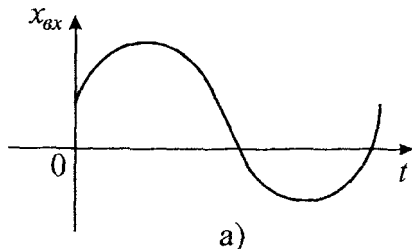
Для регулирования процессов в сложных технических объектах, какими являются, например авиационные газотурбинные двигатели, применяют комбинированные САУ, включающие замкнутые и разомкнутые САУ (рис. 1.2). В таких системах по замкнутой схеме объект регулируется по основному регулируемому параметру, а по разомкнутой схеме - по ВВ, к которому объект обладает малой чувствительностью. При этом используются положительные качества замкнутых и разомкнутых САУ.

### 1.2.2. Классификация САУ по характеру воздействия на объект управления

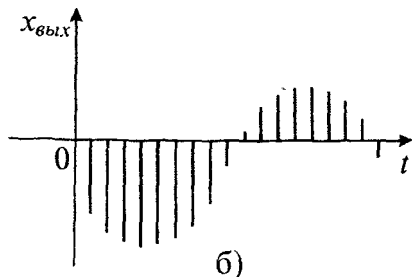
По характеру воздействия на объект регулирования САУ подразделяются на системы:

- непрерывного управления;
- дискретного управления;
- релейного управления;

Системой непрерывного управления называется такая система, в каждом из элементов которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины.



Системой дискретного управления называется такая система, в которой хотя бы в одном элементе при непрерывном изменении входной величины выходная величина изменяется не непрерывно, а имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени (рис. 1.3).



Системой релейного управления называется такая система, в которой хотя бы в одном элементе при непрерывном изменении входной величины выходная величина в некоторых точках процесса, зависящих от значения входной величины, изменяется скачком.

Рис. 1.3 Входной (а) и выходной (б) сигнал дискретного элемента.

### 1.2.3. Классификация САР по заданной программе регулирования

По заданной программе воспроизведения регулируемой величины САУ подразделяются на

- стабилизирующие ( $x_{вых} = const$ );
- следящие или копирующие ( $x_{вых}$  - заранее не известно);
- программного управления ( $x_{вых} = x_{вых}(t)$ );
- самонастраивающиеся;
- оптимального и экстремального управления.



Стабилизирующие системы поддерживают выходной параметр на заданном и постоянном во времени уровне.

Системы программного регулирования изменяют режим работы изделия (ОР) во времени в некоторых пределах по заранее заданному закону.

Следящие замкнутые САУ должны обеспечить изменение выходной величины в некоторых пределах по любому задаваемому командным воздействием ( $x_{ax}$ ) входному сигналу. При этом выходная величина должна следить за подаваемой командой и с достаточной точностью повторять все её изменения.

Самонастраивающиеся САУ работают по алгоритмам оптимизации. Такие системы должны не только автоматически подбирать необходимые свойства регулятора или менять свою структуру, но делать это так, чтобы динамические процессы в них были оптимальными. При этом в системе должно иметься специальное автоматическое устройство для анализа качества работы объекта регулирования в данной системе по какому-либо заданному критерию или для анализа величины ошибок регулирования. В обоих случаях это устройство (анализатор) определяет отклонение параметров системы от требуемого значения и передаёт соответствующий сигнал на настраиваемое устройство, которое автоматически изменяет параметры регулятора в нужную сторону, чтобы ликвидировать нежелательное ухудшение качества работы системы. Критерий качества может быть выбран из применяемых в теории автоматического управления критериев или даже вновь выработан в интересах практики. Выбор его зависит от назначения и конструкции системы.

Система экстремального управления устанавливает такой режим работы, при котором выходная величина является оптимальной или близкой к ней, находясь в области экстремума. Таким образом на САУ, называемую экстремальной, сверх обычной задачи поддержания требуемого значения регулируемой величины, накладывается дополнительная задача автоматического поиска наивыгоднейшего значения требуемой регулируемой величины, т. е. самой программы регулирования.

#### **1.2.4. Классификация САУ по роду используемой в регуляторах энергии**

- механические;
- гидравлические;
- электрические;
- пневматические;
- комбинированные.

### 1.2.5. Классификация САУ по назначению

САУ для управления:

- температурой;
- давлением;
- частотой вращения;
- перемещением;
- напряжением и т. д.

## 1.3. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ САУ

САУ представляет собой совокупность объекта регулирования (ОР) и регулятора (Р).

Регуляторы выполняют в системах автоматического управления две функции:

- управление режимом работы САУ, т.е. осуществление программы  $x_{\text{вых}}(t) = \text{var}$ .
- стабилизации режима работы САУ ( $x_{\text{вых}}(t) = \text{const}$ ).

Любой регулятор в общем случае включает в себя следующие основные элементы:

- чувствительный элемент (ЧЭ) – элемент, воспринимающий информацию о величине регулируемого параметра в объекте и выдающий сигнал для сравнения с заданным его значением;
- программный механизм (ПМ) – выдаёт сигнал, соответствующий заданному (программному) значению  $y_{\text{пр}}$ ;
- элемент сравнения (ЭС) – сравнивает сигналы с ЧЭ и ПМ и выдаёт сигнал рассогласования  $\Delta y = y_{\text{пр}} - y$ ;
- усилитель-преобразователь (УП) – усиливает слабый сигнал с выхода ЭС, преобразует сигнал в удобный для передачи вид и выдает команду на исполнительный орган;
- исполнительный орган (ИО) – устройство, непосредственно воздействующее на объект регулирования для устранения ошибки регулирования;
- источник энергии (ИЭ), служащий для питания энергией регулятора.

## 1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Регуляторы делятся на две группы: аналоговые и дискретные; последние часто называют вибрационными, т. е. функционирующими

с какой-то скажностью (скажность – отношение периода повторения электрических импульсов к их длительности).

#### **1.4.1. Регуляторы прямого и непрямого действия**

Регуляторы по используемой энергии делятся на два больших класса:

- регуляторы прямого действия (РПД) – не используют энергию извне и чувствительный элемент жестко связан с исполнительным органом;
- регуляторы непрямого действия (РНД) – потребляют энергию от дополнительного источника, т. е. это регуляторы, в которых между ЭС и ИО установлен усилитель.

#### **1.4.2. Статические и астатические регуляторы**

Регуляторы, которые при изменении внешних воздействий на объект регулирования не сохраняют постоянным значение регулируемого параметра, называются статическими, а отклонение регулируемого параметра при этом называется статической ошибкой регулирования.

САУ, содержащая в своем составе статический регулятор, называется статической САУ.

Регуляторы, которые при изменении возмущающего воздействия на объект регулирования сохраняют неизменным значение регулируемого параметра, называются астатическими.

САУ, содержащая в своем составе астатический регулятор, называется астатической системой автоматического регулирования.

#### **Преимущества и недостатки статических и астатических регуляторов**

Преимуществом статических регуляторов является хорошее качество процесса регулирования (плавный переходный процесс); недостаток – наличие статической ошибки регулирования при изменении возмущающего воздействия на объект.

Преимуществом астатических регуляторов является отсутствие статической ошибки регулирования; недостаток – плохое качество переходного процесса (наблюдаются большие забросы и колебания регулируемых параметров, что приводит к увеличению времени регулирования и снижает ресурс ОР).

#### **1.4.3. Регуляторы прямого действия**

Рассмотрим схемы простейших регуляторов.

Один из первых в истории техники автоматических регуляторов был изобретён И. И. Ползуновым в 1765 году. Это был автоматический регулятор уровня воды в котле паровой машины (рис. 1.4). В нём осу-

щественён общий принцип действия любого автоматического регулятора прямого действия.

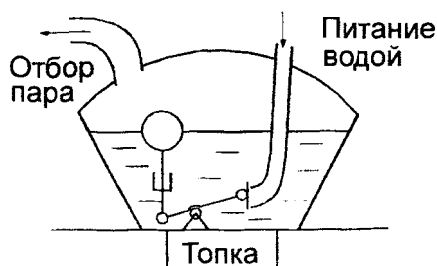


Рис. 1.4 Регулятор уровня воды.

Чувствительный элемент (поплавок), измеряющий регулируемый параметр (уровень воды в котле), непосредственно перемещает регулирующий орган (клапан питания котла водой). Регулирующим фактором в этом случае является площадь, перекрываемая заслонкой в трубопроводе подачи воды. Котёл является объек-

том регулирования. Изменение величины отбора пара из котла в паровую машину является возмущающим воздействием на объект регулирования.

Предположим, что отбор пара увеличится. Это приведёт к падению давления в котле, увеличению интенсивности парообразования и, следовательно, снижению уровня воды. Таким образом, уровень воды  $H$  (регулируемый параметр) начнёт уменьшаться (рис. 1.5). Тогда поплавок, опускаясь, будет шире открывать регулирующий клапан, усилится приток питающей воды, и уровень её будет автоматически восстанавливаться.

Следует отметить, что рассматриваемый регулятор прямого действия является статическим, т. е. в процессе регулирования проис-

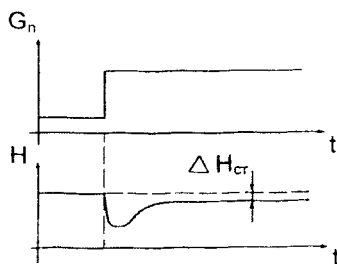


Рис. 1.5 Переходный процесс в регуляторе уровня воды.

ходит некоторое отклонение величины регулируемого параметра от ее заданного значения, называемое статической ошибкой ( $\Delta H_{ст}$  см. рис. 1.5). Так для рассмотренного случая увеличения отбора пара необходимо, чтобы в конце переходного процесса клапан питания котла водой занял новое установившееся положение, соответствующее увеличенному расходу жидкости через клапан. Последнее возможно только при увеличении площади проходного сечения. Так

как заслонка клапана жестко связана с поплавком, отклонение положения заслонки на увеличение расхода приводит к снижению положения поплавка. То есть уровень воды в баке несколько понизится.

Кроме изменения отбора пара, возмущающее воздействие на объект регулирования будет проявляться также и в изменении теплового режима котла (интенсивность топки, температура питающей воды

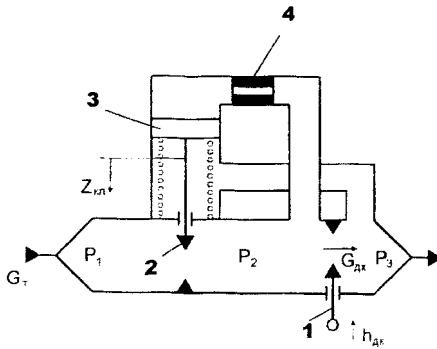


Рис. 1.6 Регулятор расхода топлива прямого действия.

и окружающего пространства). Регулятор во всех случаях будет действовать так, чтобы ликвидировать нежелательное отклонение уровня воды, по каким бы причинам оно не возникло. При этом во всех случаях будет иметь место статическая ошибка регулирования.

Регулятор расхода топлива прямого действия поддерживает постоянный

расход топлива, величина которого определяется положением дроссельного крана управления 1 (см. рис. 1.6). Постоянство расхода обеспечивается поддержанием постоянного перепада давления на дроссельном кране 1 ( $\Delta P_{ок} = P_2 - P_3$ ). Расход рабочего тела через дроссельный кран  $G_{ок}$  определяется по формуле:

$$G_{ок} = \mu F_{ок} \sqrt{2 \rho \Delta P_{ок}}, \quad (1.1)$$

где  $\mu$  - коэффициент расхода,  $F_{ок}$  - площадь дроссельного крана 1,  $\rho$  - плотность жидкости.

Постоянный перепад давления на дроссельном кране обеспечивается путем изменения степени дросселирования потока на входе в дроссельный кран за счет изменения положения регулирующего дифференциального клапана 2.

Предположим, что на входе в регулятор увеличилось давление  $P_1$  жидкости, нагнетаемой насосным агрегатом. Это приведет к увеличению давления  $P_2$ , увеличению перепада давления на дроссельном кране управления  $\Delta P_{ок}$  и повышению расхода рабочего тела  $G$  согласно соотношению (1.1) относительно заданного. В то же время происходит увеличение давления в надпоршневой полости сервопоршня 3, связанной через канал с демпфирующим дросселем 4 с полостью перед дроссельным краном управления. Таким образом, на сервопоршне 3 происходит увеличение перепада давления между надпоршневой полостью и подпоршневой полостью, связанной каналом с выходом регулятора,

что приводит к движению поршня вниз и уменьшению площади сечения регулирующего клапана.

Уменьшение площади сечения регулирующего клапана соответствует увеличению степени дросселирования жидкости на нем и уменьшению давления  $P_2$ . Таким образом перепад давления на дроссельном кране управления восстанавливается, что обеспечивает снижение расхода рабочей жидкости до заданного значения.

Как и в ранее рассмотренном случае регулятора Ползунова, регулятор расхода топлива является статическим, т. е. в процессе регулирования происходит некоторое отклонение величины регулируемого параметра от ее заданного значения (см. рис. 1.7).

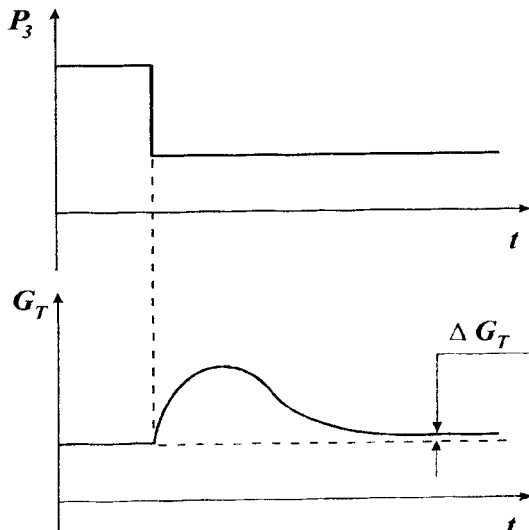


Рис. 1.7. Переходный процесс в регуляторе расхода.

В соответствии с терминологией, принятой в теории автоматического управления, в системе с регулятором расхода могут быть выделены:

- ОР - двигатель;
- РП - расход топлива;
- РФ - положение регулирующего клапана  $Z_{кз}$ ;
- ВВ - давление  $P_1, P_3$ ;
- ИМ - регулирующий клапан;
- ЧЭ - сервопоршень.

Регулятор частоты вращения прямого действия предназначен для поддержания постоянной угловой скорости вращения ротора газотурбинного двигателя. Упрощенная принципиальная схема сис-

темы автоматического регулирования частоты вращения вала двигателя приведена на рис. 1.8.

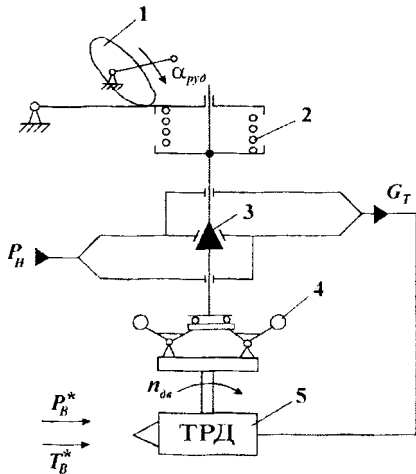


Рис. 1.8. Система автоматического регулирования частоты вращения вала двигателя.

РФ - расход топлива  $G_T$ ;

ВВ - давление  $P_B^*$  и температура  $T_B^*$  воздуха на входе в двигатель;

ИМ - дозирующая игла;

ЧЭ - центробежные грузики.

Управляющим воздействием является угол поворота рычага управления программным кулачком  $\alpha_{pyo}$ .

В рассмотренном регуляторе прямого действия дозирующая игла перемещается за счет усилия от чувствительного элемента (центробежных грузиков).

Предположим, что вследствие изменения каких-либо условий полёта уменьшилось полное давление воздуха на входе в двигатель. Это приводит к увеличению частоты вращения ротора двигателя. Центробежная сила грузиков, вращающихся со скоростью, пропорциональной частоте вращения ротора двигателя, также увеличивается. В этом случае шток дозирующей иглы будет передвигаться вверх, преодолевая силу настроечной пружины 2. Дозирующая игла прикрывает сечение клапана, в результате чего расход топлива в двигатель уменьшается. Это приводит к тому, что частота вращения ротора двигателя

При установившейся частоте вращения сила настроечной пружины 2 регулятора равна силе центробежных грузиков 4. При этом дозирующая игла 3 занимает определенное положение в корпусе регулятора, обеспечивая подачу необходимого количества топлива к двигателю 5. Сила настроечной пружины 2 определяется положением программного кулачка 1.

В данной системе:  
 ОР - двигатель;  
 РП - частота вращения ротора двигателя  $n_{om}$ ;

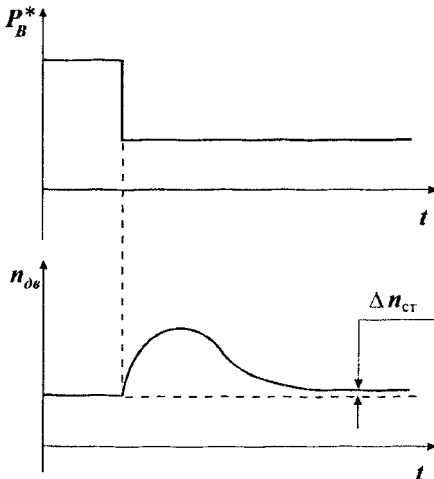


Рис. 1.9 Переходный процесс в системе с регулятором частоты вращения двигателя прямого действия.

уменьшается и становится равной заданному значению. Характерный вид переходного процесса представлен на рис. 1.9.

Регулятор – статический, так как для компенсации возмущающего воздействия требуется перезатяжка пружины и прикрытое положение клапана дозирующей иглы. Это возможно только при увеличенных оборотах двигателя (см. рис. 1.9).

#### 1.4.4. Регуляторы непрямого действия

К РНД относятся регуляторы, потребляющие энергию извне от автономного источника или не имеющие жесткой связи ЧЭ и ИО.

Астатический регулятор частоты вращения непрямого действия предназначен для изменения по заданной программе или поддержания постоянной заданной частоты вращения ротора двигателя путём воздействия на подачу топлива. Упрощённая принципиальная схема такого регулятора представлена на рис. 1.10.

При установившейся частоте вращения сила настроечной пружины 2 равна силе центробежных грузиков 3. При этом золотник 5 перекрывает своими поясками или буртиками оба отверстия цилиндра сервопоршня 6. Сервопоршень 6 неподвижен и подача топлива к двигателю постоянна и определяется сечением клапана дозирующей иглы 7.

Основные элементы данного регулятора в соответствии с терминологией, принятой в теории автоматического управления:

ОР – газотурбинный двигатель;

РП – частота вращения ротора двигателя  $n_{де}$ ;

РФ – расход топлива в двигатель  $G_m$ ;

ВВ – давление  $P^*$  и температура  $T^*$  воздуха на входе в двигатель;

ИМ – дозирующая игла;

ЧЭ – центробежные грузики.



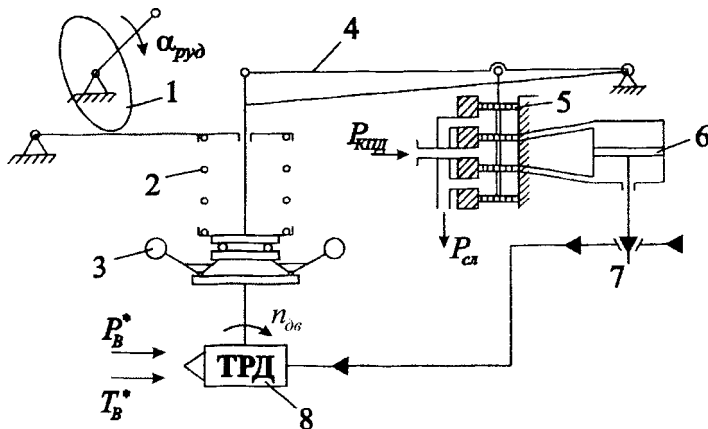


Рис. 1.10. Принципиальная схема астатического регулятора частоты вращения непрямого действия.

Управляющим воздействием является угол поворота рычага управления программным кулачком  $\alpha_{пуд}$ .

Регулятор является регулятором непрямого действия, так как привод исполнительного механизма, управляемого золотником, осуществляется от дополнительного источника энергии ( $P_{КИД}$  - давление жидкости за клапаном постоянного давления).

Предположим, что вследствие каких-либо условий полёта угловая скорость ротора двигателя увеличилась. Центробежная сила грузиков, вращающихся со скоростью, пропорциональной частоте вращения ротора двигателя, также увеличивается. В этом случае шток, связанный с левым концом рычага 4 (см. рис. 1.10), будет передвигаться вверх, преодолевая силу настроечной пружины 2. При этом рычаг 4 будет поворачиваться по часовой стрелке относительно своего шарнирно закреплённого правого конца, вынуждая золотник 5, связанный с рычагом 4 шарниром, передвигаться вверх. При перемещении золотника открываются каналы сервопоршня 6 и топливо под давлением  $P_{КИД}$  поступает в надпоршневую полость. В это же время подпоршневая полость сервопоршня 6 соединяется с линией слива. Под действием перепада давлений  $P_{КИД} - P_{сл}$  сервопоршень начинает смещаться вниз, при этом дозирующая игла уменьшает подачу топлива в двигатель. Частота вращения ротора двигателя начинает уменьшаться. Центробежная сила грузиков ослабевает и шток, связанный с левым концом рычага 4 начинает перемещаться вниз, поворачивая рычаг 4

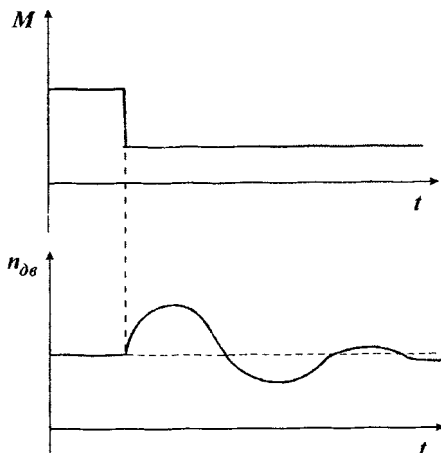


Рис. 1.11. Переходный процесс в системе с астатическим регулятором частоты вращения непрямого действия.

заданное значение частоты вращения достигается при меньшем, чем требуемое, значении расхода топлива, и регулятор начинает действовать «в обратном направлении» (рис. 1.11).

Таким образом, регулятор обладает плохим качеством переходного процесса (перерегулирование, колебательность). Ч Э регулятора связан с золотником сервомотора. Поршень сервомотора (И О) не связан жестко с Ч Э и может занимать любое положение при данном по-

против часовой стрелки. При этом золотник 5 движется вниз и перекрывает своими кромками окна золотника. Сервопоршень 6 при этом остаётся в положении, соответствующем уменьшенному расходу топлива. Уменьшение подачи топлива, таким образом, прекращается лишь в момент достижения заданной по программе частоты вращения ротора двигателя. Вследствие инерционности ротора двигателя изменение частоты вращения отстаёт от изменения подачи топлива и

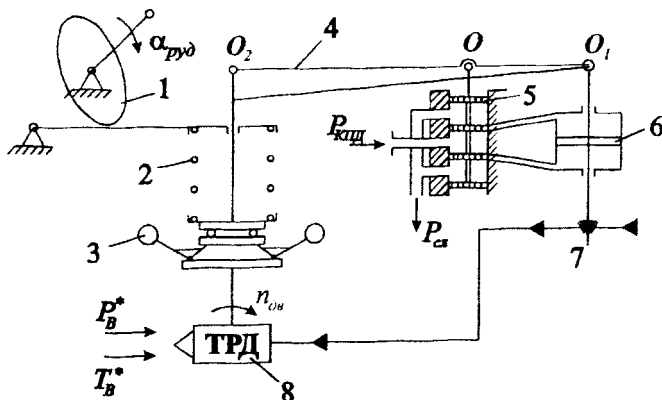


Рис. 1.12. Принципиальная схема статического регулятора частоты вращения непрямого действия.

ложении муфты Ч Э. Это означает, что регулятор, выполненный по такой схеме, способен поддержать заданную частоту вращения при различных нагрузках двигателя. У регулятора отсутствует статическая погрешность регулирования.

Для устранения указанного недостатка (длительного переходного процесса с колебаниями частоты вращения) необходимо регулятор выполнить таким, чтобы подача топлива снижалась и прекращалась до того момента, когда частота вращения ротора ещё не достигла предписанного значения  $n_{пр}$ . Это можно осуществить жесткой обратной связью.

Статический регулятор частоты вращения непрямого действия (регулятор с жесткой обратной связью) (рис. 1.12). Жесткая связь чувствительного элемента с исполнительным механизмом приводит к тому, что регулятор становится статическим.

Регулятор частоты вращения с жесткой обратной связью работает следующим образом.

В начальный момент времени мгновенным центром вращения является точка  $O_1$ .

При резком увеличении нагрузки происходит уменьшение частоты вращения ротора двигателя и дифференциальный рычаг перемещается вниз, увлекая за собой и золотник сервомотора. В следующий момент времени мгновенным центром вращения ставится точка  $O$ . Под

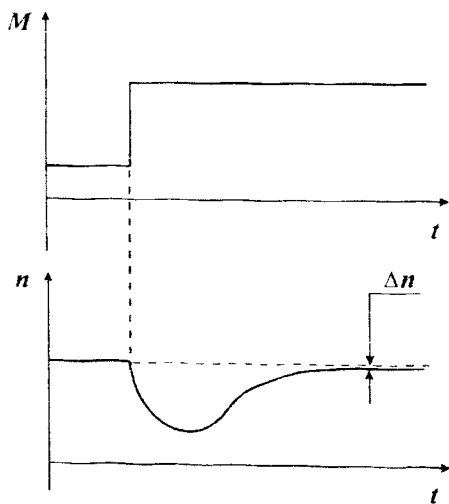


Рис. 1.13. Переходный процесс в системе со статическим регулятором частоты вращения непрямого действия.

действием давления жидкости, поступающей в нижнюю полость исполнительного механизма, его шток поднимается вверх, дифференциальный рычаг поднимается вверх и возвращает золотник сервомотора в исходное положение. В этом регуляторе ещё до достижения заданной частоты вращения ротора двигателя происходит снижение управляющего сигнала ( $G_T$ ), чем и достигается плавность переходного процесса, а также увеличение быстродействия (рис. 1.13).

Так как на любом установившемся режиме точка  $O$  должна находиться в одном и том же положении, то для режима с большим  $G_T$  точка  $O_1$  находится выше, а точка  $O_2$  – ниже исходного положения. Это соответствует меньшему значению усилия от действия пружины, т.е. меньшему значению  $F_{цб}$  и, следовательно, несколько меньшей частоте вращения ротора двигателя – на величину статической ошибки.

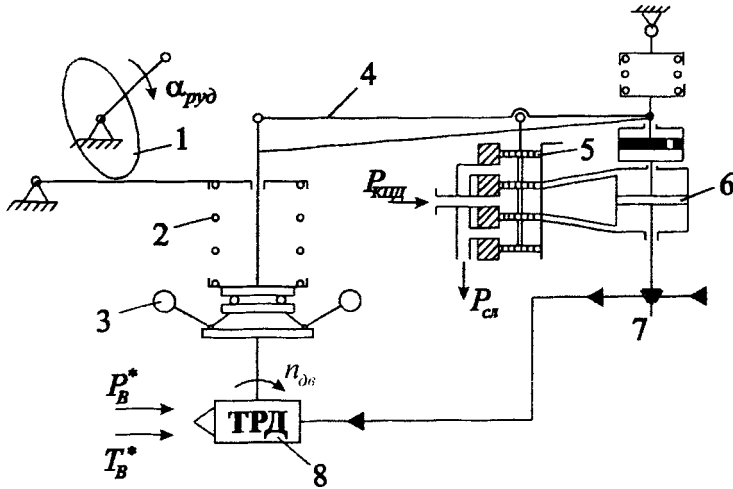


Рис. 1.14. Принципиальная схема изохронного регулятора частоты вращения.

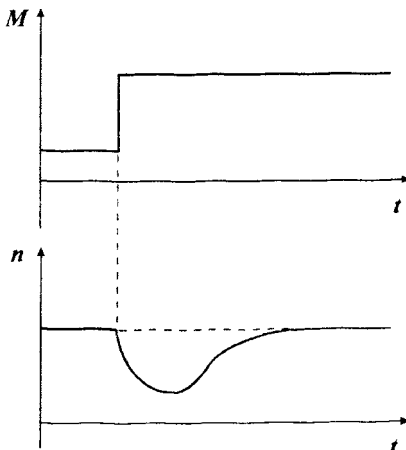


Рис. 1.15. Переходный процесс в системе с изохронным регулятором частоты вращения.

Для устранения статической ошибки при сохранении хорошего переходного процесса применяют регуляторы с так называемой гибкой обратной связью (изохронные регуляторы) – рис. 1.14.

В изохронном регуляторе совмещены положительные качества статического и астатического регуляторов.

В первоначальный момент времени переходного процесса регулятор работает как статический регулятор.

лятор (в силу инерции поршня, помещенного в вязкую жидкость), т. е. сигнал об изменении положения И О передаётся на ЧЭ, отсюда – хорошее динамическое качество. При этом движении в полостях катракта возникает перепад давления и с течением времени поршень вернётся в первоначальное нейтральное положение (под действием пружины изодрома), сняв при этом возникшую в первоначальный момент времени статическую ошибку и разорвав связь между ЧЭ и И О (рис. 1.15).

## 1.5. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ

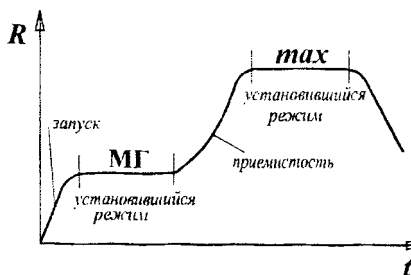


Рис. 1.16. Циклограмма режимов работы авиационного ГТД.

Режим, при котором все параметры САУ остаются неизменными во времени, называются статическим или равновесным. Примерами статических режимов САУ авиационных газотурбинных двигателей являются, например, режимы «малый газ» и «максимальный» (см. рис. 1.16). В то же время режимы «запуск» и «приемистость» являются примерами дина-

мических режимов.

Раздел ТАР, изучающий равновесные состояния САУ, называется статикой. Уравнения статики - это соотношения между параметрами САУ на равновесном режиме. Установившиеся значения параметров САУ обычно отмечаются индексом «0», например,  $x_{0i}$ .

Статические характеристики элементов или звеньев САУ выражают зависимость между входным и выходным параметрами элемента на установившемся режиме:

$$x_{вых0} = f(x_{вх0}).$$

Статические характеристики не зависят от времени или от производных по времени.

По виду статических характеристик элементы делятся на:

- линейные (рис. 1.17а);
- линеаризуемые (рис. 1.17б);
- нелинейные (рис. 1.17в и 1.17г).

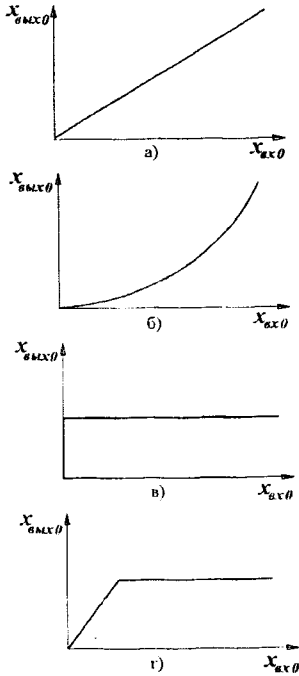


Рис. 1.17. Статические характеристики элементов САУ.

При анализе статических характеристик элементов и систем в целом вводится понятие статического коэффициента усиления, который представляет собой тангенс угла наклона характеристики. Для линейных систем коэффициент усиления определяется по соотношению:

$$k_y = \frac{x_{\text{вых}0}}{x_{\text{вх}0}} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Для линеаризуемых систем коэффициент усиления равен:

$$k_y = \frac{dx_{\text{вых}0}}{dx_{\text{вх}0}} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Для САУ авиационных ГТД под статической характеристикой САУ понимают зависимость величин регулируемого параметра от параметра внешних возмущений при постоянном управляющем воздействии:

$$PI = f(BB) \text{ при } UB = \text{const} .$$

Статическая характеристика позволяет определить статическую погрешность регулирования и выбрать такие параметры САУ, чтобы статическая ошибка не превышала

допустимое значение:

$$\Delta y_{cm} \leq [\Delta y] .$$

### 1.5.1 Пример построения статической характеристики САУ

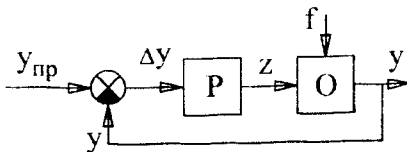


Рис. 1.18. Обобщённый вид структурной схемы САУ.

