

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА**

Г.И. ЛЕОНОВИЧ

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ
СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Учебное пособие

САМАРА 2003

УДК 621.396.1:621.391

Леонович Г.И.

Анализ и синтез сигналов специальной формы: Учебное пособие / Самара:
Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2003. - 126 с.: ил. ISBN 5-7883-0263-2

Пособие представляет собой учебный материал по радиотехническим сигналам, которые нашли применение в радиоразведке и радиопротиводействии. Рассмотрены вопросы формирования сигналов специальной формы в радиотехнических цепях.

Для студентов, обучающихся по специальности 200700 – радиотехника, специализация 200703.

Подготовлено на кафедре радиотехнических устройств.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В.М. Гречишников
д-р техн. наук, проф. П.К. Кузнецов

ISBN 5-7883-0263-2

© Г.И. Леонович, 2003-10
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ	5
1.1 Общие положения о радиотехнических сигналах и цепях	5
1.2 Разложение периодических сигналов в ряд Фурье	7
1.3 Распределение мощности в спектре периодических сигналов ...	13
1.4 Гармонический анализ непериодических сигналов	14
1.5 Распределение энергии в спектре непериодических сигналов ...	17
Выводы по главе.....	19
2. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ.....	21
2.1 Радиосигналы с амплитудной модуляцией	21
2.2 Простые виды угловой модуляции. Функции Бесселя	24
2.3 Форма и спектр колебания при сложных видах частотной и амплитудно-частотной модуляции.	31
2.4 Сигналы с ограниченным спектром. Теорема Котельникова. ...	39
2.5 Аналитический сигнал. Параметры узкополосных сигналов.	47
Выводы по главе.	51
3. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ. ШУМЫ.	53
3.1 Стационарные и эргодические случайные процессы. Моменты случайных величин.	53
3.2 Гармонические колебания со случайной амплитудой, фазой и частотой. Гауссовский случайный процесс.	57
3.3 Спектральная плотность мощности случайного процесса.....	64
3.4. Узкополосный шум. Медленное и быстрое изменение частоты. .	68
3.5. Хаотические импульсные последовательности (ХИП).	75
3.6. Информационные характеристики сигналов. Энтропия. Информационная емкость.	77
Выводы по главе.	81
4. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ.	83
4.1 Спектральный метод анализа. Метод интеграла наложения	83
4.2 Формирование шума в линейных цепях.....	88

4.3 Прохождение частотно-модулированных сигналов через избирательные системы.	92
4.4. Передача сигналов через линейные цепи с переменными параметрами.....	104
4.5 Воздействие гармонических сигналов на параметрические системы со случайными характеристиками.	111
4.6 Прохождение случайных сигналов через нелинейные цепи.	115
Выводы по главе.	121
Список литературы.	124

ВВЕДЕНИЕ

Одним из приоритетных вопросов в условиях современного информационного противоборства является достижение уровня технического и алгоритмического оснащения, при котором создаются возможности для защиты и нарушения работоспособности информационных систем. Как самостоятельный вид информационного противоборства выделяется электронное или радиопротиводействие. Радиосигналы специальной формы, применяемые в качестве активных помех, предназначены для ухудшения нормальной работы радиоэлектронных средств (РЭС). Вопросам теории сигналов специальной формы, разработки способов и средств их формирования посвящено значительное количество трудов отечественных и зарубежных ученых и специалистов [1-3, 6 - 8, 14, 18].

Различают активные маскирующие и активные имитационные помехи [1, 2]. Активные маскирующие помехи (АМП) создают на входе приёмника подавляемого РЭС фон, который затрудняет обнаружение полезных сигналов, их распознавание и определение параметров. Активные маскирующие помехи подразделяются на три группы [2]: непрерывные шумовые помехи; хаотические импульсные помехи; последовательности детерминированных импульсных сигналов. Использование АМП любого типа приводит к уменьшению вероятности правильного обнаружения полезного сигнала, увеличению вероятности ложной тревоги и снижению точности измерения его характеристик. Аналогичная картина имеет место при действии помехи на каналы передачи радиотелеграфных и радиотелефонных сигналов. Помеха, складываясь с полезными сигналами, искажает последние на выходе приемника, что снижает вероятность правильного распознавания переданных сигналов. Эффективность АМП зависит от следующих основных факторов [1-3]: временной и частотной структуры помехи; временной и частотной структуры полезного сигнала; энергетического соотношения помехи и сигнала на входе приемника подавляемого РЭС; мероприятий по контррадиопротиводействию.

Активные имитирующие помехи (АИП) предназначены для внесения ложной информации в подавляемые РЭС и, как дополнительная функция, для перегрузки соответствующих информационных каналов [3]. При создании АИП стремятся к полной идентификации с полезным сигналом по сопутствующим параметрам. Например, при имитации ложной цели, находящейся на одном пеленге с действительной целью, но на иной дальности, помеховый сигнал должен иметь одинаковые с полезным сигналом поляризацию, несущую и поднесущую (при наличии таковой) частоты, но по информационному параметру (задержке во времени) отличаться. Информационные и сопутствующие параметры помехового и полезного сигналов имеют между собой статистическую связь, которая в ряде случаев может переходить в функциональную зависимость [18].

Для формирования активных помех, как правило, необходимо иметь информацию о параметрах подавляемых РЭС. В частности, результаты, по-

лученные с помощью электронной разведки, являются определяющими при создании средств электронной атаки и собственных средств электронного контрпротиводействия.

Объектами рассмотрения настоящего учебного пособия являются сигналы, представляющие собой различные виды активных помех. При исследовании сигналов, их энергетических спектров и описании методов формирования использованы основные положения из теории цепей и сигналов, к которым относятся понятия о спектральной функции, спектры периодических, непериодических и случайных сигналов, а также вопросы преобразования сигналов в линейных и нелинейных цепях.

1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

1.1. Общие положения о радиотехнических сигналах и цепях

В современной радиоэлектронике различают следующие *виды сигналов* [4-8]:

- 1) Произвольные по величине и непрерывные во времени (рис.1.1). Их называют также аналоговыми. Аналоговые сигналы, имеющие разрывы, называют континуальными.

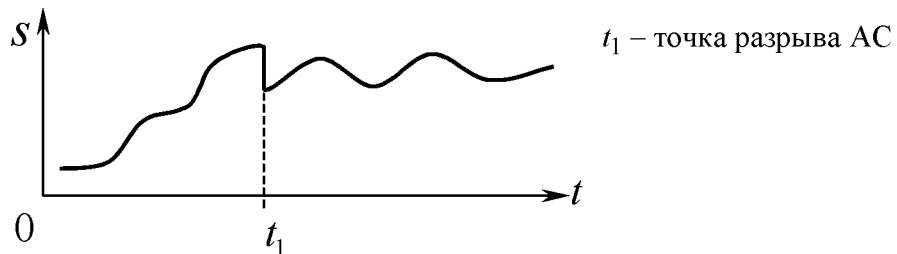


Рис. 1.1 Аналоговый континуальный сигнал

- 2) Произвольные по величине и дискретные во времени (рис.1.2).



Рис.1.2 Произвольный по величине и дискретный во времени сигнал

- 3) Квантованные по величине и непрерывные во времени (рис.1.3).

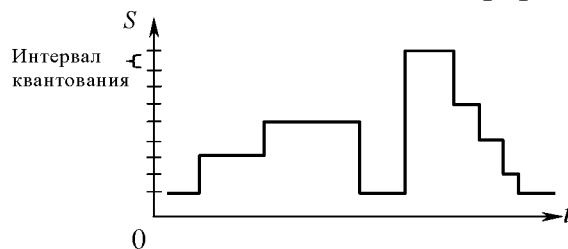


Рис.1.3 Квантованный по величине и непрерывный во времени сигнал

- 4) Квантованные по величине и дискретные во времени (рис.1.4).

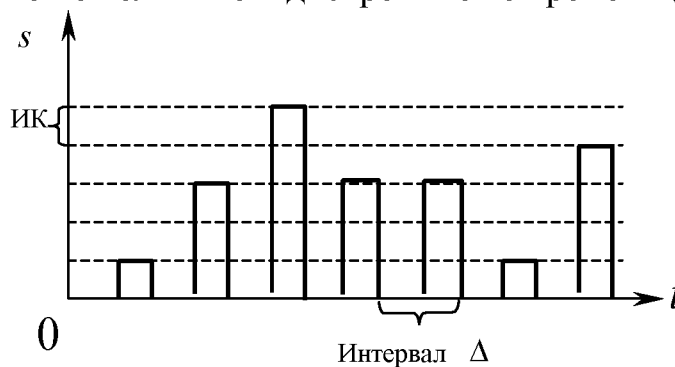


Рис.1.4 Дискретно-квантованный сигнал

Дискретный по времени сигнал обычно называют дискретным сигналом, дискретный во времени и квантованный по уровню сигнал – цифровым. Таким образом, можно различать аналоговые, дискретные (импульсные), квантованные и цифровые сигналы. В них амплитуда, частота и фаза могут быть детерминированными и случайными.

Детерминированный сигнал – это сигнал, мгновенное значение которого в любой момент времени можно спрогнозировать, так как известны его параметры. К нему относятся, в частности, синусоидальный сигнал, равномерная последовательность импульсов с постоянной амплитудой или с амплитудой, изменяющейся по синусоидальному закону.

Случайный сигнал – сигнал, мгновенные значения которого априорно неизвестны. Определить его амплитуду, частоту и фазу можно лишь с некоторой долей вероятности. Разновидностью случайных сигналов считаются шумовые помехи.

Сигналы, формируемые в радиопередающих устройствах и излучаемые в пространство, являются физическими процессами.

Сигналы, несущие в себе информацию, называются управляющими или модулирующими. Сигналы, которые подвергаются модуляции и направляются в пространство, до модуляции называются несущими, а после модуляции – радиосигналами (модулированными сигналами).

Различают следующие *виды радиотехнических цепей* [4-8].

1) Линейная цепь с постоянными параметрами - это такая цепь, в которой параметры цепи не зависят от напряжения и тока, воздействующих на цепь.

Такие цепи выполняют операции линейного усиления и фильтрации по частоте, т.е. такие, при которых не происходит трансформации исходного спектра сигнала.

Линейная цепь подчиняется принципу суперпозиции, который описывается выражением

$$L\left[\sum_{i=1}^N S_i(t)\right] = \sum_{i=1}^N L[S_i(t)],$$

где L – некоторый оператор воздействия цепи на сигнал, например, коэффициент усиления сигнала.

Этот принцип, в соответствии с рис.1.5, указывает на то, что результат некоторой операции с суммой N сигналов равен сумме N сигналов, каждый из которых подвергся той же операции. Принцип суперпозиции или наложения позволяет любые сложные сигналы разложить на более простые.

2) Линейная цепь с переменными параметрами – цепь, в которой параметры элементов цепи являются функцией времени взаимодействия с сигналом. К таким цепям относятся цепи с емкостями (конденсаторами) и катушками индуктивности.

Линейная цепь с переменными параметрами преобразует частотный спектр исходного сигнала. На базе конденсаторов и катушек индуктивности с

переменными во времени параметрами создаются так называемые параметрические усилители и генераторы [7, 10].

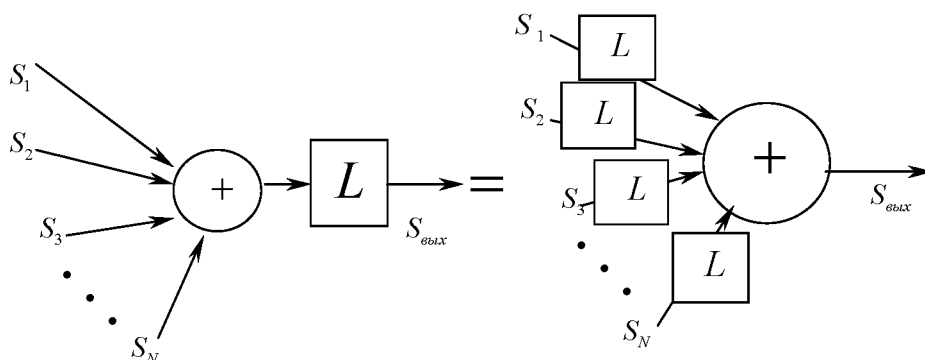


Рис. 1.5. Пример реализации принципа суперпозиции при операциях с сигналами

3) Нелинейная цепь – цепь, в которой есть элементы с параметрами, зависящими от изменяющихся параметров входного сигнала. Нелинейная цепь преобразует спектр сигнала с изменением его первоначальной формы и амплитуды. В ней не действует принцип суперпозиции из-за нелинейности характеристик преобразования (рис. 1.6).

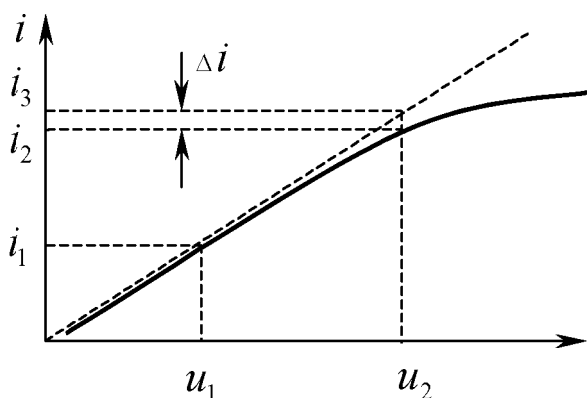


Рис. 1.6 Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента – полупроводникового диода

При анализе сигналов, прошедших через нелинейные цепи, требуется применение специальных методов, без разложения на простые составляющие. Нелинейные цепи широко применяются при генерации, модуляции, детектировании и частотном преобразовании сигналов.

1.2 Разложение периодических сигналов в ряд Фурье

Любой произвольный сигнал можно представить в виде суммы элементарных колебаний [4, 8, 9]. В качестве примера на рис. 1.7 представлено разложение вектора s трехмерного пространства на три ортогональные составляющие по осям координат. Это означает, что сигнал представляет собой векторную сумму трех элементарных колебаний.

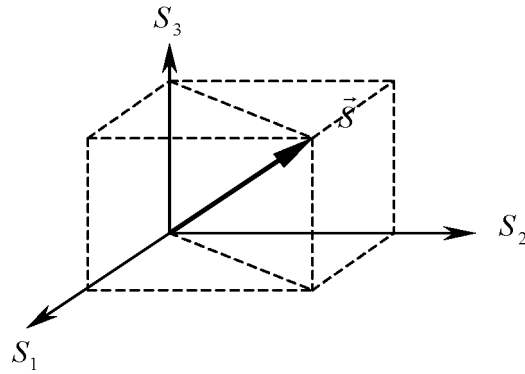


Рис. 1.7 Разложение вектора сигнала на три элементарных ортогональных колебания

Электрические колебания более сложной формы можно представить разложением вектора s в некотором n -мерном пространстве, где все элементарные функции также являются ортогональными

Взятая в пределах временного интервала $[t_1, t_2]$ величина

$$\|s_n(t)\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} s_n^2(t) dt} \quad (1.1)$$

называется нормой функции, описывающей сигнал $s_n(t)$.

Величина

$$\|s_n(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} s_n^2(t) dt \quad (1.2)$$

получила название нормированной функции.

Если элементарные функции $s_i(t)$ непрерывны, то сложная кусочно-непрерывная функция, для которой выполняется условие

$$\int |s(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.3)$$

может быть представлена в виде суммы ряда [4]

$$s(t) = C_0 s_0(t) + C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t) + \dots + C_i s_i(t) + \dots + C_n s_n(t), \quad (1.4)$$

где $C_0, C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n$ – весовые коэффициенты составляющих (элементарных функций s_i).

Ряд (1.4) носит название обобщенного ряда Фурье, а коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n$ называются коэффициентами Фурье.

Умножим обе части уравнения (1.4) на $s_n(t)$ и проинтегрируем в пределах $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) s_n(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} C_0 s_0(t) s_n(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} C_1 s_1(t) s_n(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} C_2 s_2(t) s_n(t) dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} C_n s_n(t) s_n(t) dt \quad (1.5)$$

В силу ортогональности элементарных функций ряда интеграл на отрезке $[t_1, t_2]$ от произведения $C_i s_i(t) s_n(t)$ при $i \neq n$ равен нулю

$$\int_{t_1}^{t_2} C_i s_i(t) s_n(t) dt = 0 .$$

Поэтому в правой части выражения (1.5) остается только одно последнее слагаемое. В результате с учетом (1.2) получим

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) s_n(t) dt = C_n \int_{t_1}^{t_2} s_n^2(t) dt = C_n \| s_n(t) \|^2 . \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует выражение для C_n

$$C_n = \frac{1}{\| s_n(t) \|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) s_n(t) dt . \quad (1.7)$$

Совокупность коэффициентов C_n при $n = 0, 1, 2, \dots, i, \dots, N, \dots$ называется спектром сигнала $s(t)$ и полностью определяет этот сигнал.

В соответствии с неравенством Бесселя для ортогональной системы [15, 16]

$$\sum_{n=0}^N C_n \| s_n(t) \|^2 \leq \| s \|^2$$

следует, что с увеличением N до ∞ можно добиться максимально аппроксимированной функции к действительному сигналу s .

При разложении сигналов (функций) в ряд Фурье из простейших ортогональных функций наибольшее распространение получила ортогональная система основных тригонометрических функций - косинусов и синусов [4, 9, 16]. Объяснение этому факту заключается в том, что гармоническое колебание является единственной функцией времени, которая сохраняет свою форму при прохождении через любую линейную цепь с постоянными параметрами. Меняются лишь амплитуда и фаза колебаний.

При анализе гармонических сигналов любой формы необходимо учитывать, что интервал ортогональности колебаний равен периоду колебания

$$t_1 - t_2 = T = \frac{2\pi}{\omega_1} ,$$

где через ω_1 обозначается частота основной (первой) гармоники спектра сигнала.

Для гармонических сигналов различают две формы представления ряда Фурье: тригонометрическую и комплексную. Для комплексной формы ряда Фурье справедливо выражение

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1.8)$$

Если сравнивать (1.8) с (1.4), то очевидно, что $e^{-jn\omega_1 t} = s_n(t)$.

Коэффициенты Фурье полученного ряда (1.8) определяются по формуле (1.7)

$$C_n = \frac{1}{\|s_n(t)\|^2} \int_{t_1}^{t_2} s(t) s_n(t) dt$$

Определим значение нормированной функции комплексной величины при интервале ортогональности $[-T/2, T/2]$

$$\|s_n\|^2 = \int_{t_1=-\frac{T}{2}}^{t_2=\frac{T}{2}} e^{jn\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 t} dt = T \quad (1.9)$$

Следовательно, коэффициенты Фурье определяются как

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1.10)$$

Известна запись [15]

$$e^{-jn\omega_1 t} = \cos(n\omega_1 t) - j \sin(n\omega_1 t)$$

Тогда формулу (1.10) можно переписать в виде разности

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt = C_{nc} - jC_{ns}, \quad (1.11)$$

где C_{nc} – косинусная (действительная) часть коэффициента Фурье, C_{ns} – синусная (мнимая) часть коэффициента Фурье.

Иногда коэффициент Фурье записывают следующим образом

$$C_n = |C_n| e^{j\theta_n},$$

где $|C_n| = \sqrt{C_{nc}^2 + C_{ns}^2}$, $\theta_n = -\text{arctg} \frac{C_{ns}}{C_{nc}}$ – соответственно модуль и начальная

фаза коэффициента Фурье.

В этом случае формула (1.8) принимает вид

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| \cdot e^{j(n\omega_1 t + \theta_n)} \quad (1.12)$$

Перейдем к тригонометрической форме ряда Фурье. При $n=0, 1, 2, \dots, n$ коэффициенты Фурье принимают значения

$$\begin{aligned}
C_0 &= C_0 e^{j(0+0)} = C_0 \\
C_1 &= -C_1 = |C_1| \cos(1 \cdot \omega_1 t + \theta_1); \\
C_2 &= -C_2 = |C_2| \cos(2 \cdot \omega_1 t + \theta_2); \\
&\vdots \\
C_n &= -C_n = |C_n| \cos(n \cdot \omega_1 t + \theta_n).
\end{aligned}$$

Тогда (1.12) можно записать в следующей форме

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \cdot \omega_1 t + \theta_n), \quad (1.13)$$

где коэффициент $A_n = 2|C_n|$.

В радиотехнике принята следующая форма записи выражения (1.13) [4]

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \cdot \omega_1 t) + b_n \sin(n \cdot \omega_1 t)], \quad (1.14)$$

где $a_0 = 2C_{0c}$; $a_n = 2C_{nc}$; $b_n = 2C_{ns}$.

Если сигнал $s(t)$ представляет собой четную функцию, т.е. $s(t) = s(-t)$, то в разложении участвуют только косинусоидальные сигналы (синусоидальные обращаются в ноль). Соответственно при разложении нечетной функции - в ноль превращаются косинусоидальные сигналы. Таким образом, использование ряда Фурье при гармоническом анализе сложных периодических сигналов представляет собой эффективное средство для изучения влияния линейных цепей на прохождение сигналов.

На рис. 1.8 представлены примеры комплексной (а) и гармонической (б) формы ряда Фурье, описывающего спектр периодического сигнала $s(t)$ с периодом $T = 2\pi/\omega_1$. Такой спектр называется линейным или дискретным, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам $0, \omega_1, \omega_2 = 2\omega_1, \omega_3 = 3\omega_1, \dots, \omega_n = n\omega_1$, значения которых принадлежат гармоническим колебаниям $s_0 = C_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ соответственно.

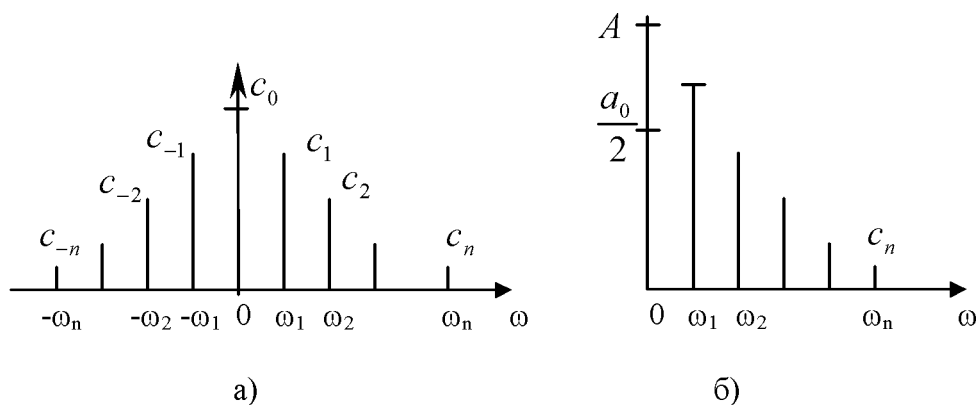


Рис. 1.8 Спектр сложного периодического сигнала: а) в форме комплексного ряда Фурье; б) в форме тригонометрического ряда Фурье

В качестве примера произведем гармонический анализ прямоугольного колебания в форме меандра (рис.1.9). Подобные функции имеют место в устройствах управления параметрами модулирующих элементов, формирующих

специальные сигналы. Амплитуду колебаний обозначим через E , период $T=2\pi/\omega_1$.

Выберем начало отсчета времени, соответствующее, например, тому, что функция является нечетной. Тогда в уравнении (1.11) косинусоидальные и синусоидальные члены ряда Фурье равны

$$C_{nC} = \frac{E}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \cos(n\omega_1 \cdot t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cos(n\omega_1 \cdot t) dt \right] = -\frac{E}{T} \sin(n\omega_1 \cdot t) = 0$$

$$C_{nS} = \frac{E}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \sin(n\omega_1 \cdot t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \sin(n\omega_1 \cdot t) dt \right] = \frac{2E}{Tn\omega_1} (1 - \cos \frac{n\omega_1 \cdot T}{2}) = \frac{2E}{2\pi \cdot n} (1 - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2})$$

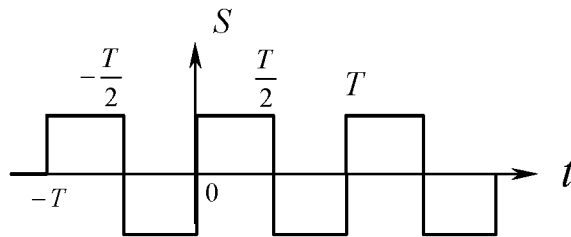


Рис. 1.9 Колебание в форме меандра

Так как $T \cdot \omega = 2\pi$, получим

$$C_{nS} = \frac{E}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n=0, 2, 4, \dots \\ \frac{E}{\pi n} \cdot 2 & \text{при } n=1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Тригонометрический спектр сигнала, в котором в соответствии с (1.14) и полученным выражением для C_{nS} коэффициенты ряда равны $A_n = 2|C_n| = 2C_{nS} = b_n$, показан на рис. 1.10.

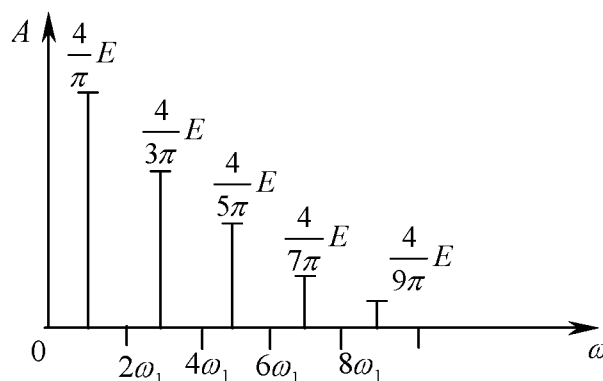


Рис. 1.10 Тригонометрический спектр сигнала в форме меандра

Начальные фазы сигналов S_n имеют значение

$$\theta_n = -\text{arctg} \frac{C_{nS}}{C_{nC}} = -\text{arctg} \frac{C_{nS}}{0} = -\text{arctg}(\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Полностью ряд Фурье в тригонометрической форме принимает вид

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (0 + S_n \sin n\omega_1 t) =$$

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4E}{\pi} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t .$$

Из рисунка 1.11 видно, каким образом осуществляется приближение аппроксимированного сигнала к сигналу $s(t)$ по мере возрастания n .

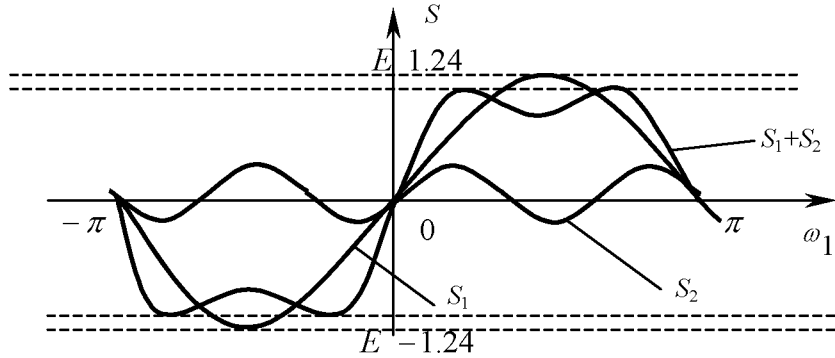


Рис. 1.11 Аппроксимация сигнала в форме меандра

Итоговый всплеск в точках разрыва функции при $n \rightarrow \infty$ равен $s + \Delta S = 1,18E$. Однако с ростом n ширина выброса становится очень узкой и не вносит заметных искажений в спектр сигнала, то есть считается, что такой ряд Фурье сходится в среднем. Эффект выброса аппроксимируемой функции получил название явления Гибсона, характерного для периодических аппроксимируемых функций, имеющих точки разрыва [15].

1.3 Распределение мощности в спектре периодических сигналов

Если сигнал $s(t) \neq 0$ и не ограничен во времени ($t = -\infty, \infty$), то энергия сигнала

$$\mathcal{E} = \int_{t_2}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_2 \rightarrow -\infty}^{t_1 \rightarrow \infty} s^2(t) dt \rightarrow \infty ,$$

где $p(t)$ – мгновенная мощность сигнала.

Следовательно, для анализа энергетических параметров периодического сигнала наиболее подходящими остаются два не обращающихся в ноль при $t = -\infty, \infty$ энергетических параметра: средняя мощность сигнала во времени и распределение мощности между отдельными гармониками. Можно считать, что у гармонического сигнала с периодом повторяемости T средняя мощность за период равна средней мощности в пределах $t = -\infty, \infty$

$$\overline{p(t)} = \overline{s^2(t)} \Big|_{t=-\infty, \infty} = \overline{s^2(t)} \Big|_{t=0, T} .$$

В силу периодичности сигнала $s(t)$ и в соответствии с (1.9) нормированная функция периодического сигнала равна

$$\|s_n\|^2 = T .$$

Так как определяемая за период T средняя мощность n -й составляющей спектра не зависит от фазы, то можно считать, что $\theta_n = -\arctg \frac{C_{ns}}{C_{nc}} = 0$. Поэтому выражение (1.12) можно переписать в следующем виде

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{-jn\omega_1 t}, \quad (1.15)$$

где $e^{-jn\omega_1 t} = s_n(t)$.

Средняя мощность будет равна

$$\overline{s^2(t)} = \frac{\mathcal{E}}{t_2 - t_1} = \frac{\mathcal{E}}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \int_0^T s_n^2(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (1.16)$$

Учитывая, что в тригонометрическом ряде Фурье $C_0 = \frac{a_0}{2}$, $|C_n| = \frac{A_n}{2}$, получим

$$\overline{s^2(t)} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \quad (1.17)$$

Если $s(t)$ представляет собой текущий в линейной цепи ток $i(t)$, то при прохождении его через сопротивление r выделяется мощность

$$\overline{p(t)} = r \overline{s^2(t)} = r \overline{i^2(t)} = r \left(I_0^2 + \frac{1}{2} I_1^2 + I_2^2 + \dots \right) = r \left[I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \right].$$

Здесь $I_0 = \frac{a_0}{2}$ - постоянная составляющая тока; $I_n = A_n$ - амплитуда n -й гармоники переменного тока. Таким образом, полная средняя мощность сигнала равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельно постоянной составляющей $I_0 = \frac{a_0}{2}$ и гармониками с амплитудами I_1, I_2, \dots, I_n . Поскольку спектральные составляющие ортогональны на интервале T , то средняя мощность не зависит от фаз отдельных гармоник.

1.4 Гармонический анализ непериодических сигналов

Рассмотрим возможность применения гармонического анализа для непериодических сигналов с известными параметрами. Для этого представим, что непериодический сигнал имеет место в некотором произвольном отрезке времени $[t_1, t_2]$

$$s(t) = \begin{cases} s(t) & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t < t_1, t > t_2 \end{cases}.$$

Присвоим интервалу $[t_1, t_2]$ свойство периода периодической функции $[t_1, t_2] = T$.

В этом случае представляемый сигнал можно записать с помощью ряда Фурье (1.15)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad 0 < t < T, \quad (1.18)$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а коэффициенты выражаются через формулу (1.10), в которой изменены пределы интегрирования

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.19)$$

Подставим (1.19) в (1.18)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right) e^{-jn\omega_1 t}. \quad (1.20)$$

Поскольку ряд Фурье (1.20) предполагает, что сигнал $s(t)$ имеет период T , а на самом деле эта функция непериодическая, то мы стремимся к увеличению периода: $T \rightarrow \infty$.

Однако, чем больше T , тем меньше ω_1 и соответственно коэффициенты $C_n \equiv \frac{1}{\sqrt{T}}$. При $\omega_1 \rightarrow 0$ возрастает до ∞ число гармоник, а в спектре - число составляющих. Спектр становится практически сплошным. Поэтому вместо значения $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ в выражение (1.20) можно подставить $d\omega_1 = d\omega$, а вместо $n\omega_1$ - текущую частоту ω . Это означает, что если раньше под ω_1 понималось дискретное значение частоты, соответствующее периоду T основной гармоники периодического сигнала $s(t)$, то теперь под ω понимается непрерывная частотная шкала.

С учетом принятых допущений формула (1.20) примет вид

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{-j\omega t} d\omega. \quad (1.21)$$

Внутренний интеграл в (1.21), взятый по отрезку времени $[t_1, t_2]$, является функцией текущей частоты и обозначается

$$\mathbf{S}(\omega) = \int_{t_2}^{t_1} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.22)$$

Функция $\mathbf{S}(\omega)$ называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой сигнала $s(t)$.

В общем случае, когда значение t_1 и t_2 не определены, спектральная плотность записывается с бесконечными границами определения интеграла в (1.22)

$$\mathbf{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.23)$$

Если рассматривать выражения (1.22) или (1.23) при $\omega = 0$, то они сведутся к определению так называемой «площади сигнала»

$$\mathbf{S}(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$$

Это означает, что на нулевой частоте спектральная плотность непериодического сигнала равна «площади сигнала». Это правило часто применяется при анализе структуры непериодического сигнала.

После подстановки (1.23) в (1.21) получим уравнение, называемое двойным интегралом Фурье [4, 6, 10]

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.24)$$

который с учетом (1.22) преобразуется в выражение

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.25)$$

Выражение (1.23) называют прямым преобразованием Фурье, а выражение (1.25) - обратным преобразованием Фурье.

Обратимся к формуле (1.10)

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

и сравним ее правую часть с правой частью выражения (1.23). Видно, что выражения отличаются несущественными признаками: отсутствует множитель $1/T$, величина $n\omega_1$ заменена на ω , изменены пределы интегрирования. Это свидетельствует о том, что, если требуется перейти к комплексной форме записи выражения (1.23), то все операции и преобразования будут аналогичны операциям с коэффициентами ряда Фурье. В результате таких операций получим спектральную плотность непериодического сигнала в комплексном виде

$$\mathbf{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega) e^{j\Theta(\omega)}|, \quad (1.26)$$

где $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt$; $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt$ - косинусоидальная и синусоидальная составляющие спектральной плотности.

По аналогии с анализом периодического сигнала получим выражения для модуля и фазы спектральной плотности

$$|S(\omega)| = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}, \quad (1.27)$$

$$\Theta(\omega) = -\arctg\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right). \quad (1.28)$$

Выражение (1.27) представляет собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), а выражение (1.28) – фазочастотную характеристику (ФЧХ) сплошного спектра непериодического сигнала. Функция $|S(\omega)|$ – четная относительно оси частоты, а $\Theta(\omega)$ – нечетная. В дальнейшем с целью упрощения записи вместо $\Theta(\omega)$ будем писать Θ_ω или просто Θ .

Перейдем к выводу тригонометрической формы записи сигнала через спектральную плотность. Формула обратного преобразования Фурье (1.25) с учетом (1.27) и (1.28) принимает вид

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| e^{j(\omega t + \Theta_\omega)} d\omega, \quad (1.29)$$

откуда с учетом (1.26) получим

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \Theta_\omega) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \sin(\omega t + \Theta_\omega) d\omega. \quad (1.30)$$

В (1.30) функция под первым интегралом является четной, а во втором интеграле подынтегральная функция – нечетная. Известно, что на интервале $-\infty$ до ∞ интеграл от нечетной функции равен нулю [15]. Отсюда (1.30) запишется в следующей форме

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \Theta_\omega) d\omega. \quad (1.31)$$

Поскольку функция (1.31) является четной, то можно при выводе формулы, определяющей взаимосвязь непериодического сигнала с его спектром, изменить пределы интегрирования, ограничившись положительной частью оси частот

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \Theta_\omega) d\omega. \quad (1.32)$$

1.5 Распределение энергии в спектре непериодических сигналов

Для рассмотрения этого вопроса представим, что исследуемый сигнал является произведением двух функций времени

$$s(t) = f(t)g(t).$$

Тогда, используя формулу (1.23), можно записать выражение для спектральной плотности итогового сигнала

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.33)$$

Теперь каждую подынтегральную функцию представим в виде интеграла (1.25)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.34)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.35)$$

Здесь $\mathbf{F}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f(t)$, $\mathbf{G}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $g(t)$.