Статическая характеристика САУ строится на базе характеристик объекта регулирования и регулятора (рис. 1.18). Статическая характеристика объекта регулирования расщепляется в зависимости от величины возмущающего воздействия. Например, стати-

ческая характеристика авиационного ГТД – в зависимости от давления торможения воздуха на входе в двигатель  $P_B^*$  (рис. 1.19).

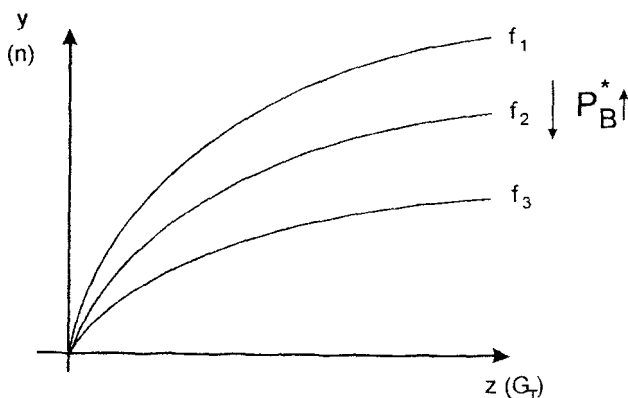


Рис. 1.19. Статическая характеристика авиационного ГТД.

При увеличении давления торможения воздуха  $P_B^*$  при неизменном расходе топлива частота вращения ротора двигателя уменьшается. Таким образом, статическая характеристика объекта регулирования строится при различных параметрах возмущающих воздействий. Статическая характеристика регулятора строится в системе координат «регулируемый параметр – регулирующий фактор» при различных значениях задающего воздействия (рис. 1.20). Статическая характеристика идеального регулятора в указанной системе координат представляет вертикальную пунктирную линию, т. е. идеальный регулятор должен обеспечивать предписанное значение регулируемого параметра независимо от величины вырабатываемого им регулирующего фактора. Статическая характеристика реального регулятора несколько отклоняется от вертикальной линии (на величину статической ошибки регулирования), – сплошная линия (см. рис. 1.20).

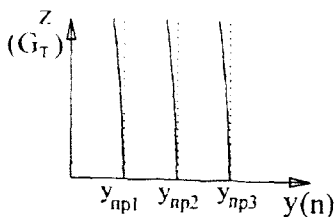


Рис. 1.20. Статическая характеристика регулятора.

Сам регулятор не воспринимает внешних возмущающих воздействий. Он чувствует только частоту вращения двигателя. Регулятор частоты вращения прямого действия (см. раздел 1.4.3) может увеличить расход топлива только при приоткрытом положении дозирующей иглы, а это возможно только при меньших обо-

ротах двигателя. Астатический регулятор частоты вращения непрямого действия (см. раздел 1.4.4) может обеспечить любой расход при одних и тех же частотах вращения двигателя за счёт изменения равновесного положения сервопоршня  $b$  (см. рис. 1.10).

Для построения статических характеристик САУ характеристики объекта регулирования накладываются на характеристики регулятора (рис. 1.21). Статическая характеристика системы автоматического регулирования строится в результате определения точек пересечения характеристик объекта и регулятора (рис. 1.22).

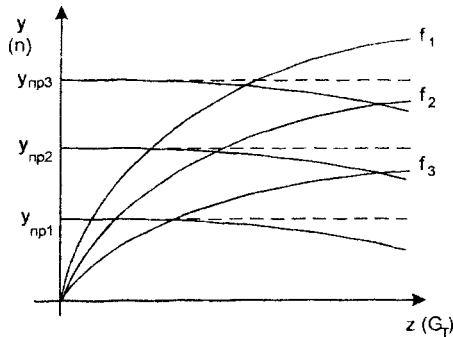


Рис. 1.21. Статические характеристики объекта и регулятора, наложенные друг на друга.

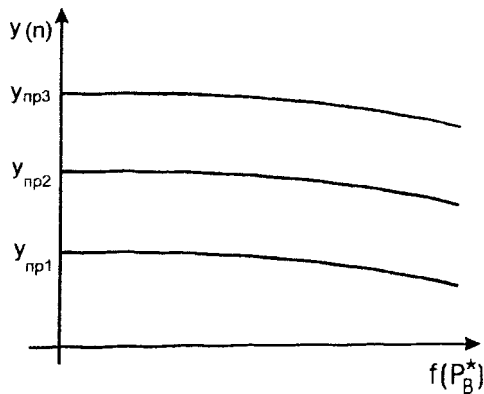


Рис. 1.22. Статическая характеристика САУ.



## 2. ЛИНЕЙНЫЕ И ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

### 2.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ И САУ

В данном разделе изучаются состояния элементов САУ при изменении во времени их параметров с учётом факторов, вызывающих эти изменения.

Динамические характеристики показывают изменения какого-либо параметра во времени или в частотной области. По этому признаку различают:

- 1) переходные характеристики, получаемые при ступенчатом входном воздействии;
- 2) частотные характеристики, получаемые при гармоническом входном воздействии.

Для математического описания динамических процессов используют дифференциальные уравнения, связывающие параметры САУ  $x_i$  и их производные  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $\frac{d^2x_i}{dt^2}$  с возмущающими и управляющими воздействиями.

Уравнение движения системы в общем случае имеет вид

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t). \quad (2.1)$$

Уравнение составлено относительно произвольного искомого параметра  $x$ , являющегося выходным сигналом системы. Коэффициенты при производных ( $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_n$ ) – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров объекта регулирования и регулятора. Когда правая часть линейного дифференциального уравнения равна нулю ( $f(t)=0$ ), то уравнение описывает свободное движение системы, т. е. движение, происходящее в системе под действием лишь смены начальных условий. В общем случае решение неоднородного дифференциального уравнения (2.1) ищется как сумма общего решения однородного дифференциального уравнения (без правой части) -  $x_{своб}(t)$  и частного решения  $x_{вын}(t)$  в форме правой части:

$$x_{\Sigma}(t) = x_{своб}(t) + x_{вын}(t).$$

При составлении уравнений движения используются соответствующие физические законы (для механических систем – принцип Даламбера, для электрических цепей – закон Кирхгофа и т. д.).

Рассмотрим примеры: выведем уравнение механической колебательной системы (рис. 2.1). По принципу Даламбера  $\sum F_i = 0$ .

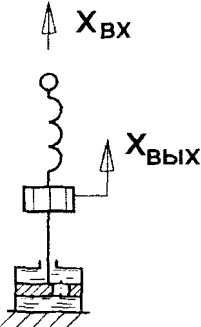


Рис. 2.1. Пример типового звена из механики.

$F_{ин} = m \frac{d^2 x_{вых}}{dt^2}$  - сила инерции (пропорциональна ускорению),

$F_{тр} = D \frac{dx_{вых}}{dt}$  - сила трения (пропорциональна скорости),

$F_{жс} = c(x_{вых} - x_{вх})$  - сила жёсткости пружины (пропорциональна перемещению),

где  $m$  - масса подвижных элементов;

$D$  - коэффициент вязкого трения;

$c$  - жесткость пружины.

В соответствии с принципом Даламбера

$$m \frac{d^2 x_{вых}}{dt^2} + D \frac{dx_{вых}}{dt} + cx_{вых} = cx_{вх}$$

При  $x_{вх} = 0$  - состояние покоя; при  $x_{вх} \neq 0$  - вынужденное движение.

Выведем уравнение электрического колебательного контура

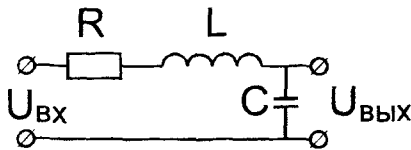


Рис. 2.2. Пример типового звена из электротехники.

(рис. 2.2). Используя 2-й закон Кирхгофа, можно записать для рассматриваемой электрической цепи:

$$U_{вх} = U_L + U_R + U_C.$$

Падения напряжений на индуктивности  $L$ , активном сопротивлении  $R$  и ёмкости  $C$  определяются по форму-

лам:

$$U_L = L \frac{di}{dt}, \quad U_R = iR, \quad U_C = U_{вых}, \quad \text{где } i = C \frac{dU_c}{dt}.$$

С учётом этого исходное уравнение принимает вид:

$$LC \frac{d^2 U_{вых}}{dt^2} + RC \frac{dU_{вых}}{dt} + U_{вых} = U_{вх}.$$

Аналогичным образом выводятся уравнения движения для различных звеньев (в том числе гидравлических, пневматических и др.).

Динамические характеристики нужны для определения:

- 1) качества регулирования системы
  - а) перерегулирования в системе (заброс);
  - б) быстродействия;
  - в) числа колебаний системы за время переходного процесса;

- 2) устойчивости системы;
- 3) оценки динамической и статической погрешности.

## 2.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САУ В ВИДЕ СОВОКУПНОСТИ ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Любую линейную систему автоматического регулирования можно представить как совокупность типовых звеньев. Типовое звено – элемент САУ, который независимо от физики происходящих в нём процессов описывается одинаковым видом дифференциального уравнения. Таким образом, типовое звено одинаково реагирует на одно и тоже типовое возмущение. Любую линейную систему автоматического регулирования можно представить как совокупность типовых звеньев. Основных типовых звеньев – 6. Классификация осуществляется по виду дифференциального уравнения.

1. Пропорциональное (усилительное) звено:

$$x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где  $k$  – коэффициент усиления.

2. Апериодическое звено:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dx_{\text{вх}}} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где  $T$  – постоянная времени звена;

3. Колебательное звено:

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + 2T\zeta \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}},$$

где  $\zeta$  – коэффициент демпфирования,

4. Идеальное дифференцирующее звено:

$$x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}.$$

5. Реальное дифференцирующее звено:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dx_{\text{вх}}} + x_{\text{вых}} = k \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}.$$

6. Интегрирующее звено:

$$\frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = kx_{\text{вх}}.$$

Каждое типовое звено имеет четко обозначенный вход и выход (см. рис. 2.3), сигнал через типовое звено распространения в одном направлении - со входа на выход.



Рис. 2.3. Схематичное изображение типового звена.

По виду статических характеристик все звенья делятся на линейные и нелинейные. Так как в технике не существует элементов со строго линейными характеристиками, то при проведении расчетов применяется линейризация их характеристик методом малых отклонений.

### 2.3. МЕТОД МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Суть метода заключается в том, что кривая статической характеристики объекта заменяется касательной прямой в определенной точке, соответствующей установившемуся режиму.

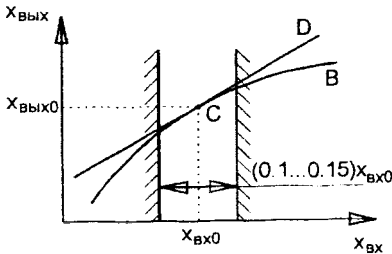


Рис. 2.4. Линейризация статической характеристики.

В основе линейризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что в исследуемом динамическом процессе переменные ( $x_{вх}, x_{вых}$ ) изменяются так, что их отклонения от установившихся значений ( $x_{вх0}, x_{вых0}$ ) остаются все время достаточно малыми (рис. 2.4). Таким образом, метод не является универсальным, так как может при-

меняться только при малых отклонениях параметра от установившегося положения.

Для получения линейризованной зависимости выражения для статической характеристики функцию  $x_{вых} = f(x_{вх})$  раскладывают в ряд Тейлора в окрестностях установившегося режима с учетом первых членов разложения:

$$x_{вых} = x_{вых0} + \left(\frac{\partial x_{вых}}{\partial x_{вх}}\right)_0 (x_{вх} - x_{вх0}) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 x_{вых}}{\partial x_{вх}^2}\right) (x_{вх} - x_{вх0})^2 + \dots$$

Вводятся обозначения:

$\Delta x_{вых} = x_{вых} - x_{вых0}$  - отклонение выходного параметра от установившегося значения;

$\Delta x_{вх} = x_{вх} - x_{вх0}$  - отклонение входного параметра от установившегося значения.

Всеми членами разложения кроме первых двух пренебрегают в следствие того, что они малы:

$$\Delta x_{\text{вмх}} = \left( \frac{\partial x_{\text{вмх}}}{\partial x_{\text{вх}}} \right)_0 \Delta x_{\text{вх}}. \quad (2.2)$$

Линеаризация исходного уравнения статической характеристики геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой СВ на касательную к ней прямую CD. Из графика на рис. 2.4 видно, что эта замена тем точнее, чем меньше величины отклонения  $\Delta x_{\text{вх}}$ .

Для общности анализа в ТАУ чаще применяется безразмерная форма представления параметров:

$$\delta x_{\text{вх}} = \frac{\Delta x_{\text{вх}}}{x_{\text{вх}0}}; \quad \delta x_{\text{вмх}} = \frac{\Delta x_{\text{вмх}}}{x_{\text{вмх}0}}$$

С учетом последних соотношений выражение (2.2) можно переписать в виде:

$$\delta x_{\text{вмх}} = k \delta x_{\text{вх}}, \quad \text{где } k = \left( \frac{\partial x_{\text{вмх}}}{\partial x_{\text{вх}}} \right) \frac{x_{\text{вх}0}}{x_{\text{вмх}0}}$$

Последнее выражение представляет собой линеаризованную зависимость статической характеристики звена в безразмерных параметрах.

В ряде случаев линеаризация характеристик может быть совершенно недопустимой, например, для релейных элементов. Такие элементы называют существенно нелинейными и изучают в теории нелинейных систем.

## 2.4. СТАНДАРТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В ТАУ рассматриваются динамические характеристики, получаемые в результате воздействия на систему трех типовых возмущающих воздействий:

- 1) единичная ступенчатая функция;
- 2) гармоническое входное воздействие;
- 3) дельта-функция.

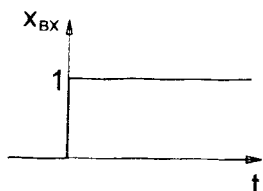


Рис. 2.5. Единичная ступенчатая функция.

1. Единичное ступенчатое возмущение-подача на вход системы скачкообразного воздействия при величине скачка, равной единице (рис. 2.5):

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Со ступенчатым воздействием связано определение переходной характеристики. Переходная функция, или переходная характеристика  $h(t)$  представляет собой процесс на выходе системы, при подаче на ее вход единичной ступенчатой функции.

2. В случае гармонического входного воздействия сигнал на входе и выходе системы будет представлять собой гармоническую функцию одной и той же частоты (рис. 2.6).

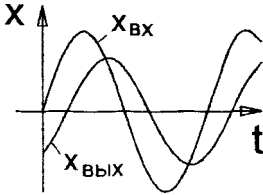


Рис 2.6. Гармонические колебания входного и выходного параметров звена.

$$x_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вх}}),$$

$$x_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вых}}),$$

где  $\omega$  - угловая частота;

$A_{\text{вх}}, A_{\text{вых}}$  - амплитуды входного и выходного сигналов;

$\varphi_{\text{вх}}, \varphi_{\text{вых}}$  - начальные фазы.

Для удобства преобразований гармонический сигнал часто представляют в комплексной форме:

$$x_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вх}})},$$

$$x_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вых}})},$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .

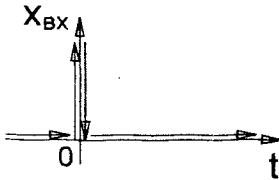


Рис. 2.7. Дельта-функция.

3. Единичная импульсная функция, или дельта-функция, представляет собой производную от единичной ступенчатой функции:  $\delta(t) = I'(t)$ , или (рис. 2.7):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0 \\ \infty, & \text{при } t = 0 \end{cases}$$

Основное свойство дельта-функции заключается в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \text{ т. е. она имеет единичную площадь.}$$

Из последнего выражения следует, что размерность единичной дельта-функции -  $[c^{-1}]$ . Понятие дельта-функции используется в теории цифровых и импульсных САУ.

## 2.5. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

Суть метода в том, что сначала, воспользовавшись преобразованием Лапласа, переходят от оригиналов функций к их изображениям:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Затем с изображениями производят преобразования, а результат приводят к форме, удобной для совершения обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Изображение функции времени является функцией некоторой комплексной величины  $s = c + j\omega$ . Вещественная часть ее представляет собой так называемую абсциссу абсолютной сходимости, которая выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство:

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt < \infty.$$

Для большинства функций в теории автоматического регулирования абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, т. е.  $c=0$ . Поэтому для этих функций  $s = j\omega$ .

Дифференциальные уравнения движения систем в операторном методе записываются в символической форме. При этом используется оператор Лапласа:  $s = j\omega$ .

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s; \quad \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow s^2; \quad \frac{d^3}{dt^3} \rightarrow s^3;$$

$$x_{\text{вх}}(t) \rightarrow \tilde{x}_{\text{вх}}; \quad x_{\text{вых}}(t) \rightarrow \tilde{x}_{\text{вых}}.$$

Рассмотрим пример представления дифференциального уравнения в операторной форме:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}};$$

$$(Ts + 1)\tilde{x}_{\text{вых}} = k\tilde{x}_{\text{вх}};$$

$$\tilde{x}_{\text{вых}} = \frac{k}{Ts + 1} \tilde{x}_{\text{вх}}.$$

## 2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Периодическая функция времени может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t),$$

где  $k$  - порядок гармоники, а  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  - основная круговая частота.

Этот ряд может быть представлен также в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega t},$$

где комплексный коэффициент  $C_k$  определяется выражением

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Таким образом, периодическая функция времени может быть представлена в виде совокупности дискретных гармоник с интервалом по частоте между соседними гармониками, равным основной частоте  $\omega$ .

Непериодическая функция времени может рассматриваться как периодическая с периодом, стремящимся к бесконечности. В этом случае вместо приведенных формул получаются два интегральных уравнения Фурье, связывающих оригинал, т. е. функцию времени  $f(t)$ , и ее частотное изображение  $F(j\omega)$ , которое называется преобразованием Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

В отличие от разложения в ряд Фурье здесь получается разложение в непрерывный спектр частот с интервалом по частоте между соседними гармониками, равным бесконечно малой величине  $d\omega$ .

## 2.7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Частотные характеристики получают при гармоническом входном воздействии, заданном либо в тригонометрической форме

$$x_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вх}}),$$

либо в комплексной форме



$$x_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вх}})},$$

где  $A_{\text{вх}}$  – амплитуда;

$\omega$  – круговая частота;

$\varphi_{\text{вх}}$  – начальная фаза входного сигнала.

При этом выходной сигнал изменяется также по гармоническому закону (см. рис. 2.6) с той же частотой  $\omega$ , но с другой амплитудой  $A_{\text{вых}}$  и начальной фазой  $\varphi_{\text{вых}}$ :

$$x_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вых}}),$$

или

$$x_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вых}})}.$$

Зависимость отношения комплексной амплитуды  $A_{\text{вых}} e^{j\varphi_{\text{вых}}}$  выходного сигнала к комплексной амплитуде  $A_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}}$  входного сигнала от частоты колебаний называют частотной функцией:

$$W(j\omega) = \frac{A_{\text{вых}} e^{j\varphi_{\text{вых}}}}{A_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $A(\omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}}$  – модуль частотной функции, или амплитудно-

частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$  – аргумент частотной функции, или фазо-частотная характеристика (ФЧХ).

Частотная характеристика может быть представлена на комплексной плоскости, если предварительно представить частотную функцию в виде:

$$W(j\omega) = \text{Re } W + j \text{Im } W,$$

где  $\text{Re } W = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$  – действительная часть частотной функции;

$\text{Im } W = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$  – мнимая часть частотной функции.

Частотная характеристика на комплексной плоскости называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ). Частотная функция может быть получена из выражения для передаточной функции  $W(s)$ , представляющей собой отношение изображений по Лапласу выходной величины  $\tilde{X}_{\text{вых}}$  и входной величины  $\tilde{X}_{\text{вх}}$  при нулевых начальных условиях:

$$W(s) = \frac{\tilde{x}_{\text{вых}}}{\tilde{x}_{\text{вх}}}.$$

Для получения передаточной функции достаточно в дифференциальном уравнении системы произвести замену операции дифференцирования  $d/dt$  на оператор Лапласа  $s$ , входную  $x_{\text{вх}}$  и выходную  $x_{\text{вых}}$  величины представить их изображениями по Лапласу  $\tilde{x}_{\text{вх}}$ ,  $\tilde{x}_{\text{вых}}$  и решить это уравнение относительно  $\frac{\tilde{x}_{\text{вых}}}{\tilde{x}_{\text{вх}}}$ . Если в выражении для  $W(s)$

заменить  $s$  на  $j\omega$ , то получим частотную функцию  $W(j\omega)$  системы.

Теоретическое исследование частотных характеристик связано с приведением дифференциальных уравнений к записи их в операторной форме, определением и анализом передаточной и частотной функций звеньев.

## 2.8. СВОЙСТВА ТИПОВЫХ ЗВЕНЬЕВ

### 2.8.1. Аperiodическое (инерционное) звено

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}} \quad (2.3)$$

Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{\tilde{x}_{\text{вых}}}{\tilde{x}_{\text{вх}}} = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Переходная функция этого ТЗ определяется как решение дифференциального уравнения (2.3). Известно, что решение неоднородного дифференциального уравнения (2.3) складывается из общего решения  $(x_{\text{вых}})_{\text{общ}}$  однородного уравнения

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = 0 \quad (2.4)$$

и частного решения  $(x_{\text{вых}})_{\text{част}}$  неоднородного уравнения (2.3):

$$x_{\text{вых}}(t) = (x_{\text{вых}})_{\text{общ}} + (x_{\text{вых}})_{\text{част}}.$$

Общее решение уравнения первого порядка (2.4) записывается в виде:

$$(x_{\text{вых}})_{\text{общ}} = Ce^{t/T},$$

где  $C$  - постоянная интегрирования, определяемая с использованием начальных условий;  $r = -1/T$  - корень характеристического уравнения  $Tr + 1 = 0$ .

Частное решение  $(x_{\text{вых}})_{\text{част}}$  записывается в форме правой части уравнения (2.3), т. е.  $(x_{\text{вых}})_{\text{част}} = kx_{\text{вх}}$ . Тогда решение уравнения аperiodического звена примет вид:

$$x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}} + Ce^{-t/T}.$$

Для определения  $C$  воспользуемся нулевыми начальными условиями. При  $t = 0$   $x_{\text{вых}} = 0$ . Следовательно  $kx_{\text{вх}} + C = 0$ , или  $C = -kx_{\text{вх}}$ . Подставляя значение  $C$  в выражение для  $x_{\text{вых}}(t)$ , получим переходную функцию аperiodического ТЗ:

$$h(t) = k[1 - e^{-t/T}].$$

График переходной функции аperiodического ТЗ (рис. 2.8, а) представляет экспоненциально нарастающую кривую. Значения  $h(t)$  при  $t = T$  и  $t = \infty$  определяются, соответственно, выражениями:

$$h(t) = k[1 - e^{-1}] = 0,632k;$$

$$h(\infty) = k[1 - e^{-\infty}] = k;$$

Следовательно, постоянная времени  $T$  равна времени, в течение которого выходной параметр достигает величины  $0,632$  от нового установившегося значения. Чем больше постоянная времени  $T$ , тем медленнее протекает переходный процесс в ТЗ (рис. 2.8, б). Обычно переходный процесс считается законченным, если  $x_{\text{вых}}$  достигает 95% своего установившегося значения, т. е.  $h(t) = 0,95k$ . Это соответствует времени  $t_{\text{нн}} = 3T$ , т. е. переходный процесс в аperiodическом ТЗ можно считать практически законченным по истечении времени  $3T$ . При различных значениях коэффициента передачи  $k$ , но одинаковом  $T$  переходные характеристики отличаются лишь величиной выходного параметра, а время переходного процесса  $t_{\text{нн}}$  этих звеньев одинаковое (рис. 2.8, в).

Частотная функция аperiodического ТЗ получается из передаточной функции заменой  $s$  на  $j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}. \quad (2.5)$$

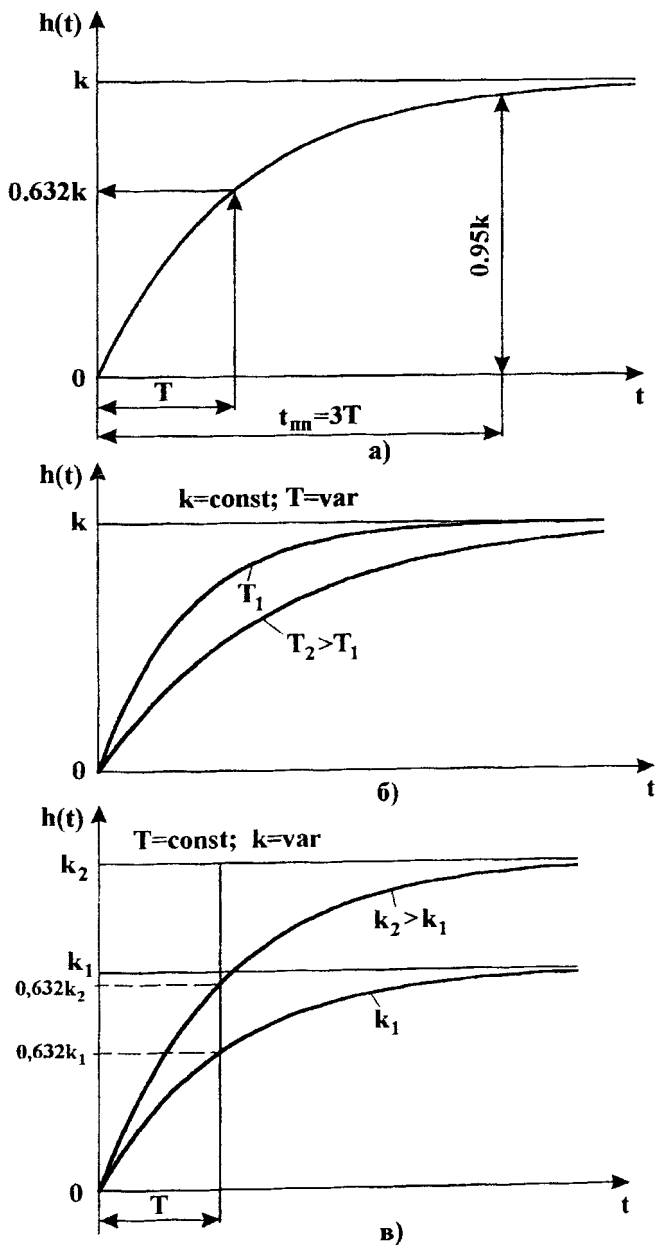


Рис. 2.8. Переходные характеристики аperiodического звена.

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства (2.5) на комплексно-сопряженное выражение знаменателя  $(1 - Tj\omega)$ , получим:

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}W + j \operatorname{Im}W = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Тогда АЧХ и ФЧХ будут определяться выражениями:

$$A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2 W + \operatorname{Im}^2 W} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \quad (2.6)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}W}{\operatorname{Re}W} = -\operatorname{arctg}(\omega T).$$

Из формулы (2.6) для АЧХ апериодического ТЗ следует, что с увеличением частоты колебаний величина  $A(\omega)$  уменьшается, что характеризует уменьшение  $A_{\text{вмх}}$  при  $A_{\text{вх}} = \text{const}$ . Апериодическое ТЗ обладает свойством низкочастотного фильтра: хорошо пропускает сигналы низких частот и плохо - сигналы высоких частот колебаний (рис. 2.9,а). Из ФЧХ апериодического ТЗ (рис. 2.9,б) ясно, что выходные колебания отстают по фазе от входных колебаний тем больше, чем больше частота колебаний. При  $\omega \rightarrow \infty$  амплитуда  $A_{\text{вмх}}$  стремится к нулю, а  $\varphi(\omega)$  приближается к  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .

АФЧХ типового звена можно построить с использованием выражений как для  $\operatorname{Re}W$  и  $\operatorname{Im}W$ , так и для  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . При построении АФЧХ по  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  для каждой частоты  $\omega$  проводят от начала координат прямую под углом  $\varphi(\omega)$  и откладывают на прямой отрезок, равный  $A(\omega)$ . Концы отрезков прямых, проведенных для разных частот, соединяют плавной кривой и, таким образом, получают АФЧХ звена. На АФЧХ проводят стрелку, указывающую направление движения вдоль кривой АФЧХ, соответствующее увеличению частоты колебаний. АФЧХ апериодического ТЗ представляет собой полуокружность в IV квадранте комплексной плоскости (рис. 2.9,в).

### 2.8.2. Пропорциональное (усилительное) звено

Это звено не только в статике, но и в динамике описывается алгебраическим уравнением:

$$x_{\text{вмх}}(t) = kx_{\text{вх}}(t).$$

Передаточная функция звена равна постоянной величине:

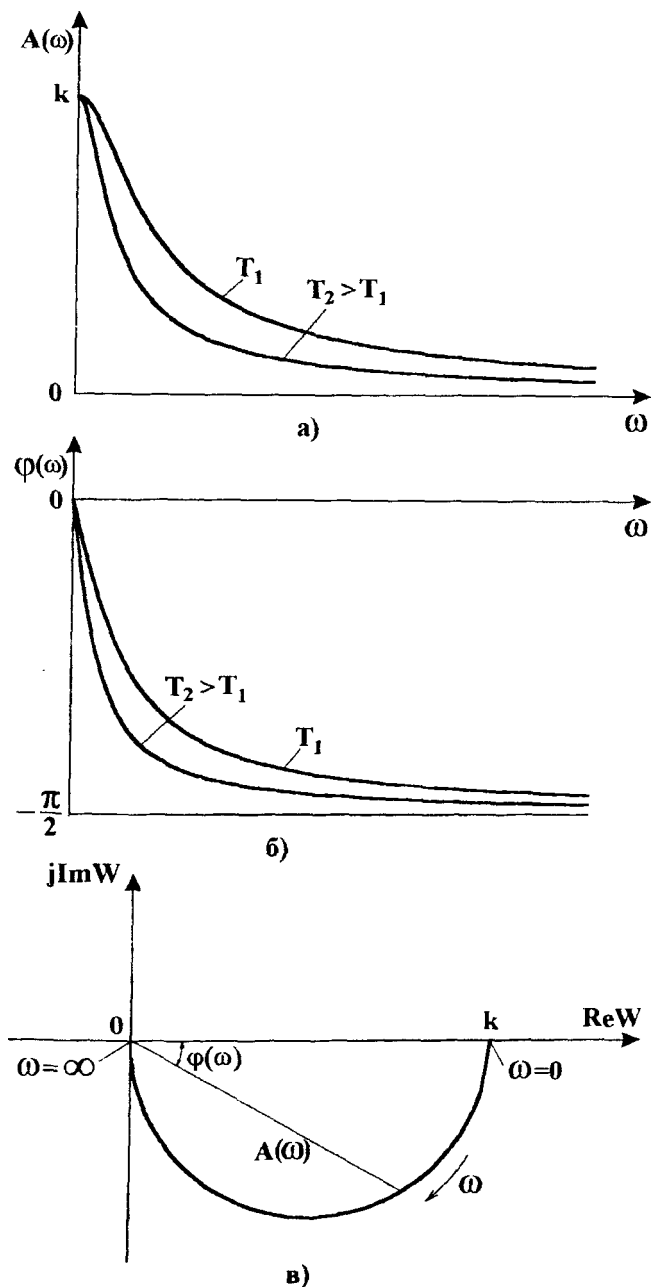


Рис. 2.9. Частотные характеристики аperiodического звена: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) АФЧХ.

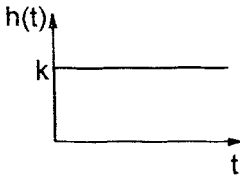


Рис. 2.10 Переходная характеристика пропорционального (усилительного) звена.

постоянен на всех частотах (рис. 2.11,а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k,$$

а разность фазовых сдвигов (фазо-частотная характеристика) равна нулю (рис. 2.11,б):

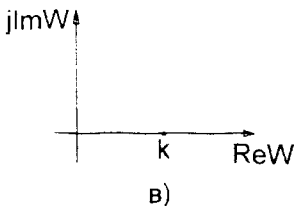
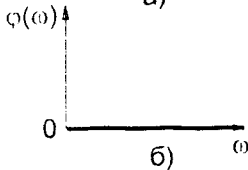
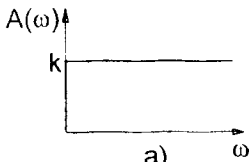


Рис. 2.11 Частотные характеристики пропорционального (усилительного) звена: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) АФЧХ.

$$W(s) = k.$$

Переходная функция такого звена представляет собой ступенчатую функцию (рис. 2.10):

$$h(t) = k \cdot I(t).$$

Частотная функция звена равна постоянной величине:

$$W(j\omega) = k.$$

Модуль частотной передаточной функции (амплитудно-частотная характеристика)

$$\varphi(\omega) = 0.$$

АФЧХ вырождается в точку, расположенную на вещественной оси на расстоянии  $k$  от начала координат (рис. 2.11,в).

### 2.8.3. Интегрирующее звено

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} = x_{\text{вх}} \quad (2.7)$$

Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{\tilde{x}_{\text{вых}}}{\tilde{x}_{\text{вх}}} = \frac{1}{Ts}.$$

Переходная функция интегрирующего ТЗ определяется в результате интегрирования левой и правой частей дифференциального уравнения (2.7) при  $x_{\text{вх}}(t) = I(t)$  и имеет следующий вид (рис. 2.12):

$$h(t) = \frac{t}{T}.$$

Переходная характеристика интегрирующего ТЗ представляет собой нарастающую наклонную прямую, темп нарастания которой зависит от постоянной времени  $T$ . Чем меньше  $T$ , тем быстрее протекает

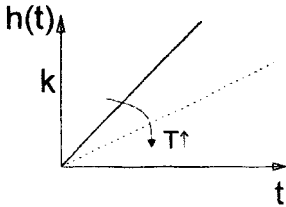


Рис. 2.12 Переходная характеристика интегрирующего звена.

переходный процесс. В отличие от переходных характеристик других ТЗ переходная характеристика интегрирующего ТЗ не стремится к какому-либо значению, а все время имеет нарастающий характер.

Частотная функция интегрирующего ТЗ определяется выражением:

$$W(j\omega) = -\frac{j}{T\omega}$$

АЧХ и ФЧХ интегрирующего звена (рис. 2.13,а и 2.13,б соответственно):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{1}{T\omega}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

АЧХ интегрирующего звена представляет собой гиперболу. Чем выше частота колебаний, тем меньше амплитуда колебаний выходного сигнала. При  $\omega = 0$  амплитуда выходного сигнала равна бесконечности. Начальная фаза выходных колебаний отстает от начальной фазы входных колебаний на угол  $-\frac{\pi}{2}$  и не зависит от частоты колебаний.

АФЧХ интегрирующего ТЗ совпадает с отрицательной частью мнимой оси (рис. 2.13,в). Точка, соответствующая  $\omega = \infty$ , расположена в начале координат.

#### 2.8.4. Идеальное дифференцирующее звено

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$x_{\text{вых}} = T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt}$$

Передаточная функция звена:

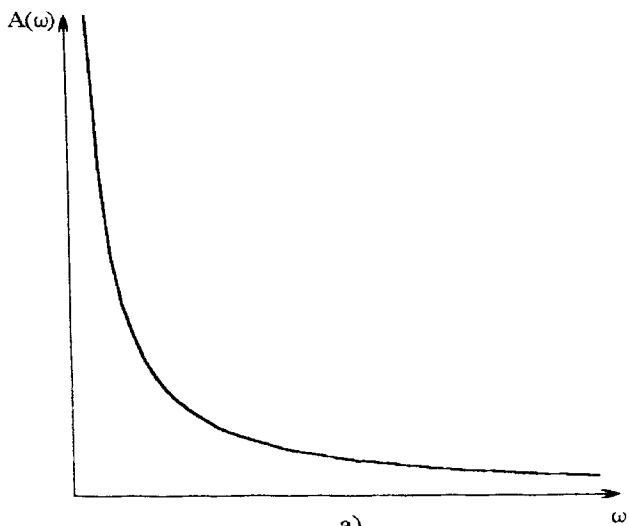
$$W(s) = \frac{\tilde{x}_{\text{вых}}}{\tilde{x}_{\text{вх}}} = Ts$$

Переходная функция идеального дифференцирующего ТЗ имеет следующий вид (рис. 2.14):

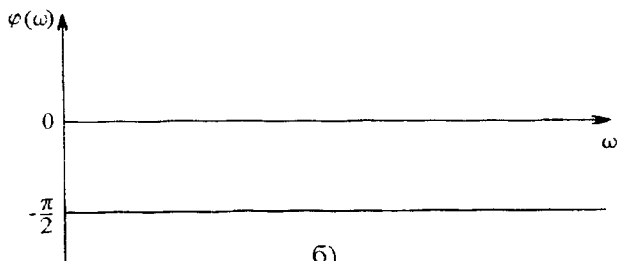
$$h(t) = T\delta(t),$$

где  $\delta(t)$  - дельта-функция Дирака.

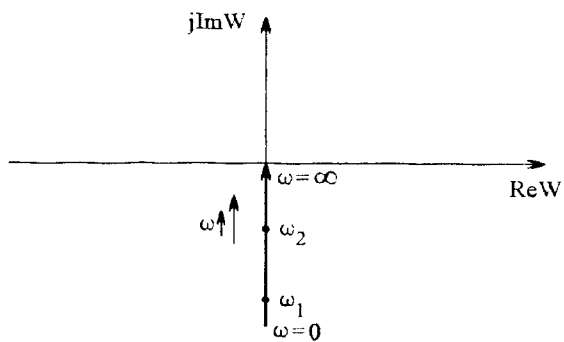




а)



б)



в)

Рис. 2.13 Частотные характеристики интегрирующего звена:  
 а) АЧХ; б) ФЧХ; в) АФЧХ.

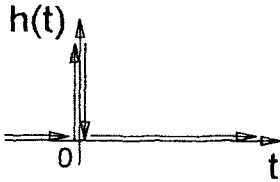


Рис. 2.14. Переходная характеристика идеального дифференцирующего звена.

Частотная функция идеального дифференцирующего ТЗ определяется выражением:

$$W(j\omega) = Tj\omega.$$

АЧХ и ФЧХ идеального дифференцирующего звена (рис. 2.15, а и 2.15, б соответственно):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = T\omega,$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \frac{\pi}{2}.$$

АФЧХ идеального дифференцирующего ТЗ совпадает с положительной частью мнимой оси (рис. 2.15, в).

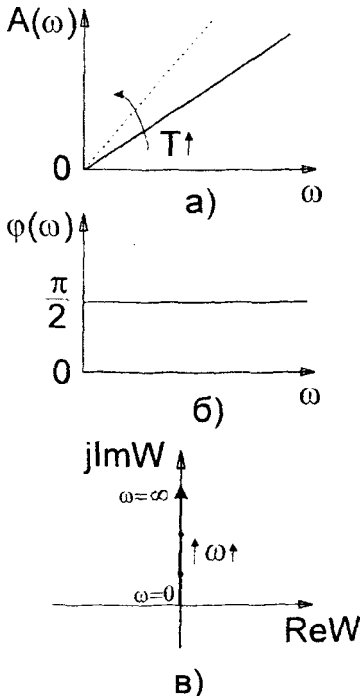


Рис. 2.15 Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) АФЧХ.

### 2.8.5. Реальное дифференцирующее звено

Звено описывается дифференциальным уравнением:

$$T \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + x_{\text{вх}} = kT \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} \quad (2.8)$$

Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{kTs}{Ts + 1}$$

Переходная функция реального дифференцирующего ТЗ определяется из решения дифференциального уравнения (2.8) при  $x_{\text{вх}} = I(t)$  и имеет вид:

$$h(t) = ke^{-t/T} \quad (2.9)$$

Переходная характеристика (рис. 2.16, а) реального дифференцирующего ТЗ, построенная по формуле (2.9), представляет нисходящую экспоненциальную кривую.

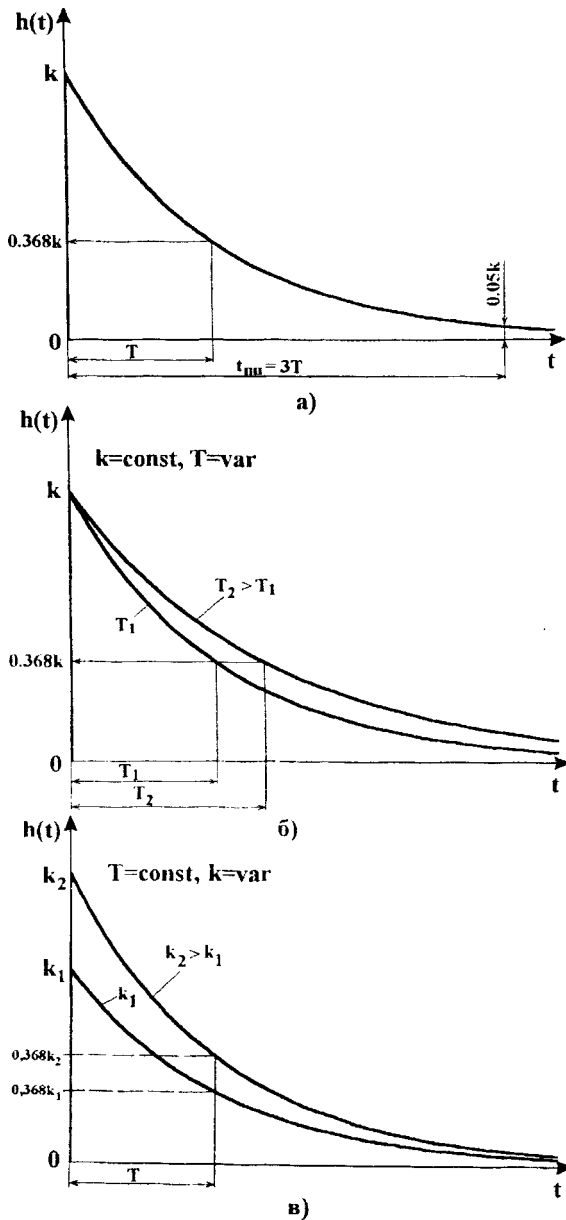


Рис. 2.16. Переходные характеристики реального дифференцирующего звена.

При  $t = 0$   $h(0) = k$ , а при  $t = T$   $h(T) = 0,368k$ , т. е. постоянная времени  $T$  представляет собой время, в течение которого выходной параметр принимает величину, равную 36,8% от первоначального значения при  $t = 0$ . Из анализа переходных характеристик (рис. 2.16,б) следует, что чем больше постоянная времени, тем медленнее протекает переходный процесс в реальном дифференцирующем ТЗ. Величина коэффициента передачи  $k$  не влияет на время переходного процесса (рис. 2.16,в).

Передаточная и частотная функция звена определяются равенствами:

$$W(s) = \frac{kTs}{Ts + 1},$$

$$W(j\omega) = \frac{jkT\omega}{1 + jT\omega}. \quad (2.10)$$

АЧХ и ФЧХ, определенные из соотношения (2.10), имеют вид:

$$A(\omega) = \frac{kT\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } T\omega.$$

АЧХ реального дифференцирующего звена (рис. 2.17,а) имеет вид нарастающей кривой, асимптотически приближающийся к значению  $k$ . Это указывает на то, что это звено обладает свойством фильтра высоких частот: хорошо пропускает колебания высоких частот и плохо - колебания низких частот. На ФЧХ сдвиг по фазе ( $\varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$ ) при изменении частоты колебаний от нуля до бесконечности уменьшается от  $\pi/2$  до нуля (рис. 2.17,б). АФЧХ реального дифференцирующего звена представляет собой полуокружность, расположенную в первом квадранте (рис. 2.17,в).

### 2.8.6. Колебательное звено

Звено описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$T^2 \frac{d^2 x_{\text{вых}}}{dt^2} + 2T\zeta \frac{dx_{\text{вых}}}{dt} + x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}, \quad (2.11)$$

где  $T$  - постоянная времени, характеризующая собственную частоту колебаний системы (звена);

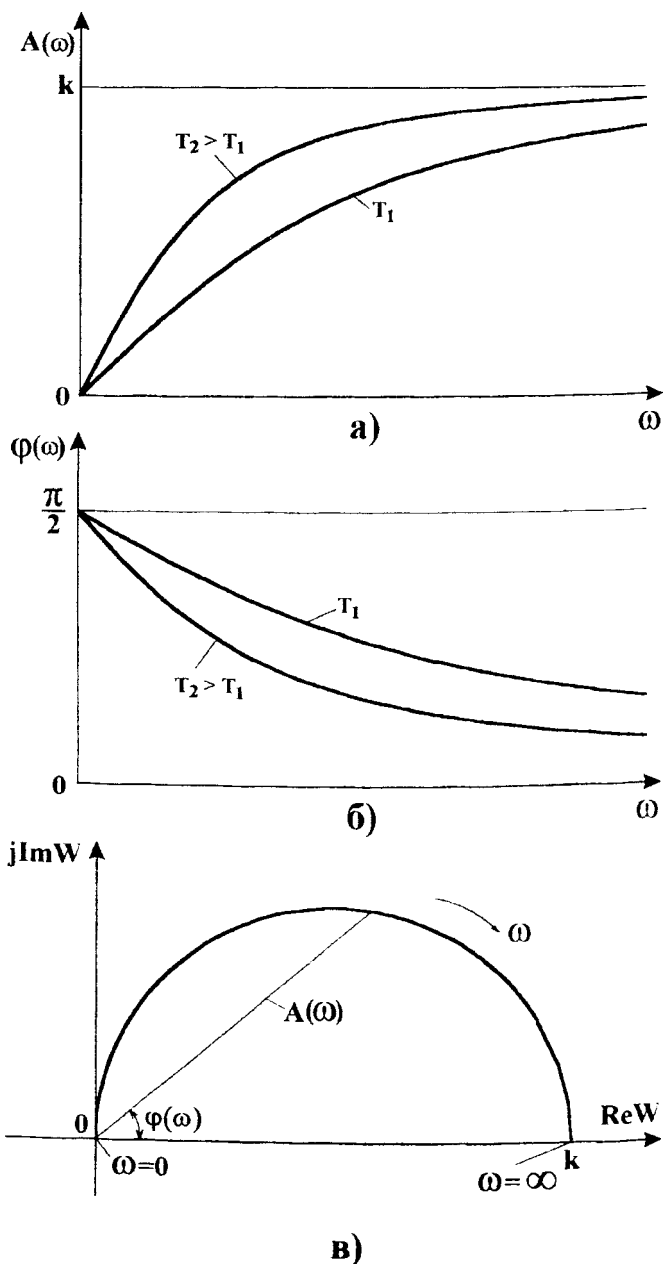


Рис. 2.17. Частотные характеристики реального дифференцирующего звена: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) АФЧХ.

$\zeta$  - коэффициент демпфирования;

$k$  - коэффициент усиления (передачи).

Переходная функция этого звена определяется из решения дифференциального уравнения второго порядка (2.11). Вид переходной функции определяется корнями характеристического уравнения  $T^2 r^2 + 2T\zeta r + 1 = 0$ :

$$r_1 = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}; \quad r_2 = \frac{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}.$$

При значениях коэффициента демпфирования  $0 < \zeta < 1$  корни будут комплексно-сопряжёнными:

$$r_1 = -\alpha + j\omega_c; \quad r_2 = -\alpha - j\omega_c,$$

где  $\alpha = \frac{\zeta}{T}$  - коэффициент, характеризующий затухание колебаний в ТЗ;

$$\omega_c = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} \text{ - собственная частота колебаний ТЗ.}$$

После решения дифференциального уравнения (2.11) при  $0 < \zeta < 1$  получим переходную функцию колебательного ТЗ:

$$h(t) = k \left[ 1 - B e^{-\alpha t} \sin(\omega_c t + \varphi) \right], \quad (2.12)$$

$$\text{где } B = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\omega_c^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_c}{\alpha}.$$

Из анализа переходной характеристики (рис. 2.18,а), построенной по формуле (2.12), следует, что при коэффициенте демпфирования  $0 < \zeta < 1$  переходный процесс в колебательном ТЗ сопровождается затухающими колебаниями с частотой  $\omega_c$  и амплитудой, уменьшающейся по экспоненте  $e^{-\alpha t}$ . Промежуток времени между экстремумами, расположенными рядом с одной стороны от нового установившегося значения  $h(\infty) = k$ , равен периоду собственных колебаний  $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ .

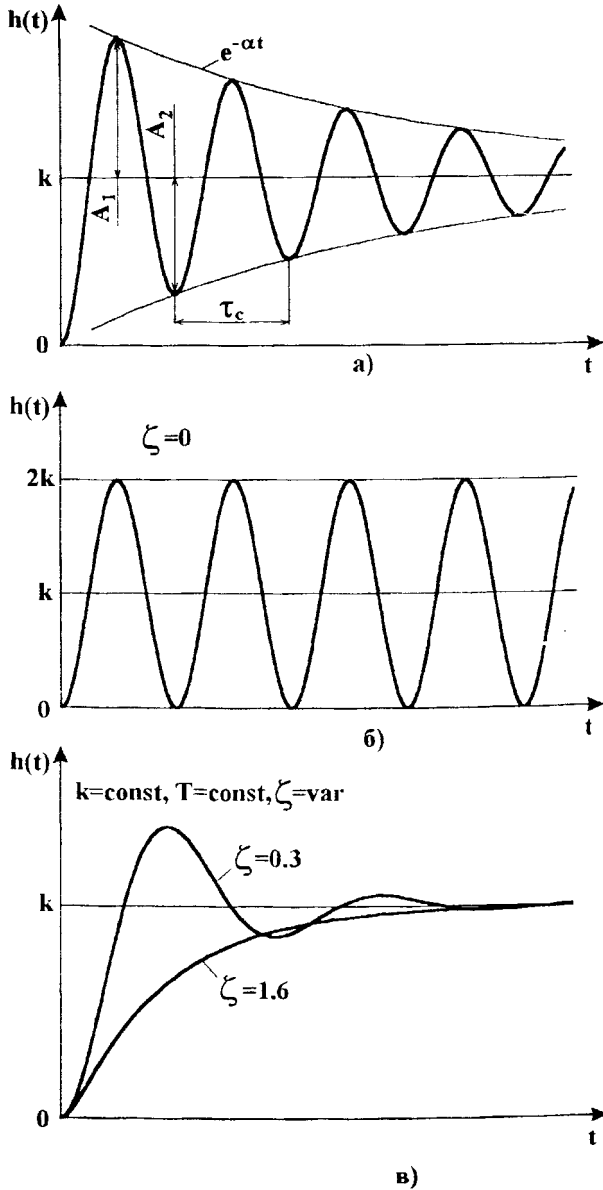


Рис. 2.18. Переходные характеристики колебательного звена.

Если известен переходный процесс для колебательного ТЗ и требуется определить  $T$  и  $\zeta$ , то достаточно определить  $\tau_c$  и декремент затухания  $\alpha$ , определяемый по величине снижения амплитуды колебаний за половину периода:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{Be^{-\alpha}}{Be^{-\alpha \frac{\tau_c}{2}}} = e^{\alpha \frac{\tau_c}{2}}. \quad (2.13)$$

Логарифмируя левую и правую части уравнения (2.13), получим:

$$\alpha = \frac{2}{\tau_c} \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{\tau_c} \cdot 2,3 \lg \frac{A_1}{A_2}.$$

При известных  $\alpha$  и  $\omega_c = \frac{2\pi}{\tau_c}$  легко определить  $T$  и  $\zeta$  по формулам:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}}; \quad \zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}}.$$

При  $\zeta \geq 1$  переходная характеристика ТЗ не имеет колебаний и становится похожей на переходную характеристику аperiodического ТЗ (рис. 2.18,в). Поэтому колебательное звено при  $\zeta \geq 1$  иногда называют аperiodическим звеном второго порядка. При отсутствии демпфирования ( $\zeta = 0$ ) колебательное ТЗ называют консервативным колебательным ТЗ. Переходный процесс в этом звене сопровождается незатухающими колебаниями (рис. 2.18,б). На практике всегда имеется трение и потери энергии, поэтому переходный процесс в колебательном ТЗ имеет затухающий характер.

Построение переходной характеристики колебательного ТЗ облегчается, если воспользоваться формулой (2.13). Имея в виду, что при  $t = 0$  справедливо равенство  $A_i = k$ , максимальные отклонения переходной характеристики при  $t = i \frac{\tau_c}{2}$  относительно прямой  $h = k$  в соответствии с формулой (2.13) будут равны

$$A_i = ke^{-i\alpha \frac{\tau_c}{2}},$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$  - номер экстремальной точки переходной характеристики.

Соединяя экстремальные точки плавной кривой, получим переходную характеристику колебательного ТЗ.



Передаточная и частотная функции определяются соотношениями:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1},$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2 \omega^2) + j2T\zeta \omega}. \quad (2.14)$$

Амплитудная и фазовая частотные характеристики, полученные из выражения (2.14), имеют вид:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|M(j\omega)|}{|D(j\omega)|} = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \zeta^2 \omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg M(j\omega) - \arg D(j\omega) = -\arctg \frac{2T\zeta \omega}{1 - T^2 \omega^2},$$

где  $M(j\omega) = k$  - числитель частотной функции;

$D(j\omega) = (1 - T^2 \omega^2) + j2T\zeta \omega$  - знаменатель частотной функции.

При значениях коэффициента демпфирования  $0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$  АЧХ колебательного ТЗ представляет собой резонансную кривую (рис. 2.19,а). Резонансная частота колебаний определяется по формуле:

$$\omega_p = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{T}.$$

При  $\zeta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  АЧХ колебательного ТЗ представляет собой кривую, похожую на АЧХ аperiодического ТЗ. С увеличением частоты колебаний ( $\omega \rightarrow \infty$ ) амплитуда колебаний на выходе из колебательного ТЗ стремится к нулю.

ФЧХ колебательного ТЗ представлена на рис. 2.19,б. Она представляет кривую, асимптотически приближающуюся к значению  $-\pi$ . В консервативном колебательном ТЗ ( $\zeta = 0$ ) на  $\omega_p$  происходит резкая смена фазы выходного сигнала на угол  $-\pi$ .

АФЧХ колебательного ТЗ располагается в IV и III квадрантах комплексной плоскости, как показано на рис. 2.19,в.

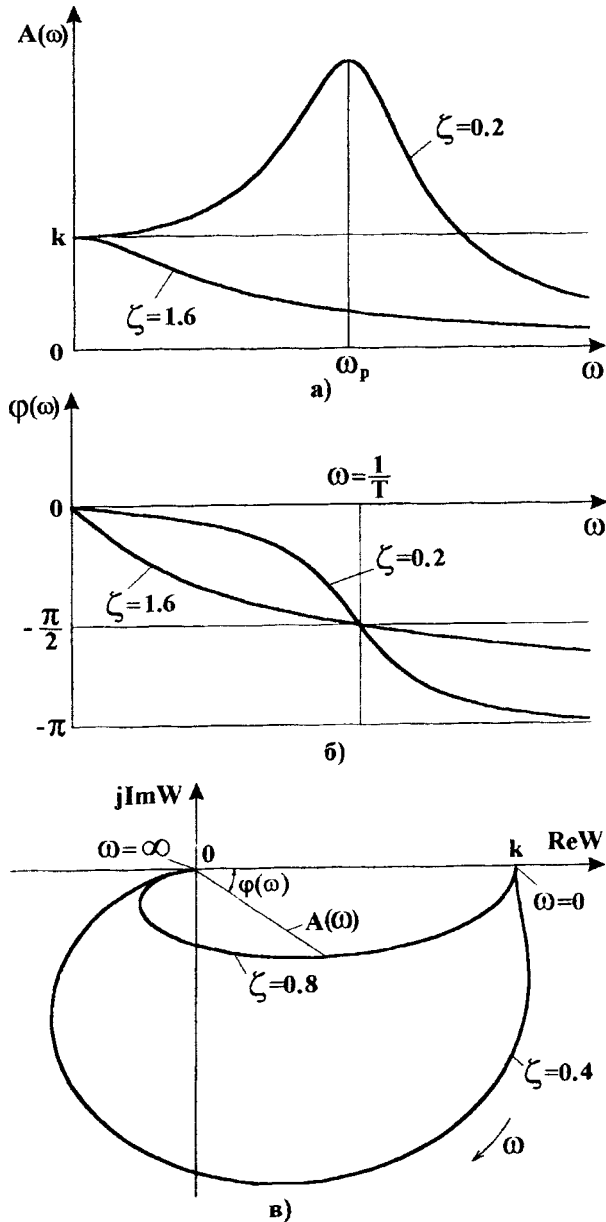


Рис. 2.19. Частотные характеристики колебательного звена: а) АЧХ; б) ФЧХ; в) АФЧХ.

### 3. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ САУ

#### 3.1. ПОНЯТИЕ О СТРУКТУРНОЙ СХЕМЕ САУ

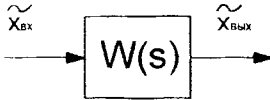


Рис. 3.1. Изображение типового звена на структурных схемах.

Структурная схема САУ составляется для наглядности и облегчения анализа динамических характеристик САУ на основе системы дифференциальных уравнений, описывающих работу рассматриваемой системы. При этом стремятся выделить элементы, соответствующие типовым звеньям.

Каждое звено в структурной схеме представляется в виде прямоугольника, внутри которого записывается выражение для передаточной функции данного звена (рис. 3.1). Связи между звеньями показываются стрелками. Все величины сигналов отображаются в изображениях по Лапласу.

В структурной схеме сложение и вычитание сигналов обозначают так, как показано на рис. 3.2.

После составления структурной схемы САУ определяют ее передаточную функцию, которая затем может быть использована для исследования динамических характеристик системы.

Зачастую структурные схемы получаются сложными со многими перекрещивающимися связями. В этом случае применяют специальные методы преобразования структурных схем, которые облегчают определение передаточных функций и исследование динамических характеристик системы.

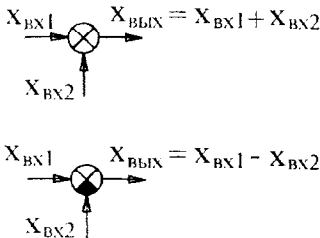


Рис. 3.2. Обозначение сложения и вычитания сигналов на структурных схемах.

#### 3.2. ХАРАКТЕРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

При рассмотрении структур реальных систем управления и определении их динамических свойств следует учитывать существующие между элементами и звеньями связи, которые могут быть трех типов, соответствующих трем типам соединений звеньев: последовательному, параллельному и соединению с обратной связью (параллельно-встречное соединение).

### 1) Последовательное соединение (рис. 3.3).

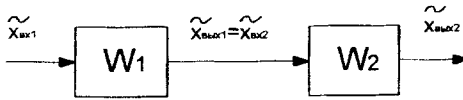


Рис. 3.3. Последовательное соединение звеньев.

Последовательным называется соединение звеньев, при котором выходная величина предыдущего звена служит входной величиной последующего:

$$\tilde{x}_{\text{вых}1} = \tilde{x}_{\text{вх}2}.$$

Для определения передаточной функции последовательного соединения звеньев САУ, т.е.  $W(s) = \frac{\tilde{x}_{\text{вых}2}}{\tilde{x}_{\text{вх}1}}$ , запишем уравнения связи между входными и выходными параметрами для каждого звена:

$$\tilde{x}_{\text{вых}1} = W_1(s)\tilde{x}_{\text{вх}1};$$

$$\tilde{x}_{\text{вых}2} = W_2(s)\tilde{x}_{\text{вх}2} = W_2(s)W_1(s)\tilde{x}_{\text{вх}1};$$

$$W_{\text{noc}} = W_1(s)W_2(s).$$

Т.е. передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций составляющих звеньев. Обобщив данный результат, можно сделать вывод, что передаточная функция цепи  $n$  последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев:

$$W_{\text{noc}}(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$

Для частотных функций последовательно соединенных звеньев можно записать:

$$W_{\text{noc}}(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n [A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}];$$

$$A_{\text{noc}}(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega);$$

$$\varphi_{\text{noc}}(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega).$$

Очевидно, что даже при таком простом виде соединения суммарные свойства системы могут качественно измениться.

### 2) Параллельное соединение (рис. 3.4).

Параллельным называется соединение звеньев при котором входная величина имеет одинаковое значение для всех звеньев, а выходная величина равна сумме выходных величин звеньев.

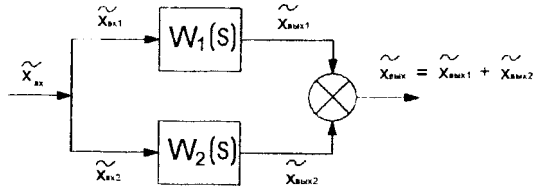


Рис. 3.4. Параллельное соединение звеньев.

Передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций составляющих звеньев:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{i=n} W_i(s).$$

Наиболее широкое применение этот вид соединения находит в задачах компенсации инерционности элементов.

Пример

$$W_1(s) = \frac{1}{Ts + 1}; \quad W_2(s) = \frac{Ts}{Ts + 1};$$

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = 1.$$

### 3) Соединение с обратной связью звеньев (рис. 3.5).

Соединение с обратной связью имеет прямую цепь передачи сигналов и цепь обратной связи, которая может быть положительной и отрицательной. При положительной обратной связи входная величина складывается с выходной величиной цепи обратной связи (см. рис. 3.5,а). При отрицательной обратной связи из входной величины вычитается выходная величина цепи обратной связи (см. рис. 3.5,б). Для определения результирующей передаточной функции такого соединения звеньев запишем следующие очевидные соотношения (на примере отрицательной обратной связи):

$$\tilde{x}_{\text{вых}} = \tilde{\varepsilon} W(s);$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{x}_{\text{вх}} - \tilde{x}_{\text{об}} = \tilde{x}_{\text{вх}} - \tilde{x}_{\text{вых}} W_{\text{об}}(s);$$

$$\tilde{x}_{\text{вых}} = (\tilde{x}_{\text{вх}} - \tilde{x}_{\text{вых}} W_{\text{об}}(s)) W(s);$$

$$\tilde{x}_{\text{вых}} + \tilde{x}_{\text{вых}} W_{\text{об}}(s) W(s) = \tilde{x}_{\text{вх}} W(s);$$

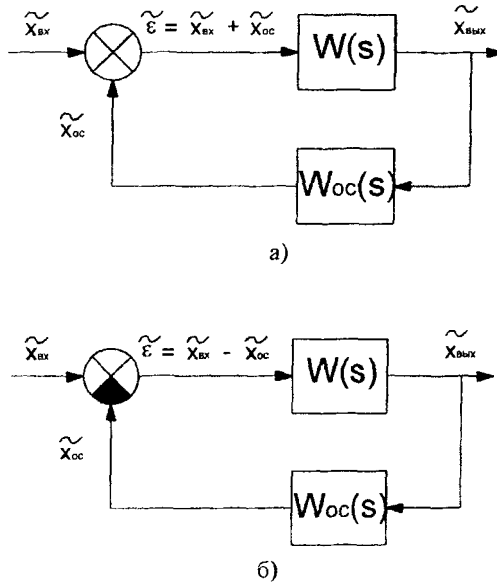


Рис. 3.5. Соединение с обратной связью:

а) положительная обратная связь; б) отрицательная обратная связь.

$$W_{oc}(s) = \frac{\tilde{x}_{вых}}{\tilde{x}_{вх}} = \frac{W(s)}{1 + W_{oc}(s)W(s)}. \quad (3.1)$$

Для положительной обратной связи можно записать:

$$W_{noc} = \frac{\tilde{x}_{вых}}{\tilde{x}_{вх}} = \frac{W(s)}{1 - W_{oc}(s)W(s)}.$$

Различают местную и общую обратные связи. Следует также заметить, что введение отрицательной обратной связи стабилизирует систему автоматического управления (т. е. повышает её устойчивость).

Кроме того, что обратные связи можно классифицировать как положительные и отрицательные, они могут быть ещё разделены на жёсткие и гибкие. Если обратная связь представляет собой усилительное звено, т. е.  $W_{oc}(s) = k_{oc}$  (или в частном случае  $W_{oc}(s) = 1$ ), то она называется жесткой обратной связью.

Если в цепи обратной связи имеются операторы дифференцирования, т. е. передаточная функция  $W_{oc}(s)$  содержит операторы Лапласа  $s$ , то обратная связь называется гибкой.

### 3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

В тех случаях, когда структурная схема САУ оказывается сложной и содержит много различных перекрестных связей, можно попытаться ее упростить и свести к простейшему виду, то есть провести преобразование структурной схемы.

Преобразованная схема должна быть эквивалентна исходной, т.е. одинаково описывать динамические свойства системы. Условие правильности преобразования структурной схемы можно записать в виде:

$$W_{исх}(s) = W_{преобр}(s).$$

На рис. 3.6. изображен пример преобразования структурной схемы. Передаточную функцию исходной системы (см. рис. 3.6,а) в соответствии с (3.1) можно записать в виде:

$$W_{исх}(s) = \frac{W(s)}{1 + W_{oc}(s)W(s)}.$$

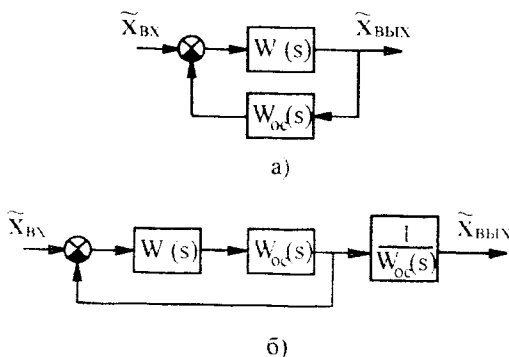


Рис. 3.6. Преобразование структурной схемы:  
а) исходная система; б) преобразованная система.