Перепишем выражение (1.33) в следующем виде

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right] e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega') \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j(\omega - \omega') t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega'. \quad (1.36)$$

В (1.36) введением знака ω' показано, что в общем случае частотные спектры сигналов $f(t)$ и $g(t)$ независимы друг от друга, равно как и сами сигналы $f(t)$ и $g(t)$ могут совпадать или не совпадать на время τ друг с другом. Заключенный в квадратные скобки правой части уравнения интеграл по переменной t представляет собой спектральную плотность функции $f(t)$ при значении частоты $\omega' - \omega$ и обозначается $\mathbf{F}(\omega' - \omega)$.

В результате выражение (1.36) записывается следующим образом

$$\mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega') \mathbf{F}(\omega - \omega') d\omega' \quad (1.37)$$

и называется сверткой спектров.

Очевидно, что при $\omega = 0$ с учетом выражений (1.33) и (1.37) можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^0 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega') \mathbf{F}(-\omega') d\omega'.$$

Заменяя ω' на ω , что не противоречит принятому допущению (т.е. под ω' можно было принять частоту спектра сигнала $f(t)$), получим окончательное выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega) \mathbf{F}(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega) \mathbf{F}^*(\omega) d\omega, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{F}(-\omega)$ и $\mathbf{F}^*(\omega)$ - комплексно сопряженные функции.

Аналогично можно показать, что произведению двух спектров

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \mathbf{G}(\omega)$$

соответствует функция времени $s(t)$, являющаяся сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ [16]

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) \mathbf{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.39)$$

Выражение (1.39) широко используется при анализе прохождения импульсных сигналов через линейные цепи.

Для исследования распределения энергии в спектре непериодического сигнала представим, что $f(t) = g(t) = s(t)$, т.е. это два одинаковых сигнала. Тогда энергия сигнала $s(t)$ будет равна

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t) dt.$$

Последний интеграл, выраженный в соответствии с (1.38) через спектральные плотности, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(\omega)\mathbf{F}^*(\omega) d\omega. \quad (1.40)$$

Учитывая идентичность сигналов $f(t)$ и $g(t)$ (в том числе по фазе), получим

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega)\mathbf{S}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (1.41)$$

Так как функция $\mathbf{S}(\omega)$ четная, то ее можно рассматривать при положительных значениях ω . Поэтому в правой части уравнения (1.41) вместо комплексной величины ставится модуль спектральной плотности сигнала.

Выражение (1.40) после подстановки $s(t) = g(t) = f(t)$ и соответственно $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) = \mathbf{F}(\omega)$ принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S^2(\omega)| d\omega \quad (1.42)$$

и называется равенством Парсевалья [16]. Это выражение устанавливает связь между энергией сигнала, как функции времени, с модулем его спектральной плотности. Как видно из (1.41) и (1.42), энергия непериодического сигнала не зависит от фаз спектральных составляющих. Это объясняется их ортогональностью на интервале $[-\infty, \infty]$. Иногда величину $|S^2(\omega)|$, имеющую смысл энергии, приходящейся на 1 Гц, рассматривают как спектральную плотность энергии сигнала.

Выводы по главе

1. Для теоретического анализа сигналов предварительно осуществляют построение их математических моделей. Функции, описывающие сигналы, могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Выбор формы записи определяется удобством математического анализа.

2. Любой сигнал можно представить вектором, длина которого называется нормой. Квадрат нормы носит название энергии сигнала.

3. Спектральное представление сложного сигнала представляет собой разложение его на сумму (конечную или бесконечную) элементарных гармонических сигналов с различными частотами, фазами и амплитудами.

4. Периодические сигналы представляются в виде рядов Фурье, которые образуются суммированием бесконечного числа гармоник с частотами,

кратными основной частоте повторения последовательности. Энергия сигнала равна сумме энергий всех членов обобщенного ряда Фурье.

5. Спектральное представление непериодических сигналов осуществляется путем преобразования их с помощью прямого преобразования Фурье.

6. В частотной области непериодический сигнал характеризуется своей спектральной плотностью $S(\omega)$. Сигнал и его спектральная плотность взаимно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье. Чем меньше длительность непериодического сигнала, тем шире его спектр. Спектральная плотность называется также спектральной функцией или Фурье-образом сигнала.

2. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

2.1 Радиосигналы с амплитудной модуляцией

Для передачи информации на расстояние применяются сигналы, эффективно излучаемые с помощью антенных устройств и обладающие способностью распространяться в виде свободных радиоволн. Частота колебаний этих сигналов ω_0 выбирается исходя из условий распространения волн, расстояния между источником и приемником информации и других факторов [1, 4, 11, 14]. В любом случае частота ω_0 должна быть больше наивысшей частоты Ω_m спектра передаваемого сигнала: $\Omega_m / \omega_0 \ll 1$.

Если информация заключается в амплитуде колебаний, то амплитуда радиосигнала является переменной величиной при постоянстве других параметров. Тригонометрическая форма записи однотонового амплитудно-модулированного (АМ) сигнала имеет вид

$$u_{AM}(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \Theta_0), \quad (2.1)$$

где $U(t) = U_0 + k_{AM} s(t)$ - огибающая АМ колебания; U_0 - постоянная составляющая АМ сигнала; k_{AM} - коэффициент пропорциональности; $s(t) = S_0 \cos(\Omega t + \gamma_0)$ - модулирующее колебание; S_0, Ω, γ_0 - амплитуда, частота и начальная фаза модулирующего колебания; ω_0, Θ_0 - частота и начальная фаза несущего колебания.

Введя понятие коэффициента амплитудной модуляции

$$M = \frac{k_{AM} S_0}{U_0} = \frac{\Delta U}{U_0}, \quad (2.2)$$

выражение (2.1) можно представить в следующей форме:

$$u_{AM}(t) = U_0 [1 + M \cos(\Omega t + \gamma_0)] \cos(\omega_0 t + \Theta_0). \quad (2.3)$$

Процесс формирования АМ сигнала показан на рис. 2.1. При $M \leq 1$ модуляция является неискаженной, при $M > 1$ наблюдаемый эффект называется перемодуляцией [11].

Используя тригонометрическую формулу произведения косинусов в (2.3), получим спектральный состав однотонового АМ сигнала (рис.2.2)

$$u_{AM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \Theta_0) + \frac{U_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \Theta_0 + \gamma_0] + \frac{U_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \Theta_0 - \gamma_0]. \quad (2.4)$$

Максимум амплитуды такого сигнала определяется коэффициентом модуляции

$$u_{AM}(t)_{\max} = U_0 [1 + M]. \quad (2.5)$$

Максимальную мгновенную мощность однотонового АМ сигнала выразим через квадрат суммарного напряжения

$$P_{AM \max} = U_0^2 [1 + M]^2 = P_0 [1 + M]^2. \quad (2.6)$$

Средняя за период модуляции мощность сигнала

$$\bar{P}_{AM} = U_0^2 \overline{[1 + M \cos(\Omega t - \gamma_0)]^2} = U_0^2 [1 + 0.5M^2]. \quad (2.7)$$

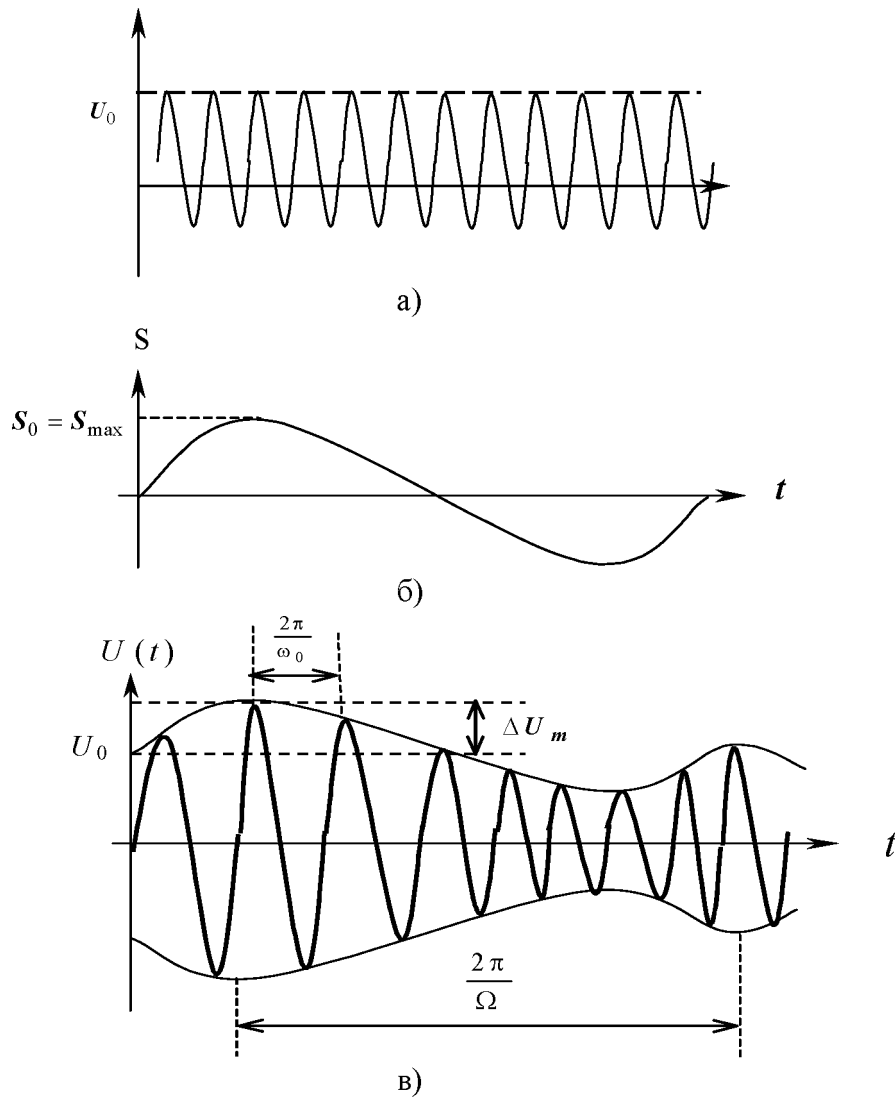


Рис. 2.1 Процесс формирования АМ сигнала:
а) - несущее колебание; б) - модулирующее колебание;
в) – модулированное колебание

При $M = 1$ максимальное и среднее значения мощности равны соответственно

$$P_{AH \max} = P_0 [1 + 1]^2 = 4P_0; \quad (2.8)$$

$$\bar{P}_{AM} = P_0 [1 + 0.5]^2 = 1,5P_0. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) видно, что даже при 100% модуляции ($M=1$) пиковая мощность равна $4P_0$, а средняя $1,5P_0$. Это означает, что с точки зрения эффективности использования мощности АМ радиосигнал неэффективен.

При сложном модулирующем сигнале $s(t)$, не рассматривая его формы, определим спектральную плотность АМ сигнала $s(t) = U(t)\cos(\omega_0 t + \Theta_0)$, которую, применяя прямое преобразование Фурье и правило смещения спектра [16], можно привести к виду

$$\mathbf{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\cos(\omega_0 t + \Theta_0)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2}e^{-j\Theta_0}\mathbf{S}_U(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\Theta_0}\mathbf{S}_U(\omega + \omega_0), \quad (2.10)$$

где $S_U(\omega \pm \omega_0)$ - спектральная плотность огибающей.

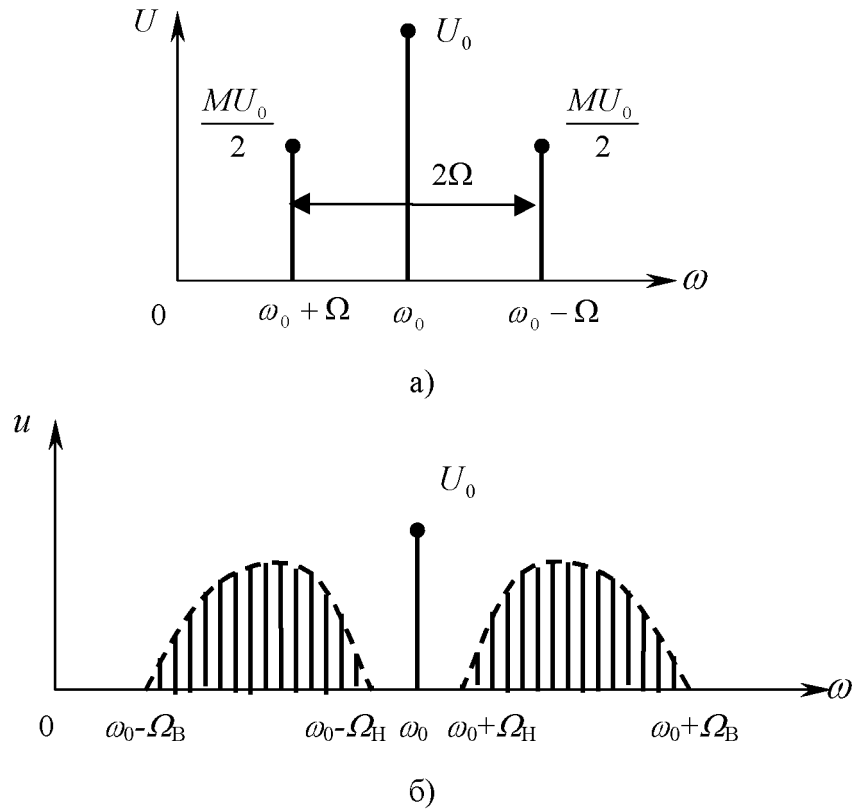


Рис. 2.2 Спектры амплитудно-модулированных сигналов:
 а) – при однотональной модуляции; б) - при многотональной модуляции

Из (2.10) видно, что при АМ происходит расщепление спектра на две части, смещенные относительно начала координат на $+\omega_0$ и $-\omega_0$, эквивалентное умножению функции $s(t)$ на гармоническое колебание $\cos \omega_0 t$.

Спектр многотонального модулированного сигнала показан на рис. 2.2,б и представляет собой симметричную относительно несущего колебания структуру из набора гармоник модулирующих колебаний, заключенных между верхней Ω_B и нижней Ω_H частотами модуляции.

Для более эффективного использования мощности передатчика применяется балансная модуляция (рис.2.3), при которой подачей АМ сигнала на колебательный контур, настроенный на частоту ω_0 , подавляется самая мощная спектральная составляющая - гармоника несущего колебания [11].

Взяв за основу выражение (2.4), получим

$$\begin{aligned}
 u_{БМ}(t) = U_0 \cos(\Omega t + \gamma_0) \cos(\omega_0 t + \Theta_0) = \frac{U_0 M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \Theta_0 + \gamma_0] + \\
 + \frac{U_0 M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \Theta_0 - \gamma_0].
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Здесь имеет место перемножение двух сигналов - модулирующего и несущего. С физической точки зрения выражение (2.11) представляет собой биения двух гармонических сигналов с амплитудами $\frac{U_m M}{2}$ и частотами $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$. При переходе огибающей биений через ноль фаза высокочастотного заполнения скачком изменяется на 180° (рис.2.3,б), так

как функция $\cos(\Omega t + \Theta_0)$ имеет разные знаки слева и справа от нуля. Этим объясняется отсутствие в спектре несущей частоты.

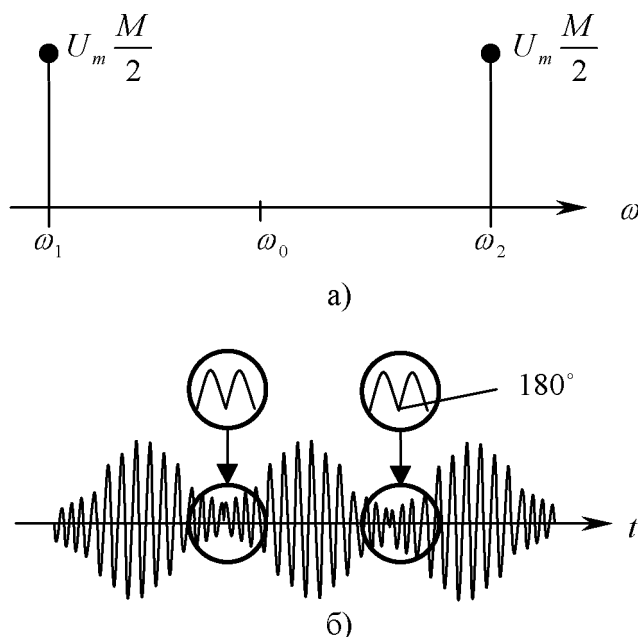


Рис. 2.3 Балансно-модулированный двухтональный сигнал:
а) - правило построения спектра; б) - форма колебаний

При многотональной балансной модуляции аналитическое выражение сигнала принимает вид

$$U_{БМ}(t) = \frac{U_0}{2} \sum_{i=1}^N M_i \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \gamma_0 + \Theta_i] + \frac{U_0}{2} \sum_{i=1}^N M_i \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \gamma_0 - \Theta_i].$$

Дальнейшее повышение эффективности АМ достигается подавлением несущей и одной (нижней) боковой полосы частот. Такой сигнал называется сигналом с одной боковой полосой и обозначается «ОБП» или «SSB» (single sideband) [11]. Наряду с повышением мощности полезного сигнала при ОБП создаются возможности для уплотнения каналов передачи информации.

2.2 Простые виды угловой модуляции. Функции Бесселя

Существуют модулированные сигналы, которые получаются за счет того, что в несущем гармоническом колебании $u(t) = U_0(\cos \omega_0 t + \Theta_0)$ передаваемое сообщение $s(t)$ изменяет либо частоту ω_0 , либо начальную фазу Θ_0 . Амплитуда U_0 остается неизменной. Аргумент такого колебания $\Psi(t) = \cos \omega_0 t + \Theta_0$ называется полной фазой и определяет текущее значение фазового угла. Такие сигналы получили название сигналов с угловой модуляцией.

Полная фаза высокочастотного колебания в момент t равна

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \Theta_0, \quad (2.12)$$

где первое слагаемое – набег фазы от времени начала отсчета до рассматриваемого момента, Θ_0 - начальная фаза колебаний (при $t = 0$).

Если в результате воздействия сигнала $s(t)$ изменится полная фаза колебания, то выражение для сигнала можно записать в двух вариантах.

В первом варианте полная фаза в обобщенном виде имеет запись

$$\Psi(t) = [\cos \omega_0 t + k_{\text{ЧМ}} s(t)] + \Theta_0,$$

где $k_{\text{ЧМ}}$ - коэффициент пропорциональности.

Если объектом воздействия несущего сигнала является частота, то сигналом $s(t)$ задается амплитуда отклонения частоты ω_0 . Это отклонение получило название «девиация частоты» и обозначается ω_δ . Если сигнал $s(t)$ гармонический с частотой Ω , то мгновенная частота колебаний равна

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_\delta \cos \Omega t.$$

Полная фаза такого колебания в момент t с учетом (2.12) имеет значение

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega_0 + \omega_\delta \cos \Omega t dt + \Theta_0.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \frac{\omega_\delta}{\Omega} \sin \Omega t + \Theta_0, \quad (2.13)$$

откуда видно, что полная фаза зависит от параметров сигнала $s(t)$.

Амплитуда изменения полной фазы $\frac{\omega_\delta}{\Omega} = m$ называется индексом угловой модуляции, который не зависит от частоты ω_0 . Такой сигнал называется модулированным по частоте или частотно-модулированным (ЧМ) и имеет вид

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m \sin \Omega t + \Theta_0]. \quad (2.14)$$

Во втором варианте результатом воздействия сигнала $s(t)$ является изменение фазы несущего колебания

$$\Psi(t) = \omega_0 t + [\Theta_0 + k_{\text{ФМ}} s(t)]. \quad (2.15)$$

Такой сигнал называется фазомодулированным (ФМ). Если модулирующий сигнал – гармоническое колебание, то в (2.15) можно выполнить подстановку

$$k_{\text{ФМ}} s(t) = \Theta_{\text{max}} \sin \Omega t,$$

где Θ_{max} - максимальное отклонение (девиация) фазы несущего колебания за один период модулирующего колебания (рис. 2.4).

Запись сигнала в тригонометрической форме имеет вид

$$U_{\text{ФМ}} = U_0 \cos[\omega_0 t + \Theta_{\text{max}} \sin \Omega t + \Theta_0]. \quad (2.16)$$

Таким образом, при частотной модуляции девиация частоты ω_δ пропорциональна амплитуде модулирующего сигнала и не зависит от частоты модуляции Ω . При фазовой модуляции девиация фазы Θ_{max} пропорциональна

амплитуде модулирующего сигнала и также не зависит от частоты модуляции Ω (рис.2.4). Кроме того, при ФМ фаза $\Theta(t)$ является функцией модулирующего сигнала, а при ЧМ фаза является функцией интеграла модулирующего сигнала. Физически ЧМ колебание получается путем прямого воздействия модулирующего сигнала непосредственно на генератор колебаний; при ФМ генератор формирует колебание с постоянной частотой, а фаза изменяется вследствие воздействия модулирующего сигнала на последние каскады цепи.

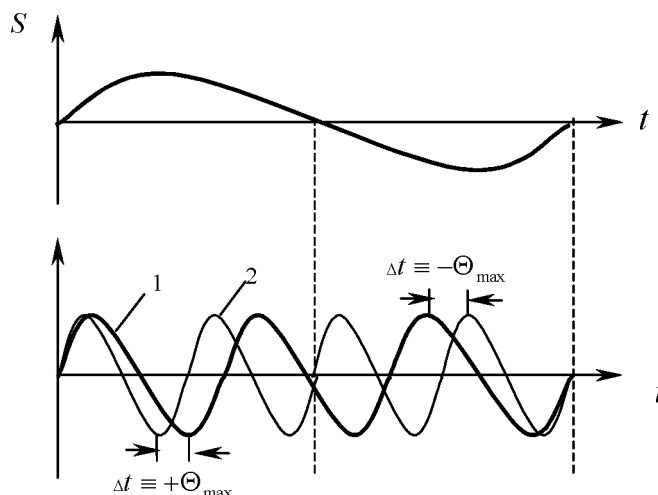


Рис. 2.4 Девияция фазы несущего колебания при фазовой модуляции:
а) – модулирующее колебание; б) - изменение фазы модулированного колебания (1) относительно несущего колебания (2)

Различие двух видов модуляции можно наблюдать при пилообразном модулирующем сигнале (рис.2.5).

При спектральном анализе сигналов с угловой модуляцией выделяют сигналы с малым и большим индексами модуляции, поскольку при $m \ll 1$ и $\frac{\Theta_{\max}}{2\pi} \ll 1$ анализ существенно упрощается.

Рассмотрим спектральное разложение ЧМ и ФМ сигналов при малых индексах модуляции. Оба вида сигналов рассматриваются как сигналы с угловой модуляцией без разделения на виды.

С целью упрощения анализа запишем обобщенный сигнал в виде (2.14) при нулевой начальной фазе и преобразуем его к виду суммы двух квадратурных колебаний - косинусного и синусного

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = u_c(t) + u_s(t) = \\ &= U_0 \cos(m \sin \Omega t) U_0 \cos \omega_0 t - U_0 \sin(m \sin \Omega t) U_0 \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При малых значениях m можно использовать приближенные равенства $\cos(m \sin \Omega t) \approx 1$; $\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin(\Omega t)$.

После соответствующих подстановок приближенных значений в (2.17) получим

$$u(t) = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{m U_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{m U_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (2.18)$$

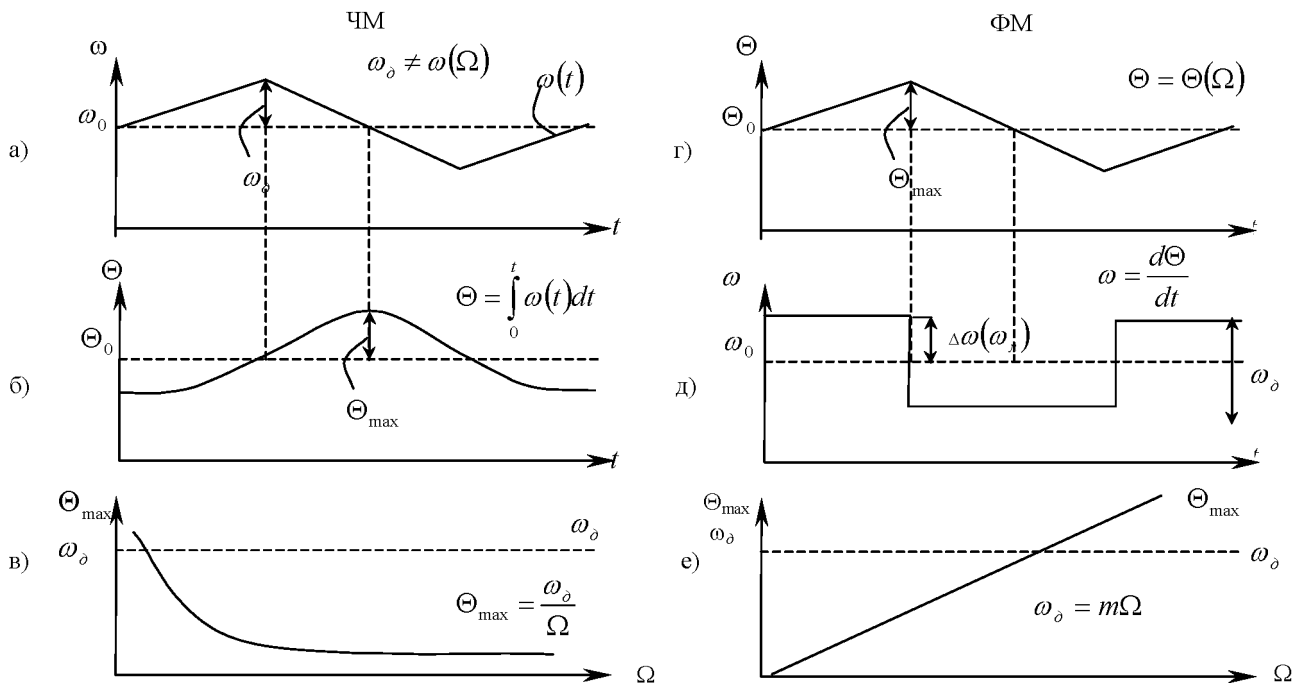


Рис. 2.5 Изменение параметров сигналов при частотной и фазовой модуляции:

а) – пилообразное изменение частоты при частотной модуляции; б) – изменение фазы, как результат модуляции частоты; в) - зависимость максимального значения изменения фазы и девиации частоты от частоты модуляции; г) - пилообразное изменение фазы при фазовой модуляции при ЧМ; д) - изменение частоты, как результат модуляции фазы; е) - зависимость максимального значения изменения фазы и девиации частоты от частоты модуляции при ФМ

Сравнивая (2.18) с (2.3), можно видеть, что формулы различаются только знаком перед вторым слагаемым и разным характером индекса модуляции. Это означает, что спектры УМ (рис. 2.6) и АМ (рис. 2.2) сигналов отличаются только фазой первой боковой составляющей

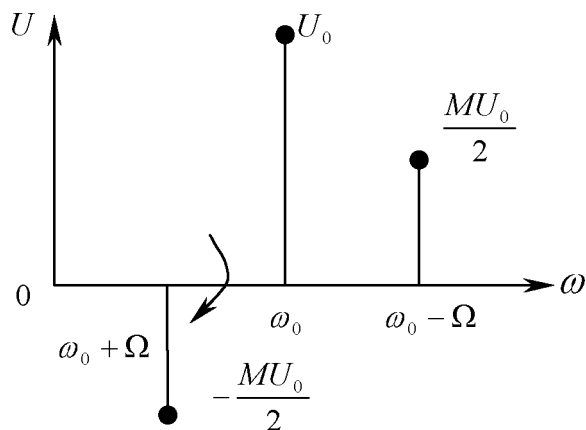


Рис. 2.6 Спектр однотонального УМ колебания при $m \ll 1$

Однако с ростом индекса модуляции m уравнение (2.18) перестает адекватно отображать спектр УМ колебаний. Например, с ростом m последовательно проявляются 2-я, 3-я и 4-я гармоники колебаний с соответствующими частотами $\omega_0 \pm 2\Omega$, $\omega_0 \pm 3\Omega$, $\omega_0 \pm 4\Omega$. Соответственно расширяется спектр сиг-

нала, более сложным становится процесс вычисления амплитуды гармоник. В частности, в (2.17) можно более точно определить косинусоидальную и синусоидальную составляющие, увеличивая число членов ряда в разложении функции малого аргумента до двух:

$$\begin{aligned}\cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t &= \left(1 - \frac{m^2}{2} \sin^2 \Omega t \right) \cos \omega_0 t; \\ \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t &= \left(m \sin \Omega t - \frac{m^3}{6} \sin^3 \Omega t \right) \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$

Тогда, после подстановки этих значений в (2.17) и соответствующих преобразований, получим

$$\begin{aligned}u(t) &= U_0 \left(1 - \frac{m^2}{4} \right) \cos \omega_0 t + U_0 m \left(1 - \frac{m^2}{8} \right) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \\ &+ U_0 \frac{m^2}{8} [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t - \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + U_0 \frac{m^3}{48} [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t].\end{aligned}\quad (2.19)$$

Анализ выражения (2.19) показывает, что с ростом m амплитуда боковых составляющих увеличивается, а амплитуда несущего колебания уменьшается на величину $U_0 m^2 / 4$. Очевидно, что с ростом индекса модуляции количество членов ряда разложения синусоидальной и косинусоидальной составляющих увеличивается и формула (2.18) существенно усложняется. С целью упрощения анализа УМ колебаний при произвольных значениях m применяют функции Бесселя, предназначенные для описания сложных колебательных процессов [16]. Вид колебаний определяется набором функций Бесселя 1-го рода с различными порядками n . Это означает, что для системы бesselевых функций 1-го рода с целыми индексами $J_n(m)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет место произвольная функция, которая есть некоторый сигнал, разлагаемый в ряд Фурье на отрезке $-\pi < \Psi < \pi$:

$$e^{jm \sin \Psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{jn \sin \Psi}.$$

В качестве примера рассмотрим простейший случай однотонового ЧМ или ФМ сигнала (2.17), для которого можно найти общее выражение при любом m . С учетом того, что $\Psi = \Omega t$, модулированный сигнал в комплексной форме будет иметь вид

$$u(t) = U_0 \operatorname{Re} \left[e^{j\omega_0 t} e^{jm \sin \Omega t} \right] = U_0 \operatorname{Re} \left[e^{j\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{jn \sin \Omega t} \right], \quad (2.20)$$

где $J_n(m)$ - функция Бесселя 1-го рода n -го порядка; n - индекс, определяющий форму зависимости колебания от аргумента - индекса модуляции m .

Из (2.20) получим математическую модель УМ сигнала

$$u(t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\omega_0 t + n\Omega t). \quad (2.21)$$

Пользуясь (2.21), разложим косинусоидальную составляющую в (2.17) в ряд

$$\cos(m \sin \Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m)\cos 2\Omega t + 2J_4(m)\cos 4\Omega t \dots$$

Разложение синусоидальной составляющей имеет вид

$$\sin(m \sin \Omega t) = J_1(m)\sin 2t + 2J_3(m)\sin 3\Omega t + 2J_5(m)\sin 5\Omega t \dots$$

После введения подстановок сигнал (2.17) в развернутой форме принимает следующую запись

$$u(t) = U_0 \left\{ J_0(m)\cos \omega_0 t - 2J_1(m)\sin \Omega t \sin \omega_0 t + 2J_2(m)\cos 2\Omega t \cos \omega_0 t - 2J_3(m)\sin 3\Omega t \sin \omega_0 t + 2J_4(m)\cos 4\Omega t \cos \omega_0 t \dots \right\} \quad (2.22)$$

Из формулы (2.22) видно, что начальные фазы боковых колебаний с частотами $\omega_0 + n\Omega$ и $\omega_0 - n\Omega$ совпадают, если n - четное число, и отличаются на 180° , если n - нечетное число. Таким образом, при ЧМ и ФМ спектр колебаний состоит из бесконечного числа боковых частот, расположенных попарно симметрично относительно несущей частоты ω_0 и отличающихся от последней на $n\Omega$, где n - любое целое число. Амплитуда n -ой боковой составляющей равна $U_n = J_n(m)U_0$, где U_0 - амплитуда немодулированного колебания, m - индекс модуляции. Вклад различных боковых частот в суммарную мощность модулированного колебания определяется величиной m , от которой зависит функция $J_n(m)$ (табл. 2.1).

К характерным особенностям функций Бесселя можно отнести следующие:

- с ростом индекса n протяженнее становится область аргументов m , при которых эта функция очень мала (изменение значений $J_n(m)$ в столбцах табл. 2.1);

- с ростом индекса модуляции m расширяется полоса частот, занимаемых УМ сигналом (изменение значений $J_n(m)$ в строках табл. 2.1).

Таблица 2.1. Значения $J_n(m)$ при различных n и m

$m \backslash n$	1	2	3	4	5
0	0,765	0,224	-0,260	-0,397	-0,178
1	0,440	0,577	0,339	-0,066	-0,328
2	0,115	0,353	0,486	0,364	0,047
3	0,020	0,129	0,309	0,430	0,365
4	0,002	0,034	0,132	0,281	0,391
5	$2 \cdot 10^{-4}$	0,007	0,043	0,132	0,261
6	$2 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,011	0,049	0,131

— - граница устойчивого перехода к $J_n(m) \rightarrow 0$.

На рисунке 2.7 в качестве примера показано, как изменяется значение $J_n(m)$ для $n = 2$ и $n = 16$ в зависимости от индекса модуляции. На рис. 2.8 показаны спектры сигналов с однотоновой частотной модуляцией при двух значениях m .