Передаточная функция преобразованной системы (рис. 3.6,б) определяется выражением:

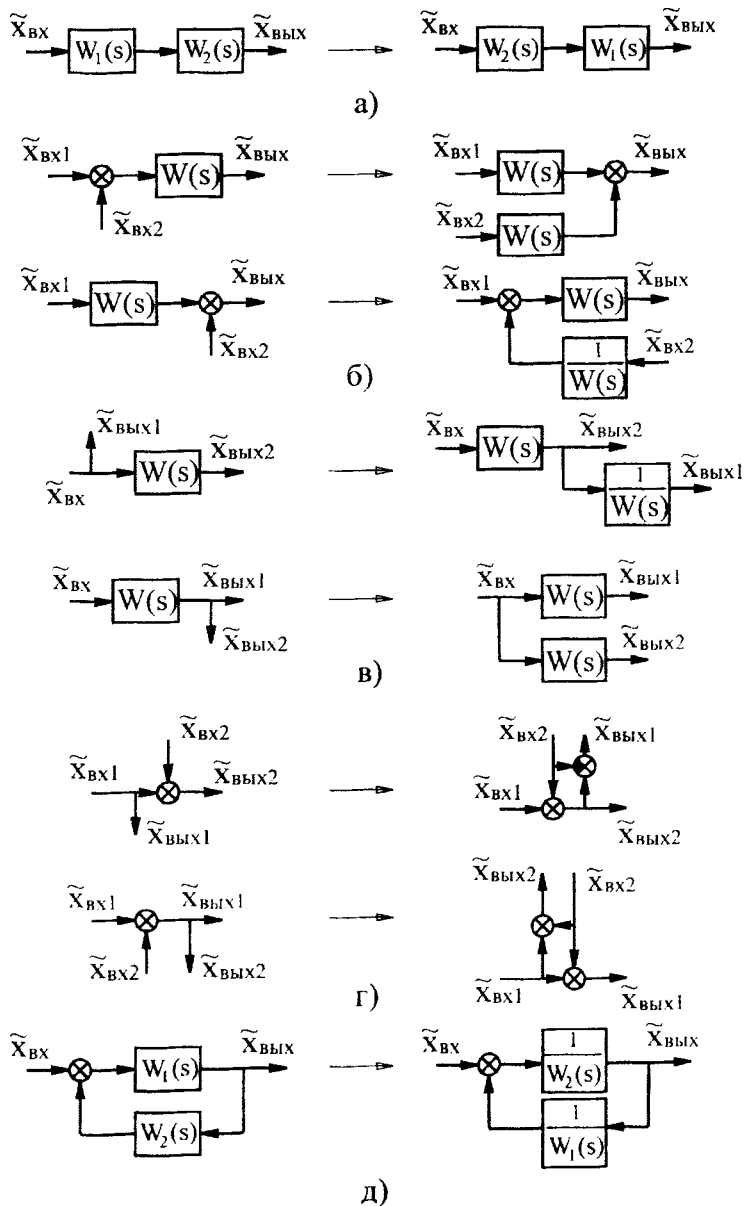


Рис. 3.7. Приемы преобразования структурных схем.



$$W_{\text{преобр}}(s) = \frac{W(s)W_{oc}(s)}{1 + W(s)W_{oc}(s)} \cdot \frac{1}{W_{oc}(s)} = \frac{W(s)}{1 + W_{oc}(s)W(s)}$$

Таким образом,  $W_{\text{исх}}(s) = W_{\text{преобр}}(s)$ .

Такое преобразование называется переходом к единичной обратной связи.

Преобразование структурных схем линейных систем делается на основе представленных ниже приемов:

- а) перестановка звеньев (рис. 3.7,а);
- б) перенос узлов сумматора через звено (рис. 3.7,б);
- в) перенос узлов разветвления через звено (рис. 3.7,в);
- г) перенос узлов сумматора через узлы разветвления (рис. 3.7,г);
- д) замена звеньев прямой и обратной цепей (рис. 3.7,д);

### 3.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ САУ

Путём структурных преобразований любую схему можно привести к виду рис. 3.8.

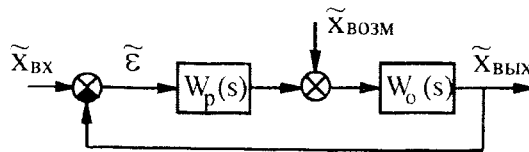


Рис. 3.8. Структурная схема САУ в общем виде.

На рис. 3.8 обозначено:

$W_p(s)$ - передаточная функция регулятора

$W_o(s)$ - передаточная функция объекта регулирования

$\tilde{X}_{\text{возм}}$  - изображение по Лапласу возмущающего воздействия;

$\tilde{X}_{\text{вх}}$  - изображение по Лапласу управляющего воздействия;

$\tilde{X}_{\text{вых}}$  - изображение по Лапласу регулируемого параметра.

В некоторых случаях при анализе сложных систем из структурной схемы замкнутой САУ выделяется разомкнутая САУ. Структурная схема разомкнутой САУ получается отключением обратной связи перед узлами суммирования (см. рис. 3.9).

Передаточная функция разомкнутой цепи по управляющему воздействию (при возмущающем воздействии равном нулю) определяется соотношением:

$$W_{раз}(s) = W_p(s)W_0(s).$$

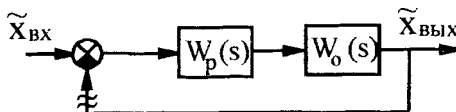


Рис. 3.9. Отключение цепи обратной связи.

Выходом разомкнутой САУ считают выход цепи обратной связи.

Передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию определяется соотношением:

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)W_0(s)}{1 + W_p(s)W_0(s)}.$$

Передаточная функция системы для ошибки регулирования по управляющему воздействию (характерно для следящих систем) определяется выражением:

$$S(s) = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{x}_{ax}} = \frac{\tilde{x}_{ax} - \tilde{x}_{вых}}{\tilde{x}_{ax}} = 1 - W_3(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)W_0(s)}$$

Передаточная функция системы по возмущающему воздействию  $\Phi(s)$  - связывает изменение выходной величины с действующим на систему возмущением при неизменном сигнале в цепи управления

$$\Phi(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)W_p(s)}.$$

## 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ. МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ЕЁ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

### 4.1 ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ САУ

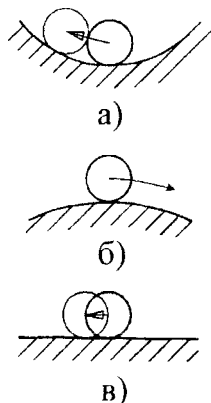


Рис. 4.1. Иллюстрация устойчивости равновесия.

Однако в ряде случаев может получиться так, что эта разность будет не уменьшаться, а возрастать с течением времени, т. е. система будет неустойчивой. Наглядно устойчивость иллюстрируется рис. 4.1,а, на котором изображён шар, лежащий в некотором углублении. При всяком отклонении его от положения равновесия он будет стремиться возвратиться к нему точно (при отсутствии сил трения) или к некоторой конечной области, окружающей предшествующее положение равновесия (при наличии сил трения). Такое положение шара будет устойчивым. На рис. 4.1,б изображён другой случай, когда положение шара оказывается неустойчивым. Рис. 4.1,в соответствует

Одним из основных требований, которым должна удовлетворять САУ, является устойчивость её работы. Устойчивость - это свойство системы возвращаться в исходное состояние после выхода её из этого состояния (в результате действия какого-либо возмущения) и прекращения действия возмущения. Проблема устойчивости особенно остро стоит в автоматике ДЛА и ЛА. Это связано с тем, что автоматические системы являются замкнутыми, у которых выходная величина через основную обратную связь подаётся на вход системы, где сравнивается с задающим воздействием.

Нормально функционирующая система стремится уменьшить разность между значениями задающего воздействия и управляемой (регулируемой) величиной.

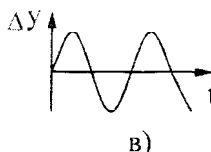
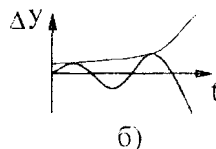
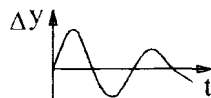


Рис. 4.2. Переходный процесс в САУ: а) устойчивая САУ; б) неустойчивая САУ; в) САУ на границе устойчивости.

случаю безразличного положения равновесия. Три соответствующих случая движения в САУ представлены на рис. 4.2. Наличие положительной обратной связи приводит к неустойчивости системы. Это только качественная оценка устойчивости. Устойчивость можно оценить и математическими методами.

Для этого рассматривается собственное движение системы. Предел собственного движения определяет качество системы. Если  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{св}(t) = 0$ , то система устойчива.

В общем случае выражение для свободного движения системы имеет вид:

$$x_{св}(t) = \sum_{k=1}^m A_k e^{s_k t} + \sum_{q=1}^r 2A_q e^{\alpha_q t} \cos(\beta_q t + \varphi_q)$$

$m$  - число действительных корней собственного оператора,  
 $r$  - число пар комплексно-сопряжённых корней.

## 4.2 УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ САУ

Впервые в более общем виде условия устойчивости были получены А. М. Ляпуновым для механических систем. Поскольку различные по своей природе материальные системы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями, то результаты Ляпунова по устойчивости можно применить ко многим физическим системам, в том числе и к системам автоматического управления. Рассмотрим дифференциальное уравнение САУ, записанное относительно выходной величины  $x_{вых}(t)$  при входном воздействии  $x_{вх}(t)$ :

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_{вых}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{вых}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_{вых}}{dt} + a_n x_{вых} &= \\ &= b_0 \frac{d^m x_{вх}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{вх}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_{вх}}{dt} + b_m x_{вх}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Коэффициенты  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  представляют собой постоянные величины, зависящие от параметров САУ.

Переходный процесс определяется решением дифференциального уравнения (4.1). Решение представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения (4.1) с правой частью и общего решения уравнения (4.1) без правой части, т. е. с правой частью, равной нулю:

$$x_{вых}(t) = [x_{вых}(t)]_{частн} + [x_{вых}(t)]_{общ}. \quad (4.2)$$

Общее решение описывает невозмущенное (свободное) движение САУ. С точки зрения анализа устойчивости интерес представляет свободное движение САУ, которое ищется в виде:

$$[x_{\text{вых}}(t)]_{\text{общ}} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \dots + C_n e^{r_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{r_i t}, \quad (4.3)$$

где  $C_i$  - постоянные интегрирования, определяемые с использованием начальных условий;

$r_i$  - корни характеристического уравнения  $D(r) = a_0 r^n + \dots + a_n = 0$ .

Запишем условия устойчивости САУ по Ляпунову.

1. Линейная система является устойчивой, если вещественные части корней её характеристического уравнения ( $D(r)=0$ ) меньше нуля.
2. Система неустойчива, если среди корней её характеристического уравнения есть хотя бы один положительный действительный корень или пара комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью
3. Система находится на границе устойчивости, если в решении характеристического уравнения есть хотя бы один нулевой корень или пара чисто мнимых комплексно-сопряжённых корней (предполагается, что все остальные корни имеют отрицательные вещественные части).

Рассмотрим изображение условий устойчивости в плоскости корней.

Границей устойчивости в плоскости корней является мнимая ось (рис. 4.3).

Слева лежат действительные отрицательные корни и комплексно-сопряженные корни с отрицательной вещественной частью.

Справа - положительные действительные корни и комплексно-сопряженные корни с положительной вещественной частью.

На границе - действительные корни равные нулю и мнимые корни.

Проанализируем вид  $i$ -ой составляющей выходного сигнала, которую дает корень  $r_i$ , в зависимости от типа этого корня. Корни могут быть вещественными, комплексными и чисто мнимыми.

1. Вещественный корень. Если он отрицательный ( $r_i = -\alpha_i$ , где  $\alpha_i$  - действительное число, большее 0), то слагаемое, определяемое этим корнем в (4.3), будет представлять собой экспоненту  $C_i e^{-\alpha_i t}$  (рис. 4.3,а). Очевидно, что при  $t \rightarrow \infty$  составляющая будет затухать.

При  $r_i = +\alpha_i$  получится расходящийся процесс  $C_i e^{+\alpha_i t}$  (рис. 4.3,б).

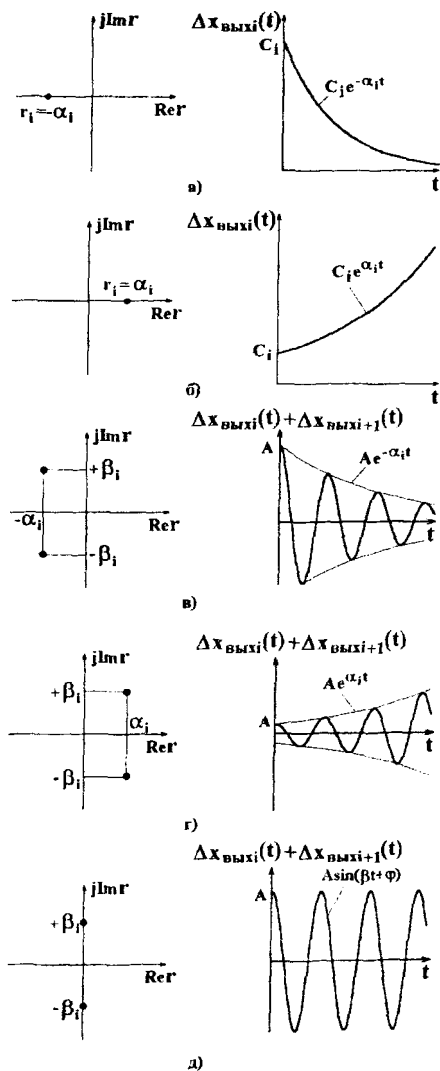


Рис. 4.3. Изображение условий устойчивости в плоскости корней:

- а) случай отрицательного вещественного корня;
- б) случай положительного вещественного корня;
- в) случай комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью;
- г) случай комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью;
- д) случай чисто мнимых корней.

2. Комплексные корни. Комплексные корни - всегда попарно сопряженные. При отрицательной вещественной части два корня, например  $r_i$  и  $r_{i+1}$ , будут иметь вид  $r_{i,i+1} = -\alpha \pm j\beta$ . В этом случае слагаемые, определяемые этими корнями в (4.3), могут быть представлены в виде:

$$C_i e^{-(\alpha+j\beta)t} + C_{i+1} e^{-(\alpha-j\beta)t} = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$$

где  $A$  и  $\varphi$  - новые постоянные интегрирования.

Нетрудно видеть, что в этом случае получаются затухающие колебания, причем мнимая часть корня  $\beta$  представляет собой круговую частоту затухающих колебаний, а  $\alpha$  - показатель затухания, определяющий затухание огибающей к кривой переходного процесса (рис. 4.3,в).

При положительной вещественной части корня  $r_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$  колебания будут расходящимися (рис. 4.3,г):

$$C_i e^{(\alpha+j\beta)t} + C_{i+1} e^{(\alpha-j\beta)t} = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi).$$

3. Чисто мнимые корни. В этом случае  $r_i = +j\beta$ ,  $r_{i+1} = -j\beta$ . Слагаемое, определяемое этими корнями в (4.3), будет представлять собой незатухающие колебания с постоянной амплитудой:

$$C_i e^{j\beta t} + C_{i+1} e^{-j\beta t} = A \sin(\beta t + \varphi).$$

Такой процесс изображен на рис. 4.3,д.

Задача оценки устойчивости не представляла бы трудности, если бы существовали методы точного решения алгебраических уравнений высокого порядка.

Однако, такая возможность реализуется только для уравнений до 4-го порядка. Уравнения высших порядков решаются приближенными методами, т. е. корни, определяющие устойчивость системы, находятся приближенно. При этом, в решении возможны малые по абсолютной величине корни, лежащие вблизи мнимой оси. Следовательно, устойчивость определяется также приближенно, что недопустимо.

Отсюда возникает задача об использовании методов, которые бы позволяли без определения корней судить об устойчивости системы.

Среди этих методов можно выделить два:

- пассивной оценки устойчивости - предполагает пассивное использование критериев устойчивости;
- активной оценки - метод **D**-разбиения.

Использование критериев подразумевает операции с коэффициентами характеристического уравнения и позволяет дать ответ на вопрос: устойчива система или нет при данных параметрах. Метод **D**-разбиения позволяет для каждого коэффициента в характеристическом

уравнении (и в принципе для любых сочетаний их) найти пределы изменения, при которых обеспечивается устойчивость системы.

### 4.3. ПРИЗНАКИ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Признак выражает необходимое, но не достаточное условие устойчивости. Критерий выражает и необходимое, и достаточное условие устойчивости.

Для оценки устойчивости системы рассматривают характеристическое уравнение:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0,$$

которое можно представить в виде

$$a_0 (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n) = 0.$$

Из последнего выражения следует:

В случае отрицательных корней все коэффициенты в характеристическом уравнении будут положительны. Если будет хотя бы один положительный корень, то произойдёт не менее одной смены знака в исходном характеристическом уравнении. Сказанное позволяет сформировать признак устойчивости:

Для устойчивости САУ необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения имели одинаковый знак.

Примеры.

$$r^3 - 3r^2 + r + 1 = 0 \text{ - система неустойчива.}$$

$r^3 + 3r^2 + r + 1 = 0$  - система может быть устойчива (требуется дополнительная проверка).

### 4.4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ (КРИТЕРИЙ РАУСА-ГУРВИЦА)

Австрийские математики Раус и Гурвиц в 1895 году нашли условия, при которых многочлен любой степени не содержит корней с положительной вещественной частью.

Рассмотрим характеристическое уравнение САУ  $n$ -го порядка:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Алгебраический критерий устойчивости (критерий Рауса-Гурвица) формулируется следующим образом:

Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  все диагональные миноры квадратной



матрицы Гурвица, составленной из коэффициентов характеристического уравнения, были положительны.

Определитель Гурвица составляется из коэффициентов характеристического уравнения следующим образом:

- по диагонали определителя выписываются все коэффициенты от  $a_1$  до  $a_n$  в порядке возрастания (слева – направо, сверху – вниз);
- заполнение столбцов от диагонального коэффициента производится: вверх - коэффициентами уравнения с большими индексами, а вниз - коэффициентами уравнения с меньшими индексами. Места коэффициентов с отрицательными индексами и индексами больше "n" заполняются нулями:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

Из этого критерия вытекают следствия:

- 1) для устойчивости системы, описываемой уравнениями до 2-го порядка включительно, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения были больше нуля;
- 2) для системы 3-го порядка

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0.$$

Матрица Гурвица в этом случае запишется следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Условия устойчивости:

$$a_0 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \cdot \Delta_2 > 0.$$

Третий (последний) определитель  $\Delta_3$  дает условие  $a_3 > 0$ .

Таким образом, для уравнения третьего порядка уже недостаточно положительности всех коэффициентов характеристического уравнения.

3) Для системы 4-го порядка  $a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0$  необходимые и достаточные условия устойчивости помимо указанных для системы третьего порядка записываются в виде неравенства  $a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > a_4 a_1^2$ .

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Определить устойчивость системы с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 2s + 7}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$r^3 + 4r^2 + 2r + 7 = 0.$$

Матрица Гурвица записывается следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$a_0 = 1 > 0$$

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 7 = 1 > 0$$

$$\Delta_3 = 7 \cdot 1 = 7 > 0.$$

Все диагональные миноры больше нуля, следовательно, система устойчива.

Пример 2. Определить устойчивость системы с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{5}{s^3 + 2s^2 + 4s + 10}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$r^3 + 2r^2 + 4r + 10 = 0.$$

Матрица Гурвица записывается следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 10 = -2 < 0$$

Один из диагональных миноров меньше нуля, следовательно, система неустойчива.

Пример 3. Определить значения  $k$ , при которых система (рис. 4.4) будет устойчива.

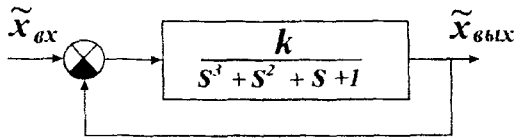


Рис. 4.4. Структурная схема исследуемой системы.

Передаточная функция системы определится выражением:

$$W(s) = \frac{k}{s^3 + s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s^3 + s^2 + s + 1}} = \frac{k}{s^3 + s^2 + s + (k + 1)}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$r^3 + r^2 + r + (k + 1) = 0.$$

Матрица Гурвица записывается следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+k \end{vmatrix}$$

$$a_0 = 1 > 0;$$

$$\Delta_1 = 1 > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (1+k) = -k > 0 \Rightarrow k < 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = (1+k) \cdot \Delta_2 = -(1+k)k > 0 \Rightarrow 1+k > 0 \Rightarrow k > -1.$$

Таким образом, система будет устойчива при значениях  $k$  из диапазона  $(-1; 0)$ .

Алгебраический критерий устойчивости используется для анализа систем не выше 5-го порядка. Для систем, порядок которых больше пяти, могут быть использованы специальные таблицы Рауса, составленные из коэффициентов  $a_0 \dots a_n$  и их комбинаций. Но это трудоёмкая операция. Кроме того, критерий Рауса-Гурвица при  $n > 5$  лишен возможности внутренней (промежуточной) проверки и имеет большую вероятность погрешности из-за многочисленных арифметических действий.

Поэтому для оценки устойчивости систем с высоким порядком характеристического уравнения целесообразно использовать частотные критерии устойчивости.

#### 4.5. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Рассмотрим САУ, описываемую передаточной функцией

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s)}.$$

При исследовании устойчивости по частотному критерию Михайлова анализируется собственный оператор системы

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

в котором производится замена  $s = j\omega$ .

Сгруппировав действительные и мнимые члены, получим так называемую амплитудно-фазовую частотную характеристику 1-го рода.

$$D(j\omega) = \operatorname{Re} D(j\omega) + j \operatorname{Im} D(j\omega) = A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}$$

Если построить график функции  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости, то получаем годограф АФЧХ 1-го рода (годограф Михайлова).

По расположению годографа Михайлова относительно оси координат судят об устойчивости САУ. Рассмотрим доказательство критерия Михайлова.

Представим  $D(s)$  в виде произведения сомножителей

$$D(s) = a_0(s - r_1)(s - r_2)(s - r_3) \dots (s - r_n),$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  - корни характеристического уравнения.

Когда переходим от  $s$  к  $j\omega$ , получим характеристический комплекс:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - r_1)(j\omega - r_2) \dots (j\omega - r_n). \quad (4.4)$$

Свойство: при перемножении комплексных чисел, представленных на комплексной плоскости в виде векторов, модули их перемножаются, а углы - складываются.

Каждый из сомножителей выражения (4.4) представляет собой комплексное число. Следовательно,  $D(j\omega)$  представляет собой произведение  $n$  комплексных чисел. Поэтому результирующий угол поворота вектора  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей (4.4):

$$\varphi_\Sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n \quad (4.5)$$

Определим каждое слагаемое (4.5) в отдельности.

1. Пусть какой-либо корень, например  $r_1$ , является вещественным и отрицательным, т. е.  $r_1 = -\alpha_1$ , где  $\alpha_1 > 0$ . Сомножитель в выражении (4.4), определяемый этим корнем, будет тогда иметь вид  $(\alpha + j\omega)$ .

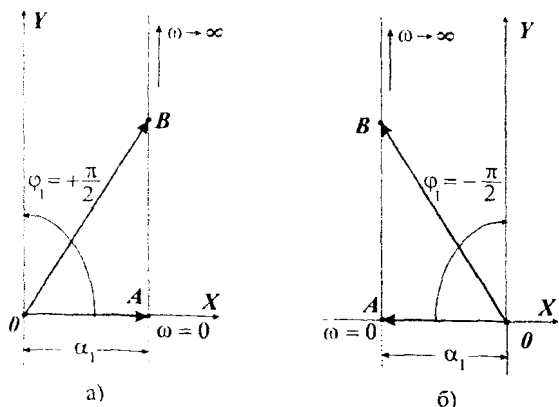


Рис. 4.5. Векторы сомножителей характеристического комплекса (4.4) для случая вещественных корней:

- а) отрицательный корень;
- б) положительный корень.

Построим годограф этого вектора на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности (рис. 4.5, а). При  $\omega=0$  вещественная часть  $X = \alpha_1$ , а мнимая  $Y = 0$ . Этому соответствует точка  $A$ , лежащая на вещественной оси. При  $\omega \neq 0$  вектор будет изменяться так, что его вещественная часть бу-

дет по-прежнему равна  $\alpha_1$ , а мнимая часть  $Y = \omega$  (точка  $B$  на рис. 4.5,а). При увеличении частоты до бесконечности конец вектора уходит в бесконечность, при этом всегда оставаясь на вертикальной прямой, проходящей через точку  $A$ . Сам вектор поворачивается против часовой стрелки. Результирующий угол поворота вектора  $\varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$ .

2. Пусть теперь корень  $r_1$  является вещественным и положительным, т. е.  $r_1 = +\alpha_1$ , причем  $\alpha_1 > 0$ . Тогда сомножитель в (4.4), определяемый этим корнем, будет иметь вид  $(-\alpha_1 + j\omega)$ . Построения, аналогичные проведенным в п. 1 показывают, что результирующий угол поворота будет  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ . Знак минус говорит о том, что вектор поворачивается по часовой стрелке (рис. 4.5,б).

3. Пусть два корня, например  $r_2$  и  $r_3$  представляют собой комплексные сопряженные величины с отрицательной вещественной частью, т. е.  $r_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$ . Сомножители в выражении (4.4), определяемые этими корнями, будут иметь вид  $(\alpha - j\beta + j\omega) \cdot (\alpha + j\beta + j\omega)$ .

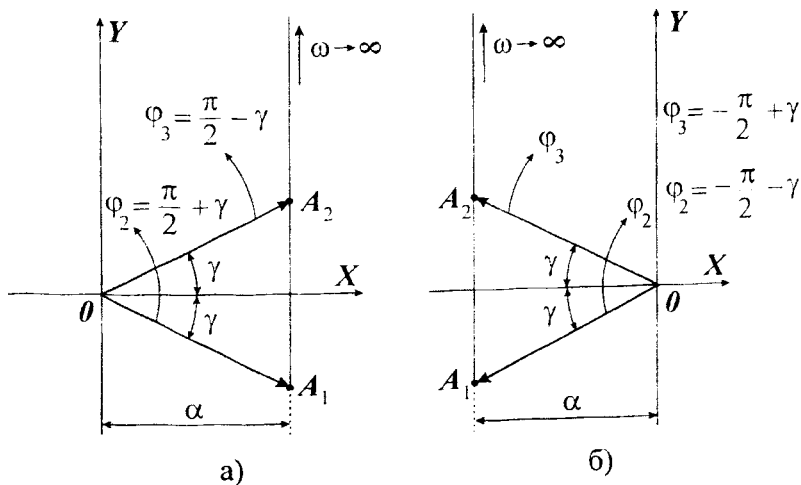


Рис. 4.6. Векторы сомножителей характеристического комплекса (4.4) для случая комплексно-сопряженных корней:

- а) корни с отрицательной вещественной частью;
- б) корни с положительной вещественной частью.

При  $\omega = 0$  начальные положения двух векторов определяются точками  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 4.6,а). Один вектор повернут относительно вещественной оси по часовой стрелке на угол  $\gamma = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$ , а второй вектор – на тот же угол против часовой стрелки. При увеличении  $\omega$  от нуля до бесконечности концы обоих векторов уходят вверх в бесконечность и в пределе угол каждого вектора стремится к  $+\frac{\pi}{2}$ .

Результирующий угол поворота первого вектора  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma$ .

Результирующий угол поворота второго вектора  $\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma$ . Вектор, соответствующий произведению  $(\alpha - j\beta + j\omega) \cdot (\alpha + j\beta + j\omega)$  вернется на угол  $\varphi_2 + \varphi_3 = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$ .

4. Пусть те же комплексные корни имеют положительную вещественную часть, т. е.  $r_{2,3} = +\alpha \pm j\beta$ . Построения, аналогичные проведенным в п. 3 показывают, что результирующий угол поворота вектора, соответствующего произведению двух сомножителей, будет  $\varphi_2 + \varphi_3 = -2 \cdot \frac{\pi}{2}$  (рис. 4.6 б).

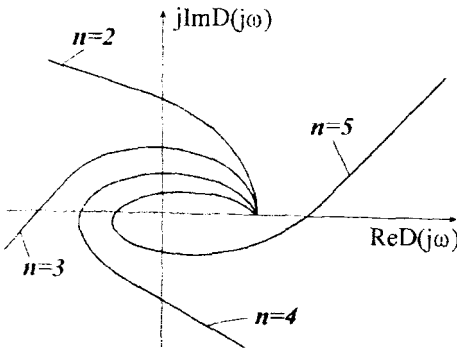


Рис. 4.7. Годограф Михайлова для устойчивых САУ степени  $n$ .

Таким образом, если характеристическое уравнение будет иметь  $l$  корней с положительной вещественной частью, то каковы бы ни были эти корни (вещественные или комплексные), им будет соответствовать сумма углов поворотов, равная  $-l \frac{\pi}{2}$ . Всем же

остальным  $n-l$  корням характеристического уравнения, имеющим отрицательные вещественные части, будет соответствовать сумма углов

поворотов, равная  $(n-l)\frac{\pi}{2}$ . В результате общий угол поворота вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности, согласно формуле (4.5), будет:

$$\varphi = (n-l)\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - l\pi.$$

С учетом этого критерий Михайлова можно сформулировать следующим образом:

Для того чтобы САУ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф АФЧХ 1-го рода при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  последовательно проходил столько квадрантов, каков порядок характеристического уравнения (рис. 4.7).

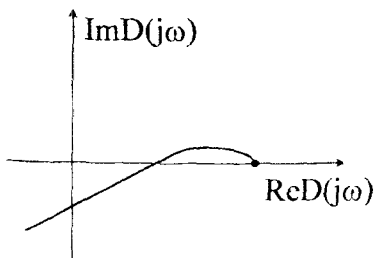


Рис. 4.8. Годограф Михайлова для неустойчивой САУ.

В неустойчивых системах нарушается последовательность прохождения годографом Михайлова квадрантов, вследствие чего угол поворота вектора  $D(j\omega)$  оказывается меньшим чем  $n\frac{\pi}{2}$  (рис. 4.8).

Критерий Михайлова применяется для анализа устойчивости как замкнутых, так и разомкнутых систем. При исследовании устойчивости замкнутой САУ рассматривается собственный оператор замкнутой системы:

$$W_1(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{K(s)}{1 + \frac{K(s)}{D(s)}} = \frac{K(s)}{K(s) + D(s)}$$

Собственный оператор замкнутой системы  $D_1(s) = K(s) + D(s)$ .

Пример. С использованием частотного критерия Михайлова определить устойчивость САУ, описываемой передаточной функцией

$$W(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 2s + 7}.$$



В собственном операторе системы  $D(s) = s^3 + 4s^2 + 2s + 7$  производим замену  $s = j\omega$ :

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 2j\omega + 7;$$

$$D(j\omega) = -j\omega^3 - 4\omega^2 + 2j\omega + 7.$$

Выделяем вещественную и мнимую части АФЧХ 1-го рода:

$$\operatorname{Re} D(j\omega) = 7 - 4\omega^2;$$

$$\operatorname{Im} D(j\omega) = 2\omega - \omega^3.$$

Рассчитываем значения вещественной и мнимой части АФЧХ 1-го рода для нескольких различных значений частот:

$\omega$	0	0,2	0,3	1,32	1,41	2	3
$\operatorname{Re} D(j\omega)$	7	6,84	6,64	0	-1	-9	-29
$\operatorname{Im} D(j\omega)$	0	0,392	0,573	0,33	0	-4	-21

По рассчитанным значениям строим годограф Михайлова (рис. 4.9). Годограф Михайлова последовательно охватывает 3 квадранта, следовательно, САУ устойчива.

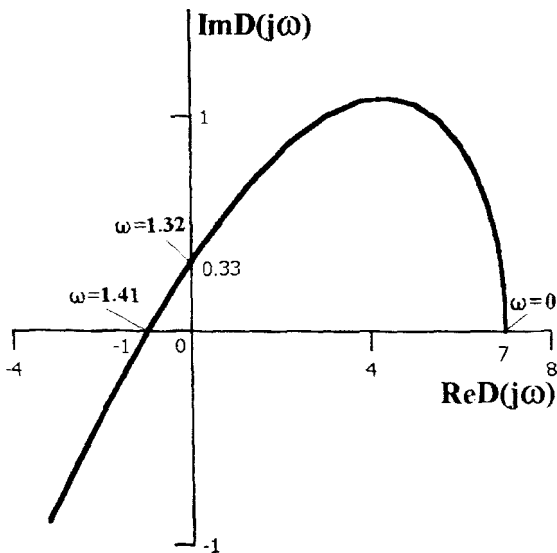


Рис. 4.9. Годограф Михайлова исследуемой САУ.

## 4.6. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Иногда в практике возникает необходимость в анализе устойчивости замкнутой САУ по характеристикам разомкнутой её части. Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость замкнутой системы по виду АФЧХ разомкнутой системы (АФЧХ 2-го рода).

$$W_3(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}; \quad W(s) = \frac{K(s)}{D(s)}.$$

Для доказательства критерия Найквиста введём вспомогательную передаточную функцию

$$W^*(s) = 1 + W(s) = \frac{D(s) + K(s)}{D(s)},$$

$W(s)$  - передаточная функция системы в разомкнутом состоянии;

$D_3(s) = D(s) + K(s)$  - собственный оператор замкнутой системы;

$D(s)$  - собственный оператор системы в разомкнутом состоянии.

Как правило, порядок оператора возмущения  $K(s)$  меньше порядка собственного оператора  $D(s)$ , поэтому порядки собственного оператора замкнутой системы и системы в разомкнутом состоянии совпадают.

Переходя в частотную область ( $s = j\omega$ ), получим:

$$\begin{aligned} W^*(j\omega) &= \frac{D(j\omega) + K(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{(j\omega - r_1)(j\omega - r_2) \dots (j\omega - r_n)}{(j\omega - r'_1)(j\omega - r'_2) \dots (j\omega - r'_n)} \\ &= \frac{A_\Sigma(\omega) e^{j\varphi_\Sigma(\omega)}}{A'_\Sigma(\omega) e^{j\varphi'_\Sigma(\omega)}} = \frac{A_\Sigma(\omega)}{A'_\Sigma(\omega)} e^{j\Delta\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi(\omega) = \varphi_\Sigma(\omega) - \varphi'_\Sigma(\omega)$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$  - корни уравнения  $D_3(r) = 0$ ,

$r'_1, r'_2, \dots, r'_n$  - корни уравнения  $D(r) = 0$ .

При анализе устойчивости замкнутой системы могут быть 2 случая:

- разомкнутая система устойчива,
- разомкнутая система неустойчива.

Рассмотрим случай, когда разомкнутая система устойчива. Будем изменять частоту от  $-\infty$  до  $+\infty$  и изобразим получившуюся амплитудно-фазовую частотную характеристику  $W^*(j\omega)$  на комплексной плоскости (рис. 4.10,а). Рассмотрим результирующий угол поворота вектора  $W^*(j\omega)$  при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Этот угол представляет собой изменение  $\Delta\varphi$ .

Числитель в выражении

$$W^*(j\omega) = \frac{D(j\omega) + K(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{D_3(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (4.6)$$

представляет собой характеристический комплекс замкнутой системы. Для того чтобы система была устойчивой в замкнутом состоянии необходимо изменение аргумента  $D_3(j\omega)$  в диапазоне частот

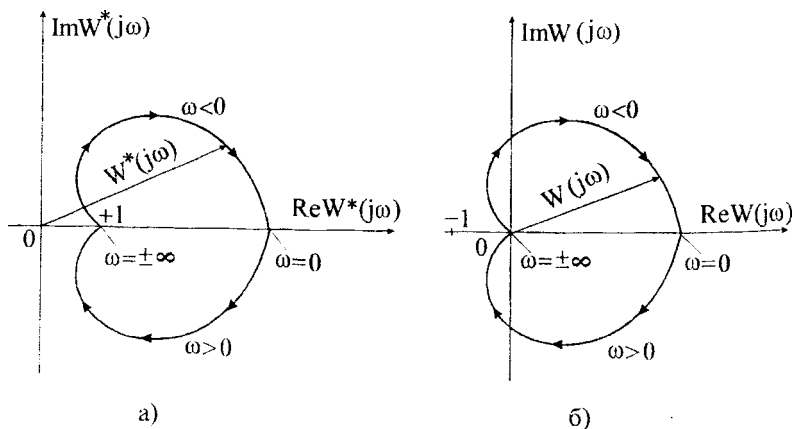


Рис. 4.10. Годографы вспомогательной частотной передаточной функции  $W^*(j\omega)$  (а); АФЧХ 2-го рода разомкнутой системы (б).

$\omega = 0 \dots \infty$  равно  $n \frac{\pi}{2}$ , где  $n$  - степень характеристического полинома.

При изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  аргумент  $D_3(j\omega)$  изменится на величину  $\varphi_\Sigma = \pi n$ .

Знаменатель в выражении (4.6) представляет собой характеристический комплекс разомкнутой системы той же степени  $n$ . Так как мы рассматриваем случай устойчивой разомкнутой системы, то результирующий угол поворота вектора  $D(j\omega)$  при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  будет равен  $\varphi_\Sigma^i = \pi n$ .

Отсюда следует, что в рассмотренном случае результирующий угол поворота вектора  $W^*(j\omega)$  будет равен нулю:  $\Delta\varphi = \varphi_\Sigma - \varphi_\Sigma^i = 0$ . Это означает, что для устойчивой в замкнутом состоянии системы годо-

граф вектора  $W^*(j\omega)$  не должен охватывать начала координат (рис. 4.10,а).

Частотная функция  $W(j\omega)$  разомкнутой системы отличается от вспомогательной функции  $W^*(j\omega)$  на единицу. Поэтому можно строить амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы и по ее виду анализировать устойчивость замкнутой САУ. В этом случае амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не должна охватывать точку с координатами  $(-1; j0)$  (рис. 4.10,б).

Из доказанного следует формулировка критерия Найквиста:

Для устойчивости замкнутой САУ, полученной замыканием устойчивой разомкнутой системы, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку с координатами  $(-1; j0)$ .

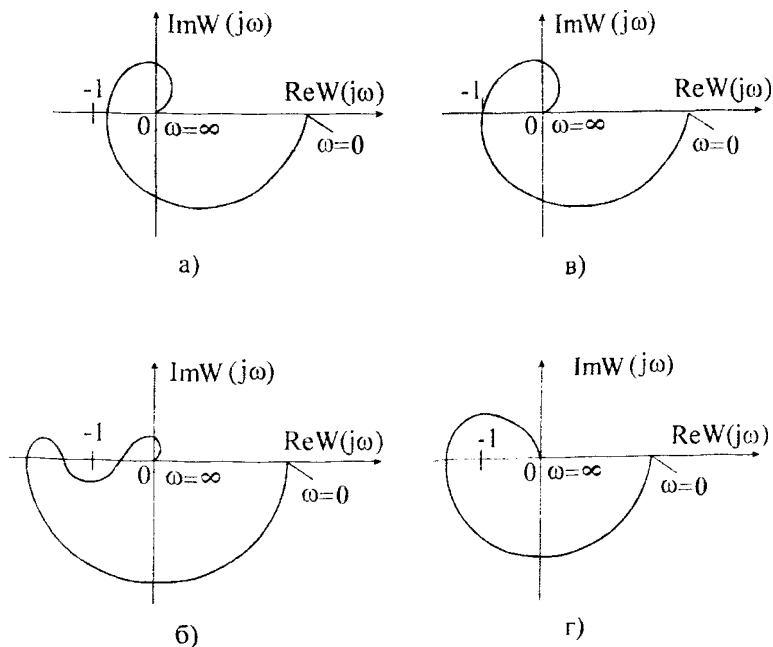


Рис. 4.11. АФЧХ разомкнутой системы, соответствующие а) и б) – устойчивым замкнутым системам; в) – системе на границе устойчивости; г) – неустойчивой замкнутой системе.

На рис. 4.11 приведены примеры частотных характеристик разомкнутых систем, соответствующих устойчивым и неустойчивым замкнутым системам.

Вследствие симметрии ветвей (относительно действительной оси) обычно строят только ветви АФЧХ, соответствующие положительному диапазону частот.

Второй случай - разомкнутая система неустойчива.

Наличие неустойчивости системы в разомкнутом состоянии не означает, что система будет неустойчивой в замкнутом состоянии. Она может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Однако формулировка критерия устойчивости Найквиста при этом несколько меняется. Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы  $D(s)$  степени  $n$  содержит  $k$  корней с положительной вещественной частью.

Тогда при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  аргумент  $D(j\omega)$  повернется на угол  $\varphi'_y = (n - 2k)\pi$ .

Для устойчивой замкнутой системы при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$   $\varphi_y = n\pi$ . Следовательно, аргумент  $W^*(j\omega)$  будет равен

$$\Delta\varphi(\omega) = n\pi - (n - 2k)\pi = k2\pi.$$

Это означает, что вектор годографа  $W^*(j\omega)$  охватывает на комплексной плоскости начало координат в положительном направлении столько раз, сколько корней характеристического уравнения системы в разомкнутом состоянии находится в правой полуплоскости.

Итак, для устойчивости замкнутой системы, полученной замыканием неустойчивой разомкнутой системы, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты от  $-\infty$

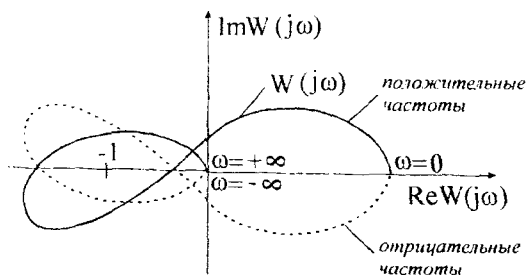


Рис. 4.12. Вид годографа неустойчивой разомкнутой системы для случая, когда замкнутая система устойчива (в характеристическом уравнении разомкнутой САУ - два корня с положительной вещественной частью).

до  $+\infty$  АФЧХ разомкнутой системы охватывала в положительном направлении точку с координатами  $(-1; j0)$  столько раз, сколько положительных корней имеется в характеристическом уравнении, соответствующем разомкнутой системе (рис. 4.12).

При изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  годограф АФЧХ 2-го рода должен охватывать точку  $(-1; j0)$   $\frac{k}{2}$  раз.

Таким образом, при использовании критерия Найквиста, вообще говоря, необходимо убедиться в том, имеются ли в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы корни, лежащие в правой полуплоскости (корни с положительной вещественной частью), и сколько имеется таких корней.

Следует заметить, что в практике желательно избегать второго случая, т.е. необходимо использовать только устойчивые в разомкнутом состоянии системы.

Это объясняется тем, что, если система в разомкнутом состоянии неустойчива, то при её замыкании и имеющихся в реальной системе нелинейностях может на некоторых режимах произойти нарушение устойчивой работы и возникновение автоколебаний.

Для решения многих инженерных задач обеспечения устойчивости используют частный случай критерия Найквиста.

#### 4.6.1. Критерий Найквиста для систем, включающих звенья чистого запаздывания

Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega), \quad W_2(j\omega) = e^{-j\omega\tau},$$

где  $W_1(j\omega)$  - передаточная функция, соответствующая системе без запаздывания;

$W_2(j\omega)$  - передаточная функция запаздывающего звена;

$\tau$  - время запаздывания ( $\tau = \text{const}$ ).

По формуле Эйлера:

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau - \text{уравнение окружности с радиусом } R=1.$$

Частотную функцию, соответствующую системе без запаздывания, можно представить в виде:

$$W_1(j\omega) = A_1(\omega)e^{-j\varphi_1(\omega)}. \quad (4.7)$$

Модуль частотной функции запаздывающего звена равен единице, а ее аргумент  $\varphi_2(\omega) = \omega\tau$ . Представим выражение для  $W(j\omega)$  в виде:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}.$$

Тогда модуль результирующей частотной передаточной функции:

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = A_1(\omega),$$

а фаза

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \omega\tau.$$

Таким образом, наличие звена с запаздыванием не меняет модуля и вносит дополнительный фазовый сдвиг.

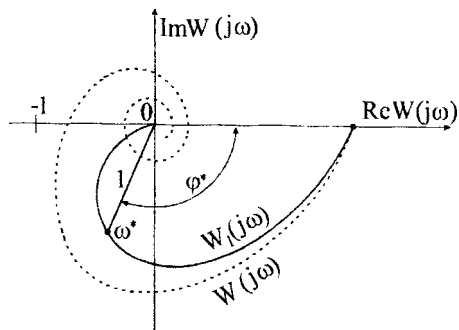


Рис. 4.13. АФЧХ 2-го рода линейной разомкнутой системы (сплошная линия) и системы с запаздыванием (пунктир).

На рис. 4.13 изображена амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая (4.7). Сплошной линией показана исходная характеристика при  $\tau = 0$ , а пунктиром - характеристика, которая получается при наличии постоянного запаздывания  $\tau \neq 0$ .

Из этих характеристик видно, что наличие дополнительного фазового сдвига  $\Delta\varphi = \omega\tau$  “закручивает” годограф, особенно в высокочастотной области. Это, вообще говоря, ухудшает условия устойчивости, так как вся кривая приближается к точке  $(-1; j0)$ .

По имеющемуся годографу  $W_1(j\omega)$  можно определить критическое значение времени запаздывания  $\tau = \tau_{кр}$ , при котором система оказывается на границе устойчивости.

Для этой цели на годографе  $W_1(j\omega)$  отыскивается точка, для которой модуль равен единице (рис. 4.13). Частоту, соответствующую этой точке, обозначим  $\omega^*$ , а фазу -  $\varphi^*$ . При введении постоянного запаздывания  $\tau = \tau_{кр}$  условие совпадения этой точки с точкой  $(-1; j0)$  запишется следующим образом:

$$\varphi^* - \omega^* \tau_{кр} = -\pi,$$

откуда критическое значение запаздывания

$$\tau_{кр} = \frac{\pi + \varphi^*}{\omega^*}.$$

Чтобы система, включающая звено чистого запаздывания, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система без учета запаздывания и время запаздывания было меньше критического.

Если имеется несколько точек пересечения АФЧХ с единичной окружностью, то получается ряд значений  $\tau_{кр}$ . В этом случае необходимо время запаздывания в системе сравнить с наименьшим критическим.

#### 4.6.2. Влияние коэффициента усиления на устойчивость системы

Представим передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$W(s) = \frac{k(b_0 s^m + \dots + b_{m-1} s + 1)}{a_0 s^n + \dots + a_{n-1} s + 1}.$$

Нетрудно видеть, что увеличение  $k$  приводит к "раздутию" голографа, т.е. к уменьшению запаса устойчивости. Для повышения запаса устойчивости системы необходимо снижать  $k$  (рис. 4.14).

Единственный фактор, который увеличивает запас устойчивости, - демпфирование (рис. 4.15).

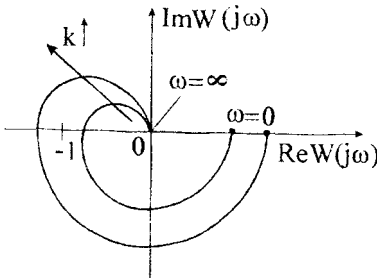


Рис. 4.14. Деформация АФЧХ разомкнутой системы с увеличением коэффициента усиления.

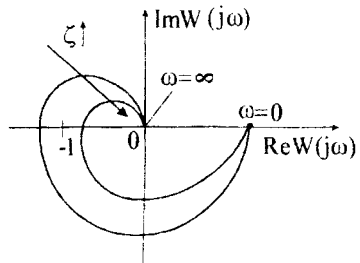


Рис. 4.15. Деформация АФЧХ разомкнутой системы с увеличением коэффициента демпфирования.

На практике могут быть даны следующие рекомендации по повышению устойчивости систем:

- уменьшение коэффициента усиления.
- увеличение коэффициента демпфирования.
- уменьшение длины коммуникаций между элементами системы (т.е. уменьшение времени запаздывания  $\tau$ ).

#### 4.6.3. Понятие о запасе устойчивости САУ

Так как реальная система всегда имеет отклонения параметров элементов от их расчетных значений вследствие технологического раз-



броса или других причин, то система, обладающая характеристикой, близкой к критической точке  $(-1; j0)$  может оказаться неустойчивой.

Поэтому вводится понятие запаса устойчивости системы. Он определяет степень близости замкнутой системы к границе устойчивости по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики ее разомкнутой цепи. Запас устойчивости подразделяют на запас устойчивости по модулю и запас устойчивости по фазе (рис. 4.16). Запас устойчивости по модулю характеризуется отрезком  $h$  на действительной оси, равным расстоянию от точки  $(-1; j0)$  до проекции точки пересечения АФЧХ  $(W(j\omega))$  с окружностью единичного радиуса.

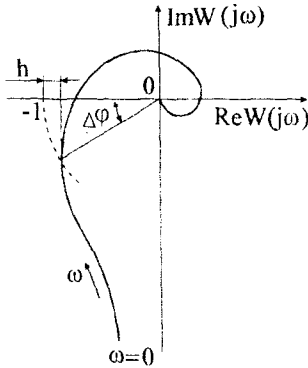


Рис. 4.16. Определение запасов устойчивости по модулю и по фазе на амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы.

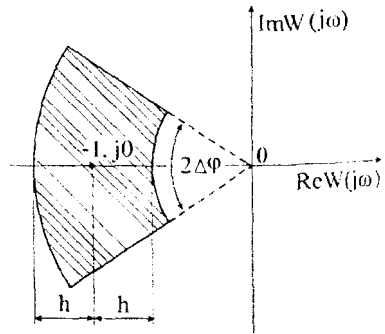


Рис. 4.17. Запретная область для амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы.

Запас устойчивости по фазе характеризуется наименьшим углом, образованным между осью абсцисс и прямой из начала координат в точку пересечения АФЧХ  $W(j\omega)$  с окружностью единичного радиуса.

Запасы устойчивости по модулю определяются в процентах, а запас устойчивости по фазе - в градусах.

При проектировании САУ обычно задают величину запаса устойчивости, как по модулю, так и по фазе, на основании которых строится запретная область, в которую не должна заходить АФЧХ системы  $W(j\omega)$  (рис. 4.17).

#### 4.6.4. Структурный критерий устойчивости

Структурно-устойчивой называется система, для которой без изменения числа элементов и порядка уравнения движения можно добиться устойчивости лишь изменением численных значений коэффициентов в уравнении движения.

Структурно-неустойчивой называется система, устойчивости которой нельзя добиться никакими изменениями коэффициентов в характеристическом уравнении движения.

В ряде случаев по виду структурной схемы можно решить, является ли система структурно-устойчивой или структурно-неустойчивой.

До сих пор рассматривались лишь устойчивые звенья и звенья, находящиеся на границе устойчивости (интегрирующие звенья с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{s}$ ). Принципиально возможно появление в

системе и неустойчивых звеньев. Действительно, разомкнутая САУ может быть неустойчивой, что, однако, не исключает возможности стабилизации замкнутой системы. Если разомкнутая система неустойчива, то её характеристическое уравнение имеет корни, находящиеся в правой полуплоскости, т.е. знаменатель оператора разомкнутой системы содержит множители типа  $(I-sT)$ , где  $T>0$ . В связи с указанным назовём звено с оператором

$$W(s) = \frac{K}{Ts - 1}$$

неустойчивым инерционным звеном.

#### Теорема Айзермана М.А.

Для того, чтобы замкнутая система была структурно-устойчивой необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$r+q < 2,$$

$$n > 4m,$$

где  $r$  - число интегрирующих звеньев,

$q$  - число неустойчивых инерционных звеньев,

$m$  - число консервативных звеньев ( $\frac{k}{T^2 s^2 + I}$ ),

$n$  - порядок собственного оператора системы.

Рассмотрим пример системы, изображенной на рис. 4.18. В этом случае

$$W(s) = \frac{k_1 k_2 k_3}{Ts^3 + s^2 + k_1 k_2 k_3};$$

$$D(s) = Ts^3 + s^2 + k_1 k_2 k_3;$$

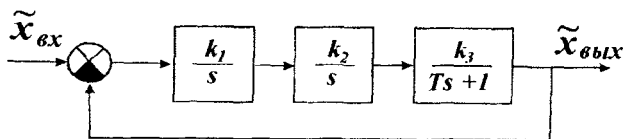


Рис. 4.18. Схема структурно-неустойчивой системы.

Применим критерий Гурвица ( $a_0 = T; a_1 = 1; a_2 = 0; a_3 = k_1 k_2 k_3$ ).

Матрица Гурвица для рассматриваемого случая запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 k_2 k_3 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_1 k_2 k_3 \end{vmatrix};$$

$$a_0 = T > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & k_1 k_2 k_3 \\ T & 0 \end{vmatrix} = 0 - T k_1 k_2 k_3 < 0.$$

Отсюда видно, что для такой структуры никаким изменением коэффициентов обеспечить устойчивость системы невозможно.

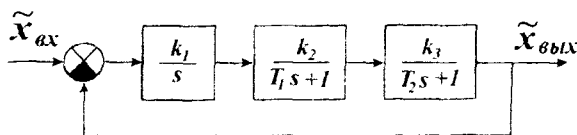


Рис. 4.19. Схема структурно-устойчивой системы.

Заменяем одно из интегрирующих звеньев на апериодическое (рис. 4.19). В этом случае передаточная функция системы запишется в виде:

$$W(s) = \frac{k_1 k_2 k_3}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k_1 k_2 k_3}.$$

Собственный оператор:

$$D(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k_1 k_2 k_3.$$

Матрица Гурвица для рассматриваемого случая запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k_1 k_2 k_3 & 0 \\ T_1 T_2 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 + T_2 & k_1 k_2 k_3 \end{vmatrix};$$

$$a_0 = T_1 T_2 > 0;$$

$$\Delta_1 = T_1 + T_2 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k_1 k_2 k_3 \\ T_1 T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 - T_1 T_2 k_1 k_2 k_3 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k_1 k_2 k_3 & 0 \\ T_1 T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_1 + T_2 & k_1 k_2 k_3 \end{vmatrix} = k_1 k_2 k_3 (T_1 + T_2 - T_1 T_2 k_1 k_2 k_3) > 0$$

Последняя система структурно-устойчива, т.е. выбором коэффициентов  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  можно добиться устойчивости. Из последнего выражения видно также, что увеличение запаса устойчивости реализуется за счет уменьшения коэффициентов усиления звеньев.

Пример: Система с неустойчивым инерционным звеном.

$$W(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s - 1)s};$$

$$D(s) = T_1 T_2 s^3 + (T_2 - T_1) s^2 - s,$$

Матрица Гурвица для рассматриваемого случая запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} T_2 - T_1 & 0 & 0 \\ T_1 T_2 & -1 & 0 \\ 0 & T_2 - T_1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$a_0 = T_1 T_2 > 0;$$

$$\Delta_1 = T_2 - T_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_2 - T_1 & 0 \\ T_1 T_2 & -1 \end{vmatrix} = -(T_2 - T_1).$$

Для того, чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы  $\Delta_2 > 0$ , т.е.  $T_2 - T_1 < 0$ . Это противоречит условию  $\Delta_1 > 0$ . Таким образом, рассматриваемая система структурно неустойчива.

#### 4.7. АКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ (МЕТОД D-РАЗБИЕНИЯ)

При проектировании систем необходимо знать области изменения того или иного параметра внутри которых САУ будет устойчива. Такие области называются областями устойчивости и получают их с помощью D-разбиения в плоскости искомого параметра, т.е. того параметра, относительно значений которого оценивается устойчивость системы.

В зависимости от того, сколько параметров системы меняется одновременно, решение ищется на прямой (один), на плоскости (два), на поверхности (три).

Для построения D-разбиения в плоскости одного параметра необходимо в собственном операторе системы  $D(s)$  в явном виде выделить искомый параметр. Рассмотрим собственный оператор, который записывается в виде:

$$D(s) = A(s)\lambda + B(s),$$

где  $\lambda$  - искомый варьируемый параметр. Выделяя в уравнении  $D(s) = 0$  параметр  $\lambda$  в явном виде, можно записать:

$$\lambda = -\frac{B(s)}{A(s)}. \quad (4.8)$$

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (4.9)$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  зависят от параметров САУ ( $a_i = a_i(\lambda)$ ), следовательно корни характеристического уравнения всецело зависят от параметров системы и определяют ее устойчивость. При фиксированном значении параметров системы корни характеристического полинома (4.9) определенным образом располагаются на комплексной плоскости корней. Причем расположение всех корней в левой полуплоскости соответствует устойчивой системе. Расположение хотя бы одного корня в правой полуплоскости соответствует неустойчивой системе.

Пусть в общем случае корни характеристического уравнения (4.9) произвольно располагаются на комплексной плоскости. Предположим, что изменился режим работы системы, выразившийся в изменении параметра  $\lambda$ , который входит в один или несколько коэффициентов уравнения (4.9).

При непрерывном изменении  $\lambda$  корни уравнения будут изменяться также непрерывно, т.е. будут менять свое положение на комплексной плоскости. При этом число корней остается постоянным и равным  $n$ . Очевидно, что существует такие области изменения парамет-

ра  $\lambda$ , в пределах которых число корней в левой и правой полуплоскостях не изменяется. Переход из одной области изменения  $\lambda$  в другую соответствует переходу одного или нескольких корней из одной полуплоскости в другую (например, из левой в правую).

Границы, разделяющие области изменения параметра  $\lambda$ , при которых сохраняется постоянное число корней в левой и правой полуплоскостях, называются границами D-разбиения по параметру  $\lambda$ .

Значениям  $\lambda$ , лежащим на границе D-разбиения, соответствует один или несколько чисто мнимых корней характеристического уравнения.

Из (4.8) при  $s \rightarrow j\omega$  находим:

$$\lambda = -\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Изменяя значения  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , построим в плоскости  $\lambda$  (или  $\text{Re } \lambda$ ,  $\text{Im } \lambda$ ) кривую, отображающую мнимую ось  $j\omega$  плоскости корней характеристического уравнения в плоскости  $\lambda(j\omega)$ . Полученная кривая является кривой D-разбиения. Кривая D-разбиения для отрицательных и положительных частот симметрична относительно действительной оси, поэтому можно строить лишь ее участок, соответствующий изменению частот  $0 \leq \omega < \infty$ , и дополнить кривую зеркальным отображением относительно действительной оси. На рис. 4.20 построены плоскость корней характеристического уравнения (рис. 4.20,а) и кривая D-разбиения (рис. 4.20,б).

Построение кривой D-разбиения еще не решает вопроса о выделении области устойчивости. Последняя должна представлять собой совокупность точек плоскости, в которых все корни характеристического уравнения замкнутой системы имеют отрицательные вещественные части. В то же время кривая D-разбиения представляет собой только совокупность точек, в которых характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, хотя бы один чисто мнимый корень  $r_i = j\omega_i$ . Для того, чтобы решить вопрос о выделении области устойчивости, необходимо по определенным правилам заштриховать кривую D-разбиения.

При перемещении в плоскости корней характеристического уравнения вдоль мнимой оси от  $-\infty$  до  $+\infty$  (рис. 4.20,а), область, в которой корни имеют отрицательные вещественные части, будет находиться все время слева. Заштрихуем мнимую ось плоскости корней характеристического уравнения слева. Имея это в виду, будем теперь перемещать ее вдоль кривой D-разбиения от точки  $\omega = -\infty$  к точке, соответствующей

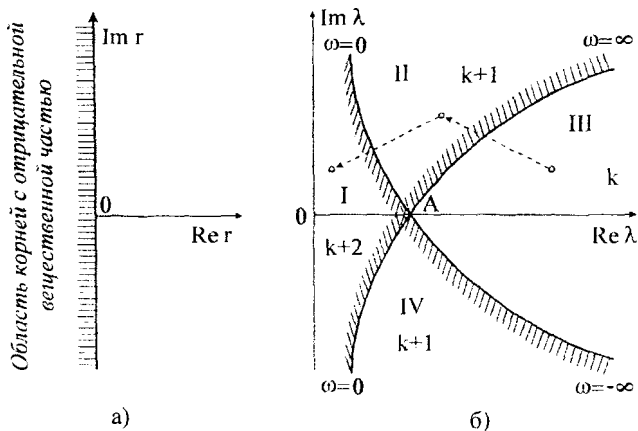


Рис. 4.20. Правила штриховки мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения (а) и кривой D-разбиения (б).

шей  $\omega = +\infty$ . Выполним штриховку этой кривой тоже слева (рис. 4.20,б). Таким образом, получим четыре зоны I, II, III, IV.

Допустим, что каким-либо способом удалось установить, что в зоне III имеется  $k$  отрицательных корней слева от мнимой оси. Если при переходе в другую зону кривая D-разбиения пересекается с незаштрихованной стороной на заштрихованную, то этой зоне соответствует полином с  $k + 1$  корнем в левой полуплоскости корней характеристического уравнения (рис. 4.20,б). При переходе через кривую с заштрихованной стороны на незаштрихованную число отрицательных корней уменьшается на единицу. Если штриховка двойная (что соответствует точке пересечения кривых D-разбиения - точке A на рис. 4.20,б), то число корней увеличится на 2, т. е. в этой зоне имеем  $k + 2$  отрицательных корня.

Практически представляет интерес рассмотрение только действительных значений параметра  $\lambda$ . Поэтому, построив кривые D-разбиения и определив число корней в каждой зоне, необходимо найти тот отрезок действительной оси на плоскости  $\lambda(j\omega)$ , который принадлежит области устойчивости. Из предлагаемой области устойчивости выбирается значение параметра  $\lambda$  (как правило, на действительной оси, т. к.  $\lambda$  - действительное число - жёсткость, масса, коэффициент трения и т. п.), которое подставляется в характеристическое уравнение. Затем, воспользовавшись одним из критериев устойчивости, определяется устойчивость САУ при выбранном значении  $\lambda$ . Если система будет ус-

тойчива с этим значением  $\lambda$ , то она будет устойчива во всей области, из которой выбрано значение  $\lambda$ .

Пример.

Уравнение 1-го порядка

$$D(s) = Ts + \lambda,$$

$\lambda$  - варьируемый параметр. Приравниваем собственный оператор  $D(s)$  к нулю:

$$D(s) = 0 \rightarrow Ts + \lambda = 0.$$

Из последнего уравнения выражаем  $\lambda$  в явном виде.

$$\lambda = -Ts, \quad s \rightarrow j\omega.$$

Получаем выражение для построения кривой D-разбиения.

$$\lambda(\omega) = -jT\omega \quad (\text{рис. 4.21}).$$

I- область устойчивости.

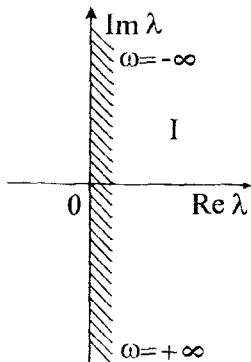


Рис. 4.21. Кривая D-разбиения системы I порядка.

Пример.

Система 2-го порядка

$$D(s) = s^2 + s + \lambda$$

Приравниваемый собственный оператор

$D(s)$  к нулю:

$$s^2 + s + \lambda = 0.$$

Из последнего уравнения выражаем  $\lambda$  в явном виде:

$$\lambda = -s^2 - s,$$

$$s \rightarrow j\omega.$$

Получаем выражение для построения кривой D-разбиения (рис. 4.22):

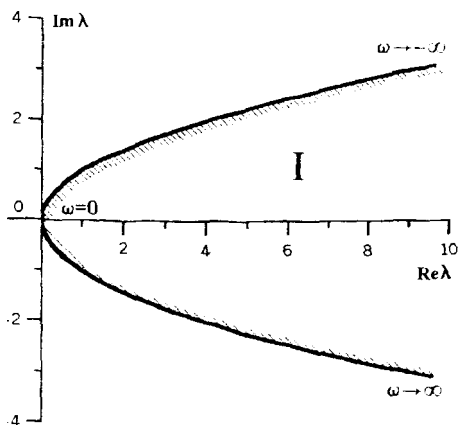


Рис. 4.22. Кривая D-разбиения системы II порядка.  
I- область устойчивости.

$$\lambda(\omega) = -(j\omega)^2 - j\omega = \omega^2 - j\omega.$$



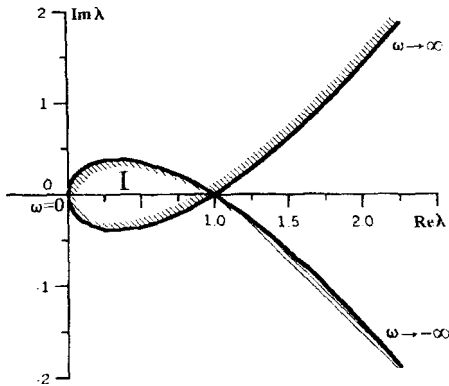


Рис. 4.23. Кривая D-разбиения системы III порядка.

Пример.

Система 3-го порядка:

$$D(s) = s^3 + s^2 + s + \lambda.$$

Приравняем собственный оператор  $D(s)$  к нулю:

$$s^3 + s^2 + s + \lambda = 0.$$

Из последнего уравнения выражаем  $\lambda$  в явном виде:

$$\lambda = -s^3 - s^2 - s;$$

$$s \rightarrow j\omega$$

$$\lambda(\omega) = \omega^2 + j(\omega^2 - 1)\omega$$

На рис. 4.23 изображена кривая D-разбиения.