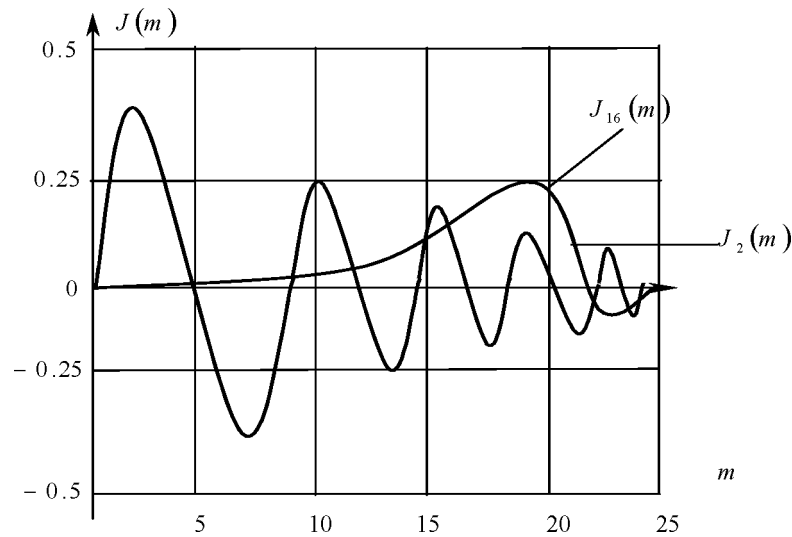


Рис. 2.7 Зависимость функций Бесселя 1-го рода с порядками $n=2$ и $n=16$ от индекса модуляции m

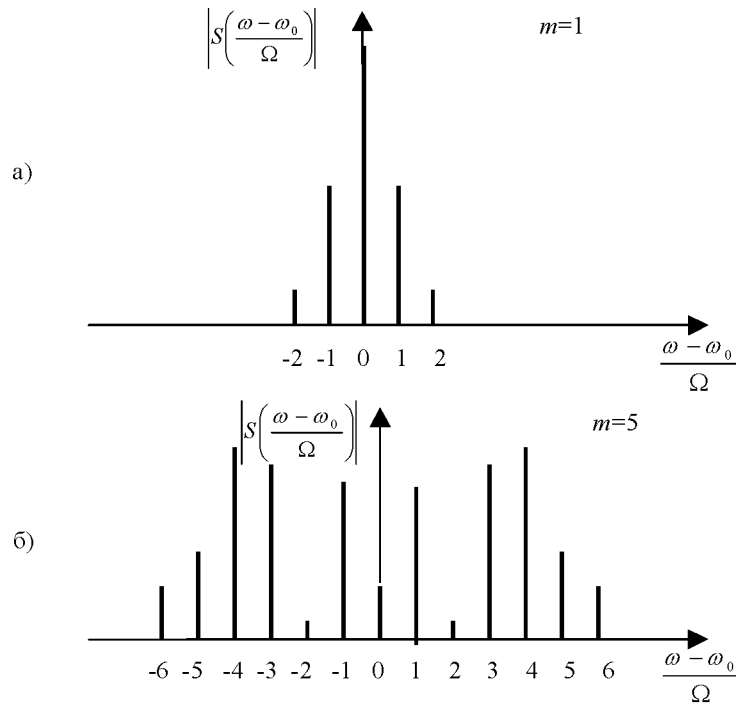


Рис. 2.8 Спектры сигналов с однотоновой ЧМ при различных индексах модуляции: а) – $m=1$; б) – $m=5$

На практике полагают, что допустимо пренебречь всеми спектральными составляющими с номерами $n > m + 1$ [4-9]. Поэтому практическая ширина спектра УМ сигнала определяется выражением

$$\Delta\omega_{np} = 2|n_{\max}|\Omega \approx 2(m+1)\Omega.$$

Реальные ЧМ и ФМ специальные сигналы характеризуются условием $m \gg 1$.

В этом случае справедливо выражение: $2|n_{\max}|\Omega \approx 2m\Omega$.

Так как $m = \frac{\omega_o}{\Omega}$, следовательно, при больших индексах модуляции практическая ширина спектра ЧМ и ФМ колебания близка к удвоенной девиации частоты (рис. 2.9):

$$\Delta\omega_{np} = 2|n_{max}|\Omega \approx 2\omega_o. \quad (2.23)$$

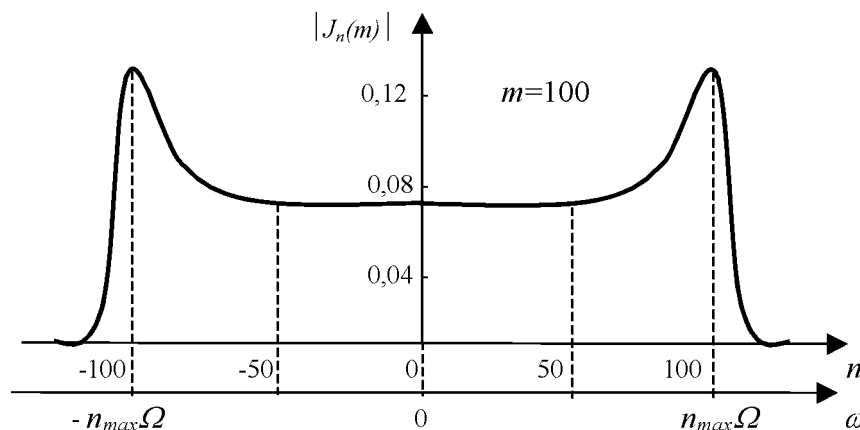


Рис. 2.9 Определение практической ширины спектра УМ сигнала при больших m

Подбором индекса модуляции можно управлять перераспределением мощности в спектре модулированного сигнала. В частности, если значение m выбрано таким образом, чтобы $J_0(m) = 0$, то несущее колебание с частотой ω_o в спектре УМ сигнала будет отсутствовать.

2.3 Форма и спектр колебания при сложных видах частотной и амплитудно-частотной модуляции

Рассмотренные в 2.2. спектры относятся к ЧМ и ФМ с однотональной модуляцией. При УМ по негармоническому закону нахождение спектра колебания усложняется.

Рассмотрим в качестве примера сигнал, представляющий собой несущее колебание, промодулированное двумя низкими частотами Ω_1 и Ω_2 :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_o t + m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) = U_0 \cos(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \cos \omega_o t - U_0 \sin(m_1 \sin \Omega_1 t + m_2 \sin \Omega_2 t) \sin \omega_o t. \quad (2.24)$$

Будем считать, что $m_1 \ll 1$ и $m_2 \ll 1$, т.е. можно использовать допущения:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x = x.$$

Выполнив элементарные тригонометрические преобразования, получим исходный сигнал в виде суммы:

$$\begin{aligned}
u(t) = & U_0 \left[1 - \frac{1}{4} (m_1^2 + m_2^2) \right] \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m_1 U_0 [\cos(\omega_0 + \Omega_1)t - \cos(\omega_0 - \Omega_1)t] + \\
& + \frac{1}{2} m_2 U_0 [\cos(\omega_0 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 - \Omega_2)t] + \frac{1}{8} m_1^2 U_0 [\cos(\omega_0 + 2\Omega_1)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega_1)t] + \\
& + \frac{1}{8} m_2^2 U_0 [\cos(\omega_0 + 2\Omega_2)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega_2)t] + \frac{1}{2} m_1 m_2 U_0 [\cos(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)t + \\
& + \cos(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)t - \cos(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)t].
\end{aligned}$$

В спектре сигнала, представленном на рис. 2.10, имеют место спектральные составляющие с частотой $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega_1, \omega_0 \pm 2\Omega_1, \omega_0 \pm \Omega_2, \omega_0 \pm 2\Omega_2, \omega_0 \pm (\Omega_2 - \Omega_1), \omega_0 \pm (\Omega_1 + \Omega_2)$. Последние два значения частот называются комбинационными. Амплитуды этих составляющих зависят от произведения парциальных индексов модуляции.

В общем случае при группе модулирующих колебаний с частотами $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ и парциальными индексами модуляции m_1, m_2, \dots, m_N спектр сигнала описывается формулой:

$$U(t) = U_0 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(m_1) J_{n_2}(m_2) \dots J_{n_N}(m_N) \cos(\omega_0 + n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2 + \dots + n_N \Omega_N)t. \quad (2.25)$$

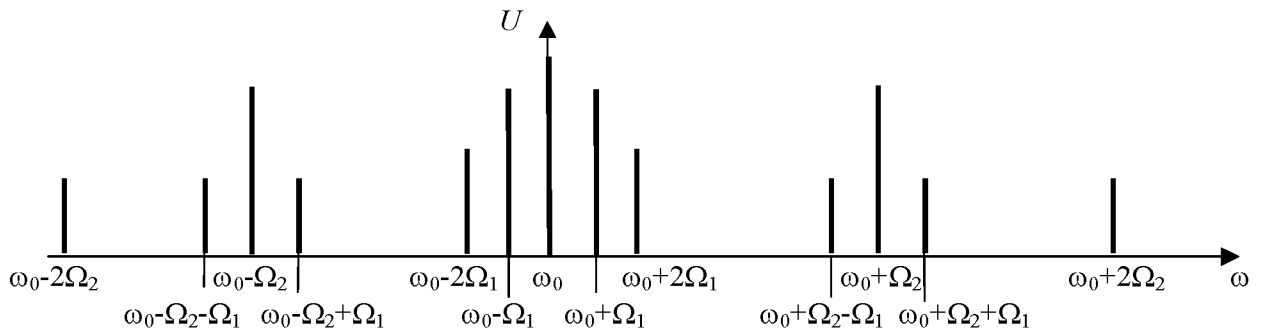


Рис. 2.10 Спектр ЧМ сигнала с двухтональной модуляцией

Из выражений (2.10), (2.18) и (2.25) видно, что при прочих равных условиях спектр колебания со сложной угловой модуляцией гораздо богаче спектра однотонового спектра УМ сигнала или многотонового АМ сигнала. Иногда, сравнивая угловую и амплитудную модуляции несущего колебания, УМ называют модуляцией нелинейного типа из-за наличия комбинационных частот.

Выбор наиболее удобного метода анализа УМ сигнала зависит от характера модулирующей функции. В качестве примера рассмотрим широко распространенный в качестве помеховых сигналов **импульс с линейной частотной модуляцией** (ЛЧМ-импульс), показанный на рис. 2.11. Будем полагать, что частота заполнения импульса линейно возрастает от конца импульса к его концу.

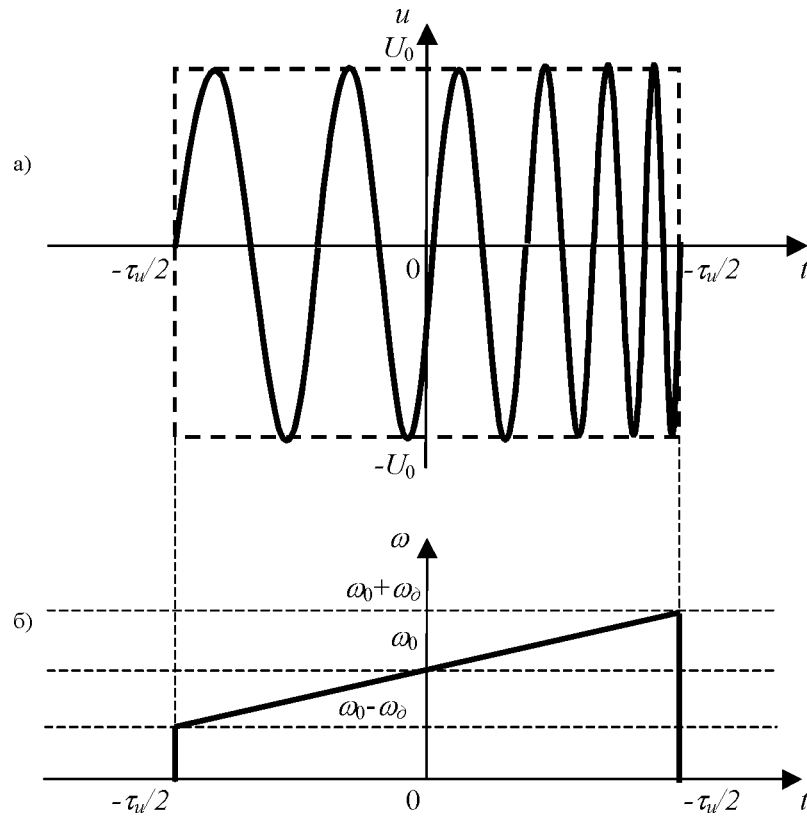


Рис. 2.11 Импульс с линейной частотной модуляцией:
 а) – зависимость амплитуды сигнала от времени; б) – зависимость частоты заполнения импульса от времени

Конкретизируя математическую модель сигнала, считаем τ_u - длительность импульса, точка $t=0$ соответствует середине импульса, а линейная частота в пределах импульса изменяется во времени по закону:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t, \quad (2.26)$$

где μ - параметр с размерностью $\frac{1}{c^2}$, который зависит от скорости изменения частоты во времени.

За время $\frac{\tau_u}{2}$ девиация частоты равна $\omega_d = \mu \frac{\tau_u}{2}$.

Полная фаза сигнала:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}. \quad (2.27)$$

В результате запись ЛЧМ импульса имеет вид:

$$u_{ЛЧМ}(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\tau_u}{2} \\ U_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right) & -\frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \frac{\tau_u}{2} \\ 0 & t > \frac{\tau_u}{2} \end{cases}. \quad (2.28)$$

На основании модели (2.28), воспользовавшись прямым преобразованием Фурье (1.23), (2.10) и формулой Эйлера для косинуса суммы аргументов

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left(e^{j(\alpha+\beta)} + e^{-j(\alpha+\beta)} \right),$$

запишем выражение для спектральной плотности одиночного ЛЧМ – импульса:

$$S(\omega) = \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} U_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{2} \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{j \left[(\omega_0 - \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} \right]} dt + \frac{U_0}{2} \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{-j \left[(\omega_0 + \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} \right]} dt. \quad (2.29)$$

Первое слагаемое в правой части (2.29) определяет всплеск спектральной плотности вблизи частоты $\omega = \omega_0$, а второе – всплеск вблизи $\omega = -\omega_0$. Обычно на практике эффект перекрытия спектров с положительной и отрицательной частотами пренебрежительно мал, так как $\omega_0 = \mu \tau_u \ll \omega_0$. Поэтому при определении $S(\omega)$ в области положительных частот второе слагаемое можно отбросить:

$$S(\omega) = \frac{U_0}{2} \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{j \left[(\omega_0 - \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} \right]} dt, \quad \omega > 0. \quad (2.30)$$

Сделаем в показателе степени (2.30) дополнение до полного квадрата:

$$\begin{aligned} (\omega_0 - \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} &= \left[(\omega_0 - \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} + \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} \right] - \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} = \\ &= \left[-(\omega - \omega_0) t + \frac{\mu t^2}{2} + \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} \right] - \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} = -\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} + \left[\frac{\mu}{2} \left(t - \frac{\omega_0 - \omega}{2\mu} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда:

$$S(\omega) = \frac{U_0}{2} \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{-j \left[\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} - \frac{\mu}{2} \left(t - \frac{\omega_0 - \omega}{2\mu} \right)^2 \right]} dt = \frac{U_0}{2} e^{-j \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu}} \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{j \frac{\mu}{2} \left(t - \frac{\omega_0 - \omega}{2\mu} \right)^2} dt. \quad (2.31)$$

В (2.31) удобно перейти от переменной t к новому аргументу y , сделав следующую замену:

$$\sqrt{\mu} \left(t - \frac{\omega_0 - \omega}{\mu} \right) = \sqrt{\pi} y,$$

откуда

$$y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \left(t - \frac{\omega_0 - \omega}{\mu} \right).$$

В результате (2.31) переписывается следующим образом:

$$S(\omega) = \frac{U_0}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-j \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu}} \int_{-Y_1}^{Y_2} e^{j \frac{\pi y^2}{2}} dy. \quad (2.32)$$

В (2.32) пределы интегрирования определяются следующим образом:

$$Y_1 = \frac{\frac{\mu \tau_u}{2} + (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi \mu}}, \quad Y_2 = \frac{\frac{\mu \tau_u}{2} - (\omega - \omega_0)}{\sqrt{\pi \mu}}. \quad (2.33)$$

Если представить подынтегральное выражение в (2.32) в тригонометрической форме, то интеграл сводится к комбинации известных функций - интегралов Френеля [15]

$$\int_0^x e^{j \pi y^2} dy = C(y) + jS(y), \quad (2.34)$$

где $C(y) = \int_0^y \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$; $S(y) = \int_0^y \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$ - интегралы Френеля.

С учетом результатов интегрирования с известными границами выражение (2.32) принимает окончательный вид:

$$S(\omega) = \frac{U_0}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-j \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu}} \{C(Y_1) + C(Y_2) + j[S(Y_1) + S(Y_2)]\}. \quad (2.35)$$

В показательной форме спектр ЛЧМ импульса записывается как

$$S(\omega) = |S(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}. \quad (2.36)$$

Модуль спектральной плотности является амплитудным спектром ЛЧМ импульса, иначе называемым амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) сигнала

$$|S(\omega)| = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \sqrt{[C(Y_1) + C(Y_2)]^2 + [S(Y_1) + S(Y_2)]^2}. \quad (2.37)$$

Фазо-частотная характеристика $\Theta(\omega)$, ЛЧМ импульса состоит из квадратичного слагаемого $\Theta_1(\omega)$, определяемого показателем степени в (2.35), и остаточного фазового члена $\Theta_2(\omega)$

$$\Theta_1(\omega) = -\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu}; \quad (2.38)$$

$$\Theta_2(\omega) = \text{arctg} \frac{S(Y_1) + S(Y_2)}{C(Y_1) + C(Y_2)}. \quad (2.39)$$

Численный анализ полученных выражений свидетельствует о том, что характер частотной зависимости модуля и фазы спектральной плотности прямоугольного ЛЧМ импульса зависит от безразмерного числа

$$B = 2f_{\delta}\tau_u = \frac{\mu\tau_u^2}{2\pi}, \quad (2.40)$$

которое представляет собой произведение частоты девиации f_{δ} на длительность импульса τ_u и называется базой ЛЧМ сигнала.

Примеры спектров ЛЧМ импульса с различным значением величины базы показаны на рис. 2.12.

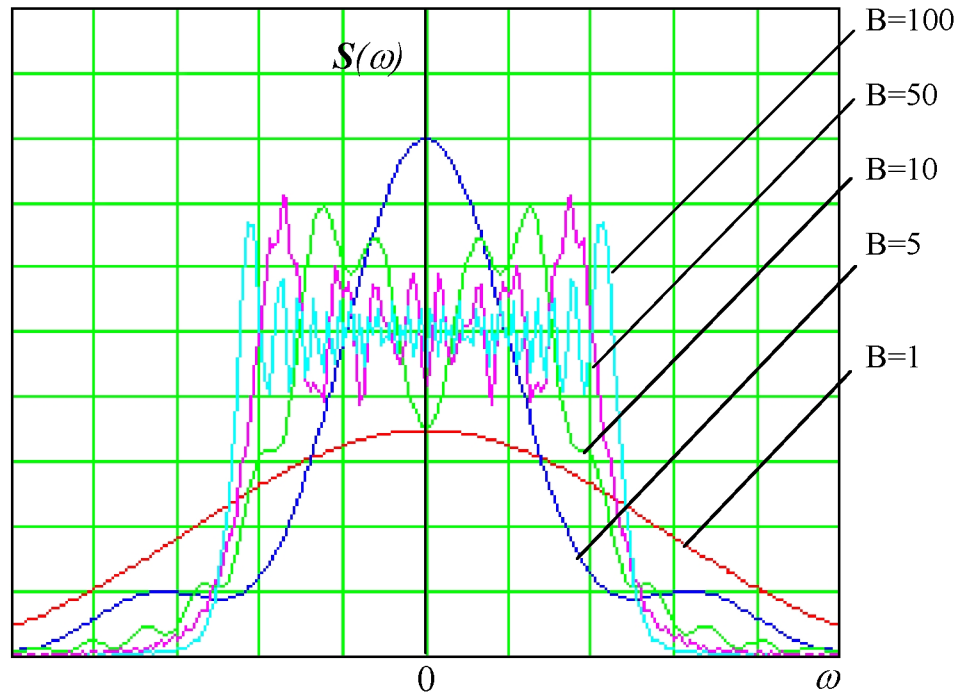


Рис. 2.12 Спектр ЛЧМ сигнала при различных значениях базы

В практически важных случаях выполняется условие $B \gg 1$. При этом видно, что модуль спектральной плотности относительно постоянен в пределах полосы частот шириной $2f_{\delta}$ с центром в точке f_0 . С увеличением базы сигнала наблюдается постепенное уменьшение амплитуды осцилляций модуля спектральной плотности.

При $\omega = \omega_0$ модуль спектральной плотности равен:

$$|S(\omega)| = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}},$$

поэтому для $B \gg 1$ справедлива запись:

$$|S(\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_0 - \omega_{\delta} \\ U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}, & \omega_0 - \omega_{\delta} \leq \omega \leq \omega_0 + \omega_{\delta} \\ 0, & \omega > \omega_0 + \omega_{\delta} \end{cases}$$

Энергетический спектр ЛЧМ сигнала

$$W(\omega) = S^2(\omega) = \frac{\pi U_0^2}{2\mu}$$

также постоянен в полосе частот $\omega_0 - \omega_\theta$, $\omega_0 + \omega_\theta$ и стремится к 0 вне этой полосы.

Используем полученные ранее результаты для анализа колебаний вида

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \Theta(t)], \quad (2.41)$$

которое называется сигналом с **амплитудно-частотной модуляцией (АЧМ)**.

По аналогии с (2.17) разделим сигнал на косинусную и синусную составляющие. Тогда (2.41) можно записать в виде суммы двух квадратурных составляющих, каждое из которых модулировано только по амплитуде

$$u(t) = u_c(t) + u_s(t) = U(t) \cos \Theta(t) \cos \omega_0 t - U(t) \sin \Theta(t) \sin \omega_0 t. \quad (2.42)$$

Как видно из (2.42), закон амплитудной модуляции для косинусоидальной составляющей определяется медленной функцией $\cos \Theta(t)$, для синусоидальной составляющей – $\sin \Theta(t)$. Определение спектра колебаний сводится к нахождению спектральных функций огибающих квадратурных колебаний $u_c(t) = U(t) \cos \Theta(t)$ и $u_s(t) = U(t) \sin \Theta(t)$ с последующим сдвигом этих спектров на величину ω_0 .

Спектральные плотности квадратурных колебаний

$$\mathbf{S}_C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_C(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cos \Theta(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (2.43)$$

$$\mathbf{S}_S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_S(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \sin \Theta(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.44)$$

С целью упрощения анализа в (2.43) фаза $\theta(t)$ приравняется к 0, а в (2.44) - к величине $-\pi/2$. Далее применяется правило смещения спектра (2.10). Спектральная плотность косинусоидальной составляющей сигнала $u_c(t) = U(t) \cos \omega_0 t$ в результате будет иметь вид

$$\mathbf{S}_C(\omega) = \frac{1}{2} [\mathbf{S}_C(\omega - \omega_0) + \mathbf{S}_C(\omega + \omega_0)]. \quad (2.45)$$

Синусоидальной составляющей сигнала $u_s(t) = U_s(t) \cos \omega_0 t$ соответствует спектральная плотность

$$\mathbf{S}_S(\omega) = -\frac{j}{2} [\mathbf{S}_S(\omega - \omega_0) + \mathbf{S}_S(\omega + \omega_0)]. \quad (2.46)$$

Так как при $\omega > 0$ правые части выражений (2.45) и (2.46) становятся пренебрежительно малыми, то их можно приравнять к 0. Тогда в соответствии с правилом смещения спектра можно записать

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{S}_C(\omega) - \mathbf{S}_S(\omega) = \frac{1}{2} [\mathbf{S}_C(\omega - \omega_0) + j\mathbf{S}_S(\omega - \omega_0)], \quad \omega > 0. \quad (2.47)$$

Введем подстановку $\Omega = \omega - \omega_0$. Тогда $\omega = \omega_0 + \Omega$, а формула (2.47) переписывается в виде

$$S(\omega) = S(\omega_0 + \Omega) = \frac{1}{2} [S_C(\Omega) + jS_S(\Omega)], \quad \omega > 0. \quad (2.48)$$

Структура спектра колебания $U(t)$ при АЧМ зависит от соотношения и вида функций $U(t)$ и $\Theta(t)$. При АМ (см. рис.2.2) спектр характеризуется полной симметрией амплитуд и фаз колебаний на частотах $n\Omega$ или (Ω_n, Ω_g) относительно несущей частоты ω_0 . В процессе угловой модуляции фазы колебаний боковых частот, как видно из (2.18), (2.19), (2.22) и рис. 2.6 при нечетных n сдвинуты на 180° .

При одновременной модуляции по амплитуде и углу спектр может быть симметричным или несимметричным относительно ω_0 как по фазам, так и по амплитудам. В частности, если $\Theta(t)$ нечетная функция времени, то при любом виде функции $U(t)$ спектр колебания $u(t)$ несимметричен. Вместе с тем по отношению к точке $\omega = 0$ модуль спектральной функции всегда будет симметричен. Для получения симметричного относительно $\omega = \omega_0$ спектра требуется четность функции $\Theta(t)$ при однозначном поведении функции $U(t)$, независимо от того - четная она или нечетная. Если функция $U(t)$ представлена суммой четной и нечетной функций, то спектр сигнала $u(t)$ всегда будет несимметричным даже при четной $\Theta(t)$.

Рассмотрим заявленные свойства АЧМ сигнала на примере смешанной модуляции на одной и той же частоте амплитудной и частотной модуляции $\Omega_{AM} = \Omega_{CM} = \Omega$ при $M \leq 1$ и $m \ll 1$.

Примем обе функции в качестве четных

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 (1 + M \cos \Omega t), \\ \Theta(t) &= m \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Тогда АЧМ сигнал можно записать в виде

$$u(t) = U_0 (1 + M \cos \Omega t) \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t). \quad (2.50)$$

Примем известные допущения при малых m :

$$\cos(m \cos \Omega t) \approx 1, \quad \sin(m \cos \Omega t) \approx m \cos \Omega t.$$

В результате (2.50) по аналогии с (2.18) переписывается следующим образом:

$$u(t) = U_0 \left[(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t - m \left(\frac{M}{2} + \cos \Omega t + \frac{M}{2} \cos 2\Omega t \right) \sin \omega_0 t \right].$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \left\{ \cos \omega_0 t + \frac{M}{2} [\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t] - \right. \\ &\quad \left. - m \left[\frac{M}{2} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} \sin(\omega_0 - \Omega)t \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{mM}{4} [\sin(\omega_0 + 2\Omega)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega)t] \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Для амплитуды колебания на частоте ω_0 из (2.51) получим значение

$$U_1(\omega_0) = U_0 \sqrt{1 + \left(\frac{mM}{2}\right)^2}.$$

Амплитуды колебаний на других частотах

$$U_2(\omega_0 \pm \Omega) = U_0 \frac{1}{2} \sqrt{M^2 + m^2};$$

$$U_3(\omega_0 \pm 2\Omega) = U_0 \frac{mM}{4}.$$

Спектр АЧМ сигнала (2.51) представлен на рис. 2.13. Если в АЧМ сигнале фаза $\Theta(t)$ является четной функцией, а огибающая $U(t)$ содержит четную и нечетную составляющие, то спектр такого сигнала будет существенно отличаться от спектра сигнала (2.51).

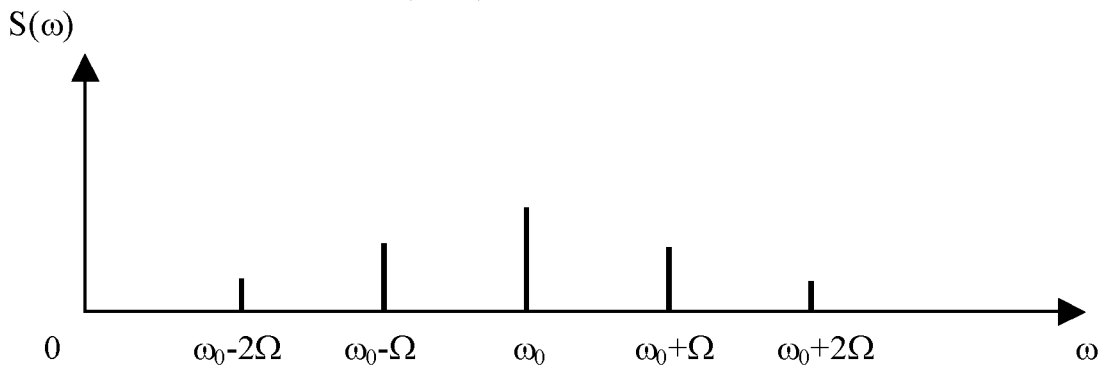


Рис. 2.13 Спектр АЧМ сигнала при $\Theta(t)$ - четной функции и $U(t)$ - комбинированной функции

2.4 Сигналы с ограниченным спектром. Теорема Котельникова

Из предыдущего материала известно, что любой сигнал можно представить в виде спектра, составляющие которого лежат в интервале от 0 до ∞ . Вместе с тем, на примере сигналов с угловой модуляцией можно убедиться, что при $\omega \rightarrow \infty$ вклад спектральных составляющих становится пренебрежительно малым. Кроме того, любое реальное устройство, предназначенное для формирования и передачи сигнала, имеет конечные частотные характеристики, связанные с физическими свойствами материалов, из которых состоят эти устройства [9, 10].

Любой сигнал с ограниченным спектром можно получить из формулы обратного преобразования Фурье (1.21)

$$s(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_R \mathcal{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.52)$$

где R – конечный отрезок полосы частот (при $\omega \notin R$ $S(\omega) = 0$).

В качестве примеров рассмотрим некоторые идеальные сигналы с ограниченным спектром.

1. Идеальный низкочастотный сигнал

Математическая модель идеального низкочастотного (НЧ) сигнала описывается формулой спектральной плотности (рис. 2.14)

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_m \\ S_0, & -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m \\ 0, & \omega > \omega_m \end{cases} \quad (2.53)$$

где ω_m - граничная частота спектра.

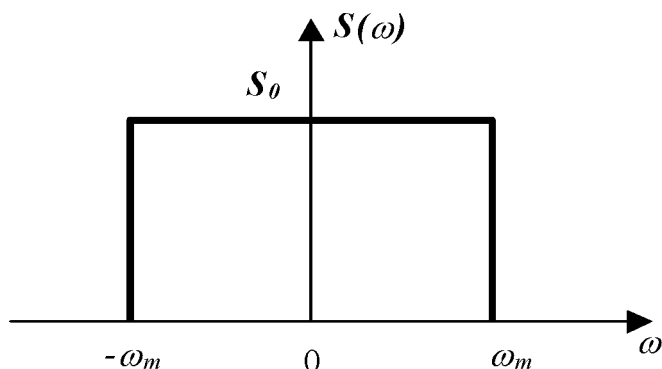


Рис. 2.14 Спектр идеального низкочастотного сигнала

Мгновенное значение такого сигнала через обратное преобразование Фурье имеет вид

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \cdot 2\omega_m \cdot \frac{e^{j\omega_m t} - e^{-j\omega_m t}}{j2\omega_m} \quad (2.54)$$

Форма такого сигнала (рис. 2.15) – осциллирующая кривая, симметричная (четная) относительно начала отсчета времени. С увеличением ω_m возрастают начальная амплитуда и частота осцилляций.

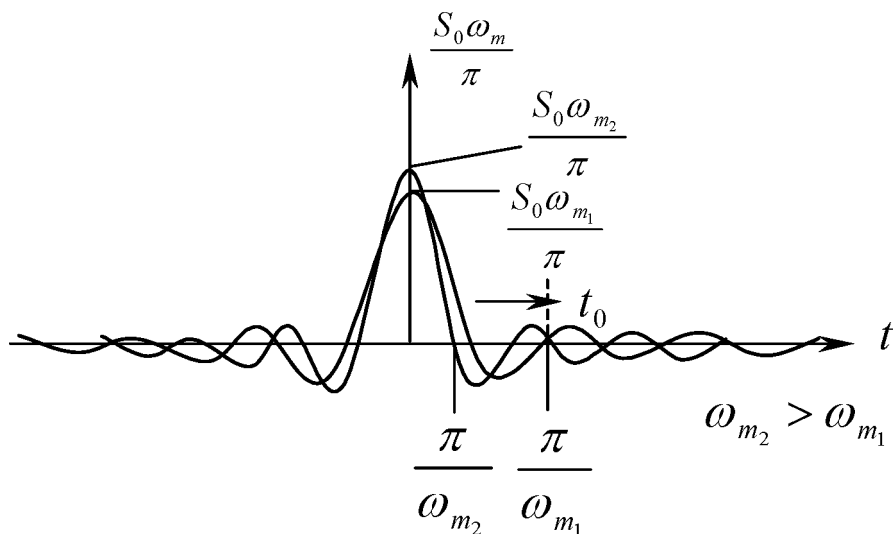


Рис. 2.15 Форма идеального НЧ сигнала

Если $S(\omega) = S_0 e^{-j\omega t_0}$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$, то

$$s(t) = \frac{S_0 \omega_m}{\pi} \operatorname{sinc}[\omega_m (t - t_0)], \quad (2.55)$$

т.е., поскольку фаза Ψ спектральной плотности линейно зависит от частоты ($e^{-j\Psi} = e^{-j\omega t_0}$), то сигнал смещается во времени на t_0 в соответствии с рис. 2.16.

Таким образом, идеальный НЧ сигнал представляет собой идеализированную выходную реакцию, возбуждаемую колебанием с равномерной по частоте спектральной плотностью. Если граничная частота спектра $\omega_m \rightarrow \infty$, то длительность главного лепестка сигнала $\frac{\pi}{\omega} \rightarrow 0$, т.е. сигнал вырождается в δ -импульс.

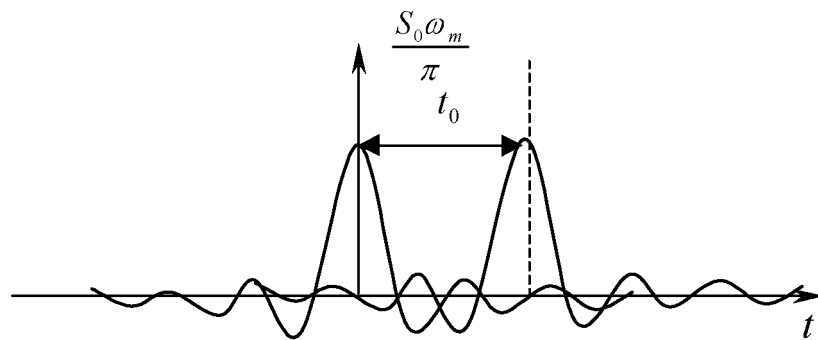


Рис. 2.16. Смещение ИЧН сигналов во времени

2. Идеальный полосовой сигнал (ИПС)

ИПС – сигнал, равномерный спектр которого ограничен двумя полосами частот шириной $2\Delta\omega$ с центрами на частотах $-\omega_0$ и ω_0 (рис. 2.17):

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega_0 - \Delta\omega| \leq \omega \leq |\omega_0 + \Delta\omega| \\ 0, & \omega < |\omega_0 - \Delta\omega|, \omega > |\omega_0 + \Delta\omega|. \end{cases}$$

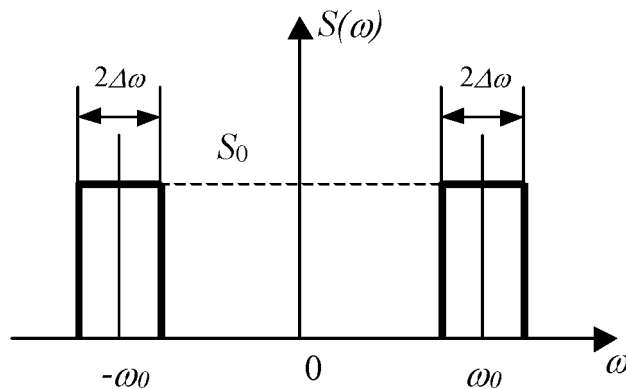


Рис. 2.17 Спектр идеального полосового сигнала

Используем обратное преобразование Фурье с учетом симметричности спектра относительно начала координат

$$s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{[\sin(\omega_0 - \Delta\omega)t - \sin(\omega_0 + \Delta\omega)t]}{\Delta\omega t} (\omega_0 + \Delta\omega - \omega_0 + \Delta\omega) =$$

$$= \frac{S_0}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega t \cos \omega_0 t}{\Delta\omega t} 2\Delta\omega = \frac{2S_0 \Delta\omega}{\pi} \text{sinc} \Delta\omega t \cos \omega_0 t.$$

Как видно из рис. 2.18, функция $\text{sinc} \Delta\omega t$ с точностью до масштабного коэффициента играет роль огибающей идеального ПС. Частота ω_0 играет роль заполняющей.

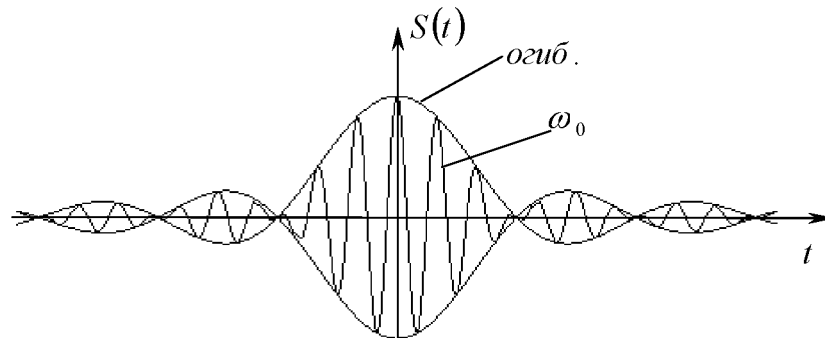


Рис. 2.18 Идеальный полосовой сигнал

3. Ортогональные сигналы с ограниченным спектром

При гармоническом анализе сигналов рассматривалось, каким образом из ортогональных спектральных составляющих формируется спектр сигнала. Ортогональность заключается в том, что спектральные составляющие не пересекаются по частоте.

Другой способ ортогонализации заключается в том, что составляющие сигнала не пересекаются во времени. Рассмотрим два идеальных НЧ сигнала $u(t)$ и $v(t)$, которые имеют одинаковые значения S_0 и ω_m , т.е. идентичные спектры. Далее произведем проверку, могут ли они и при каких условиях быть ортогональными во времени.

Будем считать, что

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega t} d\omega \\ v(t) &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega \end{aligned} \right\}, \quad -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m,$$

т.е. сигнал $u(t)$ смещен относительно сигнала $v(t)$ на величину t_0 .

Согласно формуле Релея скалярное произведение двух сигналов с точностью до коэффициента $\frac{1}{2\pi}$ пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей [15]

$$\begin{aligned}
 (u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} v^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v^*(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega)v^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} (u, v).
 \end{aligned}$$

Вычислим скалярное произведение двух сигналов в соответствии с формулой Релея

$$(u, v) = \int_{-\omega_m}^{\omega_m} u(\omega)v^*(\omega)d\omega = S_0^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega t} e^{-j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega \right] = S_0^2 \frac{\omega_m}{\pi} \text{sinc}(\omega_m t_0).$$

Скалярное произведение превращается в 0, когда сигналы являются ортогональными. Это будет иметь место при $\omega_m t_0 = k\pi$, ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$).

Минимальный во времени сдвиг двух ортогональных сигналов имеет место при $k = \pm 1$.

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_m} = \pm \frac{1}{2f_m}.$$

Аналогично можно построить базис из N ортогональных сигналов с соответствующими кратными значениями сдвига во времени (рис.2.19). В момент, когда один из сигналов достигает максимума, все другие сигналы, относящиеся к данному базису, находятся в нуле.

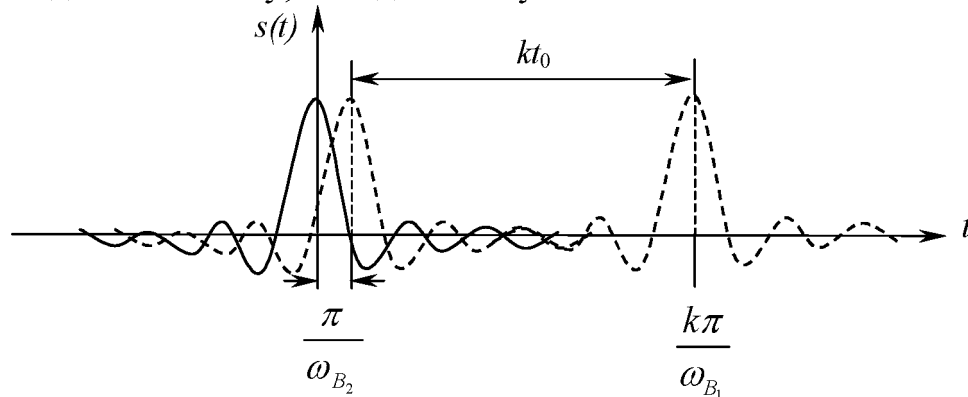


Рис.2.19 Формирование базиса ортогональных во времени сигналов

Теорема Котельникова

Из полученного вывода о двух ортогональных во времени сигналах построим ортогональный базис, позволяющий разложить произвольный сигнал с ограниченным спектром в ряд Фурье. Рассмотрим некоторый сигнал, по форме соответствующий идеальному НЧ сигналу (2.54)

$$s_0(t) = A \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t}.$$

Нормированная функция такого сигнала в соответствии с (1.1) равна

$$\|s_0\|^2 = \frac{A^2}{\omega_m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega t}{t^2} dt = \frac{\pi A^2}{\omega_m}.$$

Поэтому функции

$$s_k(t) = A \sin c \left[\omega_m \left(t - \frac{k\pi}{\omega_m} \right) \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (2.56)$$

будут ортонормированными в том случае, если $A = \sqrt{\frac{\omega_m}{\pi}}$.

В результате выражение для k -й отсчетной функции (2.56) приобретает вид

$$s_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_m}{\pi}} \sin c \left[\omega_m \left(t - \frac{k\pi}{\omega_m} \right) \right]. \quad (2.57)$$

Совокупность функций $s_k(t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$ образуют базис Котельникова [4].

Если $s(t)$ - произвольный сигнал, спектральная плотность которого не равна 0 в пределах $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$, то его можно разложить в обобщенный ряд Фурье по базису Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t), \quad (2.58)$$

где c_k - коэффициенты ряда, представляющие собой скалярное произведение исходного сигнала $s(t)$ и k -й отсчетной функции:

$$c_k = (s(t) \cdot s_k(t)).$$

Для вычисления коэффициентов используют формулу Рэлея, связывающую произведение сигналов с произведением спектров.

Через спектральную плотность k -й отсчетной функции получим выражение:

$$s_k(t) = \frac{s_0}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega \frac{k\pi}{\omega_m}}.$$

Тогда:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s_k(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_m}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \mathbf{s}(\omega) s_k(\omega) \right\} = \quad (2.59)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\omega_m}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \mathbf{s}(\omega) e^{j\omega \frac{k\pi}{\omega_m}} \right\}.$$

Выражение в $\{ \}$ является мгновенным значением сигнала $s(t)$ в k -й отсчетной точке $t_k = \frac{k\pi}{\omega_m} = \frac{k}{2f_m}$.

Таким образом

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_m}} s_k(t). \quad (2.60)$$

Подставим (2.60) в (2.58) и в результате получим выражение

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k(t) \sin c \left[\omega_m \left(t - \frac{k\pi}{\omega_m} \right) \right], \quad (2.61)$$

которое называется рядом Котельникова. На основании равенства (2.61) теорема Котельникова формулируется так: **произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше f_m , может быть полностью восстановлен, если известны отсчетные функции этого сигнала, взятые через равные промежутки времени $\Delta t = \frac{1}{2f_m}$.**

На рис. 2.20 показан процесс восстановления сигнала $s(t)$ с помощью ряда Котельникова, где за основу взят идеальный НЧ сигнал в ограниченном поле частот.

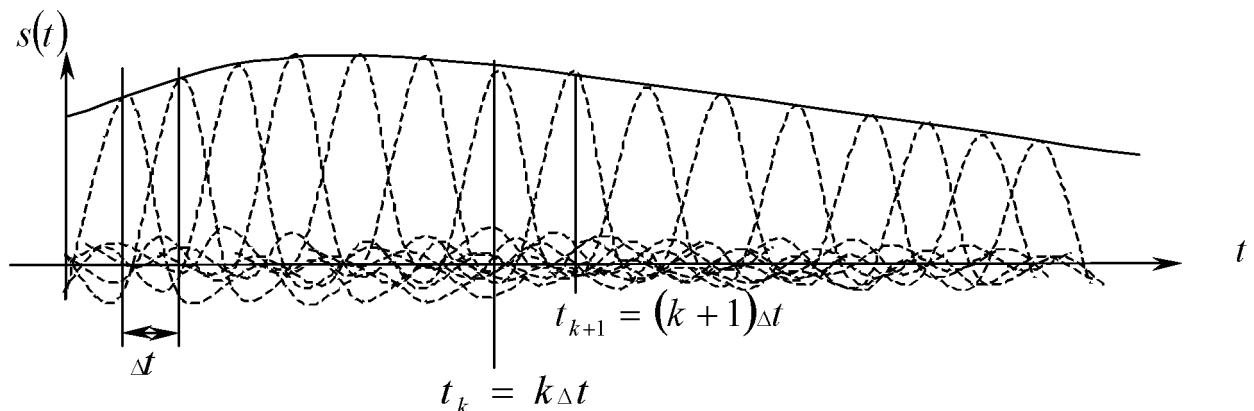


Рис. 2.20 Процесс восстановления исходного сигнала рядом Котельникова

Ошибка, возникающая при аппроксимации произвольного сигнала рядом Котельникова, определяется составляющими спектра, занимающими область частот $\omega > \omega_m$ (рис.2.21).

В качестве меры ошибки аппроксимации принято расстояние, равное норме сигнала ошибки.

Запись

$$\|s\|^2 = \|s_{an}\|^2 + \|s_{ou}\|^2$$

означает, что энергии (квадраты норм) складываются, так как спектры не перекрываются (искусственно разделены).

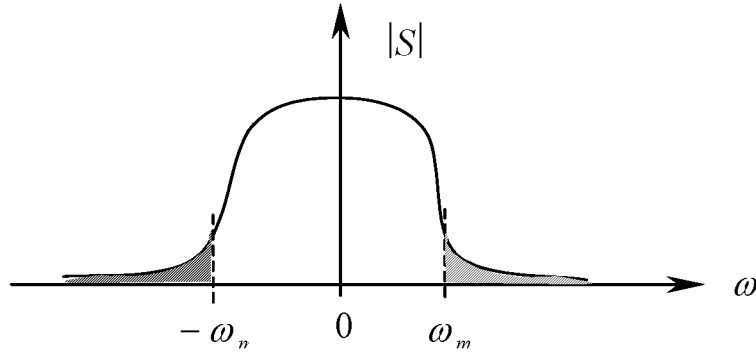


Рис. 2.21. Формирование нормы сигнала ошибки

В этом случае справедлива формула

$$\|s_{ош}\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_{II}}^{\infty} \vartheta_s(\omega) d\omega}$$

В ряде практических задач длительность сигнала конечна и равна T_c , а полоса частот также ограничена величиной f_m . В теории такого быть не может, т.к. функции конечной длительности обладают теоретически бесконечным спектром (и наоборот). Однако, ориентируясь на минимизацию $\|s_{ош}\|$ всегда можно определить общее число отсчетов, которое необходимо для точного задания исходных сигналов:

$$N = \frac{T_c}{\Delta t} = 2 f_m T_c. \quad (2.62)$$

При этом выражение (2.61) принимает вид

$$s(t) = \sum_{k=-0}^{2f_m T_c} s(k\Delta t) \sin c[\omega_m(t - k\Delta t)]. \quad (2.63)$$

Число N называют числом степеней свободы сигнала $s(t)$ или размерностью пространства сигналов, ограниченных по длительности и по частоте. Другое известное название (сравните с ЧМ сигналом) – база сигнала.

С помощью временных выборок сигнала можно выразить его энергию и среднюю мощность.

Из формул (1.16), (1.41) известно, что для ортогональной функции

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\phi_n\|^2, \quad \overline{s^2(t)} = \frac{\vartheta}{t_2 - t_1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \vartheta &= \sum_{n=0}^{2t_m T_c} |s_k(k\Delta t)|^2 \|\phi_n\|^2 = \Delta t \sum_{n=0}^{2t_m T_c} |s_k(k\Delta t)|^2 \\ \overline{s^2(t)} &= \frac{\Delta t}{T_c} \sum_{n=0}^{2t_m T_c} |s_k(k\Delta t)|^2 = \frac{1}{2f_m T_c} \sum_{n=0}^{2t_m T_c} |s_k(k\Delta t)|^2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из (2.64) видно, что средняя за время T_c мощность непрерывного сигнала равна среднему квадрату выборок, число которых равно $N = 2f_m T_c$.

2.5. Аналитический сигнал. Параметры узкополосных сигналов

Рассмотренные ранее модулированные сигналы являются частными случаями из многообразия сигналов, модулируемых по амплитуде и фазе по сложным законам. Общим для всех модулируемых сигналов является их узкополосность. Это означает, что основная часть, будем считать, что все спектральные составляющие группируются в относительно узкой полосе частот $\Delta\omega$ относительно центральной частоты ω_0 : $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Раньше мы представляли сигнал в форме

$$u(t) = U(t) \cos \psi(t). \quad (2.1)$$

Вместе с тем можно заметить, что такая запись может привести к неоднозначности, так как для одного и того же конкретного значения сигнала $u(t)$ можно привести разные записи, где в одном случае меняется амплитуда, а в другом частота.

Например, имеется простое гармоническое колебание с амплитудой U_0 и частотой ω_0 :

$$u_1(t) = U_0 \cos \omega_0 t.$$

Изменим частоту на $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ и подберем соответствующую амплитуду, удовлетворяющую требованиям идентичности сигналов $u_2(t)$ и $u_1(t)$:

$$u_2(t) = u_1(t) = U(t) \cos \omega_1 t = U_0(t) \cos \omega_0 t.$$

Тогда $U_0(t) \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t = U(t) \cos \omega_0 t$, откуда, сделав перестановки, получим

$$U(t) = U_0 \frac{\cos \omega_0 t}{\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t} = \frac{U_0 \cos \omega_0 t}{\cos \omega_0 t \cos \Delta\omega t - \sin \omega_0 t \sin \Delta\omega t} = \frac{U_0}{\cos \omega_0 t - \tan \omega_0 t \sin \Delta\omega t}.$$

В этом случае не обеспечивается принятое в литературе понятие о наличии в таком сигнале несущей частоты, промодулированной по амплитуде, когда огибающая соединяет точки максимальных значений несущей частоты [4, 6, 10]. Это означает, что огибающая при такой форме записи может пересекать линию несущих колебаний (рис. 2.22, б). Поэтому оперирование такой записью некорректно с точки зрения возможности получения ошибочных практических результатов (например, при детектировании). Чтобы избежать подобной неоднозначности, в анализе цепей и сигналов была принята следующая запись, характеризующая амплитуду и фазу узкополосного сигнала:

$$U(t) = \sqrt{a^2(t) + a_1^2(t)}; \quad (2.65)$$

$$\Theta(t) = \arctg \frac{a_1(t)}{a(t)}. \quad (2.66)$$

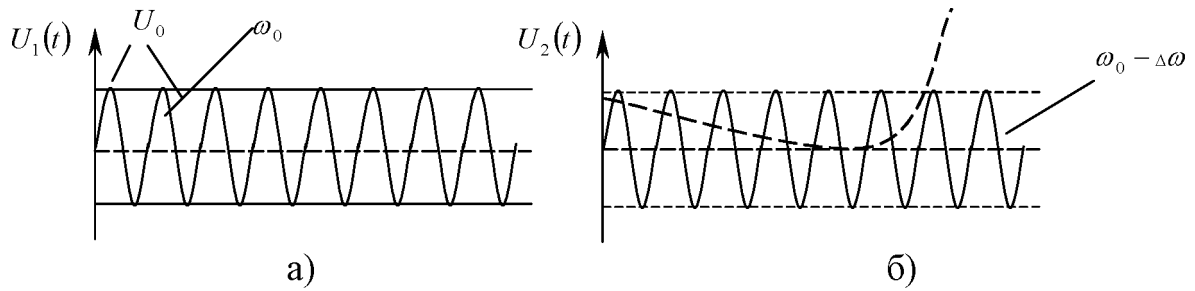


Рис. 2.22 Неоднозначность взаимосвязи несущей частоты и огибающей радиосигнала при традиционной форме записи: а) немодулированное колебание; б) модулированное колебание

В (2.65) и (2.66) введена новая функция $a_1(t)$, которая связана с исходным сигналом $a(t)$ соотношениями

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad \text{или} \quad a_1(t) = H[a(t)], \quad (2.67)$$

$$a(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_1(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad \text{или} \quad a(t) = H[a_1(t)]. \quad (2.68)$$

Соотношения (2.67) и (2.68) называются преобразованиями Гильберта, а функция $a_1(t)$ - функцией, сопряженной (по Гильберту) исходной функции $a(t)$ [15].

Рассмотрим смысл выражений (2.65) - (2.68). Из выражения (2.65) можно сделать предположение, что существуют такие значения $U(t)$, при которых $a_1(t) = 0$ (первое условие). В этом случае (2.65) записывается как

$$U(t) = \sqrt{a^2(t)} = a(t). \quad (2.69)$$

Продифференцируем по времени (2.65), возведем результат в квадрат и получим

$$\frac{dU^2(t)}{dt} = \frac{da^2(t)}{dt} + \frac{da_1^2(t)}{dt},$$

или

$$A(t) = A, \quad a(t) = a, \quad a_1(t) = a_1.$$

Отсюда

$$U \frac{dA^2}{dt} = a \frac{da}{dt} + \frac{da_1}{dt}.$$

При $a_1(t) = 0$ и $U(t) = a(t)$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{da}{dt}.$$

Последнее выражение означает, что в точках, где $a_1(t) = 0$ кривые $U(t)$ и $a(t)$ имеют общие для них касательные. Это второе условие (необходимое, но недостаточное), чтобы считать $U(t)$ огибающей быстро осциллирующей функции $a(t)$.

Третье условие заключается в том, чтобы $U(t)$ сближалась с функцией $a(t)$ в точке, где $a(t)$ имеет максимальную амплитуду при $a_1(t)=0$. Таким условиям как раз и соответствует введение некоторой сопряженной по Гильберту функции $a_1(t)$, отвечающей соотношениям (2.67) и (2.68).

Рассмотрим заявленные свойства преобразования Гильберта на примере гармонического сигнала. По прежней форме записи требуется, чтобы огибающая исходного сигнала с частотой ω_0 была равна U_0 . Примем $U_0=1$. Тогда $a(t)=\cos \omega_0 t$. В соответствии с (2.67)

$$a_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 \tau}{\tau - t} d\tau.$$

Сделаем замену переменной $x = \tau - t$

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\omega_0(x+t)]}{x} dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\omega_0 x + \omega_0 t]}{x} dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos \omega_0 x \cos \omega_0 t] - [\sin \omega_0 x \sin \omega_0 t]}{x} dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 x}{x} dx \end{aligned}$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Отсюда

$$a_1(t) = \frac{\pi}{\pi} \sin \omega_0 t.$$

Функция $a_1(t)$ проходит через ноль, когда исходная функция $a(t)$ проходит через максимум (выполнение первого условия).

После подстановки значения $a(t)$ и $a_1(t)$ в формулу (2.65) получим

$$U(t) = \sqrt{a^2(t) + a_1^2(t)} = \sqrt{\cos^2 \omega_0 t} = 1.$$

Это означает, что огибающая $U(t)=1=U_0$. Тем самым выполняется требование третьего условия: огибающая касается максимальных значений исходной функции $a(t)$. Аналогичные соотношения получаются, когда $a(t)=\sin \omega_0 t$, $a_1(t)=-\cos \omega_0 t$.

Совокупность основного и сопряженного сигналов представляет собой **аналитический сигнал**, позволяющий однозначно определить огибающую и мгновенную частоту узкополосного сигнала, не применяя искусственное понятие опорной частоты.

В радиотехнике представление колебаний в виде аналитического сигнала в комплексной форме применяется при исследовании гармонических и негармонических колебаний.

Если задан сигнал в виде действительной функции $a(t)$, то соответствующий ему сигнал представлен в комплексной форме

$$z_a(t) = a(t) + ja_1(t), \quad (2.70)$$

где $a_1(t)$ - функция, сопряженная по Гильберту сигналу $a(t)$.

Его спектральная плотность содержит только положительные частоты

$$z_a(\omega) = s_a(\omega) + js_a(\omega) \Big|_{\omega > 0}. \quad (2.71)$$

Рассмотрим случай, когда исходный сигнал является суммой синусной и косинусной составляющих

$$a(t) = b \cos \omega_0 t + c \sin \omega_0 t. \quad (2.72)$$

Тогда сопряженная функция записывается как

$$a_1(t) = b \sin \omega_0 t - c \cos \omega_0 t. \quad (2.73)$$

Если исходный сигнал представляет собой сумму спектральных составляющих

$$a(t) = \sum_{n=0}^N (b_n \cos \omega_n t + c_n \sin \omega_n t), \quad (2.74)$$

то сопряженная функция

$$a_1(t) = \sum_{n=0}^N (b_n \sin \omega_n t - c_n \cos \omega_n t). \quad (2.75)$$

Если сигналы представлены интегралом Фурье

$$a(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [b(\omega) \cos \omega t + c(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (2.76)$$

то функция

$$a_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [b(\omega) \sin \omega t - c(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (2.77)$$

Таким образом, при преобразованиях гармонического сигнала по Гильберту его амплитуда остается неизменной, а спектральные плотности

$$S_1(\omega) = -jS(\omega) \text{ при } \omega > 0, \quad (2.78)$$

$$S_1(\omega) = jS(\omega) \text{ при } \omega < 0$$

по модулю равны между собой при различии фаз на 90° (составляющие $a_1(t)$ отстают от составляющих $a(t)$ на 90°).

С помощью (2.66) найдем мгновенную частоту узкополосного сигнала

$$\omega(t) = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\arctg \frac{a_1(t)}{a(t)} \right] = \frac{aa'_1 - a_1a'}{a^2 + a_1^2}. \quad (2.79)$$

Из (2.79) вычленяется постоянная составляющая Θ_0 , линейно зависящая от $t - \omega_0 t$, и некоторая функция $\Theta(t)$.

В этом случае верна запись

$$\psi(t) = \omega_0 t + \Theta(t) + \Theta_0.$$

Это означает, что из записи аналитического сигнала можно получить традиционное выражение, где выделена так называемая несущая частота ω_0 и параметр угловой модуляции $\Theta(t)$.

Согласно методу преобразований Гильберта огибающая $U(t)$ и мгновенная частота ω сигнала однозначно связаны друг с другом и произвольный выбор их невозможен. Вместе с тем в случае произвольного сигнала $u(t)$ не всегда выполняется условие наглядности физического сигнала огибающей и несущего сигнала.

Выводы по главе

1. Процесс модуляции связан с переносом спектра информационного сигнала из области низких частот в область высоких частот.
2. Спектр амплитудно-модулированного (АМ) сигнала образуется несущей и двумя симметричными группами боковых колебаний. Полоса занимаемых частот АМ – колебаний равна удвоенному значению частоты модуляции F_m . Из АМ – колебаний формируются сигналы с балансной модуляцией и однополосной модуляцией.
3. При угловой модуляции (УМ) информация заключается в изменении фазы колебаний, причем различают частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ) модуляции, которые характеризуются разными принципами реализации.
4. При малых индексах модуляции m ширина спектра ЧМ сигнала приблизительно равна удвоенному значению частоты модуляции. При больших индексах модуляции ширина спектра ЧМ сигнала приблизительно равна удвоенному значению девиации частоты F_Δ .
5. Сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) имеют практически равномерный спектр в пределах ограниченной полосы частот, если база сигнала $B \gg 1$. Корреляционная функция ЛЧМ сигнала имеет лепестковую структуру, причем ширина главного лепестка уменьшается с ростом девиации частоты.
6. Сигналы с ограниченным спектром бесконечно протяжены во времени.
7. Два идеальных НЧ сигнала с ограниченным в пределах $[-\omega_m, +\omega_m]$ спектром становятся ортогональными при строго определенных значениях сдвига между ними во времени.
8. Ряд Котельникова представляет собой частный случай обобщенного ряда Фурье. Особенностью ряда Котельникова является то, что базисными функциями являются НЧ сигналы, сдвинутые на временные интервалы, кратные величине $\frac{\pi}{\omega_m}$. Компоненты ряда Котельникова – отсчеты разлагаемого сигнала, взятые через интервалы $\frac{k\pi}{\omega_m}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).
9. Узкополосный сигнал – это сигнал, у которого ширина спектра значительно меньше центральной частоты. Такие сигналы являются квазигар-

моническими, т.к. их амплитуда и частота медленно изменяются во времени.

10. Узкополосный сигнал однозначно характеризуется преобразованиями Гильберта между введенным сопряженным и исходным сигналами. Огибающая произвольного узкополосного сигнала равна корню квадратному от суммы квадратов исходного и сопряженного сигналов, мгновенная частота этого сигнала равна арктангенсу от отношения сопряженного сигнала к исходному.
11. Понятие «аналитический сигнал» применяется для упрощения анализа проходящего через радиотехнические цепи действительных сигналов и сигналов в виде совокупности двух квадратурных сигналов.

3. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ. ШУМЫ

3.1. Стационарные и эргодические случайные процессы. Моменты случайных величин

Отличительной чертой случайного сигнала является априорная неопределённость его мгновенных значений. В радиотехнике случайные сигналы часто имеют вид шумов. Шумы - хаотически изменяющиеся во времени электромагнитные колебания [1].

До приема сообщений совокупность случайных сигналов рассматривается как случайный процесс, представляющий собой ансамбль функций времени, подчиняющихся некоторой общей для них статистической закономерности. Одна из этих функций, ставшая полностью известной после приема сообщения, называется реализацией случайного процесса. В этом случае реализация (апостериорно) становится детерминированной функцией времени.

Рассмотрим некоторые характеристики случайных процессов. Случайный процесс $X(t)$ можно представить как совокупность функций (сигналов) $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$. В момент времени $t = t_1$ случайные функции образуют совокупность случайных величин $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots$. На рис.3.1 представлены ансамбль случайных функций и ансамбль случайных величин в момент $t = t_1$.

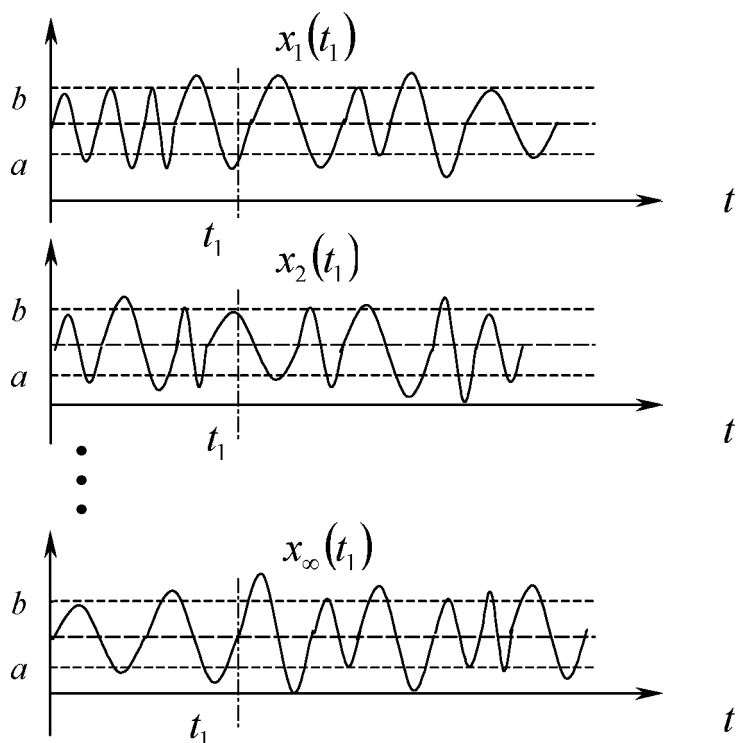


Рис.3.1. Формирование случайного процесса

Как видно из рис. 3.2, выражение для вероятности того, что случайная величина $x_k(t_1)$ попадает в некоторый амплитудный интервал (a, b) , имеет вид

$$P_{t_1}(a < x \leq b) = \int_a^b p(x; t_1) dx, \quad (3.1)$$

где $p(x; t_1)$ - одномерная плотность вероятности, которая представляет собой некоторый закон распределения случайной величины в интервале всех возможных амплитуд.

При любом виде функции $p(x; t_1)$ всегда выполняется равенство

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x; t_1) dx = 1. \quad (3.2)$$

Соответственно сумма вероятностей $P_{t_1}(a < x \leq b) + P'_{t_1}(x \leq a) + P''_{t_1}(x > b) = 1$.

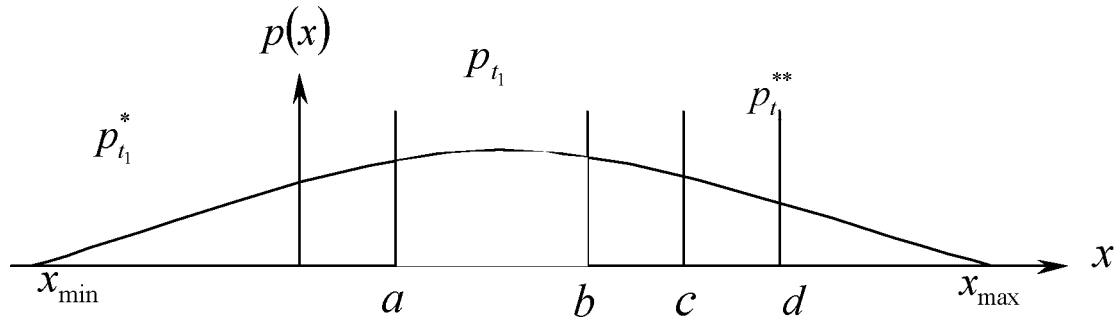


Рис. 3.2 Плотность распределения случайной величины x

Если x_k является случайной величиной дискретного типа, то формула (3.2) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1, \quad (3.3)$$

где P_i - вероятность (интегральная по шуму) соответствующей случайной величине x_i в момент t_1 .

Известны следующие аксиомы теории вероятности [17]:

- 1) Вероятность неотрицательна и не превышает единицы: $0 \leq P(x_i) \leq 1$.
- 2) Если x_i и x_j - несовместные события, то $P(x_i + x_j) = P(x_i) + P(x_j)$, т.е. $P(x \in (a, b) + (c, d)) = P(x \in (a, b)) + P(x \in (c, d))$.
- 3) Сумма всех событий, заключенных в X , есть достаточное событие: $P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) + \dots = 1$.

Из формулы (3.3) можно получить обратное выражение

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (3.4)$$

В статистической радиотехнике широко применяются числовые характеристики случайной величины. В частности, моменты n -го порядка случайной величины x есть среднее значение n -й степени случайной переменной

$$m_n = \overline{x^n} = \langle x^n(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \Big|_{t=t_1}. \quad (3.5)$$

Простейший момент – момент первого порядка - называется математическим ожиданием

$$m_1 = \bar{x} = \langle x(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \Big|_{t=t_1} . \quad (3.6)$$

Формула (3.6) имеет смысл оценки среднего значения случайной величины, получаемой при числе опытов $k \rightarrow \infty$.

Момент второго порядка

$$m_2 = \overline{x^2} = \langle x^2(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx \Big|_{t=t_1} \quad (3.7)$$

представляет собой средний квадрат случайной величины.

В радиотехнике чаще используют центральный момент второго порядка, называемый дисперсией

$$D_x(t) = \sigma_x^2 = \mu_2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx \Big|_{t=t_1} , \quad (3.8)$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 . \quad (3.9)$$

Термин «центральный» характеризует флуктуацию (отклонение) случайной величины от ее математического ожидания.

Величина

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (3.10)$$

называется среднеквадратическим отклонением и служит для количественного описания меры разброса текущих испытаний относительно математического ожидания.

Одномерная плотность вероятности дает вероятностное представление о случайном процессе $X(t)$ в отдельные фиксированные моменты времени. Более полной характеристикой является двумерная плотность вероятности: $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ позволяющая учитывать связь значений x_1 и x_2 , принимаемые случайной величиной в произвольные моменты времени. В принципе размерность плотности вероятности можно увеличивать дальше, но в практических задачах $n=2$ является достаточным. Знание двумерной плотности вероятности позволяет получить важную характеристику случайного процесса – ковариационную функцию, которая является смешанным моментом второго порядка:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 . \quad (3.11)$$

Ковариационная функция случайного процесса $X(t)$ представляет собой статистически усредненное произведение значений случайной функции $x(t)$ в моменты t_1 и t_2

$$K_x(t_1, t_2) = M[x(t_1), x(t_2)] .$$

Если $t_1 = t_2$, то ковариационная функция вырождается в величину среднего квадрата случайной величины (при этом $x_1^2 = x_2^2$)

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 p(x_1; t_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 p(x_2; t_2) dx_2 = M[x^2(t)] . \quad (3.12)$$

Если при исследовании случайного процесса обнаружится некоторая взаимосвязь между случайными величинами x_i и x_k , то говорят, что эти величины имеют некоторую статистическую связь, т.е. коррелированы. Если этой связи не наблюдается, то величины являются некоррелированными.

Количественная характеристика этой взаимосвязи определяется корреляционной функцией, представляющей собой процесс усреднения произведения разности $x(t_1) = x_1$ и $m_x(t_1) = \bar{x}_1$ и разности $x(t_2) = x_2$ и $m_x(t_2) = \bar{x}_2$

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)p(x_1, x_2)dx_1x_2 = K_x(t_1, t_2) - \bar{x}_1\bar{x}_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

При $t_1 = t_2 = t$ величины $x_1 = x_2 = x$, а выражение (3.13) в соответствии с (3.8) определяет дисперсию случайного процесса $D_x(t)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_1 - \bar{x}_1)p(x_1, x_1)dx_1x_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx - \bar{x}^2 = \\ &= K_x(t, t) - \bar{x}(t) = R_x(t, t) = D_x(t). \end{aligned}$$

Часто применяется безразмерный коэффициент корреляции

$$r_{12} = \frac{R_{12}}{\sigma_1\sigma_2}. \quad (3.14)$$

При $x_1 = x_2$ $r_{11} = \frac{R_{11}}{\sigma^2} = \frac{R_{22}}{\sigma^2} = r_{21} = r_{21} = 1$.

Особенностью радиотехнических сигналов является их относительная стабильность в широком разбросе временных отсчетов. Это означает, что математическое ожидание, средний квадрат и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от интервала $\tau = t_1 - t_2$. Это свойство называется стационарностью в рамках корреляционной теории (т.е. до моментов не выше 2-го порядка).

Таким образом, для стационарного процесса справедливы следующие выражения

$$\begin{aligned} m_x &= M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \\ K_x(\tau) &= M[x(t), x(t + \tau)], \\ R_x(\tau) &= K_x(\tau) - m_x^2, \\ D_x &= K_x(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2, \\ \sigma_x &= \sqrt{K_x(0) - m_x^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Особый интерес для исследования представляют сигналы, у которых усреднение по ансамблю реализаций дает тот же результат, что и усреднение одной бесконечной во времени реализации случайного сигнала. Такой процесс называется эргодическим. Это значит, что на него можно наложить условия

эргодичности, которые автоматически включают в себя условие стационарности.