Область I обладает наибольшим числом корней с отрицательной вещественной частью. Поэтому выбираем из этой области  $\lambda = 0,5$  и проверяем на устойчивость с использованием, например, критерия Гурвица.

Характеристическое уравнение в этом случае запишется в виде:

$$r^3 + r^2 + r + 0,5 = 0.$$

Матрица Гурвица для данного уравнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

$$a_0 = 1 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,5 = 0,5 > 0.$$

Итак система устойчива при  $\lambda = 0,5$ . Следовательно, она будет устойчива во всей области I изменения параметра  $\lambda$ .

### 4.7.1. D-разбиение в плоскости двух параметров (диаграмма Вышнеградского)

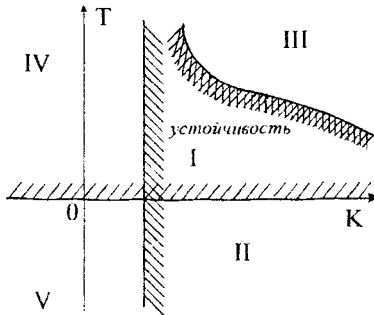


Рис. 4.24. Области устойчивости в плоскости двух параметров.

D-разбиение в плоскости двух параметров дает более полное представление о влиянии физических параметров САУ на устойчивость (рис. 4.24). Задачу построения D-разбиения в плоскости двух параметров для системы третьего порядка решил Вышнеградский И. А.

Случай системы 3-го порядка - наиболее часто встречается в САУ, когда объект регулирования описывается аperiodическим звеном, а

регулятор - колебательным (рис. 1.18).

Запишем собственный оператор системы в общем виде

$$D(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3.$$

Для сведения этой задачи к вариации 2-х безразмерных коэффициентов и решения в общем виде проводим операцию нормализации и вместо  $s$  вводим другой аргумент:

$$\frac{a_0}{a_3} s^3 + \frac{a_1}{a_3} s^2 + \frac{a_2}{a_3} s + 1 = 0; \quad (4.10)$$

$$z^3 = \frac{a_0}{a_3} s^3.$$

Из последнего уравнения выразим оператор  $s$  через аргумент  $z$ :

$$s^3 = \frac{a_3}{a_0} z^3;$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} z.$$

С учётом этого выражения (4.10) можно переписать в виде:

$$z^3 + \frac{a_1}{a_3} \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} z^2 + \frac{a_2}{a_3} \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} z + 1 = 0;$$

или

$$z^3 + Az^2 + Bz + 1 = 0, \quad (4.11)$$

$$\text{где } A = \frac{a_1}{a_3} \sqrt[3]{\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^2};$$

$$B = \frac{a_2}{a_3} \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$

В (4.11) делаем подставку  $z = j\omega$  и разбиваем полученный многочлен на действительную и мнимую части:

$$-j\omega^3 - A\omega^2 + jB\omega + 1 = 0.$$

Действительная часть:

$$U(\omega) = 1 - A\omega^2 = 0.$$

Мнимая часть  $V(\omega) = B\omega - \omega^3 = 0$ . Из полученных уравнений находим

$$A = \frac{1}{\omega^2}; \quad B = \omega^2. \quad (4.12)$$

Находим уравнение границы колебательной устойчивости:

$AB = 1$  - уравнение равнобокой гиперболы. Область устойчивости системы лежит выше этой кривой.

Составим матрицу Гурвица для рассматриваемой системы при значениях  $A$  и  $B$ , определяемых из (4.12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega^2} & 1 & 0 \\ 1 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^2} & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega^2} & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Последний определитель  $\Delta_2$  доказывает, что кривая, определяемая выражением  $AB=1$ , является границей колебательной устойчивости.

График на рис. 4.25 называется диаграммой Вышнеградского. Диаграмма Вышнеградского позволяет определить не только устойчивость САУ, но и вид переходного процесса в ней. Область устойчивости, в свою очередь, разбивается на 3 подобласти: I, II, III (рис. 4.25), соответствующие различному расположению корней характеристического

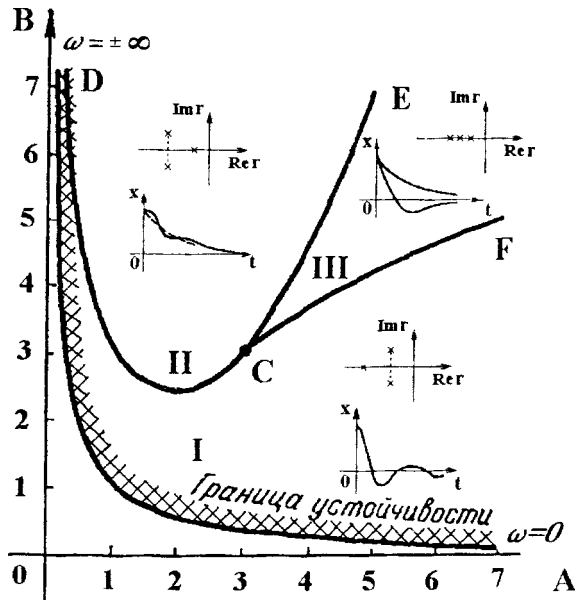


Рис. 4.25. Диаграмма Вышеградского.

уравнения. Отметим, что в точке  $C$ , где  $A=3$  и  $B=3$ , характеристическое уравнение (4.11) принимает вид  $(z+1)^3=0$ . Следовательно, в этой точке все три корня равны:  $z_1=z_2=z_3=-1$ . При этом для исходного

характеристического уравнения (4.10) получаем  $s_1=s_2=s_3=-\sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$ .

В общем случае возможны два варианта:

- 1) все три корня вещественные;
- 2) один корень вещественный и два комплексных.

Границы между этими случаями определяются уравнениями (см. рис. 4.25):

кривая  $CD$ :  $2A^2 - 9AB + 27 = 0$ ;  $A < 3$ ;

кривые  $CE$  и  $CF$ :  $A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0$ ;  $A > 3$ .

В области III, где все корни вещественные, получим аperiodический переходный процесс. Область III носит название области аperiodических процессов. В области I быстрее затухает экспонента и переходный процесс в основном будет определяться колебательной состав-

ляющей. Это – область колебательных процессов. В области II, наоборот, быстрее загорается колебательная составляющая. Это будет область монотонных процессов.

## **4.8. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА САУ**

### **4.8.1. Понятие о синтезе САУ и корректирующих устройствах**

Начальным этапом проектирования любой системы является ее синтез, в результате которого определяются структура и параметры системы, удовлетворяющей заданным в техническом задании требованиям. Синтез САУ проводится обычно в упрощенной постановке, с учетом только основных показателей качества регулирования и запаса устойчивости системы (см. раздел 5). После определения параметров системы (коэффициентов усиления, постоянных времени) приступают к выбору конкретных элементов, энергетическому расчету и согласованию характеристик элементов. Эти этапы проектирования, особенно выбор конкретных элементов, пока трудно поддаются математическому описанию и во многом определяются опытом и смекалкой проектировщика. Однако с внедрением новых поколений ЭВМ и разработкой методических основ САПР становится все более реальным проектирование САУ с меньшим участием человека.

При решении задачи синтеза САУ, как правило, объект регулирования считается заданным или по крайней мере бывают заданы его расчетные характеристики. Тогда синтез САУ сводится к определению структуры и параметров регулятора. Структура регулятора стандартна, и включает в себя такие основные элементы как чувствительный элемент, задающее и сравнивающее устройство, усилитель, исполнительный механизм и корректирующее устройство (КУ).

Воспользовавшись разработанными в ТАУ методами можно определить параметры регулятора с принятой неизменной структурой. Однако при этом не всегда можно получить параметры регулятора, удовлетворяющие одновременно заданным запасам устойчивости и показателям качества регулирования. В этих случаях изменяют структуру регулятора, вводя корректирующее устройство. КУ устанавливают в изменяемую часть регулятора (чувствительные элементы, усилители). Тогда синтез САУ иногда сводится к определению структуры и параметров КУ. Определение параметров КУ существенно упрощается при использовании логарифмических частотных характеристик. КУ в общем случае представляет собой дифференцирующие, интегрирующие или интегро-дифференцирующие звенья. Они могут включаться в цепь регулятора последовательно, параллельно-согласно и параллельно-встречно (в цепи местной обратной связи).

#### 4.8.2. Последовательное корректирующее устройство

При последовательном соединении КУ передаточная функция САУ (рис. 4.26) в разомкнутом состоянии равна

$$W(s) = W_k(s) \cdot W_p(s) \cdot W_o(s),$$

где  $W_k(s)$  - передаточная функция КУ.

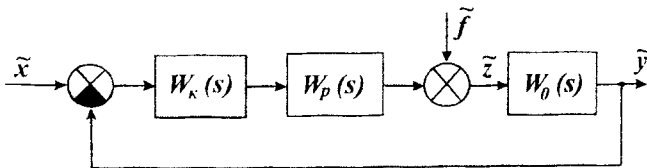


Рис. 4.26. Структурная схема САУ с последовательно включенным корректирующим элементом.

Введение КУ в виде дифференцирующего звена  $W_k(s) = T_k s$  увеличивает быстродействие регулятора, особенно на участках резкого отклонения регулируемого параметра. Таким образом, введение производной от регулируемого параметра компенсирует инерционное запаздывание в регуляторе и улучшает качество регулирования. Однако дифференцирующее КУ одновременно усиливает вредное действие высокочастотных помех, т. к. такое звено хорошо пропускает высокочастотные колебания по сравнению с низкочастотными и совсем не пропускает постоянную составляющую регулируемого параметра (отклонения регулируемого параметра). Поэтому нельзя вести регулирование только по производной от отклонения регулируемого параметра. Обычно дифференцирующее КУ включают параллельно величине рассогласования (рис. 4.27). В этом случае передаточная функция КУ равна

$$W_k(s) = I + T_k s.$$

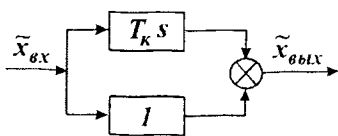


Рис. 4.27. Структурная схема корректирующего элемента, реализующего передаточную функцию

$$W_k(s) = I + T_k s$$

Сигнал на выходе из КУ пропорционален как отклонению регулируемого параметра  $\varepsilon(t)$ , так и его производной  $\dot{\varepsilon}(t)$ .

Если написать выражение для модуля  $M(\omega)$  и аргумента  $\varphi(\omega)$  частотной функции КУ

$$M(\omega) = \sqrt{1 + T_k^2 \omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \omega T$$

и разомкнутой системы

$$\begin{aligned} M_{раз}(\omega) &= M_{б/к}(\omega) \sqrt{1 + T_k^2 \omega^2}, \\ \varphi_{раз}(\omega) &= \varphi_{б/к}(\omega) + \arctg \omega T, \end{aligned} \quad (4.13)$$

то можно сделать заключение, что введение КУ приводит к увеличению аргумента частотной функции разомкнутой САУ (вращает годограф Найквиста против часовой стрелки). Это приводит к увеличению запаса устойчивости системы регулирования. В выражениях (4.13) обозначено:

$M_{б/к}(\omega)$  - модуль передаточной функции разомкнутой системы до установки корректирующего устройства;

$\varphi_{б/к}(\omega)$  - аргумент передаточной функции разомкнутой системы до установки КУ;

$M_{раз}(\omega)$  - модуль передаточной функции системы после установки корректирующего устройства;

$\varphi_{раз}(\omega)$  - аргумент передаточной функции разомкнутой системы после установки КУ.

Последовательные КУ особенно целесообразно применять в электрических частях регуляторов, когда их можно набрать из электрических  $R, C, L$  - элементов.

Рассмотрим пример определения параметров КУ, включенного для коррекции характеристик чувствительного элемента температуры на входе в турбину двигателя. Известно, что термопара описывается уравнением аperiodического звена и имеет передаточную функцию

$$W_T(s) = \frac{\tilde{U}_T}{\tilde{T}_T^*} = \frac{k_T}{T_T s + 1},$$

где  $\tilde{U}_T$  - изображение по Лапласу напряжения на выходе из термопары;

$\tilde{T}_T^*$  - изображение по Лапласу температуры газа,

$k_T, T_T$  - коэффициент передачи и постоянная времени термопары.

При ступенчатом изменении температуры  $T_T^*$  напряжение на выходе из термопары  $U_T$  изменяется по экспоненте (рис. 2.8). Время переходного процесса составляет  $\tau = 3T_T$ . Для увеличения точности регулирования, особенно на переходных режимах работы двигателя необходимо уменьшать  $T_T$ . Термопары современных двигателей имеют по-

стоянную времени  $T_T = 0,2 \dots 1,2 \text{ с}$ , причем постоянная времени зависит не только от свойств материала спая, массы, но и от характера его обтекания, плотности газа. Уменьшение  $T_T$  за счет снижения размеров термопары приводит к снижению ее прочности и ресурса. Поэтому для улучшения динамических характеристик термопар применяют КУ в виде дифференцирующего  $RC$ -контура. Необходимо, чтобы на выходе из термопары сразу за изменением температуры  $T_T^*$  следовало изменение напряжения  $U_T$ . Это возможно, если термопара с КУ будет описываться уравнением пропорционального звена с коэффициентом  $k_T$ .

$$W_{Tk}(s) = W_T(s) \cdot W_k(s) = k_T.$$

Из последнего равенства получим выражение для требуемой передаточной функции КУ

$$W_k(s) = \frac{k_T}{W_T(s)} = T_T s + 1.$$

Таким образом передаточная функция КУ имеет вид

$$W_k(s) = T_k s + 1.$$

Такую передаточную функцию можно реализовать электрической  $RC$ -цепью (рис. 4.28).

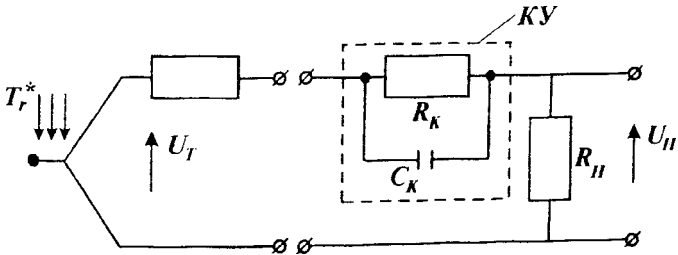


Рис. 4.28. Схема включения дифференцирующего КУ в цепь термопары

Тогда передаточная функция КУ определяется как отношение

$$W_k(s) = \frac{\tilde{U}_H}{\tilde{U}_T}, \quad (4.14)$$



где  $\tilde{U}_H$  - напряжение на входе в нагрузку, имеющую сопротивление  $R_H$ . Для определения  $W_k(s)$  в соответствие с равенством (4.14) воспользуемся законами Ома для замкнутой цепи

$$\tilde{U}_H = \tilde{I} \cdot R_H, \quad \tilde{I} = \frac{\tilde{U}_T}{Z_\Sigma},$$

где  $Z_\Sigma$  - суммарный импеданс замкнутой цепи. Так как  $R_T \ll R_H$  и

$R_T \ll R_k$ , то  $Z_\Sigma = R_H + \frac{R_k}{1 + R_k C_k s}$ . Тогда справедливо равенство

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}_T (1 + R_k C_k s)}{R_k + R_H + R_H R_k C_k s}$$

$$\tilde{U}_H = \frac{R_H (1 + R_k C_k s)}{R_k + R_H + R_H R_k C_k s} \tilde{U}_T$$

Обозначим  $R_k C_k = T_k$ ,  $k = \frac{R_H}{R_k + R_H}$ , тогда выражение для  $W_k(s)$

примет вид

$$W_k(s) = \frac{k}{1 + kT_k s} (1 + T_k s).$$

Выражение  $W_k(s)$  реального КУ отличается от  $W_k(s)$  идеального КУ множителем  $\frac{k}{1 + kT_k s}$ . Чем меньше величина  $k$ , тем

ближе выражение  $\frac{k}{1 + kT_k s}$  к коэффициенту  $k$ , а следовательно и об-

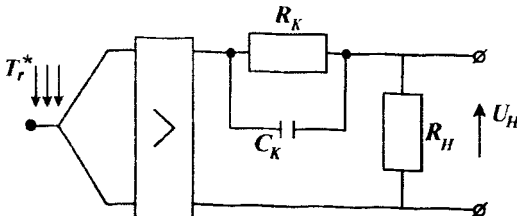


Рис. 4.29. Схема включения КУ в цепь термопары с усилителем

щее выражение  $W_k(s)$  к передаточной функции идеального КУ. Однако при этом сигнал на выходе из КУ ослабляется. Поэтому требуется подключить в цепь до-

полнительный усилитель (рис. 4.29). При этом коэффициент его усиления должен быть  $k_{yc} \geq \frac{1}{k}$ . Ввиду того, что  $T_T$  зависит от режима работы двигателя, то ее величина будет переменна. В этом случае  $T_k$  делают также переменным в зависимости от режима работы двигателя. Однако такие системы требуют установки дополнительных чувствительных и исполнительных элементов, поэтому применяют обычно КУ с  $T_k = const$ , настроенного на наибольшее значение  $T_T$  в процессе работы двигателя.

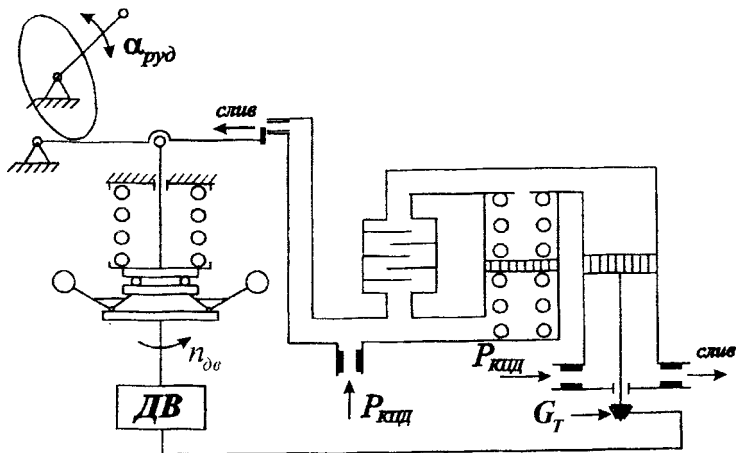


Рис. 4.30. Принципиальная схема САР двигателей семейства НК с гидромеханическим регулятором, имеющим прямую скоростную связь.

Дифференцирующие КУ можно реализовать и в гидромеханических регуляторах, например, в агрегатах дозирования топлива (АДТ) двигателей семейства НК (рис. 4.30). Подпружиненный с обеих сторон поршень выполняет роль электрической емкости  $C_k$ , а дросселирующий элемент – сопротивления  $R_k$ . За входной параметр КУ можно принять перепад давления на нем, а за выходной – расход жидкости. Тогда уравнения КУ в малых приращениях примут вид

$$\begin{aligned}\Delta Q_{ax} &= \Delta Q_{op} + \Delta Q_n \\ \Delta Q_{op} &= \frac{1}{R_{op}} \Delta P_k \\ \Delta Q_n &= \frac{F_n^2}{2C_{np}} \frac{\Delta P_k}{dt}\end{aligned}\quad (4.15)$$

где  $\Delta Q_{ax}$  - объемный расход жидкости на входе в КУ;

$\Delta Q_{op}$  - расход жидкости через дросселирующий элемент;

$\Delta Q_n$  - расход жидкости, обусловленный движением поршня;

$\Delta P_k$  - перепад давления на КУ;

$F_n$  - площадь торца поршня;

$C_{np}$  - жесткость пружины КУ.

Переходя в (4.15) к изображениям по Лапласу, после преобразований получим:

$$\Delta \tilde{Q}_{ax} = k(1 + T_k s) \Delta \tilde{P}_k,$$

где  $k = \frac{1}{R_{op}}$ ,  $T_k = \frac{F_n^2 R_{op}}{(2C_{np})}$  - коэффициент передачи и постоянной времени КУ.

Из последнего выражения ясно, что чем больше сопротивление дросселя  $R_{op}$ , тем меньше коэффициент передачи КУ и больше постоянная времени  $T_k$ . Во многих системах  $T_k$  изменяют в зависимости от внешних условий и режима работы двигателя за счет автоматического подключения дополнительных дроссельных пакетов различного гидравлического сопротивления.

В некоторых статических САУ с целью исключения статической ошибки регулирования последовательно в цепь регулятора включают интегрирующие КУ с передаточной функцией

$$W_k(s) = \frac{1}{T_k s}.$$

Однако такая коррекция делает систему астатической, т. е. склонной к колебаниям в процессе регулирования. Поэтому чаще применяют регуляторы с местной изодромной обратной связью.

### 4.8.3. Параллельные корректирующие устройства

Из параллельных КУ наибольший интерес представляют устройства с параллельно-встречным соединением, которые образуют в цепи регулятора местные отрицательные обратные связи (рис. 4.31).

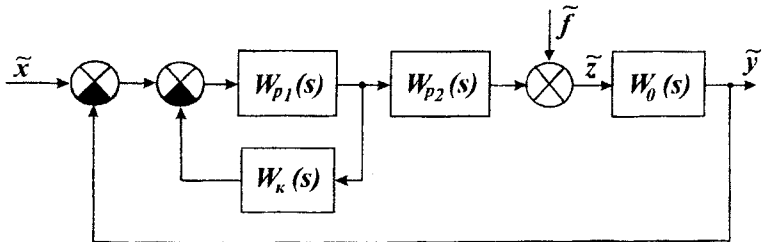


Рис. 4.31. Схема САР с параллельным КУ

Передаточная функция разомкнутой части САР равна

$$W(s) = W_{кр1}(s)W_{p2}(s)W_0(s),$$

где  $W_{кр1}(s) = \frac{W_{p1}(s)}{1 + W_k(s)W_{p1}(s)}$  - передаточная функция части регулятора с КУ. Если в рабочем диапазоне частот предполагать  $Re[W_k(j\omega)W_{p1}(j\omega)] \gg 1$ , то можно записать

$$W_{кр1}(s) \approx \frac{1}{W_k(s)}.$$

Следовательно, можно подобрать такое КУ, что  $W_{кр1}(s)$  не зависит от характеристик изменяемой части регулятора  $W_{p1}(s)$ .

Таким образом, введением местных обратных связей можно уменьшить влияние различного рода нелинейностей (сухое трение, люфты, зоны нечувствительности). Использование параллельных КУ по сравнению с последовательными делает регулятор менее чувствительным к внешним помехам.

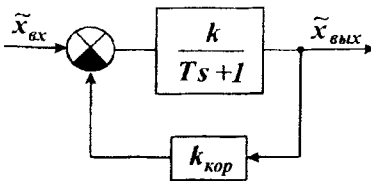


Рис. 4.32. Схема включения КУ в цепи обратной связи

КУ в виде пропорционального звена  $W_k(s) = k_{kop}$  реализуется жесткой обратной свя-

зью (рис. 4.32). Рассмотрим, как меняются свойства изменяемой части регулятора, описываемой передаточной функцией аperiodического звена

$$W_{PI}(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

$$\text{Тогда } W_{кPI}(s) = \frac{k}{(Ts + 1) \left( 1 + \frac{kk_{кор}}{Ts + 1} \right)} = \frac{k'}{T's + 1},$$

$$\text{где } k' = \frac{k}{1 + kk_{кор}}, \quad T' = \frac{T}{1 + kk_{кор}}.$$

Таким образом, введение жесткой обратной связи в часть регулятора с передаточной функцией аperiodического звена не изменяет тип звена, а приводит лишь к изменению параметров звена: к уменьшению коэффициента передачи и постоянной времени исходного звена.

## 5. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

### 5.1. КРИТЕРИИ И СПОСОБЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА

Устойчивость является необходимым, но недостаточным условием работоспособности линейной САУ.

Устойчивость означает, что переходные составляющие процессов затухают. Для практики этого мало. Поэтому возникают определённые требования к времени затухания переходных составляющих, к характеру реакции системы на управляющие и возмущающие воздействия, к точности воспроизведения входных сигналов и к величинам ошибок, вызванных действием возмущений. Все эти стороны работоспособности САУ обобщаются понятием “качество регулирования”. Качество регулирования оценивается рядом показателей. Выбор того или иного показателя для оценки работоспособности системы зависит от назначения и условий работы системы. К основным показателям относятся статическая ошибка, ошибка по скорости и ускорению, а также показатели качества переходного процесса.

К показателям качества работы САУ относятся также ошибки в установившихся вынужденных режимах, причём функции воздействия на систему  $y_{np}(t)$  и  $f(t)$  являются медленно меняющимися функциями времени в сравнении с переходными функциями. Частным и важным случаем медленноменяющихся воздействий являются постоянные воздействия, т.е. случаи, когда  $y_{np}(t), f(t) = const$ . Для следящих систем, кроме того, важны медленно меняющиеся входные сигналы вида  $y_{np}(t) = y_{np0}t^k$  (где  $k=1,2$  и реже 3), а также синусоидальные сигналы  $y_{np}(t) = y_{np} \sin \omega t$ , причём в последнем случае  $\omega$  должна лежать в полосе частот пропускания системы.

Критерием точности системы в установившемся режиме является значение ошибки, при этом важны как ошибка воспроизведения регулируемого параметра, так и ошибка, вызванная действием возмущения. По своей природе как управляющие воздействия  $y_{np}(t)$ , так и возмущения  $f(t)$  - случайные функции времени и как таковые могут быть заданы своими вероятностными характеристиками. В связи с этим возникает проблема вероятностной оценки ошибки по известным вероятностным характеристикам воздействий и известной динамической структуре системы. Вероятностные критерии точности САУ разработаны сравнительно недавно.

## 5.2. КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В САУ. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Качество переходного процесса определяется по графику изменения выходной величины во времени при подаче в систему скачкообразного (ступенчатого) возмущения. В понятие качества переходного процесса входят: быстродействие, колебательность, перерегулирование.

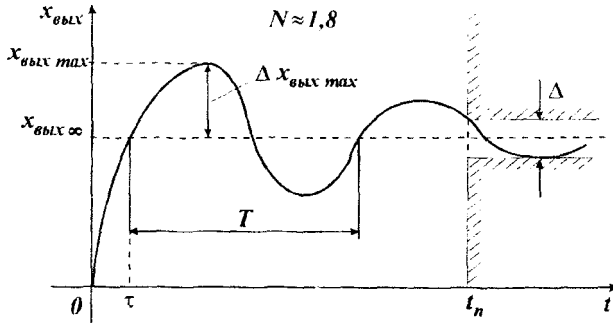


Рис. 5.1. Показатели качества переходного процесса.

Быстродействие - оценивается двумя параметрами (рис.5.1):

- 1) Время (первого) согласования  $\tau$  - время, в течение которого система, находящаяся под действием ступенчатого возмущения впервые достигает согласованного положения.
- 2) Время переходного процесса  $t_n$  - отрезок времени, в течение которого выходная величина попадает в зону или интервал  $\Delta$  погрешности относительно своего нового установившегося значения.

Величина  $\Delta$  зависит от требований к точности работы САУ. Этой точностью определяется и величина  $t_n$ . Обычно  $\Delta \leq 5\%$  от  $x_{вых}(\infty)$ .

Для монотонного переходного процесса  $\tau = t_n$ .

Колебательность - определяется числом колебаний  $N$  за время переходного процесса  $t_n$ .  $N$  может быть дробным:

$$N \cong \frac{t_n}{T_k},$$

где  $T_k$  - "период" колебаний.

$$\text{Частота колебаний } f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{1}{T_k}.$$

Колебания, возникающие в системе приводят к износу механизмов, увеличивают время переходного процесса и являются нежелательными. В авиационных двигателях во время переходного процесса допускается не более 2...3 колебаний.

Перерегулирование - наибольший заброс в сторону, противоположную начальному рассогласованию (относительно установившегося значения) (рис.5.1):

$$\alpha = \frac{x_{\text{вых max}} - x_{\text{вых}}(\infty)}{x_{\text{вых}}(\infty)}.$$

При проектировании САУ стремятся обеспечить минимальное значение  $\tau$ . Это приводит к тому, что система становится быстродействующей с большим перерегулированием.

Допустимая величина  $\Delta x_{\text{вых max}}$  зависит от максимальных допустимых динамических напряжений, температурных условий в узлах двигателя.

В реальных системах желательно стремиться к тому, чтобы  $\alpha$  и  $t_n$  были минимальны.

Построение САУ, удовлетворяющей заданным показателям качества переходного процесса, представляет достаточно трудоемкую инженерную задачу. Для анализа влияния конструктивных и эксплуатационных параметров систем на качество переходного процесса требуется построить серию кривых переходных процессов. Построение переходного процесса может быть выполнено точными методами для систем невысокого порядка и приближенными методами для нелинейных систем и систем высокого порядка. К приближенным методам относятся метод численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭЦВМ, моделирование на АВМ и частотные методы. Выбор параметров САУ на основе построения серии переходных характеристик представляет собой трудоемкий процесс и в общем случае невозможно установить аналитическую зависимость между параметрами системы и показателями качества переходного процесса. Поэтому для связи параметров САУ с показателями качества переходного процесса в ТАУ введены косвенные оценки. Эти оценки связаны с одной стороны с параметрами САУ, а с другой - с показателями качества переходного процесса. Существуют несколько косвенных оценок качества переходного процесса: оценка по распределению корней характеристического уравнения; оценка по вещественным частотным характеристиками САУ; интегральные оценки. Ниже будут рассмотрены



вопросы выбора параметров САУ с использованием этих косвенных оценок переходного процесса.

### 5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ САУ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Метод определения параметров САУ по распределению корней характеристического уравнения в основном применяется для систем с передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{k}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Корни характеристического уравнения данной системы, распределенные определенным образом на левой полуплоскости корней, полностью определяют качество переходного процесса в системе. Так как трудно анализировать влияние каждого корня на качество переходного процесса и на основе этого выбирать параметры системы управления, вводят косвенные оценки распределения корней характеристического уравнения: степень устойчивости  $\delta$  и колебательность  $\mu$  (рис. 5.2).

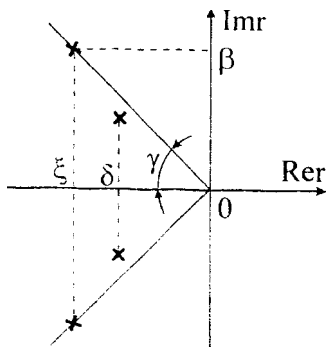


Рис. 5.2. Определение качества переходного процесса по расположению корней характеристического уравнения.

Для определения параметров САУ с использованием этого метода сначала необходимо выяснить с одной стороны связь этих оценок с распределением корней характеристического уравнения на комплексной плоскости корней, а следовательно, и с параметрами системы, а с другой стороны – связь этих оценок с показателями качества переходного процесса.

Степень устойчивости  $\delta$  САУ представляет собой модуль вещественной части корня, наиболее близко расположенного к мнимой оси комплексной плоскости корней  $\delta = |\text{Re} r_i|_{\min}$ . Величина  $\delta$  характеризует длительность переходного процесса. Кор-

ни с наименьшей по абсолютной величине вещественной частью дают в переходном процессе составляющие, которые затухают медленнее других.

Оценивая приближенно длительность переходного процесса только по ближайшему к мнимой оси корню, получим:

$$\begin{aligned} \Delta y_i(t) &= c_i e^{-\delta t} \quad \text{- в случае вещественного корня и} \\ \Delta y_{i,i+1}(t) &= A_i e^{-\delta t} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (5.1)$$

- в случае комплексно-сопряженных корней.

Если за время регулирования  $\tau_p$  составляющая  $\Delta y_i(\tau_p)$  (в случае вещественного корня) примет значение  $\Delta y_i(\tau_p) = \varepsilon c_i$ , то длительность процесса определится из равенства  $\varepsilon c_i = c_i e^{-\delta \tau_p}$  и будет равна

$$\tau_p = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (5.2)$$

где  $\varepsilon$  - величина, показывающая во сколько раз уменьшается выходная величина за время регулирования.

К аналогичному соотношению можно прийти, рассматривая  $\Delta y_i(\tau_p)$  для случая комплексных корней.

Колебательность системы управления  $\mu$  определяется как тангенс угла, образованного осью абсцисс и прямой, проведенной из начала координат к точке, соответствующей корню, при проведении прямой через который, этим углом охватываются все корни в одной из четвертей левой полуплоскости корней, то есть  $\mu = \operatorname{tg} \gamma$  (см. рис. 5.2).

Колебательность  $\mu$  характеризует перерегулирование и скорость затухания колебаний во время переходного процесса в системе. Действительно, наличие среди корней характеристического уравнения комплексно-сопряженных корней предопределяет колебательный характер переходного процесса, причем колебательная составляющая затухает по закону (5.1).