В этом случае можно записать следующие выражения, эквивалентные выражениям (3.15)

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt, \\ K_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt, \\ R_x(\tau) &= K_x(\tau) - (\bar{x(t)})^2, \\ D_x &= K_x(0) - (\bar{x(t)})^2 = \sigma_x^2, \\ \sigma_x &= \sqrt{K_x(0) - (\bar{x(t)})^2}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Применительно к формулам (3.16) можно представить некоторый электрический сигнал, при анализе которого можно выделить постоянную составляющую $\bar{x(t)}$ и среднюю мощность $R_x(0) = \overline{x^2(t)}$ флуктуации амплитуды относительно $\bar{x(t)}$.

Чем медленнее изменяется во времени случайный сигнал $x(t)$, тем больше промежуток времени τ , в пределах которого наблюдается статистическая связь между мгновенными значениями случайного сигнала.

3.2. Гармонические колебания со случайными амплитудой, фазой и частотой. Гауссовский случайный процесс

С условием введения понятий апостериорности и априорности изучаемых процессов, в дальнейшем будем подразумевать, что $x(t)$ и $X(t)$ - случайные функции времени, $x_x(t)$ - k -я реализация случайной функции $x(t)$.

1. *Гармонические колебания со случайной амплитудой* (рис.3.3) описываются выражением

$$x(t) = U \cos \Psi(t),$$

где амплитуда U - случайная величина, принимающая любое значение в пределах $U = [0, U_{\max}]$; фаза $\Psi(t) = \cos(\omega_0 t + \Theta_0)$ - детерминированная величина.

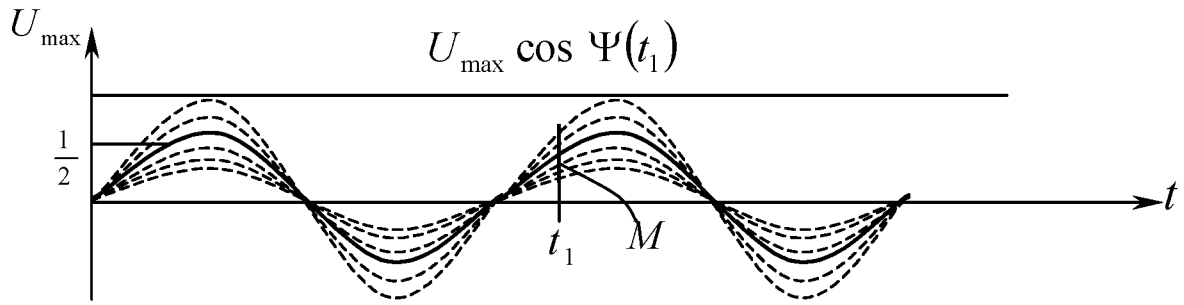


Рис. 3.3 Гармоническое колебание со случайной амплитудой

Будем считать, что $\cos \Psi(t_1) > 0$; $x(t_1) = U \cos \Psi(t_1)$. Следовательно, плотность вероятности для момента t_1 имеет вид (рис. 3.4)

$$p(x; t_1) = \frac{1}{U_{\max} \cos \Psi(t_1)}, \quad 0 < x < U_{\max} \cos \Psi(t_1),$$

т.е. амплитуда равновероятно может попасть в любую точку в интервале от 0 до $U_{\max} \cos \Psi(t_1)$.

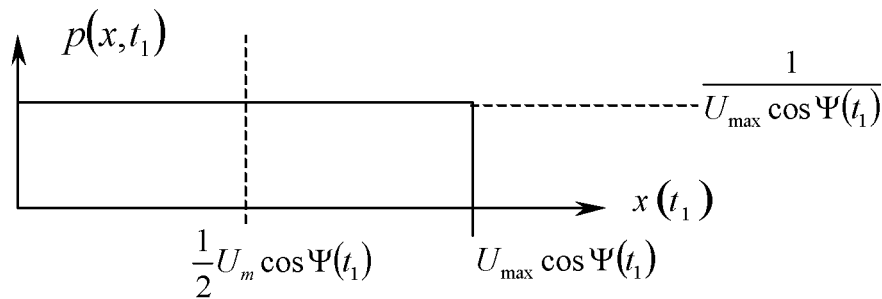


Рис. 3.4 Плотность вероятности распределения амплитуды сигнала со случайной амплитудой

Математическое ожидание

$$M[x(t_1)] = \frac{1}{U_{\max} \cos \Psi(t_1)} \int_0^{U_{\max} \cos \Psi(t_1)} x(t_1) dx = \left(\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{1}{U_{\max} \cos \Psi(t_1)}} \right) = \frac{1}{2} U_{\max} \cos \Psi(t_1).$$

Дисперсия

$$D_x(t_1) = M[x^2(t_1)] - M[x(t_1)]^2 = \frac{1}{3} U_{\max}^2 \cos^2 \Psi(t_1) - \frac{1}{4} U_{\max}^2 \cos^2 \Psi(t_1) = \frac{1}{12} U_{\max}^2 \cos^2 \Psi(t_1)$$

Такой сигнал нестационарен и неэргодичен.

2. *Постоянное напряжение случайного уровня* (рис.3.5.).

Уровень U сигнала равномерно принимает любое значение в интервале от $-U_{\max}$ до U_{\max} .

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2U_{\max}}, & -U_{\max} < x < U_{\max} \\ \bar{x} &= \frac{1}{2U_{\max}} \int_{-U_{\max}}^{U_{\max}} x dx = 0 \\ \overline{x^2} &= \frac{1}{2U_{\max}} \int_{-U_{\max}}^{U_{\max}} x^2 dx = \frac{1}{3} U_{\max}^2 \\ D_x &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{3} U_{\max}^2 \end{aligned} \right\}$$

Здесь необходимо учитывать, что для любой реализации независимо от интервала τ имеет место равенство $x_k(t_1) = x_k(t_2)$, откуда

$$K_x(t) = \overline{x^2} = \frac{1}{3} U_{\max}^2 = D_x(t).$$

Поскольку новые для момента и корреляции функции не совпадают с результатом усреднения по множеству

$$\begin{aligned} \overline{x_k(t)} &= x_k \neq \bar{x}; & \overline{x_k^2(t)} &= x_k^2 \neq \overline{x^2}; \\ K_x(t) &= x_k^2 \neq \frac{1}{3} U_{\max}^2. \end{aligned}$$

Это означает, что реализуемый процесс неэргодичен.

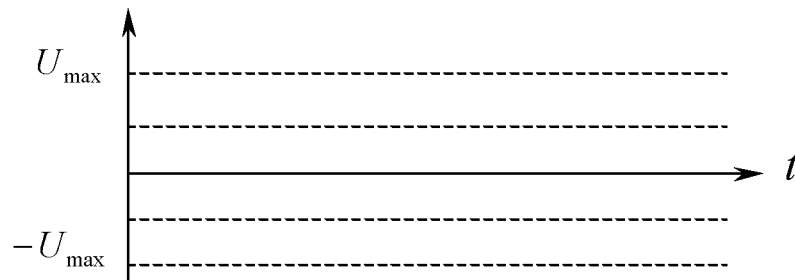


Рис.3.5. Сигнал с постоянным значением напряжения случайного уровня

3. *Гармонические колебания со случайной фазой* (рис.3.6). Значения U и ω_0 достоверно известны априорно, а начальная фаза Θ - случайная величина равномерно принимающая значения в интервале от $-\pi$ до π .

k -я реализация из ансамбля реализаций имеет вид

$$x_k(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \theta_k) = U_0 \cos(\Psi_k(t)).$$

Плотность вероятности начальной фазы

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Плотность вероятности полной фазы (равномерной в интервале от $\omega_0 t - \pi$ до $\omega_0 t + \pi$) равна

$$p_{\Psi}(\Psi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \omega_0 t - \pi < \theta < \omega_0 t + \pi.$$

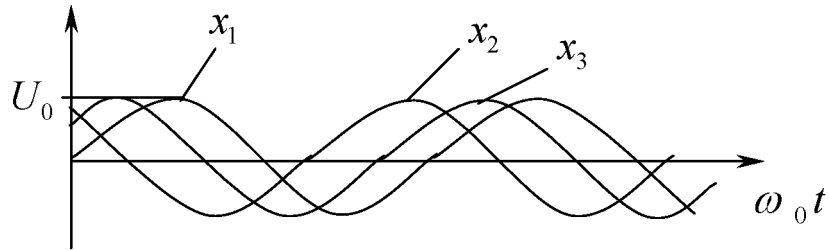


Рис.3.6 Гармонические колебания со случайной фазой

Найдем одномерное распределение плотности вероятности $p_x(x)$ случайного процесса $X(t)$. Представим функцию в виде зависимости $x(\varphi(t))$ (рис.3.7). В промежутке от t_1 до $t_1 + dt$ мгновенное значение сигнала оказывается в интервале от x_1 до $x_1 + dx$.

Вероятность нахождения сигнала в этом интервале можно записать в виде

$$P_{dx} = p_x(x)dx.$$

Здесь $p_x(x)$ искомая плотность вероятности. Вероятность P_{dx} соответствует вероятности попадания случайной фазы $\psi(t)$ в заштрихованные области $\psi_1, \psi_1 + d\psi$ и $\psi_2, \psi_2 + d\psi$.

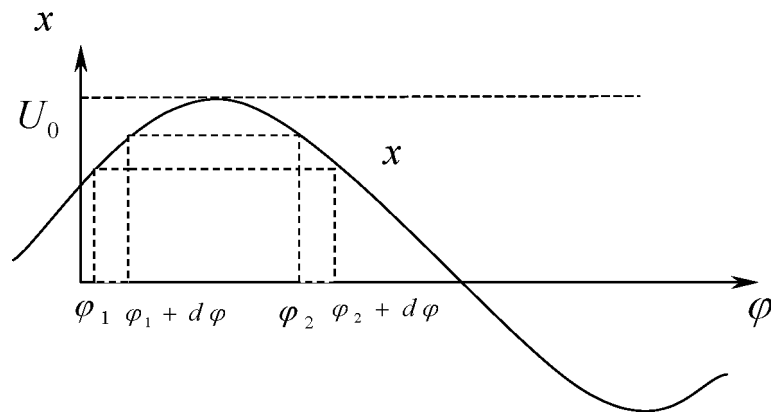


Рис.3.7 График, поясняющий определение одномерного распределения плотности вероятности $p_x(x)$ случайного процесса

Тогда можно записать полученное равенство вероятностей

$$P_{dx} = P_x(x)dx = 2P_{\psi}(\psi) = 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)d\psi.$$

Отсюда

$$p_x(x) = \frac{dP_{dx}}{dx} = \frac{2P_{\psi}(\psi)d\psi}{dx} = 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{x} \frac{1}{\left|\frac{dx}{d\psi}\right|}, \quad -U_0 < x < U_0.$$

Так как $x = U_0 \cos \psi$, то $\left|\frac{dx}{d\psi}\right| = U_0 |\sin \psi| = \sqrt{U_0^2 \cos^2 \psi} = \sqrt{U_0^2 - x^2}$.

Окончательно получим

$$p_x(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{U_0^2 - x^2}}, \quad -U_0 < x < U_0.$$

График этой функции напоминает арксинусоиду (рис.3.8).

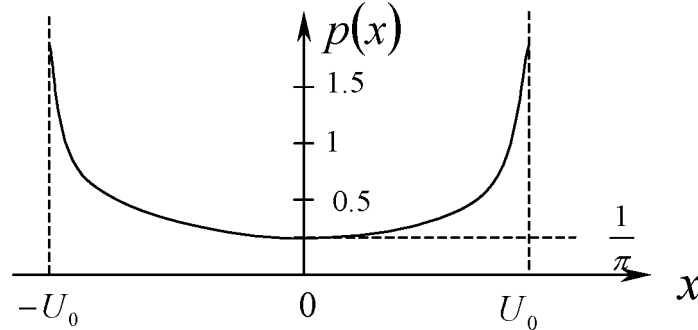


Рис.3.8. Одномерное распределение плотности вероятности $p_x(x)$ случайного процесса

Одномерная плотность вероятности не зависит от выбора момента времени t (процесс стационарный)

Среднее по множеству в соответствии с (3.15) равно

$$M[x(t)] = \int_{-U_0}^{U_0} x p_x(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-U_0}^{U_0} \frac{x}{\sqrt{U_0^2 - x^2}} dx = 0. \quad (3.17)$$

Среднее по времени (3.16)

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_0 t + \theta) dt = 0. \quad (3.18)$$

Поскольку формулы (3.17) и (3.18) справедливы для любой реализации случайного процесса, то такой сигнал (процесс) является эргодическим.

Ковариационная функция по ансамблю реализаций равна

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M[x(t_1)x(t_2)] = M[U_0^2 \cos(\omega_0 t_1 + \theta) \cos(\omega_0 t_2 + \theta)] = \\ &= M \left[\frac{1}{2} U_0^2 \left\{ \underbrace{\cos \omega_0 (t_1 - t_2)}_1 + \underbrace{\cos \omega_0 [(t_1 + t_2) + 2\theta]}_2 \right\} \right] \end{aligned}$$

Первое слагаемое – детерминированная величина равная $\cos \omega_0 \tau$. Второе слагаемое из-за случайной составляющей θ , которая имеет плотность вероятности $p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, при усреднении обращается в 0 (фаза изменяется в пределах от $-\pi$ до π). С учетом усреднения корреляционная функция принимает вид:

$$K_x(t_1, t_2) = \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0 (t_2 - t_1) = \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Корреляционная функция по ансамблю реализаций равна (3.15)

$$R_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2) = \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Проведем усреднение произведения $x_k(t)$ и $x_k(t + \tau)$ по времени согласно (3.16) и определим ковариационную функцию

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_0^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_0 t + \theta) \cos[\omega_0(t + \tau) + \theta] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U_0^2}{2T} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_0 \pi dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos[\omega_0(2t + \tau) + 2\theta] dt \right\} =$$

$$= U_0^2 \frac{T}{2T} \cos \omega_0 \tau = \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

Соответственно:

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - (\bar{x}(t))^2 = K_x(\tau) = \frac{U_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

Если колебания имеют случайную фазу и случайную амплитуду, то процесс будет стационарным, но не эргодическим из-за того, что разные реализации в разные значения t_i обладают неодинаковой дисперсией.

4. Гауссовский (нормальный) случайный процесс (рис.3.9).

Широкое распространение нормального закона подтверждено центральной предельной теоремой [17], в которой доказано, что при суммировании большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин закон распределения суммы стремится к нормальному при любом распределении отдельных слагаемых. Сигналы, плотность вероятности которых приближается по характеристикам к нормальному закону, являются одним из видов непрерывных шумовых помех.

Одномерная плотность вероятности нормального процесса определяется выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (3.19)$$

где σ_x - среднеквадратическое отклонение; m_x - математическое ожидание.

Процесс представляется (что характерно для большинства шумовых помех) как стационарный и эргодический. Потому m_x может рассматриваться как постоянная составляющая реализации случайного процесса, а σ_x - как средняя мощность флуктуационной составляющей одной длительной реализации случайного процесса.

Рассмотрим по рисунку 3.9 основные свойства плотности вероятности при гауссовском процессе. Функция $p(x)$ симметрична относительно m_x , причем чем больше σ_x , тем меньше максимум, а кривая становится более пологой. На основе функции $p(x)$ можно определить относительное время пребы-

вания сигнала $x(t)$ в некотором интервале уровней амплитуды и другие важные для практики параметры случайного сигнала.

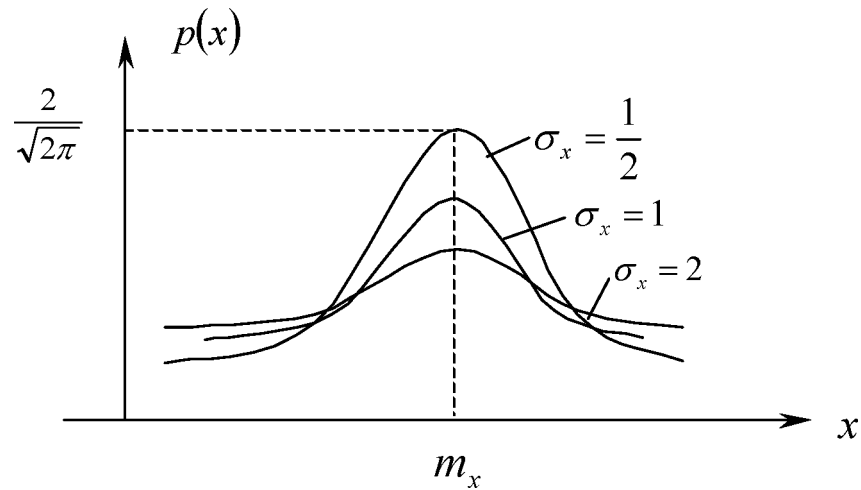


Рис.3.9 Плотность распределения вероятности амплитуды в гауссовском случайном процессе

Рассмотрим пример одной из реализаций гауссовского процесса при $m_x = 0$ (рис.3.10). Это шумовая помеха, энергетический спектр которой находится в пределах от $f = 0$ до f_{\max} . Вероятность пребывания значения $x(t)$ в интервале $[a, b]$ определяется выражением

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x) dx.$$

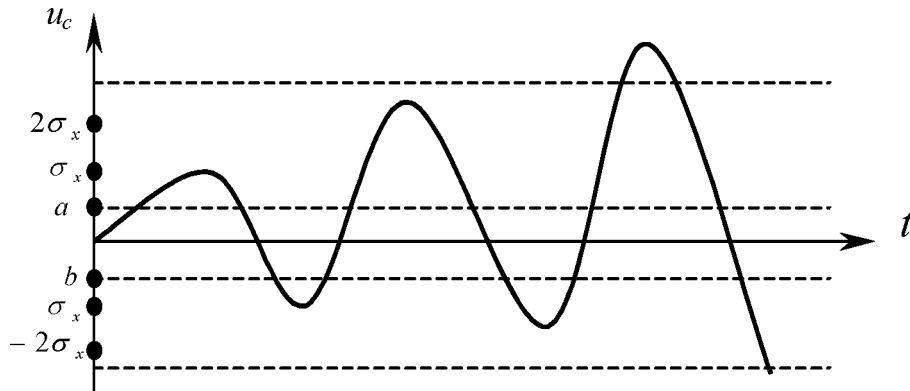


Рис.3.10 Реализация гауссовского случайного процесса

С учетом $m_x = 0$, получим

$$\begin{aligned} P(a < x < b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_0^{\frac{b}{\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_0^{\frac{a}{\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \left(y = \frac{x}{\sigma_x} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{b}{\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{a}{\sigma_x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

В (3.20) функция $\Phi(\cdot)$ называется интегралом вероятности, для которого рассчитаны вероятности пребывания функции x в интервале и вне интервала, равного определенным значениям a и b [17].

Примеры вероятностей для различных значений интервалов

$$a = -\sigma_x, b = \sigma_x \quad P(a < x < b) = 0,6826$$

$$a = -2\sigma_x, b = 2\sigma_x \quad P(a < x < b) = 0,9544$$

$$a = -3\sigma_x, b = 3\sigma_x \quad P(a < x < b) = 0,9973$$

Пик-фактор нормального случайного процесса $ПФ = \frac{x_{\max}}{\sigma_x}$ достигает значения 3 и больше, тогда как для гармонического сигнала $ПФ = \sqrt{2}$.

3.3 Спектральная плотность мощности случайного процесса

Если представлять под случайным процессом $X(t)$ ансамбль случайных функций времени $x_i(t)$, то каждая из функций имеет собственную, отличную от любой другой, спектральную характеристику. Использовать спектральную плотность по формуле (1.22), предназначенной для детерминированных сигналов, не представляется возможным, так как она оказывается непригодной для случайного процесса. Дело в том, что в промежутке $[t_1, t_2]$ усреднение спектральной плотности по ансамблю функций однозначно приводит к нулевому спектру процесса

$$S_x(\omega) = 0, \text{ при } M[x(t)] = 0.$$

Причиной этого является случайность и независимость фаз спектральных составляющих в различных реализациях. Вместе с тем, если анализировать не спектральные составляющие, дающие представление о токе (напряжении), а формируемую ими мощность, то можно ввести анализируемое для случайных сигналов $x(t)$ понятие **спектральной плотности среднего квадрата случайной функции**. Значение среднего квадрата суммируемых гармоник не зависит от их фаз. Это означает, что сумма гармоник при такой форме анализа никогда не будет равна нулю. Для удобства восприятия спектральную плотность среднего квадрата случайной функции можно представить как среднюю мощность, выделяемую сигналом $x(t)$ на сопротивлении $R = 1$ Ом. Эта мощность распределена по шкале частот в некоторой полосе, связанной с характером случайного процесса.

Спектральная плотность $W(\omega)$ средней мощности представляет собой среднюю мощность, приходящуюся на 1 Гц при заданной частоте ω сигнала. Другое часто используемое название спектральной плотности – **энергетический спектр**.

Смысл такого названия вытекает из размерности функции $W(\omega)$

$$[W(\omega)] = [\text{мощность/частота}] = [\text{мощность} \times \text{время}] = [\text{энергия}].$$

Если реализовать некоторый шумовой сигнал $x_k(t)$ на интервале $-T/2$ до $+T/2$, то можно применить обратное преобразование Фурье и найти спектральную плотность $S_{x_kT}(\omega)$ по формуле (1.22)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt .$$

Тогда энергия отрезка k -й реализации случайного процесса сигнала $x_k(t)$ равна

$$\mathcal{E}_{kT} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_{kT}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{x_kT}(\omega)|^2 d\omega .$$

Средняя мощность k -й реализации на временном отрезке T получается делением энергии на время

$$\overline{x_k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_{x_kT}(\omega)|^2}{T} d\omega .$$

Совершим предельный переход $T \rightarrow \infty$, соответствующий классическому анализу случайного сигнала

$$\overline{x_k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_{x_kT}(\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega) d\omega .$$

Здесь подынтегральное выражение представляет собой спектральную плотность $W_{xk}(\omega)$ средней мощности k -й реализации случайного процесса. Если случайный процесс - стационарный и эргодический, то для характеристики всего процесса достаточно получения функции $W_{xk}(\omega)$ только для одной реализации случайного процесса, т.е. можно удалить индекс k и записать

$$\overline{x^2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega , \text{ где} \quad (3.22)$$

При интегрировании (получении $\overline{x^2}(t)$) первое слагаемое в (3.24) дает мощность постоянной составляющей (при $\omega = 0$), а второе – мощность флуктуационной составляющей, которая представляет собой дисперсию случайного процесса

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\sim}(\omega) d\omega = \sigma_x^2 . \quad (3.26)$$

Таким образом, через W_{\sim} обозначается переменная составляющая спектральной плотности средней мощности. Если случайный процесс имеет нулевое математическое ожидание ($\overline{x(t)} = 0$), то получим следующие выражения для средней мощности и плотности средней мощности

$$\overline{x^2(t)} = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega ,$$

$$W_x(\omega) = W_{\sim}(\omega) .$$

Известна теорема Винера - Хинчина, связывающая между собой ковариационную функцию $K_x(\tau)$ и энергетический спектр (спектральную плотность средней мощности случайного сигнала) прямым (3.27) и обратным преобразованиями (3.28) Фурье [4, 9, 18]

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau ; \quad (3.27)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega . \quad (3.28)$$

Если случайный сигнал имеет нулевое среднее значение ($\overline{x(t)} = 0$), то вместо ковариационной функции можно подставить корреляционную функцию

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau , \quad (3.29)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega . \quad (3.30)$$

Из (3.27) - (3.30) можно сделать вывод: чем шире спектр случайного процесса, тем уже интервал корреляции, и наоборот: чем больше интервал времени, тем уже спектр сигнала.

Если в (3.30) подставить $W_x(\omega) = W_0 = \text{const}$ при $-\infty < \omega < \infty$, то получим

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \omega_0 \int_{-\infty_1}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau) . \quad (3.31)$$

Из (3.31) видно, что при интервале корреляции $\tau = 0$ корреляционная функция $R_x(0) \rightarrow \infty$. Подобный случайный сигнал в виде шума с игольчатой структурой и бесконечно тонкими случайными выбросами называют дельта-коррелированным процессом или **белым шумом**.

Рассмотрим пример соотношений между корреляционной функцией и энергетическим спектром. Шум – гауссовский стационарный процесс с нулевым средним. Среднеквадратическое значение напряжения $U_{\text{СК}} = \sigma_u = 2$ В, спектр равномерный в полосе частот от $-\omega_1$ до ω_1 ($f_1 = 10$ МГц). Такой шум, спектр которого показан на рис. 3.11, называется **широкополосным** (прямошумовая помеха).

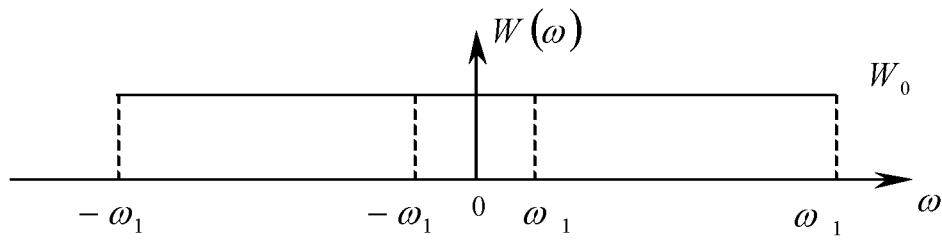


Рис. 3.11 Спектр шума в виде гауссовского стационарного процесса с нулевым средним

Спектральная плотность средней мощности прямошумовой помехи равна

$$W(\omega) = W_0 = \frac{U_{ck}^2}{2f_1} = \frac{2^2}{2 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{B^2}{Гц}$$

Корреляционная функция (при $m_x=0$) с учётом (3.31)

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} W_0 \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \cos \omega\tau d\omega = \frac{W_0}{2\pi} 2 \frac{\sin \omega_1\tau}{\tau} = \\ &= \frac{W_0}{2\pi} 2\omega_1 \frac{\sin \omega_1\tau}{\omega_1\tau} = \sigma_x^2 \operatorname{sinc}(\omega_1\tau) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Нормированная корреляционная функция

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma_x^2} = \operatorname{sinc}(\omega_1\tau). \quad (3.33)$$

График этой функции, показанный на рис. 3.12, известен, причем ширина главного лепестка зависит от отношения π/ω_1 , т.е. чем больше ω_1 , тем уже лепесток.

Дисперсия шума $D = R_1(0) = 4B^2$. Сужение спектра до значения $f_1=2$ МГц ведет к увеличению ширины лепестка корреляционной функции в 5 раз, а также к уменьшению дисперсии. В этом случае $D = R(0) = 2 W_0 f_1 = 0,8 B^2$.

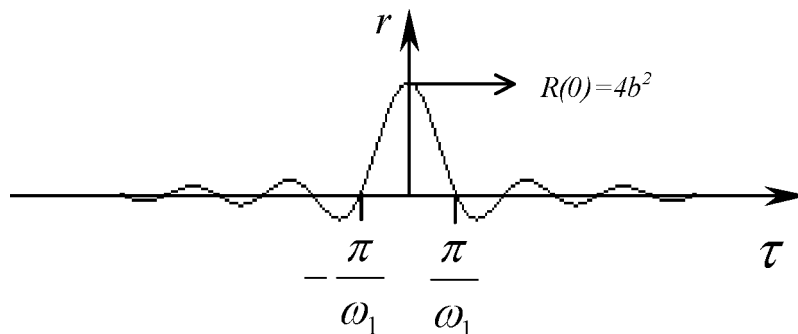


Рис.3.12 Нормированная корреляционная функция прямошумовой помехи

3.4 Узкополосный шум. Медленное и быстрое изменение частоты

Из прямошумовой помехи можно перейти к рассмотрению формирования узкополосного шума. Если из спектра, изображенного на рис. 3.11, в районе f_1 и $-f_1$ вырезать узкие полосы частот $\Delta f = |f_1 - F_1| = |-f_1 + F_1| = 1$ МГц, то получим узкополосный шум, изображенный на рис.3.13. Условие узкополосности определяется отношением $F_1/f_1 = \Omega_1/\omega_1 \ll 1$.

Дисперсия узкополосного шума (УПШ) $D = 2 F_1 W_0 = 0,8 B^2$.

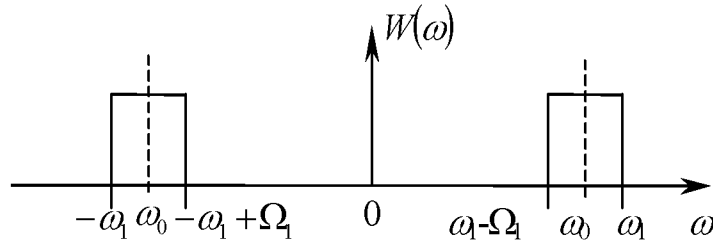


Рис.3.13. Спектр узкополосной шумовой помехи

Корреляционная функция УПШ с учетом симметричности интегралов при $W_1=W_2=W_0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \Omega_1/2}^{-\omega_0 + \Omega_1/2} W_1(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Omega_1/2}^{\omega_0 + \Omega_1/2} W_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 + \Omega_1/2}^{\omega_0 - \Omega_1/2} W_0 \cos \omega \tau d\omega = W_0 \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\omega_0 + \frac{\Omega_1}{2}\right)\tau}{\tau} + \frac{\sin\left(\omega_0 - \frac{\Omega_1}{2}\right)\tau}{\tau} \right] = \\
 &= \frac{W_0}{\pi\tau} 2 \sin \frac{\Omega_1\tau}{2} \cos \omega_0\tau = W_0 2F_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_1\tau}{2}\right) \cos \omega_0\tau \quad . \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Нормированная корреляционная функция УПШ имеет вид

$$r(\tau) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_1\tau}{2}\right) \cos \omega_0\tau \quad , \quad (3.35)$$

где множитель, в аргументе которого имеет место частота Ω_1 , является медленным, множитель с частотой ω_0 – быстрым.

Огибающая функции (3.35) имеет вид такой же, как при узкой центральной (нерасщепленной) полосе прямошумовой помехи, но аргументы разные: в первом случае при замене в (3.32) ω_1 на Ω_1 аргумент принимает значение $\sin(\Omega_1\tau)$, во втором случае в (3.35) - $\sin(\Omega_1\tau/2)$. На рис. 3.14 видно, что это

изменение приводит к расширению в два раза центрального лепестка огибающей корреляционной функции УПШ.

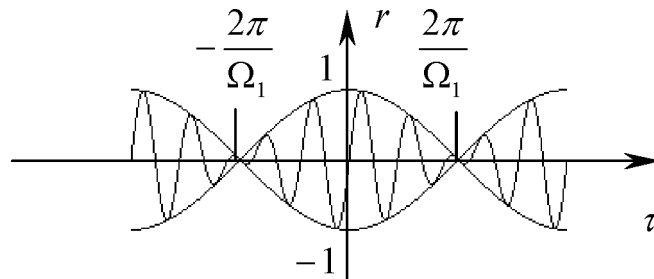


Рис. 3.14. Нормированная корреляционная функция узкополосного шума

Высокочастотное заполнение имеет частоту, равную центральной частоте ω_0 спектра шума. Частота ω_0 является средней за период реализации. Однако узкополосный шум можно практически реализовать и при $\omega_0 = \text{const}$. В этом случае сигнал будет характеризоваться следующими параметрами: амплитуда и фаза огибающей – случайные величины, несущая частота – детерминированная величина. С учетом $\omega_0 = \text{const}$ узкополосный шум можно представить как высокочастотное колебание с медленно меняющимися амплитудой и фазой

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \Theta(t)] = U(t) \cos \varphi(t).$$

Перейдем к анализу узкополосного шума и представим его в форме записи аналитического сигнала, которая, как было показано в параграфе 2.5, имеет вид

$$U(t) = \sqrt{a^2(t) + a_1^2(t)}.$$

В этом случае при аналитическом описании УПШ применим подход, принятый при анализе детерминированного узкополосного сигнала. Будем считать, что энергетический спектр $W(\omega)$ сконцентрирован около центральной частоты ω_0 и симметричен также относительно ω_0 . Полагаем, что шум $x(t)$ – стационарный эргодический процесс с нормальным законом распределения плотности вероятности $p(x)$. Это, однако, не означает, что законы распределения плотности вероятности огибающей $U(t)$, фазы $\Theta(t)$ и частоты $\omega(t)$ тоже нормальные. Целью дальнейшего анализа УПШ и есть определение этих законов.

Рассмотрим огибающую $U(t)$ узкополосного шума $x(t)$. Для этого представим, что это узкополосный сигнал из двух квадратурных составляющих

$$x(t) = U(t) \cos \Theta(t) \cos(\omega_0 t) - U(t) \sin \Theta(t) \sin \omega_0 t = U_c(t) \cos \omega_0 t - U_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Амплитуда и фаза аналитического сигнала для УПШ равны

$$U(t) = \sqrt{U_c^2(t) + U_s^2(t)} ;$$

$$\Theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{U_s(t)}{U_c(t)} .$$

Плотность вероятности огибающей УПШ $U(t)$ является функцией двух переменных

$$p(U) = f(p(U_c), p(U_s)) .$$

Очевидно, что из квадратурных сигналов сигнал $U_c(t)$ является основным, а $U_s(t)$ – сопряженным с ним по Гильберту. Если сравнить $x(t)$ и $U_c(t)$, то все различие заключается в том, что у $U_c(t)$ отсутствует слагаемое с $\cos \omega_0 t$. Это означает сдвиг спектра, показанного на рис.3.15, на детерминированную величину ω_0 слева и справа к середине с удвоением амплитуды

$$W_{U_c}(\Omega) = 2 \cdot W_{U_x}(\omega_0 + \Omega) . \quad (3.36)$$

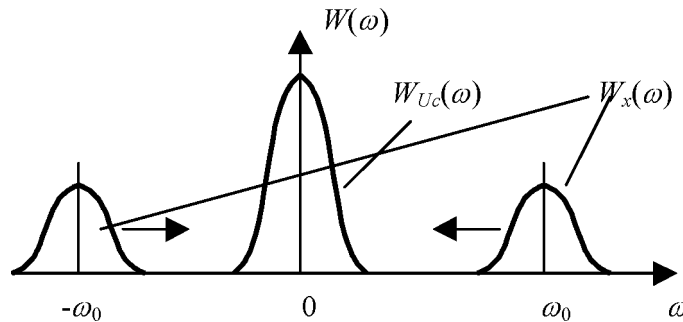


Рис. 3.15. Формирование спектра огибающей УПШ

При этом структура спектра сохраняется, также сохраняется закон распределения $x(t)$. Так как мы приняли, что $x(t)$ - гауссовский случайный сигнал, то и огибающая $U_c(t)$ - гауссовский случайный сигнал с нулевым средним. По аналогии получается выражение для энергетического спектра сопряженного сигнала

$$W_{U_c}(\Omega) = 2 \cdot W_{U_x}(\omega_0 + \Omega) . \quad (3.37)$$

Соответственно, и дисперсии всех сигналов будут одинаковыми:

$$D_{U_c} = D_{U_s} = D_x = \sigma_x^2 .$$

Поскольку квадратурные сигналы не коррелированы ($R(\tau=0) = 0$), то с учетом $m_x=0$ справедлива следующая формула:

$$\overline{U^2(t)} = D_{u_c} + D_{u_s} = 2D_x = 2\sigma_x^2 . \quad (3.38)$$

Исходя из того, что УПШ подчинен нормальному закону распределения, законы распределения квадратурных сигналов описываются выражениями:

$$\begin{cases} p(U_c) = \frac{1}{2\pi\sigma_x} e^{-\frac{U_c^2}{2\sigma_x^2}} \\ p(U_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x} e^{-\frac{U_s^2}{2\sigma_x^2}} \end{cases} \quad (3.39)$$

Так как $U_c(t)$ и $U_s(t)$ статистически независимые величины, то совместная плотность вероятности определяется выражением [17]

$$p(U_c, U_s) = p(U_c)p(U_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{(U_c^2+U_s^2)}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.40)$$

Для нахождения закона распределения огибающей УПШ произведем следующие действия. Сначала определим вероятность нахождения амплитуды сигнала $U(t)$ в промежутке dU dU_c (рис.3.16)

$$P_{dU} = p(U_c)dU_c \cdot p(U_s)dU_s \quad (3.40)$$

Выразим эту вероятность в полярных координатах. Для этого промежуток $dU_s dU_c$ выразим через модуль U и аргумент (фазу) Θ комплексной огибающей

$$P_{dU} = p(U_c)p(U_s)Ud\Theta dU = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} Ud\Theta dU \quad (3.41)$$

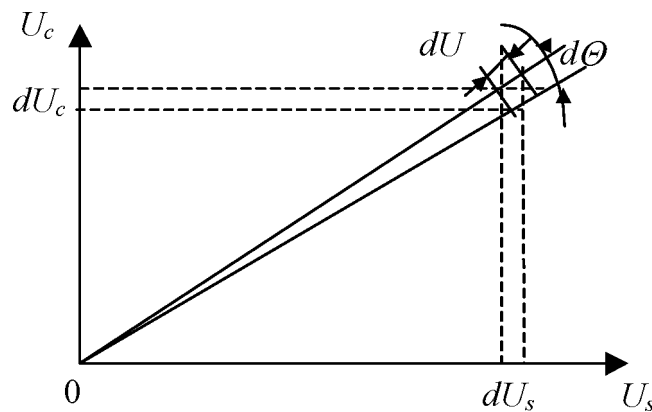


Рис. 3.16. Переход от декартовой системы координат к полярной при определении вероятности нахождения сигнала $U(t)$ в точечном пространстве

Если опустить $d\Theta dU$ в формуле (3.41), то получим двумерную плотность распределения вероятности

$$p(U, \Theta) = \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.42)$$

Пределы изменения $\Theta = \arctg U_s/U_c$: от $-\pi$ до $+\pi$. Следующий шаг анализа огибающей - переход от двумерной к одномерной плотности распределения вероятности модуля огибающей $U(t)$ путем интегрирования по фазе Θ

$$p_u(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U, \Theta) d\Theta = \frac{U}{2\pi\sigma^2} 2\pi e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}} = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \quad (0 < U < \infty). \quad (3.43)$$

Закон, описывающий распределение по формуле (3.43), относится к распределению Релея (рис. 3.17). При $U = \sigma_x$ плотность распределения вероятности принимает максимальное значение

$$p(U)_{\max} = \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Среднее значение модуля комплексной огибающей

$$M[U] = \int_0^{\infty} U p(U) dU = \frac{1}{\sigma_x^2} 2U^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x. \quad (3.44)$$

Средний квадрат модуля комплексной огибающей

$$M[U^2] = \int_0^{\infty} U^2 p(U) dU = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} U^3 e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = 2\sigma_x^2. \quad (3.45)$$

Из (3.43) – (3.45) и рис. 3.18, на котором изображена реализация УПШ, видно, что средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии шума, а ширина шумовой дорожки не превышает $(5 \dots 6)\sigma_x$.

Спектральная плотность мощности огибающей (энергетический спектр) определяется в соответствии с (3.27), как

$$W_U(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_U(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Для выделения постоянной W_0 и переменной W_{\sim} составляющих энергетического спектра выполним разложение ковариационной функции $K_U(\tau)$ в ряд Фурье, ограничившись первыми двумя членами ряда

$$K_U(\tau) \approx \frac{\pi\sigma_x^2}{2} + \frac{\pi\sigma_x^2}{8} r_0^2(\tau), \quad (3.46)$$

где $r_0(\tau)$ – огибающая нормированной корреляционной функции шума $x(t)$ при $\bar{x} = 0$.

Выполнив подстановку (3.46) в (3.27), получим

$$W_U(\Omega) = W_0 + W_{\sim} = \frac{\pi\sigma_x^2}{2} 2\pi\delta(\Omega) + \frac{\pi\sigma_x^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.47)$$

Первое слагаемое соответствует постоянной составляющей огибающей, второе – сплошной части спектра. Анализ (3.47) показывает, что спектр огибающей примыкает к частоте $\omega = 0$.

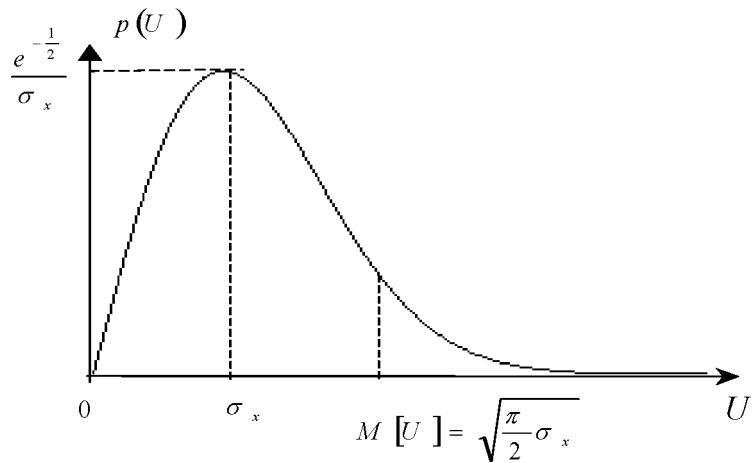


Рис. 3.17 Плотность распределения вероятности модуля комплексной огибающей УПШ

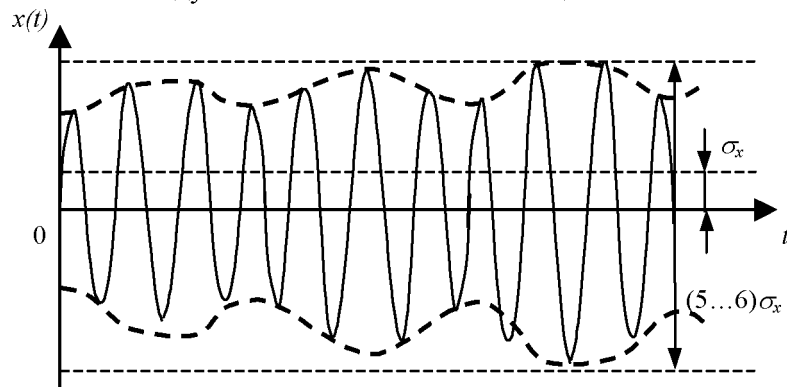


Рис. 3.18. Реализация узкополосного шума

Следующий этап анализа УПШ заключается в определении одномерной плотности вероятности фазы θ сигнала $x(t)$, для чего вернемся к формуле (3.42) и проинтегрируем ее по переменной U

$$P_{\Theta}(\Theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{\infty} U e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU^2 = \frac{\sigma_x^2 e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}}{2\pi\sigma_x^2} \Bigg|_{e^{-0}=-1}^{e^{-\infty}=0} = \frac{1}{2\pi} \quad (3.48)$$

Из анализа (3.48) видно, что фаза равномерно находится в пределах $-\pi \leq \Theta \leq \pi$, что означает согласованность с пределами интегрирования в (3.43). Кроме того, из (3.42) вытекает, что $p(U, \Theta) = p_U(U)p_{\Theta}(\Theta)$, т.е. величины U и Θ - статистически независимые случайные величины.

Корреляционная функция фазы вычисляется приближенными методами и равна [15]

$$R_{\Theta}(\tau) = \frac{\pi}{2} r_0(\tau) + \frac{\pi}{4} r^2(\tau) + \frac{\pi}{12} r^3(\tau) + \dots$$

При $\tau = 0$ ряд сходится к $\pi^2/3$. Отсюда дисперсия фазы

$$D_{\Theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta^2 p_{\Theta}(\Theta) d\Theta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Theta^3}{3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}. \quad (3.49)$$

Последний этап анализа УПШ – анализ статистических параметров частоты. Основываясь на формуле $x(t) = U(t) \cos \psi(t)$, определим закон распределения мгновенной частоты шума, которая, с учетом наличия в составе УПШ детерминированной составляющей, равна

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega_0 + \Theta'(t).$$

Из этой формулы видно, что закон распределения мгновенной частоты определяется распределением производной от фазы шума. Выражение для плотности вероятности случайной величины Θ' имеет вид [9]:

$$p(\Theta') = \frac{1}{2\Delta\omega_{\text{эк}} \left[1 + \frac{(\Theta')^2}{(\Delta\omega_{\text{эк}})^2} \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.50)$$

где $\Delta\omega_{\text{эк}} = \sqrt{\left| \frac{d^2 r_0(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}}$ – эквивалентная ширина спектра УПШ; $r_0(\tau)$ – огибающая нормированной корреляционной функции шума, обладающего спектром $W(\omega)$, симметричным относительно центральной частоты ω_0 .

График функции $p(\Theta')$ – одномодовый (рис. 3.19), причем, среднее значение абсолютной величины равно $|\overline{\Theta'}| = \Delta\omega_{\text{эк}}$. Если энергетический спектр равномерен в полосе частот $\pm\Omega$ относительно ω_0 , то $|\overline{\Theta'}| = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}$.

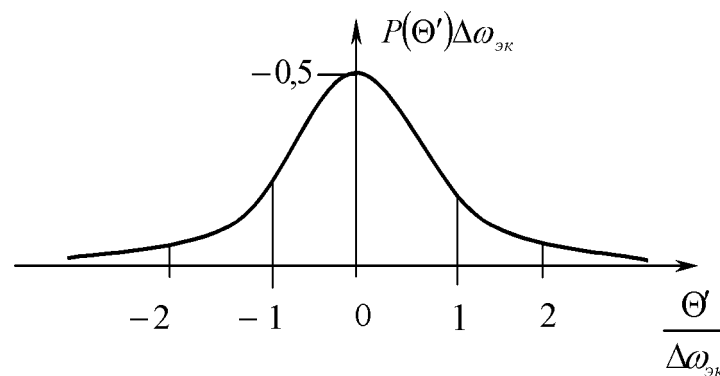


Рис. 3.19. Плотность распределения вероятности мгновенной частоты УПШ

Если вернуться к записи $x(t) = U(t) \cos \psi(t)$ и учесть, что $\psi(t) = \omega_0 t + \Theta$, то получим следующие результаты: огибающая U распределена по закону Релея, фаза Θ – равновероятна в интервале от $-\pi$ до π , мгновенная частота распределена по одномодовому закону. Сам процесс $x(t)$, как было определено в начале анализа, – нормальный (гауссовский) шум. Таким образом, выявлено,

что законы распределения самого УПШ, огибающей, фазы и мгновенной частоты шума разные.

3.5. Хаотические импульсные последовательности (ХИП)

В общем виде ХИП представляют собой последовательность радиоимпульсов с заданной частотой ω_0 заполнения, случайными величинами, в которых случайными являются амплитуда $U(t)$, длительность $\tau_{и}$ или интервалы T_{Δ} между импульсами.

Наиболее распространенными ХИП для формирования шумовых сигналов являются последовательности импульсов с постоянной амплитудой при случайных значениях $\tau_{и}$ и T_{Δ} . Такие помехи, как видно из рис. 3.20, формируются из прямошумовых помех путем отсечки снизу с последующим преобразованием импульсов сложной формы в прямоугольные импульсы одинаковой амплитуды (например, с помощью компаратора и триггера).

Если исходный шум – стационарный эргодический процесс с нулевым математическим ожиданием и нормальным законом распределения плотности вероятности $p(x)$, то ХИП характеризуется следующими параметрами [6]:

1. Математическое ожидание длительности импульсов

$$M(\tau_{и}) = \frac{\pi}{\Delta\omega_{\text{ЭК}}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right] e^{\frac{\gamma^2}{2}}. \quad (3.51)$$

2. Математическое ожидание интервала между соседними импульсами

$$M(T_{\Delta}) = \frac{\pi}{\Delta\omega_{\text{ЭК}}} \left[1 + \Phi\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) \right] e^{\frac{\gamma^2}{2}}. \quad (3.52)$$

3. Скорость пересечения порогового уровня V_0

$$M(V_{\tau}) = \frac{1}{\pi} \Delta\omega_{\text{ЭК}} e^{\frac{\gamma^2}{2}}, \quad (3.53)$$

где $\Delta\omega_{\text{ЭК}} = \sqrt{\left. -\frac{d^2 r_0(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}}$ - эквивалентная ширина спектра шума, равная второй производной нормированной корреляционной функции шума при интервале коррекции равном $\tau = 0$; $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-z^2} dz$ - табличный интеграл [15];

$\gamma = \frac{U_0}{\sigma_x}$; $z = \frac{u}{\sigma_x}$; U_0 - уровень отсечки в компараторе; u и σ_x - текущее значение и среднеквадратическое отклонение прямошумового сигнала соответственно.

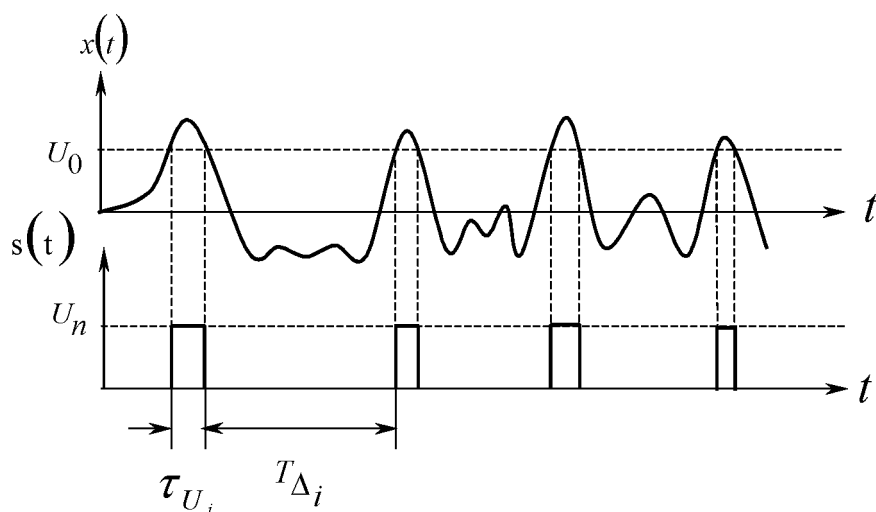


Рис. 3.20. Формирование ХИП из прямошумовой помехи

Так как в качестве исходного шума используется широкополосный прямошумовой сигнал, то спектр исходного сигнала равномерно распределен по шкале частот от $-\omega_1$ до $+\omega_1$. Нормированная корреляционная функция исходного сигнала равна (3.45)

$$r(\tau) = \text{sin } c(\omega_1 \tau). \quad (3.54)$$

После соответствующих подстановок формулы (3.51)-(3.53) принимают вид

$$M(\tau_u) = \frac{\sqrt{3}}{\Delta\omega_{\text{ЭК}}} \left[1 - \Phi\left(\frac{U_0}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \right] e^{\frac{U_0}{2\sigma_x^2}}, \quad (3.55)$$

$$M(T_\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{\Delta\omega_{\text{ЭК}}} \left[1 + \Phi\left(\frac{U_0}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) \right] e^{\frac{U_0}{2\sigma_x^2}}, \quad (3.56)$$

$$M(V_\tau) = \frac{\Delta\omega_{\text{ЭК}}}{\sqrt{3}} e^{-\frac{U_0}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.57)$$

Изменением U_0 осуществляется изменение значений $M(\tau_u)$ и $M(T_\Delta)$. Очевидно, что $M(V_\tau)$ определяется шириной спектра исходного шумового сигнала. Обычно выбирают такое значение U_0 , чтобы $M(\tau) = M(T_\Delta)$, т.е. средняя скважность импульсов $q = (T_\Delta + \tau)/\tau = 2$. В этом случае плотности вероятности длительности импульсов τ_u и интервала между ними подчиняются экспоненциальному закону (рис. 3.21)

$$\left. \begin{aligned} p_\tau(\tau) &= M(V_\tau) e^{-M(V_\tau)\tau_u}, & \tau_u > 0 \\ p_T(T_\Delta) &= M(V_\tau) e^{-M(V_\tau)T_\Delta}, & T_\Delta > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

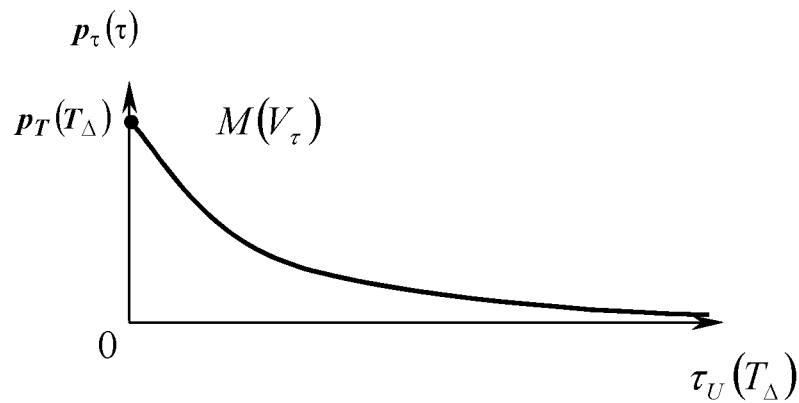


Рис. 3.21 Плотности распределения временных параметров ХИП при скважности $q=2$

Спектральная плотность ХИП при $u=U_0$ и $M(\tau) = M(T_\Delta)$ равна

$$S(\omega) = \frac{U_0^2 M(V_\tau)}{\omega^2} + 4M^2(V_\tau). \quad (3.59)$$

Корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{1}{4} U_u^2 e^{-2M(V_\tau)|\tau|}. \quad (3.60)$$

Анализ формул (3.59) и (3.60) показывает, что ширина спектра и корреляционная функция ХИП определяются соответствующими параметрами исходного шума и уровнем отсечки U_0 .

ХИП с постоянной амплитудой могут применяться в качестве прямых помех или модулирующего сигнала и при этом оказывают эффективное воздействие на КРЛ, линии радиосвязи и импульсные РЛС, в которых носителем информации не является амплитуда сигнала.

3.6. Информационные характеристики сигналов. Энтропия. Информационная емкость

Информационные характеристики сигналов основаны на известных положениях, сформированных в теории информации [6, 17, 18]. Примем P_1 – априорная вероятность наступления некоторого события (например, вероятность того, что ожидаемый символ в передаваемом цифровом сообщении $a_{прд}=1$), P_2 – апостериорная вероятность этого события (вероятность того, что принятый цифровой сигнал является $a_{прм}=1$).

Мерой (количеством) информации является величина

$$I = \log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1. \quad (3.61)$$

Формула (3.61), из которой видно, что чем больше I , тем больше неопределенность исхода, представляет собой основное соотношение теории информации [1, 18]. Выбор логарифмической функции для количественной оценки информации определен свойствами аддитивности логарифмических функций, что удобно при проведении вычислений. Традиционно, поскольку теория ин-

формации разрабатывалась применительно к двоичным цифровым системам (0 и 1), за основание логарифма принята цифра 2.

Например, в идеальном случае события «1» и «0» равновероятны и равны

$$P_1(0) = P_1(1) = 1/2, \quad \text{при } P_2(0,1) = 1.$$

Отсюда мера информации при приеме «1» или «0»

$$I = \log_2 P_2 - \log_2 P_1 = \log_2 1 - \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \quad [\text{бит}].$$

$I=1$ бит – информация о том, что произошло одно из двух указанных событий, называется двоичной единицей информации. Очевидно, что с ростом неопределенности (например, передача и прием нескольких двоичных символов) количество информации возрастает.

Традиционно сложилось так, что при анализе непрерывных сигналов последние преобразуются к виду, удобному для двоичного информационного анализа. Рассмотрим более подробно с информационной точки зрения некоторые виды сигналов, применяемых при постановке помех. Пусть сигнал представляет собой последовательность из n символов. Количество переборов, при которых будут иметь место все варианты цифровых сообщений равно $N = L^n$, где L – длина соотношения (количество символов в сообщении).

Если все сообщения равновероятны, то

$$P_1 = 1/L^n. \quad (3.62)$$

Количество информации в одном сообщении (вспомним, что $P_2 = 1$)

$$I_n = -\log_2 P_2 - \log_2 P_1 = -\log_2(1/L^n) = n \cdot \log_2 L \quad [\text{бит}].$$

Среднее количество информации, приходящееся на один символ

$$I_1 = I_n/n = I_2/2 = \frac{n}{n} \log_2 L = \log_2 L \quad [\text{бит}]. \quad (3.63)$$

Пусть в некотором сообщении длиной $L=20$ (например, L – число ячеек, выложенных в некоторый прямоугольник 4×5 символов, расположенных слева направо и сверху вниз от 1 до 20) разное количество раз сообщается о номере ячейки.

Вероятность того, что выпадет один из символов за номером j , равна P_j , тогда информация о появлении одного символа j равна $I_j = -\log_2 P_j$, информация о появлении n символов j соответственно равна $I_{nj} = -n \log_2 P_j$. Полная информация о появлении всех символов $j = 1 \dots 20$ равна

$$I_{20} = -\sum_{j=1}^{20} n_j \log P_j. \quad (3.64)$$

Средняя информация, приходящаяся на один символ равна

$$I_1 = -\sum_{j=1}^{20} \frac{n_j}{n} \log P_j. \quad (3.65)$$

Здесь $n_j/n \rightarrow P_j$ при числе $n \rightarrow \infty$. Подставив P_j в выражение (3.64) получим с условием (3.65)

$$I_n = -n \sum_j P_j \log P_j, \quad (3.66)$$

$$I_1 = -\sum_j P_j \log P_j = H. \quad (3.67)$$

В (3.67) H – энтропия (неопределенность). Энтропия максимальна при равномерном распределении вероятности: $P_1 = P_2 = \dots P_j = P_m = 1/m$. Энтропия превращается в 0, когда одна из вероятностей $P_j = 1$ (остальные=0), т.е. неопределенность полностью отсутствует. Таким образом, формула (3.63) определяет максимально возможное количество информации (равновероятность событий) в сообщении заданной длины L .

Если рассмотреть сигнал как последовательность дискретных величин, то можно определить информационную емкость дискретного сигнала. Например, положительный импульс – «1», отрицательный импульс – «0». длительность импульса τ_u , число импульсов в сообщении равно n . Тогда полная длительность сообщения $T = n \tau_u$.

Справедлива формула $f_{гр} = 1/\tau_u$ [18], отсюда количество информации в сообщении

$$I_n = n = T/\tau_u = T f_{гр}. \quad (3.68)$$

В частности, $I_n/T = C = f_{гр}$ – информационная емкость сигнала при двоичном коде, $f_{гр}$ – граничная частота, или полоса частот сигнала.

При более сложном кодировании число длинных амплитудных уровней импульса равно L . Тогда в соответствии с (3.63) и (3.68)

$$I_n = n \log_2 L = (T/\tau_u) \log_2 L = T f_{гр} \log_2 L \text{ [бит/символ]}. \quad (3.69)$$

Информационная емкость такого многоуровневого (цифрового) сигнала равна

$$C = f_{гр} \log_2 L. \quad (3.70)$$

Информационная емкость может рассматриваться как скорость передачи информации. Если импульсы имеют разную длительность, то формула (3.70) усложняется [18].

Любой непрерывный сигнал возможно представить в виде последовательности выборок (отсчетов) согласно теореме Котельникова [6]. Можно предположить, что $f_{гр} = F_m$, где F_m – наивысшая частота в спектре непрерывного сигнала. Тогда за время T реализации сигнала имеет место N импульсов (скважность $q=2$)

$$N = 2F_m T + 1. \quad (3.71)$$

В реальных РТС присутствуют помехи, в том числе искусственного происхождения. Максимальное количество градаций L (длина сообщения) определяется отношением [17]

$$L = \frac{\sqrt{P_c + P_n}}{\sqrt{P_n}},$$

где P_c, P_n - мощность полезного сигнала и помехи соответственно.

В соответствии с (3.66) полная информация в непрерывном сообщении за время T равна

$$I_T = n \log_2 L = (2F_m T + 1) \log_2 \frac{\sqrt{P_c + P_n}}{\sqrt{P_n}}. \quad (3.72)$$

Предельная информационная емкость непрерывного сигнала будет равна

$$C = \frac{I_T}{T} = \frac{2F_m T + 1}{T} \cdot \frac{1}{2} \log_2 \frac{P_c + P_n}{P_n} \approx F_m \log_2 \frac{P_c + P_n}{P_n}. \quad (3.73)$$

Не приводя рассуждений, можно перейти от энтропии дискретных сигналов к энтропии непрерывных сигналов через замену суммирования на интегрирование [18]

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx, \quad (3.74)$$

где $p(x)$ – плотность распределения вероятности сигнала x .

Рассмотрим примеры вычисления энтропии случайного сигнала.

1. *Гармоническое колебание со случайной фазой*

$$x = U_0 \cos[\omega_0 t + \Theta(t)].$$

Плотность распределения вероятности равна

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{U_0^2 - x^2}}.$$

Подставив $p(x)$ в (3.74) получим

$$H = - \int_{-U_0}^{U_0} \frac{1}{\pi \sqrt{U_0^2 - x^2}} \log \frac{1}{\pi \sqrt{U_0^2 - x^2}} dx =$$

$$\log_2 e \frac{2}{\pi} \left[\ln \pi \int_0^{U_0} \frac{dx}{\sqrt{U_0^2 - x^2}} + \int_0^{U_0} \frac{\ln \sqrt{U_0^2 - x^2}}{\sqrt{U_0^2 - x^2}} dx \right].$$

первый интеграл - табличный

$$\int_0^{U_0} \frac{dx}{\sqrt{U_0^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{U_0} \Big|_0^{U_0} = \frac{\pi}{2},$$

второй интеграл равен

$$\int_0^{U_0} \frac{\ln \sqrt{U_0^2 - x^2}}{\sqrt{U_0^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \ln U_0 - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Окончательно

$$H = \log_2 e [\ln \pi + \ln U_0 - \ln 2] = \log_2 e \left[\ln \left(\frac{\pi}{2} U_0 \right) \right]. \quad (3.75)$$

Среднюю мощность сигнала выразим через $P = U_0^2/2$, тогда (3.75) примет вид

$$H = \log_2 e \left[\ln \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln P \right]. \quad (3.76)$$

Из (3.76) видно, что энтропия растет с увеличением мощности колебания (амплитуды).

2. Гауссовский (нормальный) шум имеет плотность распределения вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Примем $m_x = 0$. Подставив это выражение в (3.74) и учитывая, что дисперсия – суть мощность флуктуаций шума $P_{ш} = \sigma_x^2$, получим

$$\begin{aligned} H &= -\log_2 e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right) \right] dx = \\ &= \log_2 e \left(\ln \sqrt{2\pi}\sigma_x^2 + \frac{1}{2} \right) = \log_2 \sqrt{2\pi e P_{ш}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

При одинаковых средних мощностях $P_{ш}$ энтропия максимальна для нормального шума, т.к. амплитуда у него в принципе не ограничена (хотя $P(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$).

Выводы по главе

1. Основные характеристики случайной величины $x_k(t)$ – вероятность P и плотность вероятности $p(x)$. Числовые параметры случайной величины – моменты. Для радиотехнических сигналов применяют моменты 1 и 2 порядка: математическое ожидание, дисперсия.
2. Согласно центральной теореме сумма большого числа независимых величин с ростом слагаемых распределяется по нормальному закону. Случайный процесс задается бесконечным ансамблем своих реализаций. Основные моментные функции случайного процесса: математическое ожидание, дисперсия, ковариационная и корреляционная функции.
3. Если статистические параметры случайного процесса неизменны во времени, то процесс называется стационарным. Если моментные характеристики случайного стационарного процесса во времени и по реализациям совпадают, то такой процесс называется эргодическим.

4. Преобразование Фурье от функции корреляции называется спектральной плотностью мощности стационарного случайного процесса. Чем шире спектр, тем хаотичней реализация случайного процесса (шума).
5. Реализации узкополосного шума представляют собой квазигармонические колебания, случайно модулированные по амплитуде и фазовому углу. Функции корреляции узкополосного шума представляются в виде произведения быстрого и медленного сомножителей.
6. Огибающая узкополосного нормального шума распределена по закону Рэлея, фаза шума имеет равномерное распределение, мгновенная частота распределяется по одномодовому закону.
7. Хаотические спектральные последовательности формируются из широкополосного шума путем отсечки по амплитуде и преобразования получившихся импульсов сложной формы в прямоугольные с фиксированной амплитудой и случайными длительностью и интервалом. Параметры ХИП определяются параметрами исходного шума и уровнем отсечки амплитуды.
8. Радиотехнические сигналы могут описываться информационными характеристиками. Мерой информации является величина I , выражаемая в битах, которая сформирована для дискретных сигналов, но может с учетом дискретизации применяться для непрерывных сигналов.

4. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

4.1 Спектральный метод анализа. Метод интеграла наложения

Большинство устройств в радиотехнических системах сигнального назначения (для постановки шумов) представляет собой сочетание линейных и нелинейных элементов. При анализе цепей стремятся к упрощению, т.е. сведению всех практических задач к анализу линейных систем, в том числе приближенными методами для нелинейных систем.

Можно выделить следующие методы анализа:

- Классический метод дифференциальных уравнений – при анализе простейших систем, описываемых дифференциальными уравнениями не выше 2-го порядка.
- Спектральный метод (для сложных цепей) - метод интеграла Фурье, операторный метод (преобразования Лапласа).
- Метод интеграла наложения (для импульсных цепей), заключающийся в отыскании отклика цепи с заданной импульсной характеристикой на произвольный сигнал.
- Комбинированные частные методы, адаптированные к конкретным типам сигналов и цепей.

С учетом особенностей функционирования станций постановки помех более подробно рассмотрен спектральный метод и даны общие характеристики метода интеграла наложения.

В основе *спектрального метода* лежит использование передаточной функции $\dot{K}(j\omega)$ цепи, которая представляется в виде четырехполюсника (рис.4.1). При этом принимается $E_1 = U_{вх}$, $E_2 = U_{вых}$, $\dot{K}(j\omega) = \frac{U_{вых}}{E_1}$.

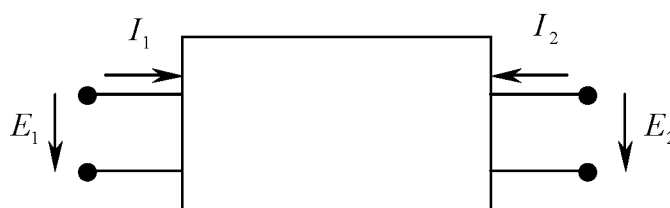


Рис. 4.1. Представление передаточной функции четырехполюсника:

E_1, I_1 – входные напряжение и ток; E_2, I_2 - выходные напряжение и ток

Безразмерная величина $\dot{K}(j\omega)$ является важнейшей характеристикой четырехполюсника в стационарном режиме при синусоидальном возбуждении. Обычно записывают

$$\dot{K}(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где $K(\omega)$ - АЧХ, $\varphi(\omega)$ - ФЧХ четырехполюсника.

Если на входе линейной системы действует сигнал произвольной формы $e(t)$ с соответствующей спектральной плотностью $\dot{E}(j\omega)$, то они связаны между собой преобразованием Фурье

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Выходной сигнал можно представить в аналогичной форме, но с учетом передаточной функции

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}(j\omega) \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.1)$$

$\dot{K}(j\omega)$ обладает характером весовой функции по вкладу в интеграл (4.1) каждой спектральной составляющей. Вычисление интегралов типа (4.1) иногда затруднено. Эти вычисления облегчаются при переходе от действительной переменной ω к комплексной $p = \sigma + j\omega$ [4, 15], которая имеет размерность комплексной частоты. Это позволяет устранить ограничения, вытекающие из требования абсолютной интегрируемости функции $e(t)$.

Выполнив замену, получим

$$e(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{E}(p) e^{pt} dp, \quad (4.2)$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{E}(p) \dot{K}(p) e^{pt} dp, \quad (4.3)$$

$$\dot{E}(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} e(t) e^{pt} dt. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) называется преобразованием Лапласа; $\dot{E}(p)$ - преобразованная по Лапласу функция; $e(t)$ - оригинал; (4.2) - обратное преобразование Лапласа.

Выражение (4.3) можно составить путем алгебраизации с помощью преобразования Лапласа интегро-дифференциальных уравнений, описывающих электрические цепи. Например, пусть имеется цепь из индуктивности L , сопротивления R и емкости C , а также известный сигнал $e(t)$. Искомая функция - ток в цепи $i(t)$. Уравнение цепи имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + r_i + \frac{1}{c} \int idt = e(t). \quad (4.5)$$

Искомой функции $i(t)$ соответствует изображение $\dot{i}(p)$.

Рассмотрим последовательно по уравнению (4.5) сначала производную $\frac{di}{dt}$. Применив формулу (4.4) относительно тока в индуктивности L , получим

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{di}{dt} \right) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} di(t) = e^{-pt} i(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} e^{-pt} \Big|_{t=\infty} = 0; \\ e^{-pt} \Big|_{t=0} = 1 \end{array} \right] = -i(t=0) + pI(p) = pI(p) - i(0).$$

Аналогично для емкости

$$\int_0^{\infty} \left[\int i(t) dt \right] e^{-pt} dt = \frac{I(p) + C}{p},$$

где C – постоянная, соответствующая моменту $t = 0$, т.е.

$$\int i(t) dt = \int_0^t i(t) dt + C.$$

При нулевых начальных условиях алгебраизация еще более упрощается: при $t = 0$ ток в индуктивности $i_L = 0$, а напряжение на емкости $u_C = 0$, откуда

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{di(t)}{dt} \right] e^{-pt} dt = pI(p),$$

$$\int_0^{\infty} \left[\int i(t) dt \right] e^{-pt} dt = \frac{I(p)}{p}.$$

Производной k -го порядка $i^{(k)}(t)$ соответствует изображение $p^k \dot{I}(p)$. В итоге интегриродифференциальное уравнение принимает вид

$$Z(p) \dot{I}(p) = E(p),$$

где $Z(p)$ - операторное сопротивление, которое определяется параметрами цепи.