Определим затухание амплитуды колебаний за один период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i}. \quad \text{В некоторый момент времени } t = t_1 \text{, эта амплитуда равна}$$

$A_1 = c_i e^{-\alpha_i t_1}$ , а через один период -  $A_2 = c_i e^{-\alpha_i (t_1 + 2\pi/\omega_i)}$ . Затухание амплитуды колебаний за период равно

$$\xi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - e^{-\frac{2\pi\alpha_i}{\omega_i}}$$

или

$$\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} \quad (5.3)$$

Обычно затухание выражают в процентах  $\xi = \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}\right) \cdot 100\%$ . Из

равенства (5.3), задавшись степенью затухания  $\xi$  можно определить колебательность

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\xi}} \quad (5.4)$$

В САУ требуемое затухание колебаний за период составляет (90...98)%. Например, если  $\xi = 98\%$ , то допустимая колебательность  $\mu \approx 1,5$ , а при  $\xi = 90\%$   $\mu \approx 2,7$ . Таким образом, чем меньше затухание  $\xi$ , тем больше колебательность  $\mu$ .

Задавая значение  $\tau_p$  и  $\xi$ , можно определить по формулам (5.2) и (5.4) косвенные оценки  $\delta$  и  $\mu$  качества переходного процесса в САУ. Для определения параметров системы необходимо связать их с  $\delta$  и  $\mu$ . Для этого разработаны специальные методы, с использованием которых по заданному собственному оператору  $D(s)$  системы находятся уравнения связи  $\delta$  и  $\mu$  с коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , т. е. фактически с физическими параметрами САУ. Достаточно точные результаты получаются для систем с уравнением невысокого порядка. Например, И.А. Вышнеградским составлены такие уравнения для системы третьего порядка ( $n = 3$ ) и построены номограммы в плоскости безразмерных комплексов  $A$  и  $B$  для серий  $\delta = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$ . Так как при построении диаграммы И.А. Вышнеградского исходное уравнение приводилось к безразмерной форме (см. раздел 4), то относительная степень устойчивости равна

$$\bar{\delta} = \delta_3 \sqrt{\frac{a_0}{a_3}},$$

а колебательность – величина безразмерная, т. е.  $\bar{\mu} = \mu$ .

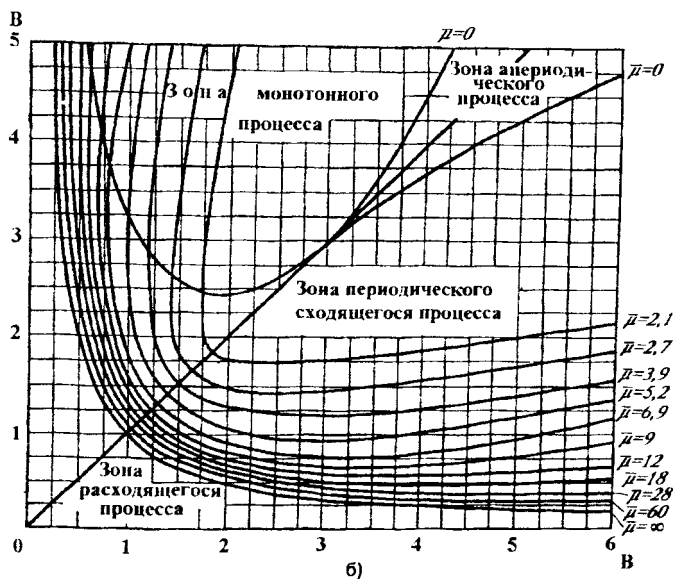
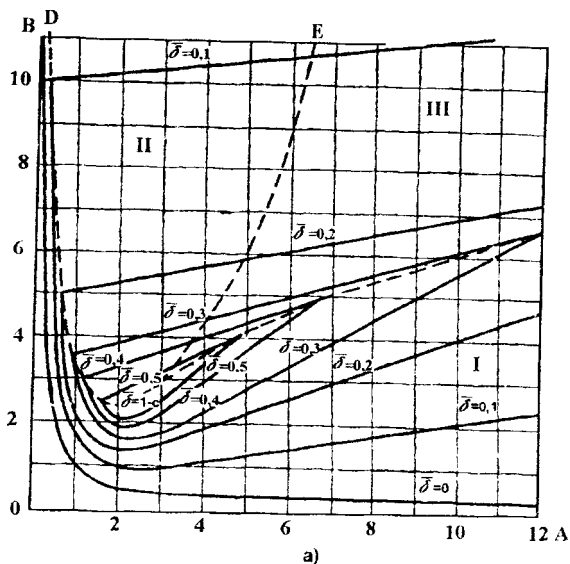


Рис. 5.3. Линии равных значений степени устойчивости (а) и колебательности (б) на диаграмме И.А. Вышнеградского.

Порядок выбора параметров САУ при заданных  $\tau_p$  и  $\xi$  таков, что по формулам (5.2) и (5.4) определяют  $\delta$  и  $\mu$ . Задаваясь рядом коэффициентов, входящих в  $a_0$  и  $a_3$ , определяют  $\bar{\delta} = \delta \sqrt{\frac{a_0}{a_3}}$  и  $\bar{\mu} = \mu$ . Из

диаграммы И.А. Вышнеградского находят два безразмерных комплекса  $A$  и  $B$ , соответствующих пересечению кривых равной степени устойчивости  $\bar{\delta}$  и колебательности  $\bar{\mu}$ . При этом целесообразно вначале провести анализ возможных вариантов переходного процесса в соответствии с рис. 5.3 и задать желаемый его характер изменения во времени. При известных величинах  $A$  и  $B$ , задаваясь всеми параметрами кроме двух, определяют искомые их величины из решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a_1}{a_3} \sqrt[3]{\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^2} \\ B &= \frac{a_2}{a_3} \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} \end{aligned} \right\}$$

После того, как определены параметры всех звеньев регулятора, делают контрольный расчет характеристики САУ и сравнивают требуемые показатели качества переходного процесса с полученными в результате расчета. При удовлетворительном их совпадении приступают к конструированию регулятора, а при несовпадении повторяют вновь расчет параметров регулятора.

#### 5.4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ КАЧЕСТВА

Пределные теоремы качества касаются в основном свойств частотных характеристик системы, хотя за критерий качества взяты параметры переходных процессов. Таким образом, решения в частотной области, которые получаются сравнительно легко (с использованием преобразования Лапласа  $s \rightarrow j\omega$ ) позволяют оценить изменение параметров систем во времени, которые для систем высокого порядка аналитическим путем точно получены быть не могут.

За критерий перехода от свойств систем в частотной области к свойствам во временной берется действительная частотная характеристика (действительная часть частотной характеристики). Это — функция, описывающая зависимость величины проекции годографа АФЧХ на действительную ось в зависимости от  $\omega$ :  $ReW(\omega)$  (рис. 5.4).

Теорема 1. Переходные характеристики в системах отличаются тем меньше, чем меньше расходятся их действительные частотные характеристики. Одинаковым действительным частотным характеристикам соответствует одинаковый переходный процесс.

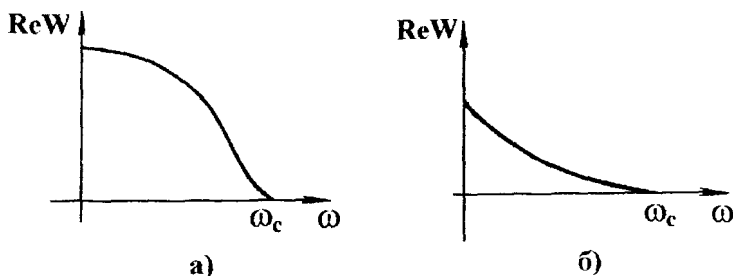


Рис. 5.4. Оценка качества переходных характеристик по виду действительной частотной характеристики.

Теорема 2. Если действительная частотная характеристика имеет разрыв при  $\omega = 0$ , то система имеет асимптотическую неустойчивость.

Теорема 3. Если действительная частотная характеристика имеет разрыв при каком-либо значении  $\omega_i \neq 0$ , то система имеет колебательную неустойчивость с частотой  $\omega_i$ .

Теорема 4. Для того чтобы величина перерегулирования не превышала 18%, достаточно иметь положительную невозрастающую действительную частотную характеристику (рис. 5.4,а).

Теорема 5. Чтобы переходная характеристика была монотонной (без колебаний и экстремумов), достаточно, чтобы  $ReW$  была монотонно убывающей функцией (производная не меняет знак) (рис. 5.4,б).

Теорема 6. В случае невозрастающей непрерывной действительной частотной характеристики (рис. 5.4,а), время переходного процесса ограничивается следующими пределами:

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t_n < \frac{4\pi}{\omega_c}.$$

Теорема 7. Если  $ReW$  – положительная монотонно убывающая функция (рис. 5.4,б), то время переходного процесса

$$t_n > \frac{4\pi}{\omega_c}$$

### 5.5 ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

При оценке качества переходного процесса по амплитудно-частотным характеристикам рассматривается АЧХ системы.

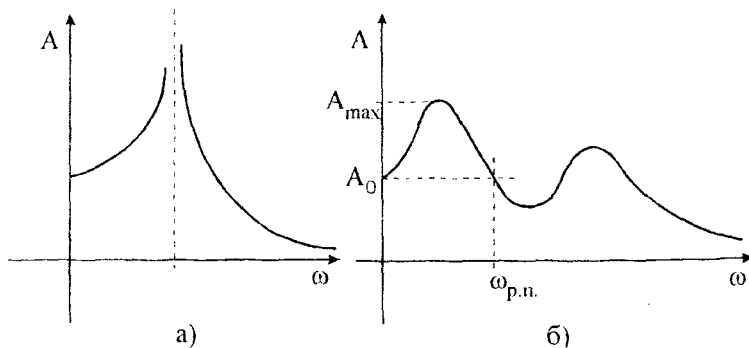


Рис. 5.5. Амплитудно-частотная характеристика САУ.

Наличие разрыва на АЧХ указывает на неустойчивость системы или на ее высокую добротность (рис. 5.5,а).

Уменьшение пика характеризует уменьшение числа колебаний в переходном режиме.

При наличии на характеристике нескольких пиков наибольшее влияние на переходный процесс оказывает первый максимум.

Величина  $\frac{A_{\max} - A_0}{A_0}$  носит название показателя колебательности

( $A_0$  - амплитуда при  $\omega = 0$ ) (рис. 5.5,б).

В практике считаются работоспособными системы, у которых показатель колебательности  $\leq 0,3 \div 0,4$

Быстродействие системы характеризуется полосой равномерного пропускания частот. Ширина полосы равномерного пропускания частот определяется той частотой  $\omega_{p.n.}$ , при которой амплитуда становится равной значению амплитуды при  $\omega = 0$  (рис.5.5,б).

Чем шире полоса, тем быстрее действие лучше. Связь времени переходного процесса с частотой равномерного пропускания определяется:  $t_n \cong \frac{2\pi}{\omega_{p.n.}}$ .

## 5.6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

С увеличением порядка дифференциальных уравнений САУ более трудно анализировать качество переходного процесса. Для этого случая в ТАУ введены интегральные оценки при использовании которых можно выбирать параметры САУ соответствующие минимальному времени переходного процесса.

Как уже известно, переходный процесс был бы идеальный, если бы в момент возникновения управляющего воздействия регулируемый параметр принимал бы мгновенно новое установившееся значение и не изменялся бы до возникновения нового воздействия. В реальном процессе это невозможно. Отличие реального процесса от идеального тем больше, чем больше площадь, заключенная между кривыми этих процессов (рис. 5.6,а). Степень отличия реального и идеального переходного процессов оценивается интегральными оценками.

Простейшей интегральной оценкой является

$$I_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt,$$

где  $\varepsilon(t) = y_{\infty} - y(t)$  - отклонение регулируемого параметра от нового установившегося значения. Геометрически  $I_0$  выражает площадь под кривой переходного процесса, построенного по отклонению. Заштрихованная площадь будет тем меньше, чем меньше величина отклонения  $\varepsilon(t)$  и быстрее затухает переходный процесс. Следовательно, чем меньше  $I_0$ , тем лучше переходный процесс в САУ. Рассмотрим выбор параметров САУ на основе интегральной оценки  $I_0$ .

Пусть передаточная функция замкнутой САУ имеет вид

$$W_{зам}(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{K(s)}{D(s)}.$$

Изображение регулируемого параметра определяется по формуле

$$\tilde{y} = \frac{K(s)}{D(s)} \tilde{x}.$$



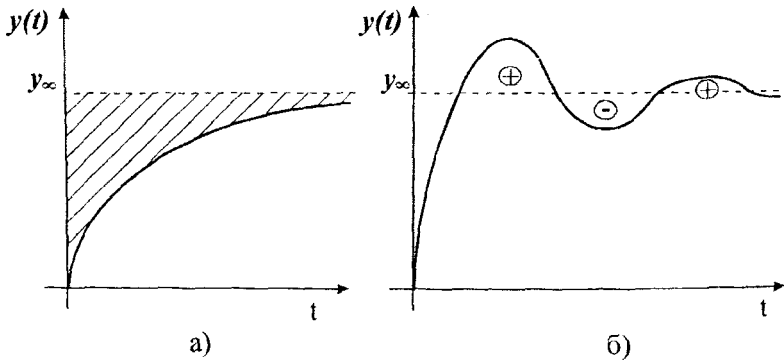


Рис. 5.6. Графики переходных процессов.

Так как  $\varepsilon(t) = y_\infty - y(t)$ , то соответствующее выражение для  $\tilde{\varepsilon}$  в изображениях по Лапласу запишется в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{y}_{s=0} - \tilde{y},$$

где  $\tilde{y}_{s=0} = \frac{K(0)}{D(0)} \tilde{x}$  - изображение по Лапласу  $y_\infty$ .

Подставляя выражения  $\tilde{y}$  и  $\tilde{y}_{s=0}$  в формулу для  $\tilde{\varepsilon}$ , получим

$$\tilde{\varepsilon} = \left[ \frac{K(0)}{D(0)} - \frac{K(s)}{D(s)} \right] \tilde{x} = \left[ \frac{b_m}{a_n} - \frac{K(s)}{D(s)} \right] \tilde{x}.$$

Так как рассматривается переходный процесс при единичном ступенчатом входном воздействии, то  $\tilde{x} = \frac{1}{s}$  и изображение отклонения регулируемого параметра запишется в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{b_m D(s) - a_n K(s)}{a_n D(s)} \cdot \frac{1}{s}.$$

Интеграл  $I_0$  можно представить в виде

$$I_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon},$$

так как  $\tilde{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt$ .

Из последнего равенства для  $I_0$  следует

$$I_0 = \lim_{s \rightarrow \theta} \left( \frac{b_m D(s) - a_n K(s)}{a_n D(s)} \cdot \frac{1}{s} \right) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \theta} \frac{b_m \left[ a_0 s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{s} \right] - a_n \left[ b_m s^{m-1} b_{m-1} s^{m-2} + \dots + \frac{b_m}{s} \right]}{a_n \left[ a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \right]}.$$

Вычислив данный предел, получим

$$I_0 = \frac{b_m a_{n-1} - b_{m-1} a_n}{a_n^2}.$$

Пусть, исходя из минимума интегральной оценки, требуется два каких-нибудь параметра  $\theta$  и  $\gamma$  САУ. Эти параметры входят в коэффициенты  $a_0 \dots a_n$  и  $b_0 \dots b_m$ . Для определения  $\theta$  и  $\gamma$ , удовлетворяющих минимальному времени переходного процесса выражают  $I_0$  в функции от  $\theta$  и  $\gamma$  в явном виде, т. е.  $I_0(\theta, \gamma)$ . Затем вычисляют частные производные по  $\theta$  и  $\gamma$  и приравнивают их нулю. В результате получают два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_0(\theta, \gamma)}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial I_0(\theta, \gamma)}{\partial \gamma} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

с двумя неизвестными  $\theta$  и  $\gamma$ . Функция  $I_0$  не всегда имеет экстремум по рассматриваемым параметрам. Тогда нужно выбирать их по наименьшему значению  $I_0$  из области изменения  $\theta$  и  $\gamma$ , назначаемой из других соображений. При выбранных таким образом параметрах может оказаться так, что система регулирования вначале удовлетворявшая заданному запасу устойчивости станет неудовлетворительной. Тогда уточняют значения  $\theta$  и  $\gamma$  таким образом, чтобы система не оказалась слишком близкой к границе устойчивости. Также уточнения можно произвести построением диаграмм в плоскости двух параметров, полученных для различных  $I_0 = \text{const}$ . Оценка качества переходного процесса и выбор параметров САУ по интегральной оценке  $I_0$  применимы лишь при заведомо монотонных (без колебаний) процессах. Если имеет место колебательный переходный процесс (рис.

5.6,б), то при вычислении интеграла  $I_0$  площади отклонений от идеального переходного процесса будут складываться алгебраически и наименьшему значению  $I_0$  может соответствовать длительный колебательный процесс.

В этих случаях применяется квадратичная интегральная оценка

$$I_I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt. \quad (5.5)$$

Параметры САУ выбираются из условия обеспечения  $(I_I)_{\min}$ .

Для этого находится выражение, связывающее  $I_I$  с коэффициентами  $a_0 \dots a_n, b_0 \dots b_m$ . Например для систем с  $m < n$  это выражение имеет вид

$$I_I = \frac{I}{2a_n^2 \Delta} (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_0 \Delta_0) - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2}, \quad (5.6)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & 0 \\ 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} B_m &= b_m^2; \\ B_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2}, \\ B_k &= b_k^2 - 2b_{k+1} b_{k-1} + 2b_{k+2} b_{k-2} + 2(-1)^k b_m b_{2k-m}, \\ B_0 &= b_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Определители  $\Delta_k (k = 0, m-1, \dots, 0)$  в формуле (5.6) находятся по (5.7) путем замены  $(m-k+1)$ -го столбца столбцом

$$\begin{aligned} &a_{n-1} \\ &a_n \\ &0 \\ &0 \end{aligned}$$

В определителе (5.7) заменяются нулями все буквы с индексами меньше нуля и больше  $n$ , а в формуле (5.8) – с индексами меньше нуля и больше  $m$ . Выбор параметров САУ, исходя из обеспечения  $(I_1)_{min}$ , может осуществляться аналогично удовлетворению условия  $(I_0)_{min}$ .

Как следует из (5.5), величина  $I_1$  не зависит от знака отклонения  $\varepsilon(t)$ , а значит и от формы переходного процесса (монотонного или колебательного). Однако, как показали расчеты, если выбирать параметры САУ из условия минимума  $I_1$ , то переходный процесс получается чрезмерно колебательным. Это связано с тем, что оценка  $I_1$  учитывает только величину отклонения  $\varepsilon(t)$  и время затухания и никак не учитывает скорость изменения  $\dot{\varepsilon}(t)$ . Если, например, подать на вход системы единичный скачок, то ошибка в переходном процессе определится заштрихованной частью на рис. 5.7,а.

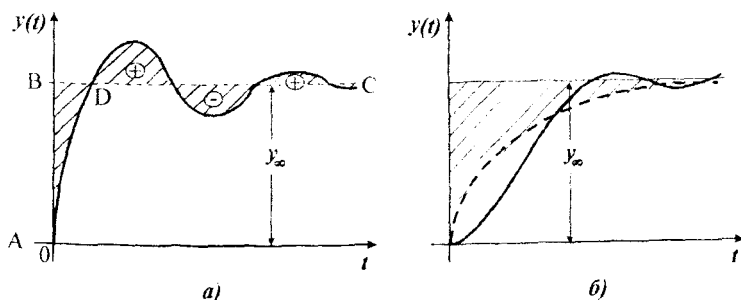


Рис. 5.7. К вопросу об интегральных оценках качества.

Очевидно, что величина интегральной оценки (5.5) будет тем меньше, чем ближе будет кривая переходного процесса к ломаной линии АОВС. Но приближение процесса к этой линии требует увеличения угла наклона кривой к начальной стадии процесса (приближение части кривой OD к отрезку OB). Увеличение же начальной скорости может вызвать значительное перерегулирование и, следовательно, малый запас устойчивости. Поэтому была введена другая, так называемая улучшенная квадратичная оценка

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + T^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt, \quad (5.9)$$

где  $T$  - весовой коэффициент, равный некоторой постоянной времени. В этой интегральной оценке учтено влияние скорости  $\dot{\varepsilon}(t)$  на качество переходного процесса. Выбор параметров САУ по улучшенной квадратичной оценке  $I_2$  приводит к менее колебательным процессам по сравнению с использованием квадратичной оценки  $I_1$ .

Действительно, выражение (5.9) можно переписать в виде

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + T\dot{\varepsilon}(t)]^2 dt - T\varepsilon^2(t) \Big|_0^{\infty}.$$

Так как  $\varepsilon^2(t) \Big|_0^{\infty} = y_{\infty}^2$ , то переходный процесс, соответствующий минимальному значению  $I_2$ , будет при условии

$$T\dot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t) = 0,$$

т. е. когда  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{T}}$ . Данный процесс будет монотонным, нисходящим, с временем окончания, определяемым постоянной времени  $T$ .

Следовательно, выбирая параметры системы по минимуму улучшенной интегральной оценки (5.9), можно приблизить переходный процесс к экспоненте  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{T}}$  с постоянной времени  $T$ , которая носит в этом случае название экстремали.

Для связи улучшенной интегральной оценки  $I_2$  с коэффициентами уравнения  $a_0 \dots a_n, b_0 \dots b_m$  может быть использовано выражение

$$I_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt + T^2 \int_0^{\infty} \dot{\varepsilon}^2(t) dt,$$

в котором первая составляющая правой части находится по формуле (5.6), а вторая составляющая может быть определена с учетом условия

$$F[\dot{\varepsilon}(t)] = s\tilde{\varepsilon}. \text{ Тогда } T^2 \int_0^{\infty} [\dot{\varepsilon}(t)]^2 dt \text{ рассчитывается по выражению}$$

(5.6) с тем отличием, что при определении  $\Delta_K$  и коэффициентов  $B_m \dots B_0$  будет учтено повышение степени  $m$  на единицу, а  $\Delta$  - находится по той же формуле (5.7). Задавшись постоянной времени  $T$  и обеспечив минимум интеграла  $I_2$  по каким-либо параметрам системы

$\theta$  и  $\gamma$ , находят искомые параметры САУ, при которых переходный процесс в ней будет близок к желаемому (см. рис. 5.7,6).

Преимуществом интегральных оценок является то, что они дают единую числовую оценку качества переходного процесса. Недостаток состоит в том, что одному и тому же значению интегральной оценки могут соответствовать разные формы переходного процесса, что создает некоторую неопределенность при решении задачи выбора параметров САУ.

## 5.7. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ ПРИ ПОСТОЯННЫХ И МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Точность САУ определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями регулируемого параметра. К точности САУ авиационных двигателей предъявляются особенно жесткие требования. Поэтому вопрос о точности САУ является одним из важных вопросов ТАУ. Рассмотрим от каких факторов зависит ошибка регулирования системы и каким образом можно уменьшить эту ошибку.

В общем случае ошибка регулирования складывается из ошибок регулирования по управляющему  $\varepsilon_y(t)$  и возмущающему  $\varepsilon_f(t)$  воздействиям:  $\varepsilon(t) = \varepsilon_y(t) + \varepsilon_f(t)$ . Рассмотрим ошибку регулирования  $\varepsilon_f(t)$ , выводы по которой будут справедливы и для  $\varepsilon_y(t)$ . При определении  $\varepsilon_f(t)$  можно воспользоваться передаточной функцией САУ (рис. 3.8) по отклонению регулируемого параметра

$$\Phi(s) = \frac{\tilde{\varepsilon}_f}{\tilde{x}_{возм}} = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)W_P(s)},$$

где  $W_0(s) = \frac{K_0(s)}{D_0(s)}$ ;  $W_P(s) = \frac{K_P(s)}{D_P(s)}$  - передаточные функции

объекта регулирования и регулятора. Произведение  $W_0(s)W_P(s)$  представляет собой передаточную функцию САУ в разомкнутом состоянии:

$$W_{раз}(s) = W_0(s)W_P(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

С учетом последнего равенства изображение ошибки регулирования САУ примет вид

$$\tilde{\varepsilon}_f = \frac{d_0 s^k + d_1 s^{k-1} + \dots + d_k}{c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n} \tilde{x}_{\text{возм}},$$

где  $c_n = a_n + b_m$ ,  $c_{n-1} = a_{n-1} + b_{m-1}, \dots$ ,  $c_0 = a_0$ ,  $d_0 \dots d_k$  - коэффициенты полинома  $K_0(s)D_p(s)$ .

Медленно меняющиеся процессы характеризуются плавным изменением возмущающего воздействия во времени или малой частотой вынужденных колебаний  $\omega$ . Тогда функцию  $\Phi(s)$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $s = 0$

$$\Phi(s) = \Phi_0 + \Phi_1 s + \Phi_2 s^2 + \dots,$$

где  $\Phi_0 = \Phi(0)$ ;  $\Phi_1 = \left[ \frac{\partial \Phi(s)}{\partial s} \right]_{s=0}$ ;  $\Phi_2 = \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 \Phi(s)}{\partial s^2} \right]_{s=0}$ ; ... -

коэффициенты ошибок.

Коэффициенты ошибок могут быть определены также следующим образом

$$d_0 s^k + d_1 s^{k-1} + \dots + d_k = (c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n) (\Phi_0 + \Phi_1 s + \Phi_2 s^2 + \dots).$$

Из этого равенства следует

$$\Phi_0 = \frac{d_k}{c_n};$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{c_n} (d_{k-1} - \Phi_0 c_{n-1});$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{c_n} (d_{k-2} - \Phi_0 c_{n-2} - \Phi_1 c_{n-1}).$$

Окончательно изображение отклонения  $\tilde{\varepsilon}_f$  можно представить в виде

$$\tilde{\varepsilon}_f = [\Phi_0 + \Phi_1 s + \Phi_2 s^2 + \dots] \tilde{x}_{\text{возм}}$$

Имея в виду, что  $s \equiv \frac{d}{dt}$  можно записать при нулевых начальных условиях выражение для оригинала  $\varepsilon_f(t)$ :

$$\varepsilon_f(t) = \Phi_0 f + \Phi_1 \frac{df}{dt} + \Phi_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + \dots$$

Из этого равенства следует, что ошибка регулирования зависит как от коэффициентов ошибок  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ , так и от величины и характера изменения возмущающего воздействия. Пусть на вход в САУ поступает возмущающее воздействие  $f(t) = A_f [I(t)]$ . В этом случае ошибка регулирования при  $t > 0$  равна  $\varepsilon_f = \Phi_0 A_f$  или

$$\varepsilon_f = \frac{d_k}{c_n} A_f = \frac{d_k / a_n}{1 + b_m / a_n} A_f.$$

Ошибка регулирования, возникающая в САУ при действии постоянного возмущающего воздействия является статической ошибкой регулирования. Так как  $\frac{b_m}{a_n}$  - представляет собой коэффициент усиления разомкнутой САУ, то ошибка регулирования при прочих равных условиях тем меньше, чем больше коэффициент усиления  $\frac{b_m}{a_n}$ .

С другой стороны известно, что чем больше коэффициент усиления САУ, тем меньше запас ее устойчивости. Это можно показать, рассмотрев ошибку регулирования и устойчивость САУ с передаточными функциями объекта регулирования и регулятора

$$W_0(s) = \frac{k_1}{T_1^2 s^2 + 2T_1 \xi s + 1}; \quad W_p(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}.$$

Тогда передаточная функция САУ по ошибке регулирования при возмущающем воздействии будет равна

$$\Phi(s) = \frac{k_1 (T_2 s + 1)}{T_1^2 T_2 s^3 + (T_1^2 + 2T_1 \xi T_2) s^2 + (2T_1 \xi + T_2) s + 1 + k_1 k_2}$$

Статическая ошибка регулирования определяется равенством

$$\varepsilon_f(t) = \frac{k_1}{1 + k_1 k_2} x_{\text{возм}}, \quad (5.10)$$

где произведение  $k_1 k_2$  - представляет собой коэффициент усиления САУ в разомкнутом состоянии.

При положительных значениях коэффициентов собственного оператора

$$D(s) = T_1^2 T_2 s^3 + (T_1^2 + 2T_1 \xi T_2) s^2 + (2T_1 \xi + T_2) s + 1 + k_1 k_2$$

условием устойчивости САУ является неравенство

$$(T_1^2 + 2T_1 \xi T_2)(2T_1 \xi + T_2) - T_1^2 T_2 \cdot (1 + k_1 k_2) > 0 \text{ или}$$



$$\frac{(T_1^2 + 2T_1\xi T_2)(2T_1\xi + T_2)}{T_1^2 T_2} > 1 + k_1 k_2 \quad (5.11)$$

Из выражений (5.10) и (5.11) следует, что чем больше коэффициент усиления САУ  $k_1 k_2$ , тем меньше статическая ошибка регулирования и в то же время меньше запас устойчивости.

В САУ, содержащих в последовательной цепи регулятора интегрирующее звено, статическая ошибка регулирования не возникает. Такие САУ называются астатическими (см. раздел 1). Пусть в том же

примере передаточная функция регулятора будет равна  $W_p(s) = \frac{k_2}{s}$ .

Тогда передаточная функция САУ по ошибке регулирования будет равна

$$\Phi(s) = \frac{k_1 s}{T_1^2 s^3 + 2T_1 \xi s^2 + s + k_1 k_2},$$

и коэффициент ошибок при постоянных возмущениях  $\Phi_0 = 0$ , следовательно статическая ошибка регулирования равна нулю. Однако астатические САУ обладают большой колебательностью и длительностью переходного процесса. Ошибка регулирования  $\varepsilon_f(t)$  зависит не только от величины возмущения  $f(t)$ , но и от величины производной по времени от этого параметра. Пусть медленно меняющийся процесс задается уравнением

$$f(t) = \beta + \alpha t.$$

В статических САУ ошибка регулирования при этом будет равна

$$\varepsilon_f(t) = \Phi_0(\beta_0 + \alpha t) + \alpha \Phi_1,$$

т. е. определяется как самой величиной возмущающего воздействия, так и его производной.

В статических САУ, содержащих интегрирующее звено в прямой цепи регулятора  $\Phi_0 = 0$  и ошибка регулирования определяется лишь первой и высшими производными от  $f(t)$ , т. е.  $\varepsilon_f(t) = \alpha \Phi_1$ . Такие САУ называются статическими САУ первого порядка.

Аналогичные рассуждения и выводы справедливы и при управляющем воздействии.

## 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

### 6.1. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 1

1.1. Построить характеристики статической и астатической САУ. На характеристике статической САУ указать погрешность регулирования, возникающую при изменении возмущающих факторов.

1.2. Нарисовать принципиальную схему регулятора расхода топлива прямого действия и описать его действие при изменении давления на входе в регулятор.

1.3. Как изменится характер регулирования при засорении жиклера катаракта в изодромном регуляторе (см. рис. 1.14)?

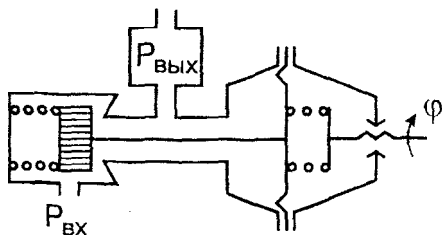


Рис. 6.1. Схема регулятора давления.

1.4. Изобразить на графике статическую характеристику регулятора давления (редуктора) прямого действия (см. рис. 6.1), связывающую параметры  $P_{вых} = f(P_{вх})$  при  $\varphi = const$  и объяснить ее вид.

1.5. Привести пример замкнутой САУ, отметив ее преимущества и недостатки.

1.6. Нарисовать принципиальную схему регулятора расхода топлива прямого действия, выделить характерные его элементы и указать, как можно уменьшить статическую ошибку регулирования.

### 6.2. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 2

2.1. Найти передаточную функцию пружины и демпфера (рис. 6.2), если пренебречь влиянием массы подвижных частей. За входную величину принять силу  $F$ , а за выходную - перемещение точки А (поршня) -  $x$ .

Решение. Составим уравнение равновесия сил:  $F = F_{\delta} + F_n$ . Сила сопротивления движению  $F_{\delta}$  пропорциональна скорости поршня:

$F_{\delta} = c_1 \dot{x}$ , где  $c_1$  - коэффициент демпфирования.

Сила упругости пружины  $F_n$  прямо пропорциональна смещению поршня:

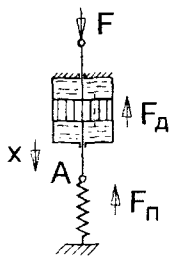
$F_n = c_2 x$ , где  $c_2$  - коэффициент упругости пружины. Таким образом  $c_1 \dot{x} + c_2 x = F$ . Разделим обе части последнего равенства на  $c_2$  и произведем преобразование Лапласа. Получим:

$$(T_1 s + 1) \tilde{x} = k \tilde{F}, \quad \text{где } T_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad k = \frac{1}{c_2}.$$

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{k}{T_1 s + 1}.$$

Рис. 6.2. Схема системы из пружины и демфера.