В ряде случаев вместо спектрального метода, заключающегося в разложении сложного сигнала на гармонические составляющие, применяют метод интеграла наложения, основанного на разбиении сигнала на короткие импульсы [4]. Метод базируется на импульсной характеристике цепи $g(t)$, представляющей собой отклик цепи на воздействие в виде единичного импульса $s(t)$. В момент времени t_0 происходит суммирование всех коротких импульсов размерностью Δt в промежутке от 0 до t_0 (рис. 4.2). При $\Delta t \rightarrow 0$ справедлива формула

$$s_{\text{вх}}(t) = \int_0^{t_0} s(\tau) g(t_0 - \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

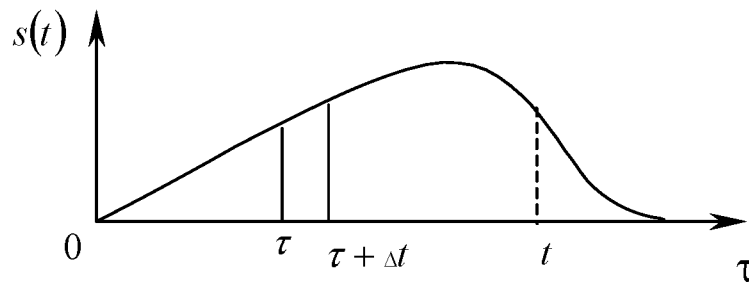


Рис. 4.2. Эпюра входного сигнала

В общем случае, если начало сигнала $s(t)$ совпадает с началом отсчета времени τ , выражение (4.6) запишется как

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Для реальных цепей $g(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$. С учетом этого

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^t s(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t s(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (4.8)$$

Интеграл (4.8) называется *сверткой входного сигнала $s(t)$ с импульсной характеристикой цепи $g(t)$* . Сигнал на выходе в момент t получается накоплением мгновенных значений входного сигнала, взятых с весом $g(t-\tau)$ за все предыдущее время (рис.4.3).

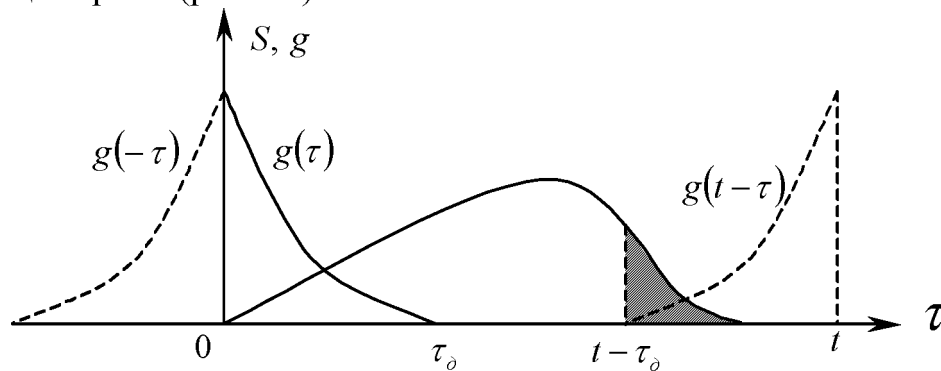


Рис. 4.3. Эпюра, поясняющая метод интеграла наложения

На основании (4.8) можно сделать вывод, что сигнал $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе линейной цепи определяется как взаимная корреляционная функция для входного сигнала $s(x)$ и функции $g^*(t-\tau)$, которая является зеркальным отражением импульсной характеристики цепи.

Иногда вместо импульсной характеристики используют переходную функцию $h(t)$, являющуюся откликом цепи на единичный скачок

$$\begin{cases} h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau, \\ g(\tau) = \frac{dh(t)}{dt} = h'(t). \end{cases} \quad (4.9)$$

При формировании сигналов специальной формы часто возникает необходимость в преобразовании сигналов, имеющем характер дифференцирования или интегрирования.

Дифференциальное и интегральное преобразование имеют вид соответственно

$$s_{\text{вых}}(t) = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}, \quad (4.10)$$

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int s(t) d\tau, \quad (4.11)$$

где τ_0 – постоянная величина, имеющая размерность времени.

Дифференцирование и интегрирование – линейные математические операции. В реальных цепях они выполняются радиотехническими элементами типа конденсаторов и катушек индуктивности в сочетании с резистором.

Представим, что в RC-цепи $s(t)$ – входной сигнал, равный $s(t) = Ri(t) + \int i(t) dt$. Обозначим постоянную времени $\tau_0 = RC$ и умножим это выражение на C

$$\tau_0 i(t) + \int i(t) dt = C s(t).$$

Здесь τ_0 – очень малая величина, поэтому первое слагаемое стремится к нулю. Возьмем производную

$$i(t) \approx C \frac{ds(t)}{dt},$$

Откуда

$$U_R = Ri(t) \approx RC \frac{ds(t)}{dt} = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}.$$

Таким образом, мы получили дифференцирующее звено.

При больших τ_0 первое слагаемое намного больше второго и его можно отбросить

$$\dot{i}(t) \approx \frac{C}{\tau_0} s(t) = \frac{C}{RC} s(t) = \frac{s(t)}{R}.$$

На конденсаторе будет напряжение

$$U_c = \frac{1}{C} \int i(t) dt \approx \frac{1}{CR} \int s(t) dt.$$

Вариант интегрирующего RC-звена показан на рис. 4.4.

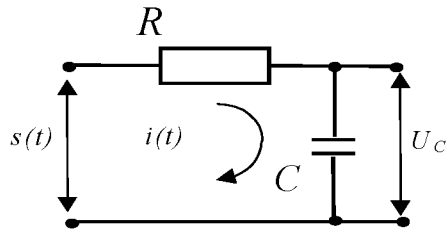


Рис. 4.4. Интегрирующее RC-звено

Аналогично получают формулы для RL – цепей. При выходном сигнале, снимаемом с индуктивности, получаем дифференцирующее звено

$$s_{\text{вых}}(t) = L \frac{di}{dt} \approx L \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{R} s(t) \right] = \tau_0 \frac{ds(t)}{dt}.$$

Если выходной сигнал снимается с резистора, то получается интегрирующее звено

$$s_{\text{вых}}(t) = Ri(t) \approx \frac{1}{\tau_0} \int s(t) dt.$$

Уточним понятие большого и малого значения постоянной времени τ_0 . При точном дифференцировании спектральная плотность сигнала имеет вид

$$\dot{S}_{\text{вых}}(\omega) = j\omega\tau_0 S(\omega).$$

Это означает, что четырехполюсник имеет передаточную функцию, соответствующую дифференцированию

$$\dot{K}_g(j\omega) = j\omega\tau_0. \quad (4.12)$$

Для точного интегрирования передаточная функция равна

$$\dot{K}_u(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_0}. \quad (4.13)$$

Реальная передаточная функция (с учетом сопротивления) для дифференцирующего звена записывается как

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = RC \frac{j\omega}{1 + RC\omega} = \frac{\tau_0 j\omega}{1 + \tau_0 j\omega}, \quad \tau_0 \omega \ll 1; \quad (4.14)$$

для интегрирующего звена

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\tau_0 j\omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau_0 j\omega}}, \quad \tau_0 \omega \gg 1. \quad (4.15)$$

4.2. Формирование шума в линейных цепях

Известно, что примерами реализаций стационарных случайных процессов с нормальным законом распределения являются шумы, обусловленные атомистической структурой вещества и электричества [1-3]. Для получения

шума с заданными энергетическими характеристиками его необходимо усилить. Исследование линейной цепи формирования шума сводится к определению основных статистических характеристик шума: энергетического спектра и корреляционной функции.

Связь между энергетическими спектрами на выходе и входе усилителя (четырёхполюсника) определяется выражением

$$W_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K^2(\omega)W_{\text{ВХ}}(\omega). \quad (4.16)$$

Если входной шум имеет смысл $\overline{i^2(t)}$, а выходной шум $\overline{u^2(t)}$, то $K^2(\omega) = Z^2(\omega)$, где Z – импеданс цепи. В соответствии с теоремой Винера – Хинчина [15] корреляционная функция шума на входе цепи равна

$$R_i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

Соответственно при $\tau=0$ получается выражение для дисперсии шума

$$R_i(0) = \sigma_i^2 = D_i.$$

В линейной цепи закон распределения как входного, так и выходного сигнала одинаковый - нормальный. Изменяются лишь дисперсия и корреляционная функция (а значит, и энергетический спектр).

Рассмотрим влияние нагрузок на характеристики выходного шума.

1. Аперiodическая нагрузка в виде параллельного соединения R и C.

Полезное нагрузочное сопротивление шунтируется внутренними емкостями элементов аперiodического усилителя. Передаточную функцию выразим через импеданс

$$Z^2(\omega) = \frac{R^2}{1 + (\omega CR)^2},$$

откуда энергетический спектр на выходе цепи равен

$$W_u(\omega) = \frac{2R^2 e I_0}{1 + (\omega CR)^2},$$

где $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона; $I_0 \approx 1$ мА - среднее значение силы тока.

Корреляционная функция

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} 2I_0 e R^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau d\omega}{1 + (\omega CR)^2} = \frac{e I_0 R^2 \alpha^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau d\omega}{\alpha^2 + \omega^2},$$

где $\alpha = 1/RC$.

Учитывая, что $\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$ [15], окончательно получим

$$R_u(\tau) = \frac{eI_0R}{2C} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

Дисперсия шума (при $\tau = 0$)

$$D_u = \sigma_u^2 = \overline{u^2(t)} = \frac{eI_0R}{2C}.$$

С увеличением интервала τ корреляционная функция $R_u(\tau)$ убывает экспоненциально. При $|\tau| = (2...3)RC$ $R_u(\tau) \approx 0$. Это означает, что интервал корреляции в 2-3 раза превышает постоянную времени цепи $RC = \tau_H$. При коэффициенте усиления k величина эффективного напряжения на выходе цепи $U_{\text{эф. вых}} = kU_{\text{эф.}}$.

2. Нагрузка – колебательный LC-контур, шунтированный резистором R (резонансный усилитель).

При большой добротности ($Q = \frac{R}{\sqrt{L/C}} \gg 1$)

$$Z^2(\omega) = \frac{R^2}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_k^2},$$

где $\tau_k = 2\pi\sqrt{LC}$ – постоянная времени; $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ – резонансная частота контура.

Корреляционная функция

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} 2eI_0R^2 \int_0^\infty \frac{\cos \omega \tau d\omega}{1 + (\omega - \omega_p)^2 \tau_k^2}.$$

Введем обозначение $\omega_1 = \omega - \omega_p$, тогда

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= \frac{eI_0R^2}{\pi} \int_{-\omega_p}^\infty \frac{\cos(\omega_1 + \omega_p)\tau d\omega_1}{1 + \omega_1^2 \tau_k^2} = \\ &= \frac{eI_0R^2}{\pi} \left[\cos \omega_p \tau \int_{-\omega_p}^\infty \frac{\cos \omega_1 \tau d\omega_1}{1 + \omega_1^2 \tau_k^2} - \sin \omega_p \tau \int_{-\omega_p}^\infty \frac{\sin \omega_1 \tau d\omega_1}{1 + \omega_1^2 \tau_k^2} \right]. \end{aligned}$$

При $Q \gg 1$ слагаемое $\omega_p \tau_k = \omega_p \frac{2Q}{\omega_p} = 2Q \gg 1$. Поэтому ω_p в интегралах можно заменить на $-\infty$. Вторым интеграл (от нечетной функции) равен нулю, а первый интеграл в приближении равен

$$\int_{-\omega_p}^{\infty} \frac{\cos \omega_1 \tau d\omega_1}{1 + \omega_1^2 \tau_k^2} \approx \frac{2}{\tau_k^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega_1 \tau d\omega_1}{\frac{1}{\tau_k^2} + \omega_1^2}.$$

Корреляционная функция для колебательного контура принимает вид

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= \frac{eI_0 R^2}{\pi} \cos \omega_p \tau \cdot \frac{2}{\tau_k^2} \cdot \frac{\pi \tau_k}{2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_k}\right) = \\ &= \frac{eI_0 R^2}{\tau_k} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_k}\right) \cos \omega_p \tau = eI_0 R^2 \alpha e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_p \tau, \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{1}{\tau_k} = \frac{1}{2RC}$ - затухание контура при шунтировании.

Окончательно получаем

$$R_u(\tau) = \frac{eI_0 R}{2C} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_p \tau;$$

$$\sigma_u^2 = R(0) = 2eI_0 R^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{eI_0 R}{2C}; \quad u_{эф} = \sigma = \sqrt{\frac{eI_0 R}{2C}}.$$

График нормированной корреляционной функции шума на выходе колебательного контура показан на рис. 4.5. Вырезание из равномерного спектра входного шума узкой полосы, совпадающей с резонансной характеристикой контура (рис.4.6), придает шумовому напряжению на выходе характер ВЧ-колебания с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Мгновенное значение шумового напряжения изменяется с центральной (средней) частотой ω_p . Огибающая изменяется медленно с частотой

$$\Omega = \frac{2\pi}{(2...3)\tau_k}.$$

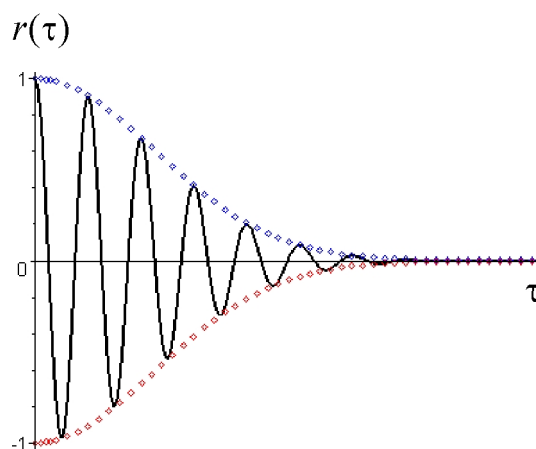


Рис. 4.5 График нормированной корреляционной функции на выходе резонансного контура

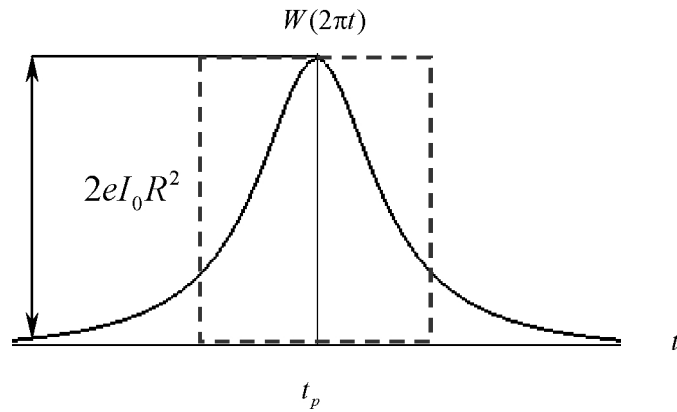


Рис. 4.6 Спектр шумового сигнала на выходе колебательного LC -контура

Энергетический спектр при пропускании через полосовой фильтр с центральной частотой ω_0 и полосой $\pm \Omega$ имеет постоянное значение $W(\omega) = W_0$. Функция корреляции в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}
 R_u(\tau) &= \frac{W_0}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Omega}^{\omega_0 + \Omega} \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0}{2\pi \tau} [\sin(\omega_0 + \Omega)\tau - \sin(\omega_0 - \Omega)\tau] = \\
 &= \frac{W_0}{\pi \tau} \sin \Omega \tau \cos \omega_0 \tau.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

4.3 Прохождение ЧМ сигналов через избирательные системы

При синусоидальной модуляции амплитуды передача колебаний через контур, точно настроенный на несущую частоту, не сопровождается изменением формы огибающей. Имеет место некоторое уменьшение глубины модуляции (рис. 4.7).

$$M' = \frac{M_{\text{вых}}}{M} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Omega}{\omega_p} Q\right)^2}}.
 \tag{4.18}$$

Кроме того, происходит сдвиг фазы выходного сигнала относительно входного на угол

$$\varphi = \text{arctg} \frac{2\Omega}{\omega_p} Q.
 \tag{4.19}$$

Это свидетельствует о незначительных изменениях АМ колебания. При частотной модуляции неравномерность АЧХ и ФЧХ контура оказывает более сложное влияние на параметры выходного колебания [4].

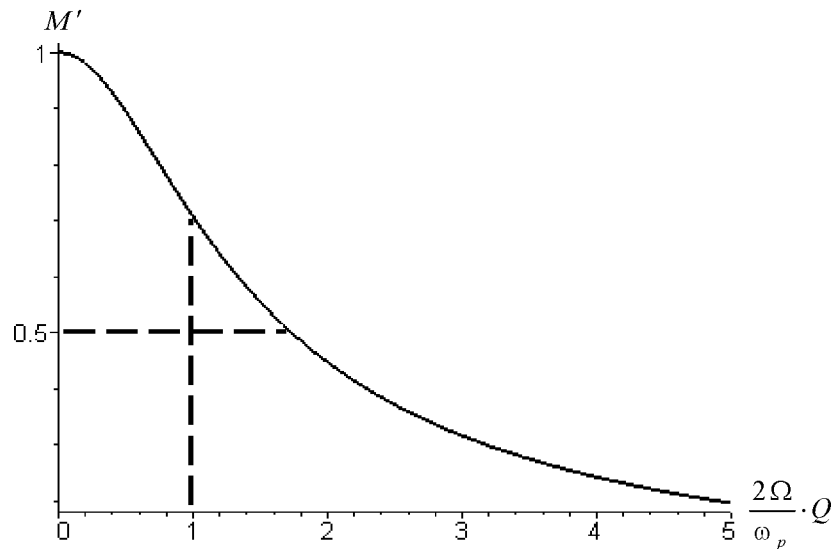


Рис. 4.7 Изменение глубины модуляции при прохождении ЧМ колебания через колебательный контур

Влияние цепи приводит к следующим явлениям

- искажение закона изменения мгновенной частоты и мгновенной фазы колебания;
- изменение амплитуды полезного частотного отношения (девиации) в зависимости от частоты модуляции Ω ;
- возникновение паразитной АМ.

Рассмотрим воздействие на резонансную систему ЭДС с частотой $\omega(t) = \omega_0 + \omega_\delta \cos \Omega t$. Сама ЭДС запишется так $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t)$,

где $m = \frac{\omega_\delta}{\Omega}$ - индекс модуляции. Коэффициент передачи $\dot{K}(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$.

Вид АЧХ и ФЧХ показан на рисунке 4.8, а. Колебательные системы обычно настраивают на среднюю частоту ЧМ типа $\omega_p = \omega_0$. Прямое применение спектрального метода из-за большого количества частотных составляющих затруднено. Поэтому применяют *метод мгновенной частоты* [4] при условии, что частота Ω модуляции очень низка. Это позволяет без больших погрешностей определить амплитуду и фазу колебаний на выходе цепи. Предполагается, что установление стационарных колебаний на выходе происходит практически одновременно с изменением частоты колебаний на входе. Это предположение тем ближе к истине, чем больше период модуляции $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ и

чем меньше постоянная времени $\tau = \frac{1}{\sigma \Delta\omega_0}$.

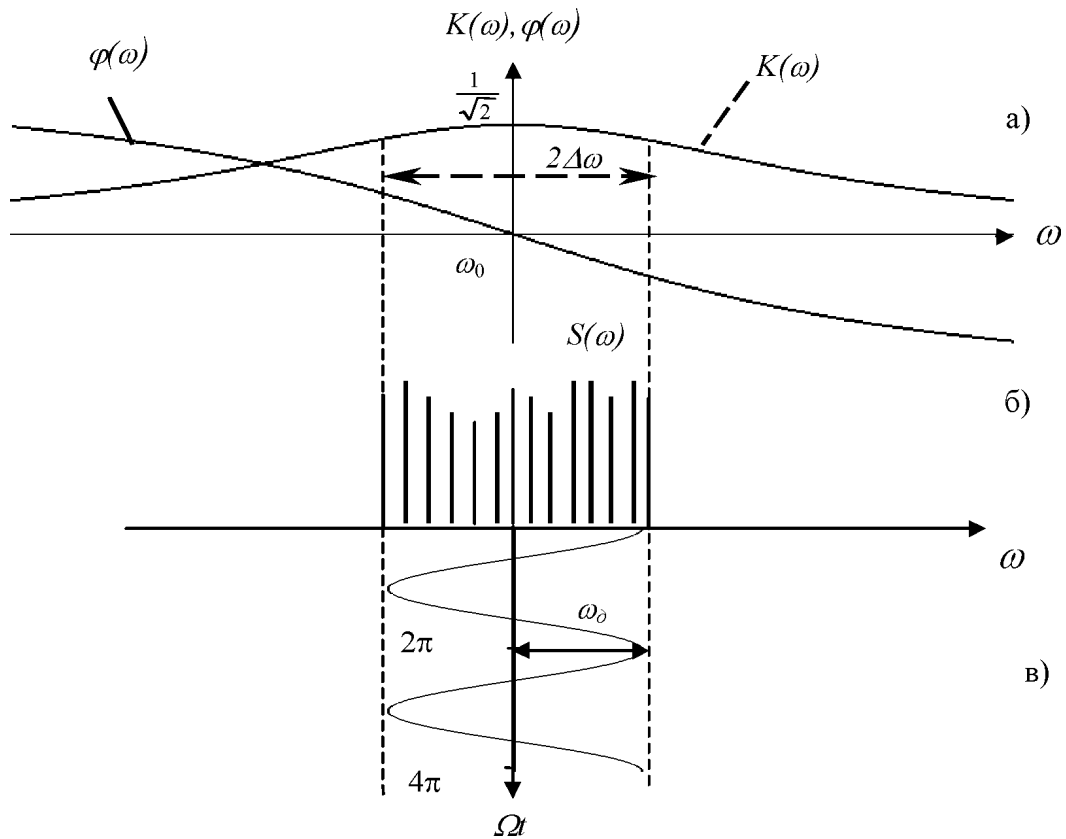


Рис. 4.8. Вид АЧХ и ФЧХ (а), спектра (б) сигнала и колебания частоты модуляции (в)

Таким образом, первое условие применимости метода мгновенной частоты записывается так

$$\frac{\Omega}{\Delta\omega_0} \ll 1. \quad (4.20)$$

Второе условие применимости (практической)

$$\frac{\omega_g}{\Delta\omega_0} \leq 1. \quad (4.21)$$

Напряжение на выходе избирательной цепи

$$u_{\text{вых}}(t) = E_0 \operatorname{Re} \left\{ \exp\{j\Psi(t)\} \cdot \dot{K}(j\omega) \right\} = E_0 K(\omega) \operatorname{Re} \left(\exp\{j\Psi(t) + \varphi(\omega)\} \right),$$

где $\psi(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t$ – полная фаза ЭДС на входе цепи; $\varphi(\omega)$ – аргумент коэффициента передачи цепи. Выделим амплитуду выходного сигнала

$$U(t) = E_0 K(\omega) = E_0 K(\omega_0 + \omega_d \cos \Omega t).$$

Мгновенная частота на выходе контура

$$\omega_{\text{вых}}(t) = \frac{d\Psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{\text{вх}}(t) + \xi(t). \quad (4.22)$$

Здесь составляющая $\xi(t)$, которая по условию намного ниже частоты девиации $\xi(t) \ll \omega_d$ характеризует влияние цепи на частоту колебания на выходе.

Если известно уравнение фазовой характеристики цепи $\varphi(\omega)$, то

$$\xi(t) = \frac{d[\varphi(\omega)]}{dt} = \frac{d[\varphi(\omega_0 + \omega_g \cos \Omega t)]}{dt}. \quad (4.23)$$

При периодической модуляции частоты ω_0 функция $\xi(t)$ – также периодическая функция времени, которая разлагается в ряд Фурье. При настройке цепи на среднее значение вынуждающей частоты ω_0 фазовая характеристика (см. рис. 4.8,а) симметрична с переменной знака, т.е. антисимметрична относительно ω_0 . В этом случае ряд Фурье (см. парагр. 2.2) будет содержать только нечетные гармоники Ω , 3Ω , 5Ω и т.д. Тогда можно записать (с учетом нечетности функции $\xi(t)$)

$$\xi(t) = \zeta_1 \sin \Omega t + \zeta_3 \sin 3\Omega t + \zeta_5 \sin 5\Omega t + \dots, \quad (4.24)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \dots$ - амплитуды частотных гармоник.

Подставим (4.24) в (4.22). В результате получаем приближенное значение частоты сигнала на выходе цепи

$$\begin{aligned} \omega_{\text{вых}}(t) &\approx \omega_0 + \omega_d \cos \Omega t + \varepsilon_1 \sin \Omega t + \varepsilon_3 \sin 3\Omega t + \varepsilon_5 \sin 5\Omega t + \dots \approx \\ &\approx \omega_0 + \sqrt{\omega_d^2 + \varepsilon_1^2} \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon_3 \sin 3\Omega t + \dots \approx \\ &\approx \omega_0 + \omega_d \cos(\Omega t - \gamma) + \varepsilon_3 \sin 3\Omega t + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

В (4.25) $\varepsilon_1^2 \ll \omega_d^2$, поэтому ε_1^2 отбрасывается, а

$$\gamma = \text{arctg} \frac{\varepsilon_1}{\omega_d} \quad (4.26)$$

представляет собой фазовый сдвиг (запаздывание) сигнала.

Таким образом, влияние цепи на характер колебания сказывается в фазовом сдвиге γ и возникновении нечетных гармоник. Последнее обстоятельство имеет наиболее значимое влияние.

Рассмотрим одиночный колебательный контур, передаточная функция которого определяется выражением

$$K(j\omega) = \frac{1}{R[1 + j(\omega - \omega_0)\tau_k]}, \quad (4.27)$$

где ω_0 – средняя частота, $\tau_k = 1/2\Delta\omega_0$ - постоянная времени колебательно-го контура.

Учитывая, что $\omega - \omega_0 = \omega_d \cos \Omega t$ и $\omega_d \ll \omega_0$, можно записать (4.27) в форме

$$K(j\omega) \approx \frac{Q}{j(1 + j\omega_g \tau_k \cos \Omega t)} = \frac{Q}{\sqrt{1 + (\omega_g \tau_k \cos \Omega t)^2}} e^{j\varphi}, \quad (4.28)$$

где $\varphi = -\left[\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(\omega_d \tau_k \cos \Omega t)\right]$.

На основании (4.23) найдем $\xi(t)$

$$\xi(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Omega \omega_g \tau_k \sin \Omega t}{1 + \omega_g^2 \tau_k^2 \cos^2 \Omega t}.$$

По аналогии с выводом формулы (1.10) из гармонического анализа периодических сигналов получим выражения для гармоник $\varepsilon_1, \varepsilon_3$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin \Omega t d(\Omega t), \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin 3\Omega t d(\Omega t). \end{cases} \quad (4.29)$$

После интегрирования получаются следующие окончательные значения

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{2}{m\tau_k} (\sqrt{1 + \omega_g^2 \tau_k^2} - 1), \\ \varepsilon_3 = \frac{2}{m\tau_k} \frac{(1 - \sqrt{1 + \omega_g^2 \tau_k^2})^3}{\omega_g^2 \tau_k^2}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Фазовый сдвиг первой и второй гармоник ЧМ колебания в резонансной цепи определяется исходя из выражения (4.26)

$$\gamma = \arctg \frac{\varepsilon_1}{\omega_g} = \arctg \left[\frac{2}{m\omega_g \tau_k} (\sqrt{1 + \omega_g^2 \tau_k^2} - 1) \right]. \quad (4.31)$$

В (4.31) под знаком \arctg находится коэффициент гармоник K_{r1} на частоте Ω . На частоте 3Ω коэффициент гармоник получается равным

$$K_{r3} = \frac{\varepsilon_3}{\omega_g} = \frac{2}{m} \left| \frac{1 - \sqrt{1 + \omega_g^2 \tau_k^2}}{\omega_g \tau_k} \right|^3. \quad (4.32)$$

На рисунке 4.9 представлен график зависимости $mK_{r3}(\omega_d \tau_k)$, показывающий, что коэффициент гармоник на частоте 3Ω возрастает по квадратичному закону с ростом частоты девиации и постоянной времени.

При $\omega_d \tau_k \ll 1$ формулы (4.31) и (4.32) упрощаются

$$\gamma \approx \Omega \tau_k, \quad (4.33)$$

$$K_{r3} \approx \frac{(\omega_d \tau_k)^3}{4m}. \quad (4.34)$$

При $\omega_d \tau_k \rightarrow 1$ ($m \gg 1$), т.е. при девиации, равной полосе пропускания контура, формулы (4.33) - (4.34) дадут результаты

$$\gamma = \frac{0,8}{m}, \quad (4.35)$$

$$K_r = \frac{0,13}{m}. \quad (4.36)$$

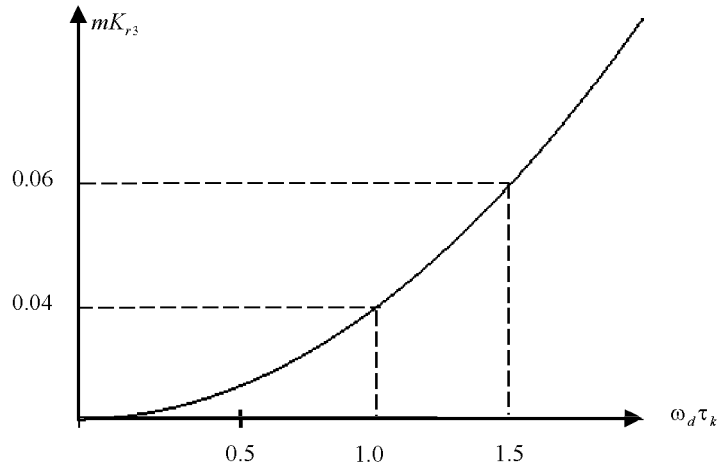


Рис. 4.9. График зависимости mK_{r3} от $\omega_d \tau_k$

Из полученных результатов можно сделать вывод, что если применим метод мгновенной частоты, то предельные искажения в одиночном контуре не превышают долей процента.

Паразитную амплитудную модуляцию рассмотрим качественно (для резонансной частоты $\omega_0 = \omega_p$). Из рис. 4.10 видно, что основная частота изменения огибающей амплитуды U равна 2Ω , а сама амплитуда зависит от добротности контура. Такой вариант анализа относится к случаю относительно медленного изменения частоты, не выходящей за пределы полосы пропускания колебательного звена. Вместе с тем в системах постановки помех широкое распространение получили такие устройства, в которых используется *качание частоты колебаний в достаточно широких пределах*, когда неизвестно точное значение частоты подавляемой РТС.

Зададимся значением входной ЭДС

$$s(t) = E_0 \cos\left(\omega_1 t + \frac{\beta t^2}{2}\right), \quad t \geq 0. \quad (4.37)$$

Для удобства анализа примем амплитуду $E_0 = 1$. Частота ω в этом выражении будет меняться по линейному закону

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\left(\omega_1 t + \frac{\beta t^2}{2}\right) = \omega_1 + \beta t, \quad (4.38)$$

т.е. скорость изменения частоты равна β .

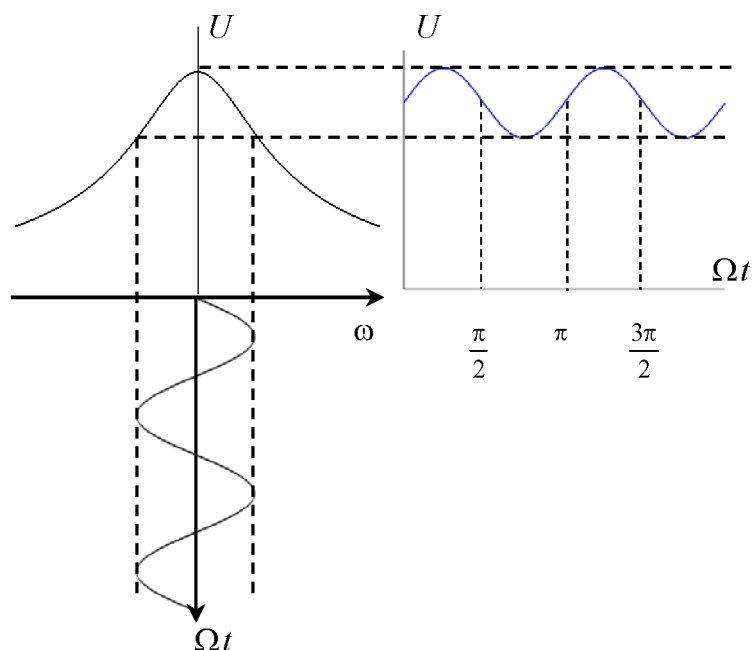


Рис. 4.10. Появление паразитной амплитудной модуляции при прохождении ЧМ сигнала через избирательную цепь

Определим сигнал на выходе избирательной цепи с заданными значениями резонансной частоты ω_p и полосы пропускания $\Delta\omega_p$. Полоса пропускания конечна, поэтому частота $\omega(t)$ будет меняться не в пределах от ω_1 до ω_2 , а в пределах полосы пропускания от ω_{t1} до ω_{t2} в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ (рис. 4.11). Приравняем $\Delta\omega_0$ к $\alpha = 1/\tau_k$. За счет пилообразного качания частоты процесс можно считать периодическим.

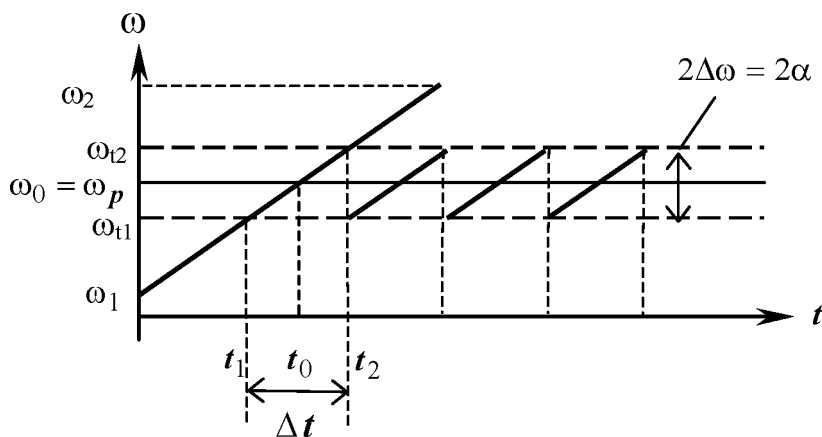


Рис. 4.11. Пилообразное качание частоты

Применение спектрального подхода представляется нецелесообразным из-за его сложности. Считается, что более эффективно применение метода интеграла наложения [4]. В качестве избирательной цепи берем одиночный колебательный контур. Выходной сигнал снимается с емкости $U_{\text{вых}}(t) = U_C(t)$.

Введем следующие обозначения: ω_p - резонансная частота контура; ω_0 - центральная частота спектра сигнала; $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_p$ - отклонение резонанс-

ной частоты относительно центральной частоты сигнала; $\Omega = \omega - \omega_p$ – отклонение текущей частоты сигнала от резонансной.