2.2. Найти передаточную функцию по условиям предыдущей задачи, если учесть приведенную к точке  $A$  (см. рис. 6.2) массу подвижных частей.

Ответ.  $W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$ ;  $T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2}}$ , где  $m$  - масса подвижных частей.

2.3. Найти параметры передаточной функции колебательного звена, если его переходная функция имеет вид, изображенный на рис. 6.3.

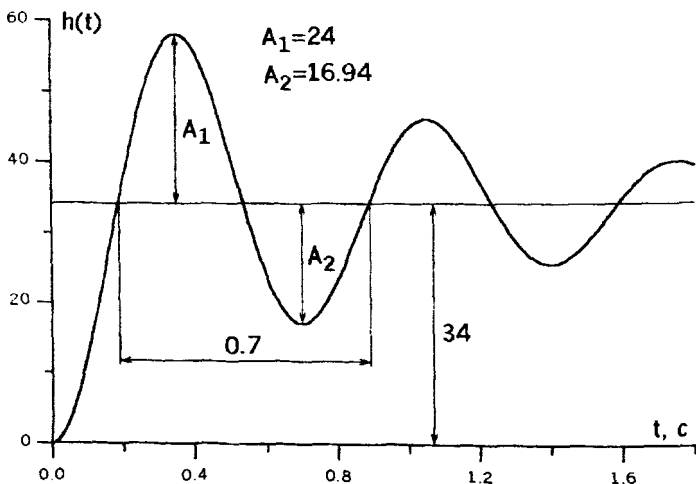


Рис. 6.3. Переходная характеристика колебательного звена к задаче 2.3.

Решение. Непосредственно из рис. 6.3 можно найти величину  $\tau_c = 0,7$  с. Декремент затухания можно определить по формуле

$$\alpha = \frac{2}{\tau_c} \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{0,7} \ln \frac{24}{16,94} = 0,995 \text{ (1/с)}. \text{ Частота колебаний нахо-}$$

дится по соотношению:  $\omega_c = \frac{2\pi}{\tau_c} = \frac{2\pi}{0,7} = 8,98 \text{ (рад/с)}$ . Постоянная

времени  $T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,995^2 + 8,98^2}} = 0,111 \text{ (с)}$ . Параметр

затухания  $\zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_c^2}} = \frac{0,995}{\sqrt{0,995^2 + 8,98^2}} = 0,11$ . Из графика

рис. 6.3 определим  $k = 34$ .

Передаточная функция:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} = \frac{34}{0,111^2 s^2 + 2 \cdot 0,111 \cdot 0,11 s + 1} =$$

$$= \frac{34}{0,0123 s^2 + 0,024 s + 1}$$

2.4. Определить тип звена, постоянную времени и коэффициент усиления по виду переходной характеристики звена (рис. 6.4). Записать передаточную функцию.

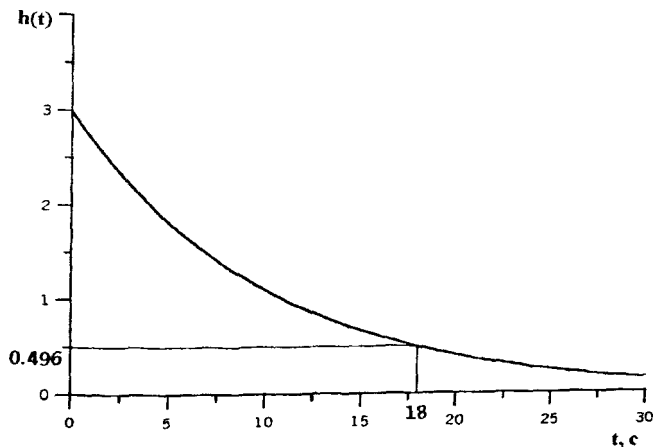


Рис. 6.4. Переходная характеристика звена к задаче 2.4.

2.5. Определить тип звена и численные значения коэффициентов дифференциального уравнения, если его АФЧХ имеет вид, изображенный на рис. 6.5. Записать передаточную функцию.

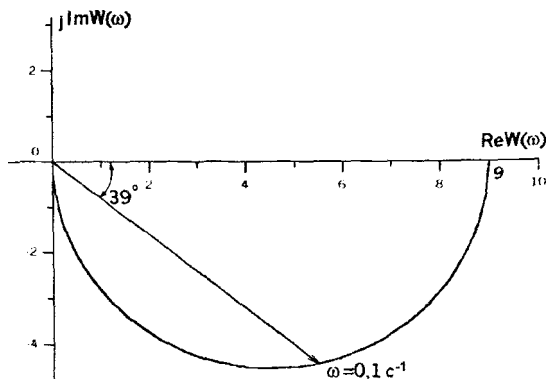


Рис. 6.5. АФЧХ звена к задаче 2.5.

- 2.6. Провести линейризацию зависимости  $P_y = cn^2$  по параметру  $n$  ( $c$  - постоянный коэффициент).
- 2.7. Воспользовавшись методом малых отклонений, представить зависимость тяги  $R$  от частоты вращения  $n$  двигателя  $R = c \cdot n^{3,5}$  в линейризованной форме.
- 2.8. Воспользовавшись методом малых отклонений, представить зависимость для расхода жидкости через дроссель переменного сечения в линейризованной форме  $G = \mu F \sqrt{2\rho P}$ .
- 2.9. Привести дифференциальное уравнение апериодического типового звена

$$5 \frac{d\Delta P}{dt} + \Delta P = 10^9 \Delta h$$

к безмерному виду, если  $\Delta P_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $h_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

- 2.10. Построить переходные процессы и частотные характеристики апериодического типового звена с постоянными времени  $T_1 = 1 \text{ с}$ ,  $T_2 = 3 \text{ с}$  и коэффициентом передачи  $K=5$  при  $X_{\text{ex}} = 2[1(t)]$ .

2.11. Построить (качественно) переходную характеристику колебательного типового звена с коэффициентами:  $K = 2; T = 1$  с и  $\xi_1 = 0,2, \xi_2 = 2$  при  $X_{ax} = 2[1(t)]$ .

2.12. Рассчитать резонансную частоту колебаний клапана, если его масса  $m = 0,2$  кг, жесткость пружины  $C_{np} = 100$  Н/м, коэффициент демпфирования  $\zeta = 0,3$ .

### 6.3. ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 3

3.1. Определить передаточную функцию соединения звеньев рис. 6.6.

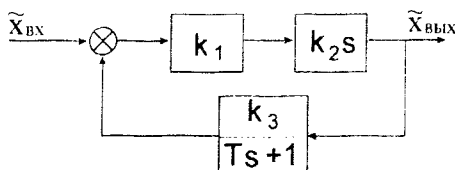


Рис. 6.6. Структурная схема к задаче 3.1.

Ответ: 
$$W(s) = \frac{k_1 k_2 T s^2 + k_1 k_2 s}{(T - k_1 k_2 k_3) s + 1}$$

3.2. Определить передаточную функцию соединения звеньев рис. 6.7.

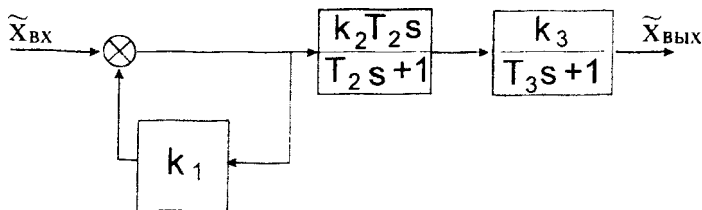


Рис. 6.7. Структурная схема к задаче 3.2.

Ответ: 
$$W(s) = \frac{k_2 k_3 T_2 s}{(1 - k_1) T_2 T_3 s^2 + (1 - k_1)(T_2 + T_3) s + (1 - k_1)}$$

3.3. Определить передаточную функцию соединения звеньев рис. 6.8.

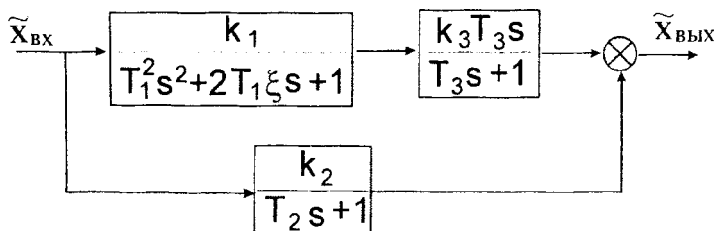


Рис. 6.8. Структурная схема к задаче 3.3.

Ответ. 
$$W(s) = \frac{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}{b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4},$$

$$a_0 = k_2 T_1^2 T_3;$$

$$a_1 = k_1 k_3 T_2 T_3 + k_2 T_1 (T_1 + 2 T_3 \zeta);$$

$$a_2 = k_1 k_3 T_3 + k_2 (2 T_1 \zeta + T_3);$$

$$a_3 = k_2;$$

$$b_0 = T_1^2 T_2 T_3;$$

$$b_1 = 2 T_1 T_2 T_3 \zeta + T_1^2 (T_2 + T_3);$$

$$b_2 = T_2 T_3 + 2 T_1 (T_2 + T_3) \zeta + T_1^2;$$

$$b_3 = T_2 + T_3 + 2 T_1 \zeta;$$

$$b_4 = 1.$$

3.4. Определить передаточную функцию соединения звеньев рис. 6.9.

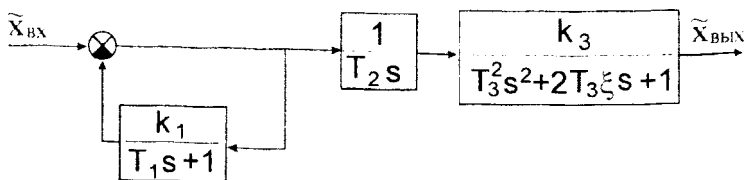


Рис. 6.9. Структурная схема к задаче 3.4.

Ответ.

$$W(s) = \frac{k_3 T_1 s + k_3}{T_1 T_2 T_3^2 s^4 + T_2 T_3 (T_3 + 2 T_1 \zeta) s^3 + T_2 (T_1 + 2 T_3 \zeta) s^2 + T_2 s}$$

3.5. Определить передаточную функцию соединения звеньев рис. 6.10.

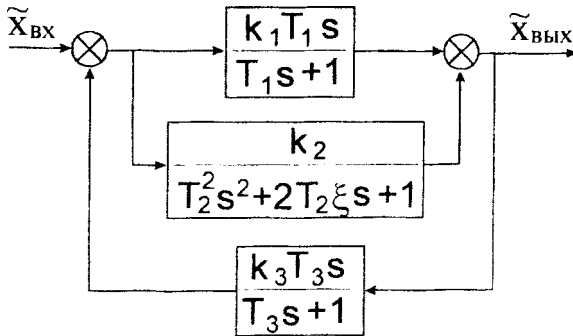


Рис. 6.10. Структурная схема к задаче 3.5.

Ответ. 
$$W(s) = \frac{a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4},$$

$$a_0 = k_1 T_1 T_2^2 T_3;$$

$$a_1 = k_1 T_1 T_2 (T_2 + 2T_3 \zeta);$$

$$a_2 = T_1 (2k_1 T_2 \zeta + T_3 (k_1 + k_2));$$

$$a_3 = T_1 (k_1 + k_2) + k_2 T_3;$$

$$a_4 = k_2;$$

$$b_0 = T_1 T_2^2 T_3 (1 - k_1 k_3);$$

$$b_1 = 2T_1 T_2 T_3 \zeta (1 - k_1 k_3) + T_2^2 (T_1 + T_3);$$

$$b_2 = T_1 T_3 (1 - k_3 (k_1 + k_2)) + 2(T_1 + T_3) T_2 \zeta + T_2^2;$$

3.6. Составить структурную схему САУ двигателя, описываемой системой уравнений:

$$T_1 \frac{d\delta n}{dt} + \delta n = K_1 \delta G_T + K_2 \delta P_e^*,$$

$$\delta G_T = -K_3 \delta m,$$

$$\frac{d\delta m}{dt} = K_4 \delta y,$$

$$\delta y = K_5 \delta n - K_6 \delta \alpha_{руд}.$$



3.7. Определить передаточную функцию соединения звеньев (рис. 6.11).

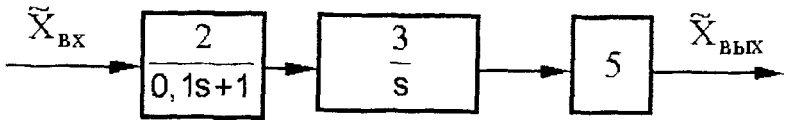


Рис. 6.11. Структурная схема к задаче 3.7.

3.8. Определить передаточную и частотную функции соединения звеньев (рис. 6.12).

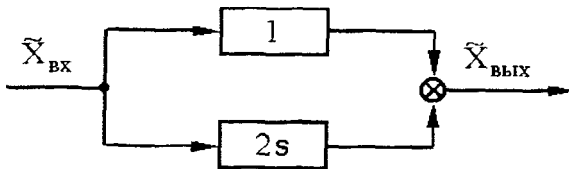


Рис. 6.12. Структурная схема к задаче 3.8.

3.9. Определить передаточную функцию и построить АЧХ соединения звеньев (рис. 6.13).

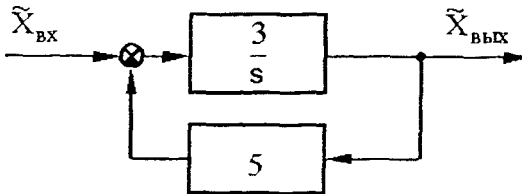


Рис. 6.13. Структурная схема к задаче 3.9.

3.10. Определить передаточную функцию соединения звеньев САУ (рис. 6.14).

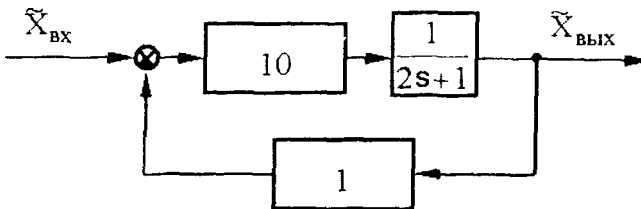


Рис. 6.14. Структурная схема к задаче 3.10.

- 3.11. Определить передаточную функцию САУ по возмущающему воздействию, если задана ее структурная схема (рис. 6.15).

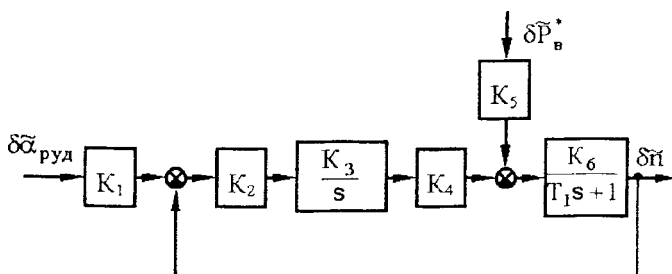


Рис. 6.15. Структурная схема к задаче 3.11.

#### 6.4. ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 4

- 4.1. Определить качественно вид свободного движения системы, если корни ее характеристического уравнения расположены в плоскости корней следующим образом (см. рис. 6.16).

- 4.2. Пользуясь критерием Рауса-Гурвица, определить устойчивость САУ с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{0,1s + 1}{0,2s^3 + s^2 + 2s + 18}$$

- 4.3. С помощью критерия Михайлова исследовать устойчивость системы с собственным оператором:

$$D(s) = s^3 + s^2 + s + 0,5$$

- 4.4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(s) = \frac{4}{s(1 + 0,5s)(1 + 0,1s)(1 + 0,2s)}$$

С помощью критерия устойчивости Михайлова исследовать устойчивость системы с указанной передаточной функцией.

- 4.5. Воспользовавшись частотным критерием Михайлова, определить устойчивость САУ двигателя с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{0,2s + 1}{s^3 + s^2 + 4s + 50}$$

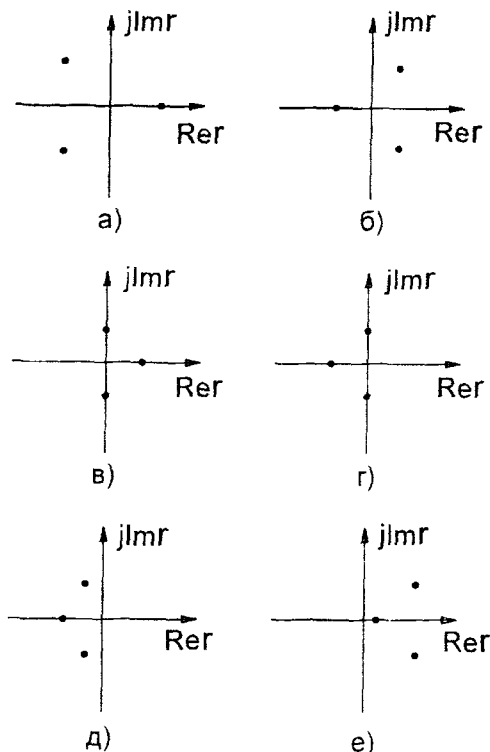


Рис. 6.16. Распределение корней характеристического уравнения в плоскости корней к задаче 4.1.

4.6. Показать в плоскости  $D(j\omega)$  возможные годографы Михайлова для устойчивой и неустойчивой САУ с характеристическим полиномом 5-го порядка.

4.7. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид:

$$W(s) = \frac{100}{(1 + 1,5s)(1 + 0,2s)(1 + 0,1s)}$$

Определить устойчивость системы в замкнутом состоянии, используя критерий устойчивости Найквиста.

Решение. В первую очередь при использовании критерия Найквиста следует определить устойчива или неустойчива разомкнутая система. В рассматриваемом случае это несложно сделать с использовани-

ем условий устойчивости по Ляпунову. Характеристическое уравнение системы записывается в виде:

$$(1,5r + 1)(0,2r + 1)(0,1r + 1) = 0.$$

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$0,03 \left( r + \frac{2}{3} \right) (r + 5)(r + 10) = 0,$$

откуда непосредственно следуют значения корней характеристического уравнения:

$$r_1 = -\frac{2}{3}; \quad r_2 = -5; \quad r_3 = -10.$$

Все корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные, следовательно САУ в разомкнутом состоянии устойчива.

Для определения устойчивости с использованием критерия Найквиста требуется построение АФЧХ разомкнутой системы. При проведении расчетов без использования вычислительной техники АФЧХ удобно строить по амплитудной частотной характеристике  $A(\omega)$  и фазовой частотной характеристике  $\varphi(\omega)$ . Частотная характеристика системы получается из передаточной функции заменой  $s = j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{100}{(1 + 1,5j\omega)(1 + 0,2j\omega)(1 + 0,1j\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|100|}{|(1 + 1,5j\omega)(1 + 0,2j\omega)(1 + 0,1j\omega)|} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{1 + 2,25\omega^2} \sqrt{1 + 0,04\omega^2} \sqrt{1 + 0,01\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \frac{100}{(1 + 1,5j\omega)(1 + 0,2j\omega)(1 + 0,1j\omega)} =$$

$$= \arg 100 - \arg((1 + 1,5j\omega)(1 + 0,2j\omega)(1 + 0,1j\omega)) =$$

$$= -\arctg 1,5\omega - \arctg 0,2\omega - \arctg 0,1\omega.$$

Вычислим  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  для ряда значений  $\omega$ . Результаты вычислений сведем в таблицу:

$\omega$ , рад/с	0	1	3	5	7,75	10	25	50
$A(\omega)$	100	54,1	17,8	8,36	3,67	2,10	0,194	0,026
$\varphi(\omega)$ , град	0	-73	-125	-154	-180	-195	-235	-252

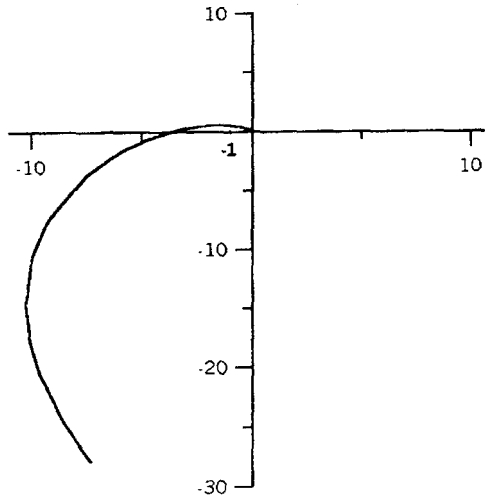


Рис. 6.17. АФЧХ разомкнутой системы к задаче 4.7.

По данным таблицы строим АФЧХ разомкнутой системы (рис. 6.17). Из рис. 6.17 видно, что АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку  $(-1; 0)$ . Следовательно, замкнутая система неустойчива.

4.8. Воспользовавшись частотным критерием Найквиста, определить устойчивость замкнутой САУ, если передаточная функция в разомкнутом ее состоянии имеет вид:

$$W_{раз}(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 5}$$

4.9. Построить D - разбиение и определить область устойчивости САУ в плоскости коэффициента  $k$ , если ее собственный оператор имеет вид:

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + k.$$

4.10. Определить, при каких значениях коэффициента усиления  $K$  САУ будет устойчива, если ее характеристический полином равен:

$$D(s) = 0.5s^3 + s^2 + 3s + K.$$

4.11. Определить, при каких значениях коэффициента  $\lambda$  САУ будет устойчива, если ее характеристический полином имеет вид:

$$D(s) = 0.1s^3 + (0.5 + \lambda)s^2 + 2s + 10.$$

4.12. Построить D-разбиение и выделить области устойчивости САУ в плоскости параметра  $\lambda$ , если ее характеристический полином имеет вид:

$$D(s) = s^3 + \lambda s^2 + 2s + 10.$$

## 6.5. ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 5

5.1. Перечислить косвенные оценки качества переходного процесса в САУ, указать, для чего они введены.

5.2. Пояснить сущность оценки качества переходного процесса и выбора параметров САУ по распределению корней характеристического уравнения.

5.3. Перечислить интегральные оценки качества переходного процесса и указать их преимущества и недостатки.

5.4. Определить время переходного процесса по характеристикам рис. 6.18.

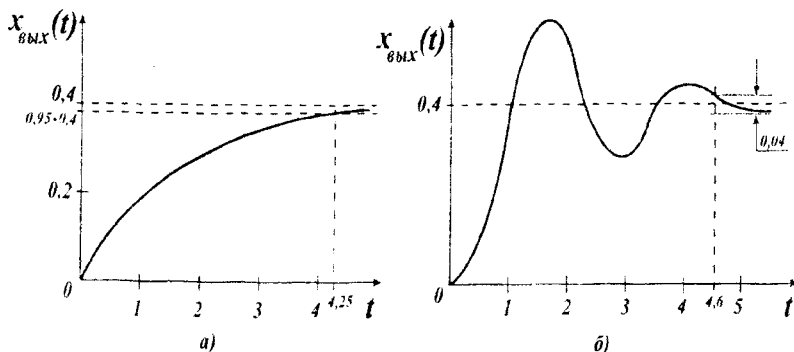


Рис. 6.18. Переходные характеристики к задаче 5.4.

5.5. Оценить колебательность системы, если корни характеристического уравнения расположены на комплексной плоскости следующим образом (рис.6.19):

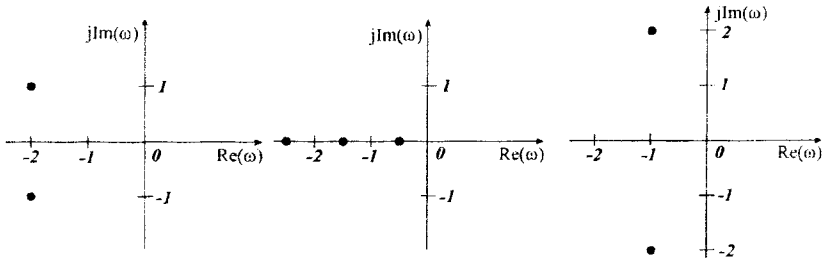


Рис. 6.19. Плоскость расположения корней характеристического уравнения к задаче 5.5.

5.6. Изобразить качественный характер переходного процесса по виду вещественных частотных характеристик САУ (рис.6.20).

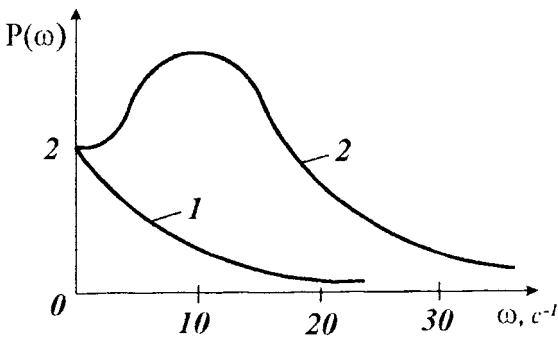


Рис. 6.20. Частотные характеристики САУ к задаче 5.6.

5.7. Найти статическую ошибку САУ по управляющему воздействию  $\tilde{\alpha}$  и возмущению  $\tilde{f}$ , если задана ее структурная схема на рис. 6.21.

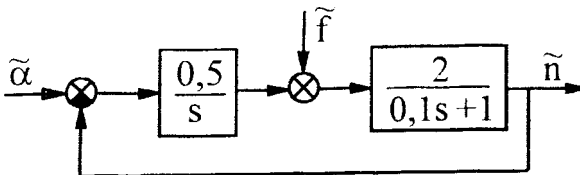


Рис. 6.21. Структурная схема САУ к задаче 5.7.

5.8. Определить статическую ошибку регулирования САУ, если ее передаточная функция по возмущающему воздействию имеет вид:

$$F(s) = \frac{0,1s + 2}{0,2s^3 + s^2 + 5s + 10}.$$

5.9. Найти первые три коэффициента ошибок управления САУ со следующей передаточной функцией по ошибке:

$$W_{\varepsilon}(s) = \frac{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s) + k}.$$



## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. - СПб.: Наука, 1999.
2. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учебное пособие. - Новосибирск: НГТУ, 1997.
3. Дроздов В.Н., Никифоров В.О., Бендюговский А.Е. Теория автоматического управления. Часть 1. Математические модели динамических систем и внешних воздействий. Учебное пособие. - М: Изд-во МГАП, 1994.
4. Егупов Н.Д. Методы классической и современной теории автоматического управления: В 3-х т.т. Т.3: Методы современной теории автоматического управления. - М.: МГТУ им. Баумана, 2000.
5. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления. Учеб. для вузов по напр. "Автоматизация и управление", "Системный анализ и управление" - СПб.: Политехника, 1998.
6. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование: Теория и элементы систем. - М.: Машиностроение, 1989.
7. Имаев Д.Х., Краснопрошина А.А., Яковлев В.Б. Теория автоматического управления. Ч. 1. Линейные системы автоматического управления: Учеб. пособие для вузов. Кн. 4. - Киев: Выща школа. 1992.
8. Петрова В.А., Ягодкина Т.В. Математическое описание линейных непрерывных систем автоматического управления. Учебное пособие по курсу "Теория автоматического управления". - М.: Изд-во МЭИ, 1992.
9. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Высшая школа, 1989.
10. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Трофимов А.И. Статистические методы анализа, синтеза и идентификации систем автоматического управления. - М. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
11. Самойленко В.И., Пузырев В. А., Грубин И. В. Техническая кибернетика. - М: МАИ, 1994.
12. Теория автоматического регулирования: Учеб. для вузов / Под ред. Ю.М. Соломенцева. - М.: Машиностроение, 1992.
13. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1989.
14. Черкасов Б.А. Автоматика и регулирование ВРД. - М.: Машиностроение, 1988.

## СОДЕРЖАНИЕ

Основные условные обозначения . . . . .	3
Введение . . . . .	4
1. Общие сведения о САУ . . . . .	5
1.1. Теория автоматического управления как наука о системах. Терминология. . . . .	5
1.2. Классификация САУ . . . . .	5
1.2.1. Классификация САУ по принципу регулирования. . . . .	5
1.2.2. Классификация по характеру воздействия на объект управления . . . . .	7
1.2.3. Классификация по заданному закону воспроизведения регулируемой величины . . . . .	7
1.2.4. Классификация по роду используемой энергии . . . . .	8
1.2.5. Классификация САУ по назначению. . . . .	9
1.3. Основные элементы САУ. . . . .	9
1.4. Классификация регуляторов . . . . .	9
1.4.1. Регуляторы прямого и непрямого действия . . . . .	10
1.4.2. Статические и астатические регуляторы. . . . .	10
1.4.3. Регуляторы прямого действия. . . . .	10
1.4.4. Регуляторы непрямого действия. . . . .	15
1.5. Статические характеристики САУ . . . . .	20
1.5.1. Пример построения статической характеристики САУ. . . . . .	21
2. Линейные и линеаризуемые системы. . . . .	24
2.1. Динамические характеристики звеньев и САУ . . . . .	25
2.2. Представление САУ в виде совокупности типовых звеньев . . . . .	26
2.3. Метод малых отклонений. . . . .	27
2.4. Стандартные возмущения . . . . .	28
2.5. Операторный метод . . . . .	30
2.6. Преобразование Фурье. . . . .	31
2.7. Частотные характеристики. . . . .	31
2.8. Свойства типовых звеньев. . . . .	33
2.8.1. Аперiodическое (инерционное) звено . . . . .	33
2.8.2. Пропорциональное (усилительное) звено . . . . .	36
2.8.3. Интегрирующее звено . . . . .	38
2.8.4. Идеальное дифференцирующее звено . . . . .	39
2.8.5. Реальное дифференцирующее звено . . . . .	41
2.8.6. Колебательное звено . . . . .	43
3. Структурные схемы и передаточные функции САУ. . . . .	50
3.1. Понятие о структурной схеме САУ . . . . .	50
3.2. Характерные соединения звеньев . . . . .	50
3.3. Преобразование структурных схем. . . . .	54
3.4. Передаточные функции САУ. . . . .	56

4. Устойчивость линейных САУ. Методы контроля устойчивости и ее обеспечение. . . . .	58
4.1. Понятие об устойчивости САУ. . . . .	58
4.2. Условия устойчивости САУ. . . . .	59
4.3. Признаки и критерии устойчивости . . . . .	63
4.4. Алгебраический критерий устойчивости (критерий Рауса-Гурвица) . . . . .	63
4.5. Критерий устойчивости Михайлова . . . . .	67
4.6. Частотный критерий устойчивости Найквиста . . . . .	73
4.6.1. Критерий Найквиста для систем, включающих звенья чистого запаздывания . . . . .	77
4.6.2. Влияние коэффициента усиления на устойчивость системы . . . . .	79
4.6.3. Понятие о запасе устойчивости САУ. . . . .	79
4.6.4. Структурный критерий устойчивости. . . . .	81
4.7. Активные методы оценки устойчивости (метод D-разбиения). . . . .	84
4.7.1. D-разбиение в плоскости двух параметров (диаграмма Вышнеградского). . . . .	89
4.8. Корректирующие устройства САУ. . . . .	92
4.8.1. Понятие о синтезе САУ и корректирующих устройствах. . . . .	92
4.8.2. Последовательное корректирующее устройство . . . . .	93
4.8.3. Параллельные корректирующие устройства . . . . .	99
5. Качество процессов регулирования . . . . .	101
5.1. Критерии и способы оценки качества. . . . .	101
5.2. Качество переходных процессов в САУ. Показатели качества переходных процессов . . . . .	102
5.3. Определение параметров САУ по распределению корней характеристического уравнения . . . . .	104
5.4. Предельные теоремы качества . . . . .	108
5.5. Оценка качества переходного процесса по амплитудно-частотным характеристикам . . . . .	110
5.6. Интегральные оценки качества переходного процесса. . . . .	111
5.7. Точность систем при постоянных и медленно меняющихся воздействиях . . . . .	117
6. Контрольные задачи и вопросы . . . . .	121
6.1. Задачи и вопросы к разделу 1 . . . . .	121
6.2. Задачи и вопросы к разделу 2 . . . . .	121
6.3. Задачи к разделу 3 . . . . .	125
6.4. Задачи к разделу 4 . . . . .	129
6.5. Задачи к разделу 5 . . . . .	133
Рекомендуемая литература . . . . .	136

Учебное издание

Гимадиев Асгат Гатьятович  
Крючков Александр Николаевич  
Прокофьев Андрей Брониславович  
Шахматов Евгений Владимирович  
Шорин Владимир Павлович

# **АВТОМАТИКА И РЕГУЛИРОВАНИЕ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

**ЧАСТЬ 1  
ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.  
ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

**Учебное пособие**

Компьютерная верстка Тимофеева Н.В., Лузина Т.В.

Подписано в печать 10.12.2002г. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 8,13. Усл. кр.-отт.8,25. Уч. изд. л. 8,75

Тираж 250 экз. Заказ 13.

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени С.П. Королева  
443086 Самара, Московское шоссе, 34

---

Отпечатано в Самарском государственном  
аэрокосмическом университете.  
443086 Самара, Молодогвардейская, 34.