С учетом обозначений текущая частота может быть записана как

$$\omega = \omega_0 + \Omega = \omega_p + \Delta\omega_0 + \Omega. \quad (4.39)$$

Коэффициент передачи контура

$$\dot{K}(j\omega) = K[j(\omega_p + \Delta\omega_0 + \Omega)] = \dot{K}_1[j(\Delta\omega_0 + \Omega)]. \quad (4.40)$$

Как видно из (4.40), вводится некоторый коэффициент $\dot{K}_1[j(\Delta\omega_0 + \Omega)]$, где аргументом является Ω , $\Delta\omega_0$ имеет смысл постоянного параметра, при этом $\Delta\omega_0 \approx \Delta\omega_k$ ($\Delta\omega_k$ – полоса пропускания резонансной цепи). Будем считать, что добротность Q настолько велика, что в полосу $\Delta\omega_k$ не попадают гармоники с частотой 2Ω , 3Ω и т.д.

$$\frac{\Delta\omega_0 + \Omega}{\omega_p} \ll 1.$$

В этом случае передаточная функция для колебательного звена будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{K}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega C} = \left[\frac{1}{LC} = \omega_p^2; \right. \\ &\quad \left. R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega_p CR} = \frac{\omega_p L}{R} = Q \right] = \\ &= \frac{1}{j} \cdot \frac{\omega_p Q}{\omega} \cdot \frac{1}{1 + jQ \left[\frac{2(\Delta\omega_0 + \Omega)}{\omega} + \frac{(\Delta\omega_0 + \Omega)^2}{\omega\omega_p} \right]} \approx \frac{Q}{j} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{2(\Delta\omega_0 + \Omega)}{\omega_p} Q}. \quad (4.41) \end{aligned}$$

Введем понятие *обобщенной расстройки*

$$a = \frac{2(\Delta\omega_0 + \Omega)}{\omega_p} Q. \quad (4.42)$$

Тогда (4.41) примет вид

$$K_1 \approx \frac{Q}{j} \frac{1}{1 + ja}.$$

В соответствии с преобразованием Фурье запишем выходной сигнал в форме, когда интегрирование ведется только по положительным значениям ω

$$U_{\text{вых}}(t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}. \quad (4.43)$$

Сделаем замену

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}(\omega_0 + \Omega) = \dot{S}_1(\Omega). \quad (4.44)$$

В этих новых обозначениях (рис. 4.12) спектральная плотность $\dot{S}_1(\Omega)$ выражена через разностную частоту Ω , принимающую положительные и отрицательные значения. Подставим в выражение (4.43) значения K_1 и S_1 из (4.40) и (4.44). В результате получим

$$U_{\text{ВЫХ}} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\Omega) K_1[j(\Delta\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} \cdot d\Omega \cdot e^{j\omega t} \right\}. \quad (4.45)$$

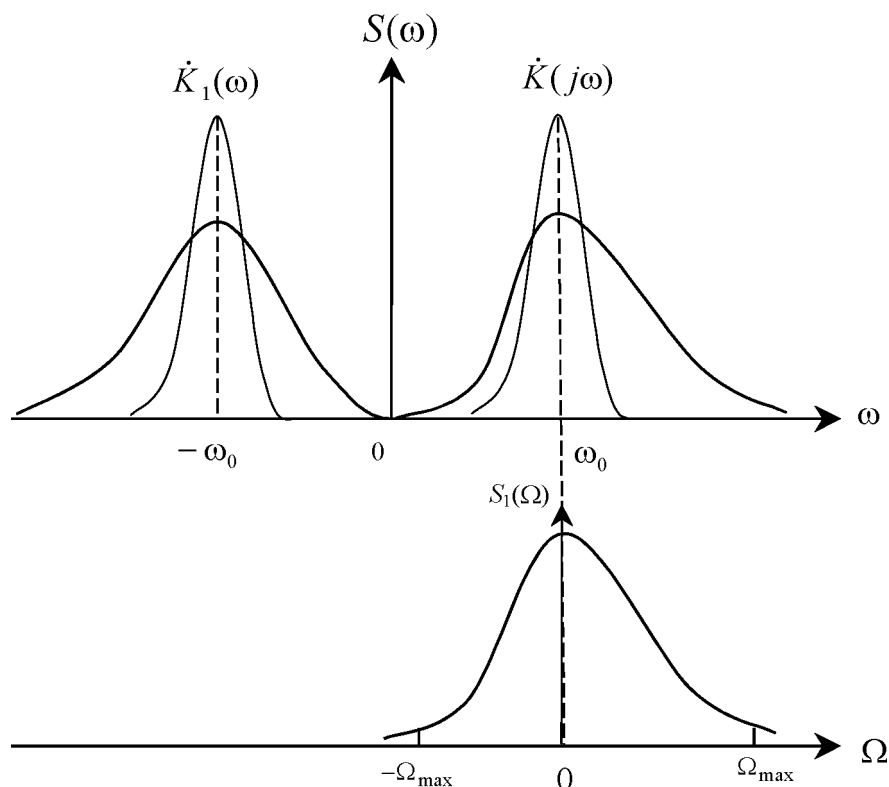


Рис. 4.12. Переход от передаточной функции в области положительных значений ω_0 (по отклонению Ω текущей частоты ω от резонансной ω_p)

Пределы $\pm\infty$ взяты в предположении, что при высокой добротности (см. рис. 4.12) $\dot{K}(j\omega)$ и $K_j[j(\Delta\omega_0 + \Omega)]$ уменьшаются быстрее, чем Ω становится соизмеримой с $|\omega_0|$. Таким образом, достигается «укорочение» записи выражения (4.43) для любых типов сигналов (в том числе ЧМ и в виде δ -функции) при прохождении сигнала через цепь с большой добротностью Q .

Очевидно, что укорочению записи передаточной функции соответствует и укорочение записи тесно с ней связанной импульсной характеристики. Учитывая, что спектральная плотность δ -функции равна 1 ($S_1(\Omega) = 1$), можно получить следующее общее выражение для импульсной характеристики

$$\begin{aligned}
g(t) &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1 [j(\Delta\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} \cdot d\Omega \right\} = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ 2e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K_1 [(j\Delta\omega_0 + p)] e^{pt} \cdot dP \right\}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Очевидно, что $g(t)$ зависит от ω_p , но при принятых ограничениях выражение (4.46) удовлетворяет требованиям к точности проводимого анализа. Для одиночного резонансного контура в соответствии с (4.41) и (4.46) получим точное окончательное выражение

$$g(t) = \frac{\omega_p^2}{\omega_{св}} \exp \left(-\frac{t}{\tau_k \sin \omega_{св} t} \right), \quad (4.47)$$

где $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота; $\omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ – частота свободных колебаний; $\tau_k = \frac{2L}{r} = \frac{2Q}{\omega_p}$ – постоянная времени колебательного контура.

Для получения *укороченного выражения* для импульсной характеристики введем величину $\tau_k = \frac{2Q}{\omega_p}$, а $j\Omega$ в (4.46) заменим на p . Тогда (4.46) переписывается

$$g(t) = \operatorname{Re} \left\{ 2e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\frac{Q}{j} e^{pt} dp}{1 + (j\Delta\omega_0 + p)\tau_k} \right\}. \quad (4.48)$$

Подынтегральная функция имеет один полюс в точке $p_1 = -[(1/\tau) + j\Delta\omega_0]$. Вычет в данной точке

$$\operatorname{res}_1 = \frac{\exp \left(-\frac{t}{\tau_k} \right) \exp(-j\Delta\omega_0 t)}{\tau_k}.$$

Таким образом

$$g(t) = \operatorname{Re} \left\{ 2e^{j\omega_0 t} \frac{Q}{j} e^{\frac{-t}{\tau_k} e^{-j\Delta\omega_0 t}} \right\} = \frac{2Q}{\tau_k} e^{-\frac{t}{\tau_k}} \sin(\omega_0 - \Delta\omega_0)t. \quad (4.49)$$

Учтем, что $2Q/\tau_k = \omega_p$, $\omega_0 - \Delta\omega_0 = \omega_p$. Тогда

$$g(t) = \omega_p e^{-\frac{t}{\tau k}} \sin \omega_p t. \quad (4.50)$$

При добротности $Q \gg 1$ частота $\omega_p \approx \omega_{cb}$, т.е. выражение (4.50) мало отличается от выражения (4.47). Поскольку $\alpha \approx 1/\tau$, то можно записать

$$g(t) = \omega_{cb} e^{-\alpha t} \sin \omega_{cb} t. \quad (4.51)$$

На рис. 4.11 через Δt обозначено пребывание мгновенной частоты $\omega(t)$ в полосе пропускания контура $2\Delta\omega_0 = 2\alpha$. При сигнале (4.37) и импульсной характеристике (4.51) получим в соответствии с (4.6) следующее выражение для выходного сигнала

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{\omega_p}{2} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \left[(\omega_1 - \omega_p) \tau + \frac{\beta \tau^2}{2} + \omega_p t \right] \cdot d\tau. \quad (4.52)$$

В (4.52) частота ω_0 заменена на частоту ω_1 . Это означает, что частота входного сигнала может отличаться от ω_0 . Существует выражение для (4.52), которое удобно для интегрирования [4]. Оно имеет вид

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{\omega_p}{2} e^{-\alpha t} \operatorname{Im} \left\{ e^{j\omega_p t} \int_0^t e^{j\frac{\beta \tau^2}{2} + [\alpha - j(\omega_p - \omega_1)]\tau} d\tau \right\}. \quad (4.53)$$

Показатель степени в подынтегральном выражении можно дополнить до квадрата суммы

$$\frac{j\beta \tau^2}{2} + [\alpha - j(\omega_p - \omega_1)]\tau + d^2 - d^2 = \left(\sqrt{\frac{j\beta}{2}} \cdot \tau + d \right)^2 - d^2 = \xi^2 - d^2,$$

$$\text{где } d = \frac{\alpha - j(\omega_p - \omega_1)}{\sqrt{2j\beta}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{j\beta}{2}} \cdot \tau + d.$$

Тогда выражение (4.53) приведет к виду

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{\omega_p}{2} e^{-\alpha t} \operatorname{Im} \left\{ e^{j\omega_p t - d^2} \int_0^t e^{\left(\sqrt{\frac{j\beta}{2}} \tau + d \right)^2} d\tau \right\} = \frac{\omega_p}{2} e^{-\alpha t} \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{\frac{2}{j\beta}} e^{j\omega_p t - d^2} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{j\beta}{2}} \tau + d} e^{\xi^2} d\xi \right] \right\}. \quad (4.54)$$

Примем $\omega(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{\xi^2} d\xi \right)$. Такая функция табулирована [15], а в качестве Z_1 и Z_2 могут быть приняты верхние пределы интегралов

$$d = Z_1 = \frac{\alpha - j(\omega_p - \omega_1)}{\sqrt{j^2 \beta}},$$

$$\sqrt{\frac{j\beta}{2}}t + d = Z_2 = \sqrt{\frac{j\beta}{2}}t + \frac{\alpha - j(\omega_p - \omega_1)}{\sqrt{j^2\beta}}$$

После подстановок получим окончательное выражение

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega_p}{\sqrt{\beta}} e^{-\alpha t} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{j\sqrt{j}} e^{j\omega_p t} \left[e^{Z_2^2 - Z_1^2} \omega(Z_2) - \omega(Z_1) \right] \right\} = \\ &= U(t) \cos \left[\omega_1 t + \frac{\beta t^2}{2} + \varphi(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Если представить, что $\omega_1=0$, то можно получить эпюры относительных значений огибающей (с учетом того, что $U_{\text{вых max}}/E_0=1$) для различных значений параметра $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ (рис.4.13). При линейном изменении частоты $\omega(t)$ обобщенная расстройка пропорциональна времени $a(t) = \frac{2(\beta t - \omega_p)}{\omega_p} Q$. Причем, при $t=0$ отклонение $\Delta\omega(0) = -\omega_p$, расстройка $a(0) = -2Q$. В момент времени $t=\omega_p/\beta$ ($\omega(t)$ проходит через ω_p) получим $\Delta\omega(t)=0$, $a(t)=0$. При $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} \rightarrow \infty$ (т.е. при $\beta \rightarrow 0$,

когда скорость изменения частоты стремится к нулю) кривая представляет собой обыкновенную резонансную характеристику (стационарный режим). С уменьшением отношения $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ резонансная характеристика контура меняется:

размывается и смещается вправо (при положительной β) или влево (при отрицательной β). При больших β появляются осцилляции из-за сложения вынужденных колебаний ω_0 (или ω_1) и собственных колебаний контура ($\omega_{\text{св}}$).

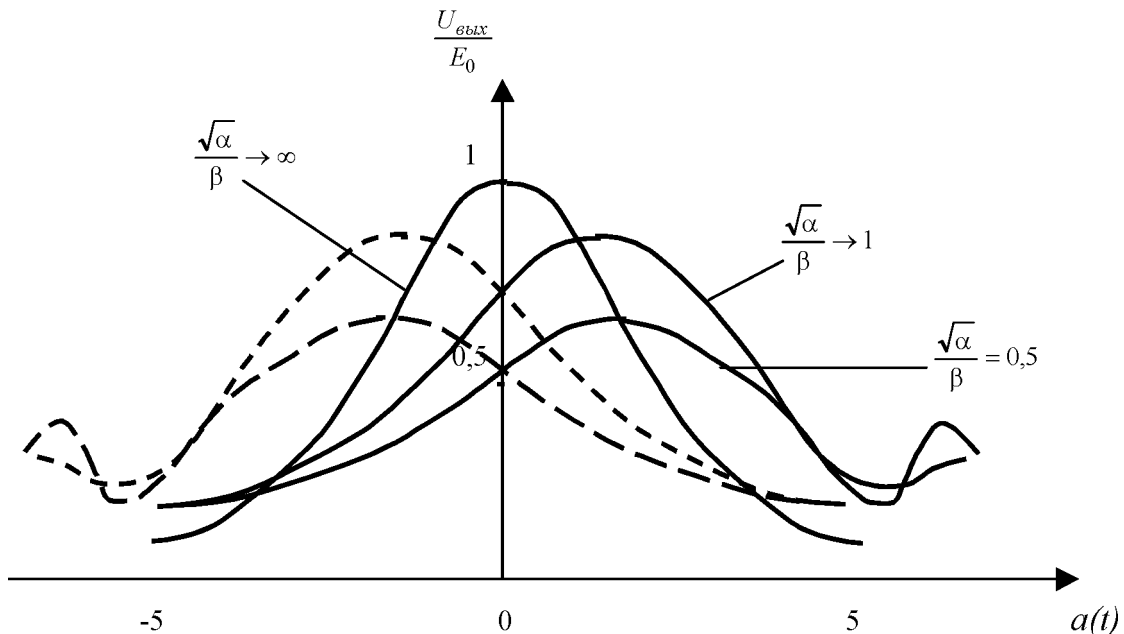


Рис.4.13. Эпюры относительных значений огибающей при различных значениях параметра $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$

4.4. Передача сигналов через линейные цепи с переменными параметрами

1. Импульсная и передаточная характеристики цепи

В составе линейного четырехполюсника часто имеют место элементы, параметры которых являются функциями времени. В таких цепях в процессе некоторого промежутка времени характер зависимости $s_{\text{вых}}=f(s_{\text{вх}})$ меняется. Соответственно частотная передаточная и импульсная характеристики также являются функциями времени (рис.4.14)

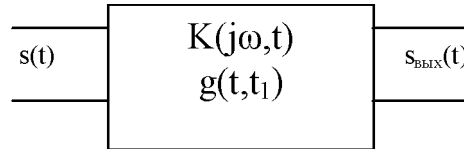


Рис.4.14. Четырехполюсник с переменными во времени параметрами

Рассмотрим импульсную характеристику параметрической цепи. Здесь $t_1=t-\tau$ – интервал между моментом τ приложения единичного импульса и моментом t . Наблюдение выходного сигнала $g(t, t_1)$ определяет величину отклика в момент t на единичный импульс, подаваемый на вход цепи в момент $\tau=t-t_1$. сигнал $s(t)$, то в соответствии с принципом суперпозиции выходной сигнал будет равен

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t, t_1) d\tau. \quad (4.56)$$

Эта формула может быть записана

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_1) g(t, t_1) dt_1. \quad (4.57)$$

Для физически осуществимой цепи $g(t, t_1)=0$ при $t_1=t-\tau < 0$ (т.е. при $\tau > t$). Окончательно запишем

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) g(t, t_1) d\tau. \quad (4.58)$$

Перейдем к рассмотрению передаточной функции $\dot{K}(j\omega, t)$. С этой целью обратимся к выражению (4.57) и представим функцию $s(t-t_1)$ через обратное преобразование Фурье:

$$s(t-t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega(t-t_1)} d\omega,$$

где $\dot{S}(\omega)$ - спектральная плотность сигнала $s(t)$.

Теперь выражение (4.57) можно записать следующим образом с использованием преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
 s_{вых}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega(t-t_1)} d\omega \right) g(t, t_1) dt_1 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} e^{-j\omega t_1} d\omega \right) g(t, t_1) dt_1 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_1} g(t, t_1) dt_1 \right) d\omega .
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Внутренний интеграл представляет собой преобразование Фурье от интегральной характеристики, что по аналогии с преобразованием Фурье для сигнала можно представить как функцию передаточной характеристики четырехполюсника $\dot{K}(j\omega, t)$.

В результате получим выражение, аналогичное (4.1)

$$s_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) \dot{K}(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega. \tag{4.60}$$

Выделим внутренний интеграл в (4.59):

$$\dot{K}(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \tag{4.61}$$

и назовем его передаточной функцией линейной системы с переменными параметрами.

В сложных цепях строгое определение передаточной функции $\dot{K}(j\omega, t)$ является трудоемкой задачей, поэтому для каждого конкретного случая применяют различные методы упрощения, исходя из медленности изменения $\dot{K}(j\omega, t)$ и особенностей структуры цепи. Кроме того, для определения передаточной функции параметрической цепи необходимо знать импульсную характеристику этой цепи. При определении импульсной характеристики используют дифференциальное уравнение системы в виде

$$a_n(t) \frac{d^n g(t, \tau)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} g(t, \tau)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) g(t, \tau) = \delta(t - \tau), \tag{4.62}$$

где $a_i(t)$ - коэффициенты, являющиеся функциями времени (в линейных цепях они являются постоянными величинами); $\delta(t-\tau)$ - подаваемый на вход единичный импульс (δ -функция); $g(t, \tau)$ - отклик цепи на единичный импульс в момент $t = \tau$.

Поскольку $\delta(t-\tau) = 0$ при $t \neq \tau$, то общее решение можно искать из однородного уравнения

$$a_n(t) \frac{d^n g(t, \tau)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} g(t, \tau)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) g(t, \tau) = 0 \quad (4.63)$$

при условии, что до момента приложения $\delta(t-\tau)$ - импульса в цепи отсутствовали токи и напряжения.

Общее решение однородного дифференциального уравнения n -го порядка представляет собой сумму из n линейно независимых частных решений [15]

$$g(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\tau) y_i(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\tau) g_i(t, \tau),$$

где $\varphi_i(\tau)$ - значения частных функций, зависящие от начальных условий. В практических задачах обычно ищутся решения уравнения не выше 2-го порядка.

2. Преобразование спектра сигнала в параметрической цепи

При формировании специальных сигналов используют преобразование параметров цепи по некоторому периодическому закону. Например, периодическое изменение емкости по пилообразному закону с частотой Ω .

Соответственно будет меняться и передаточная функция $\dot{K}(j\omega, t)$. Представим функцию $\dot{K}(j\omega, t)$ через ряд Фурье

$$\begin{aligned} \dot{K}(j\omega, t) = & \dot{K}_0(j\omega) + \dot{K}_1(j\omega) \cos(\Omega t + \Psi_1) + \dot{K}_2(j\omega) \cos(2\Omega t + \Psi_2) + \\ & + \dots + \dot{K}_i(j\omega) \cos(i\Omega t + \Psi_i) + \dots \end{aligned} \quad (4.64)$$

В (4.64) $\dot{K}_0(j\omega)$, $\dot{K}_1(j\omega)$, ..., $\dot{K}_i(j\omega)$ - не зависящие от времени коэффициенты. Произведение $\dot{K}_i(j\omega) \cos(i\Omega t + \Psi_i)$ образует i -ю параметрическую цепь, представляющую линейную цепь с постоянными параметрами, дополненную устройством, изменяющим коэффициент передачи по закону $\cos(i\Omega t + \Psi_i)$.

Основываясь на выражении (4.64), любую параметрическую цепь можно представить (рис. 4.15) в виде параллельного соединения четырёхполосников с передаточными функциями $\dot{K}_i(j\omega) \cos(i\Omega t + \Psi_i)$.

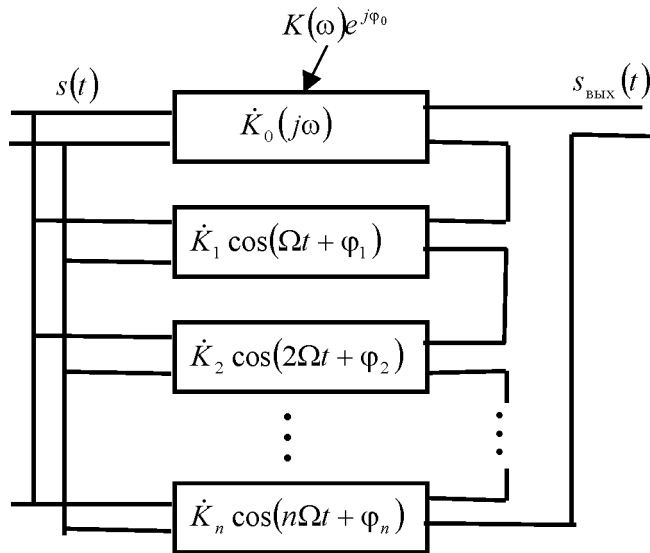


Рис. 4.15. Представление передаточной функции параметрической цепи

Входы на схеме подключены параллельно, а выходы – последовательно, т.к. необходимо, чтобы выходной сигнал представлял собой сумму напряжений, снимаемых с суммарного выходного сопротивления. Такое представление передаточной функции позволяет легко установить характер преобразования спектра сигнала в параметрической цепи. Разберем простейший пример, когда на входе цепи имеется гармоническое колебание с амплитудой $U = 1$ и частотой ω .

$$s(t) = \cos \omega t = \operatorname{Re} e^{j\omega t}. \quad (4.65)$$

Сигнал на выходе 1-го четырёхполюсника равен

$$s_{0\text{ВЫХ}}(t) = \operatorname{Re} [\dot{K}_0(j\omega)e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [K_0(\omega)e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}] = K_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Передаточная функция 2-го четырёхполюсника имеет вид

$$\dot{K}_1(j\omega)\cos(\Omega t + \Psi_1) = K_1(\omega)e^{j\varphi_1} \cos(\Omega t + \Psi_1).$$

Тогда сигнал на выходе 2-го четырёхполюсника будет равен

$$\begin{aligned} s_{1\text{ВЫХ}}(t) &= \operatorname{Re} [K_1(\omega)e^{j\omega t} e^{j\varphi_1} \cos(\Omega t + \Psi_1)] = K_1(\omega)\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\Omega t + \Psi_1) = \\ &= \frac{1}{2} K_1(\omega) \{ \cos[(\omega + \Omega)t + \varphi_1 + \Psi_1] + \cos[(\omega - \Omega)t + \varphi_1 - \Psi_1] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, сигнал $s_{1\text{ВЫХ}}(t)$ представляет собой две боковые спектральные составляющие с комбинационными частотами $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$.

По аналогии сигнал на выходе i -го четырёхполюсника можно записать в виде

$$s_{i\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2} K_i(\omega) \{ \cos[(\omega + i\Omega)t + \varphi_i + \Psi_i] + \cos[(\omega - i\Omega)t + \varphi_i - \Psi_i] \}.$$

Результирующий выходной сигнал является суммой n выходных сигналов

$$s_{\text{вых}}(t) = K_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\omega) \{ \cos[(\omega + i\Omega)t + \varphi_i + \Psi_i] + \cos[(\omega - i\Omega)t + \varphi_i - \Psi_i] \}. \quad (4.66)$$

Выражение (4.66) определяет следующее свойство параметрической цепи: при изменении передаточной функции по любому периодическому закону с основной частотой Ω гармонический входной сигнал с частотой ω после преобразования образует на выходе цепи спектр, содержащий частоты ω , $\omega \pm \Omega$, $\omega \pm 2\Omega$, ..., $\omega \pm i\Omega$ и т.д.

Если на вход цепи поступает сложный сигнал в диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$, то данное свойство будет иметь место для всех спектральных составляющих в этом диапазоне. Поскольку цепь является линейной, то взаимодействия между составляющими в диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$ не будет по определению.

Рассмотрим более подробно формулу (4.66) на примере линии задержки, изменяющейся во времени по закону $\tau(t) = \tau_0(1 + m \cos \Omega t)$. Передаточная функция четырёхполосника равна

$$\dot{K}(j\omega, t) = e^{-j\omega\tau(t)} = \exp\{-j\omega\tau_0(1 + m \cos \Omega t)\}.$$

На вход подается гармоническое колебание $s(t) = \text{Re}(e^{j\omega t})$. Выходной сигнал будет равен

$$s_{\text{вых}}(t) = \text{Re}\{\dot{K}(j\omega, t)e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{e^{-j\omega\tau_0(1+m\cos\Omega t)}e^{j\omega t}\} = \cos\{\omega(t - \tau_0) - m\omega\tau_0 \cos\Omega t\}.$$

Получается фазомодулированное колебание, в котором фаза зависит от частот Ω и ω . Мгновенная частота колебания равна производной от фазы по времени

$$\omega(t) = \omega + m\omega\tau_0\Omega \sin \Omega t = \omega(1 + m\Omega\tau_0 \sin \Omega t).$$

С учетом разложения $\dot{K}(j\omega)$ в ряд Фурье спектр колебания на выходе четырёхполосника будет содержать частоты ω и $\omega \pm i\Omega$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Амплитуды составляющих спектра зависят от параметра $M = m\omega\tau_0$, который имеет смысл индекса модуляции при УМ.

Другой вид параметрической цепи - колебательный контур с периодически изменяющейся ёмкостью. Дифференциальное уравнение, описывающее колебательный контур из элементов с постоянными параметрами

$$C \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = f(t).$$

Для параметрической цепи это уравнение будет иметь вид

$$C(t) \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C(t)} \int idt + r(t)i = f(t). \quad (4.67)$$

При решении интегродифференциальных уравнений для параметрических цепей удобно перейти к дифференциальному уравнению с переходом от

неизвестной переменной $i(t)$ к заряду $q(t)$: $q(t) = \int i(t) dt$. Тогда уравнение (4.67) примет вид

$$L(t) \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \left[r(t) + \frac{dL(t)}{dt} \right] \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C(t)} q(t) = f(t). \quad (4.68)$$

Так как переменной является только ёмкость C , а L и r постоянные, то (4.68) можно записать

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + r \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q}{C(t)} = f(t). \quad (4.69)$$

Приведем (4.69) к канонической форме поэтапно. Сначала введем значение переменной емкости

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + m \cos \Omega t}.$$

Разделим (4.69) на L , введем коэффициент затухания $\alpha = \frac{r}{2L}$ и резонансную частоту при отсутствии параметрического воздействия

$$\omega_p = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_0}} \quad \text{при } m = 0.$$

Получим неоднородное уравнение

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(1 + m \cos \Omega t)}{LC_0} = \frac{1}{L} f(t),$$

или

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(1 + m \cos \Omega t)}{LC_0} = \frac{1}{L} f(t). \quad (4.70)$$

Сделаем подстановку

$$q = ye^{-\alpha t},$$

которая предназначена для исключения из (4.70) производной от q .

Тогда первая производная от q равна

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dy}{dt} e^{-\alpha t} - \alpha y e^{-\alpha t} = \left(\frac{dy}{dt} - \alpha y \right) e^{-\alpha t}. \quad (4.71)$$

Вторая производная от q равна:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-\alpha t} - 2\alpha \frac{dy}{dt} e^{-\alpha t} + \alpha^2 y e^{-\alpha t} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\alpha \frac{dy}{dt} + \alpha^2 y \right) e^{-\alpha t}. \quad (4.72)$$

Подставим (4.71) и (4.72) в (4.70)

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\alpha \frac{dy}{dt} + \alpha^2 y \right) e^{-\alpha t} + 2\alpha \left(\frac{dy}{dt} - \alpha y \right) e^{-\alpha t} + \omega_0^2 (1 + m \cos \Omega t) y e^{-\alpha t} = \frac{f(t)}{L}. \quad (4.73)$$

Далее после сокращения одинаковых противоположных по знаку членов получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \alpha^2 y + \left[\omega_0^2 + \omega_0^2 m \cos \Omega t \right] y = \frac{f(t)}{L e^{-\alpha t}},$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \alpha^2 \right) y + y \omega_0^2 m \cos \Omega t = \frac{f(t) e^{\alpha t}}{L}. \quad (4.74)$$

В (4.74) $\omega_0^2 - \alpha^2 = \omega_{\text{св}}^2$ есть квадрат собственной частоты контура в отсутствие модуляции емкости; $\alpha = \frac{r}{2L} = \frac{1}{\tau_k} = \frac{\omega_p}{2Q}$ - затухание; τ_k - постоянная времени контура.

Введем понятие безразмерного времени $T = \frac{\Omega t}{2}$. Для удобства дальнейшего решения обозначим $\delta = \frac{4\omega_{\text{св}}^2}{\Omega^2}$, $\varepsilon = \frac{2m\omega_0^2}{\Omega^2}$. В результате неоднородное уравнение (4.74) примет вид

$$y'' + [\delta + \varepsilon \cos 2T] y = \frac{4}{\Omega^2 L} \exp\left(\frac{2\alpha T}{\Omega}\right) f\left(\frac{2T}{\Omega}\right). \quad (4.75)$$

Если сигнал на входе отсутствует: $f(t) = f\left(\frac{2T}{\Omega}\right) = 0$, то (4.75) переходит в уравнение Матье, теория которого хорошо разработана [15]

$$y'' + [\delta + \varepsilon \cos 2T] y = 0. \quad (4.76)$$

Общее решение уравнения (4.76) имеет вид

$$y = A e^{\mu t} \varphi_1(T) + B e^{-\mu t} \varphi_2(T), \quad (4.77)$$

где A и B - некоторые постоянные; $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - периодические функции с периодом π или 2π (т.е. $\frac{\Omega t_0}{2} = \pi \Rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$); μ - показатель, зависящий от δ и ε .

Перейдем от величины y к заряду q и от безразмерного времени T к t

$$q = y e^{-\alpha t} \Rightarrow A e^{\left(\frac{\Omega}{2}\mu - \alpha\right)t} \varphi_1\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + B e^{-\left(\frac{\Omega}{2}\mu + \alpha\right)t} \varphi_2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (4.78)$$

Из (4.78) следует, что если $|\mu(\varepsilon, \delta)| > \frac{2\alpha}{\Omega}$, то одно из слагаемых неограниченно возрастает с ростом t . Это означает, что решение уравнения (4.78) неустойчиво. Такая цепь может работать и как усилитель (при $|\mu| < \frac{2\alpha}{\Omega}$) и как генератор (при $|\mu| > \frac{2\alpha}{\Omega}$). Точное вычисление величины μ требует сложных вычислений и графоаналитических построений [4, 15, 18].

Таким образом ясно, что для возбуждения колебаний требуется, чтобы частота Ω изменения емкости была определенным образом связана с частотой

той собственных колебаний $\omega_{св}$ контура, а глубина модуляции емкости m – с затуханием контура. Для решения задачи параметрического усиления основное значение имеет характер воздействия внешнего сигнала на изначально устойчивую систему.

4.5. Воздействие гармонических сигналов на параметрические системы со случайными характеристиками

Исследование статистических характеристик сигналов на выходе линейных систем со случайно изменяющимися параметрами – одно из основных направлений при создании и анализе специальных сигналов [4].

Рассмотрим два типовых примера воздействия гармонических сигналов.

1. Случайная амплитудная модуляция

На вход цепи (рис. 4.16) подается сигнал $S(t) = U_0 \cos \omega_0 t$ – гармоническое колебание с амплитудой U_0 и частотой ω_0 . Случайная функция $x(t)$, описывающая коэффициент передачи модулятора, принадлежит ансамблю реализаций стационарного случайного процесса $X(t)$. Будем считать, что заданными (априорно известными) являются математическое ожидание m_x и функция корреляции $R_x(\tau)$ модулятора.

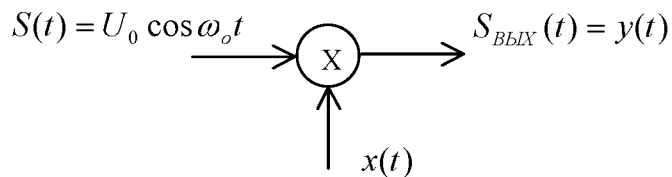


Рис. 4.16. Упрощенная схема случайного амплитудного модулятора

Исследование цепи проведем с помощью корреляционного метода, суть которого заключается в получении корреляционной функции и дисперсии выходного сигнала.

Выходной сигнал модулятора $S_{БЫХ}(t) = y(t)$ является реализацией случайного процесса $Y(t)$ и описывается выражением

$$y(t) = x(t) \cdot U_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (4.79)$$

Математическое ожидание такого гармонического колебания $m_y = \bar{y} = 0$, так как независимо от величины математического ожидания ($m_x = 0$ или $m_x \neq 0$) усреднение функции $\cos \omega_0 t$ дает нулевое значение.

Функция корреляции выходного сигнала имеет вид

$$R_y(\tau) = \overline{y(t) \cdot y(t + \tau)} = U_0^2 \overline{x(t) \cdot x(t + \tau) \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 (t + \tau)}. \quad (4.80)$$

Распишем в (4.80) произведение косинусов через сумму косинусов

$$\cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 (t - \tau) = \frac{1}{2} [\cos \omega_0 (2t + \tau) + \cos \omega_0 \tau].$$

После усреднения по времени правая часть последнего выражения приобретает вид

$$\frac{1}{2} \overline{\underbrace{\cos \omega_0 (2t + \tau) + \cos \omega_0 \tau}_0} = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau.$$

В результате усреднения получим окончательное выражение для функции корреляции

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} U_0^2 \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} \cos \omega_0 \tau. \quad (4.81)$$

Следует отметить, что находящееся под знаком усреднения произведение является ковариационным моментом случайного процесса $X(t)$

$$K_x(\tau) = M[x(t) \cdot x(t + \tau)] = R_x(\tau) + m_x^2, \quad (4.82)$$

в котором величины $R_x(\tau)$ и m_x^2 априори известны.

Из (4.81) и (4.82) получаем окончательное выражение, связывающее функции корреляции выходного сигнала $y(t)$ и случайного коэффициента передачи:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} U_0^2 [R_x(\tau) + m_x^2] \cos \omega_0 \tau. \quad (4.83)$$

Дисперсия выходного случайного процесса:

$$\sigma_y^2(\tau) = R_y(0) = \frac{1}{2} U_0^2 [\sigma_x^2 + m_x^2]. \quad (4.84)$$

Анализ выражения (4.83) показывает, что если реализации $X(t)$ изменяются существенно медленнее сигнала $s(t)$ ($\Omega_x \ll \omega_0$), то выходное колебание является реализацией узкополосного случайного процесса. Особенность корреляционной функции выходного сигнала заключается в том, что если математическое ожидание $m_x \neq 0$, то при интервале корреляции $\tau \rightarrow \infty$ $R_y(\tau) \neq 0$.

Спектр мощности процесса $Y(t)$, т.е. спектральную плотность мощности можно определить в соответствии с теоремой Винера – Хинчина по формуле [18]:

$$\begin{aligned} W_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} U_0^2 \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} U_0^2 m_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.85)$$

После преобразований формула (4.85) примет вид

$$W_y(\omega) = \frac{1}{2} U_0^2 \sigma_x^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) \cos(\omega_0 + \omega) \tau d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) \cos(\omega_0 - \omega) \tau d\tau \right] + \frac{1}{2} U_0^2 m_x^2 \pi [\delta(\omega_0 + \omega) + \delta(\omega_0 - \omega)] , \quad (4.86)$$

где $r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}$ - коэффициент корреляции функции случайной модуляции.

ляции.

Примерный вид графиков функции корреляции и спектральной плотности мощности выходного процесса, описываемых соответственно формулами (4.83) и (4.86), показан на рис. 4.17.

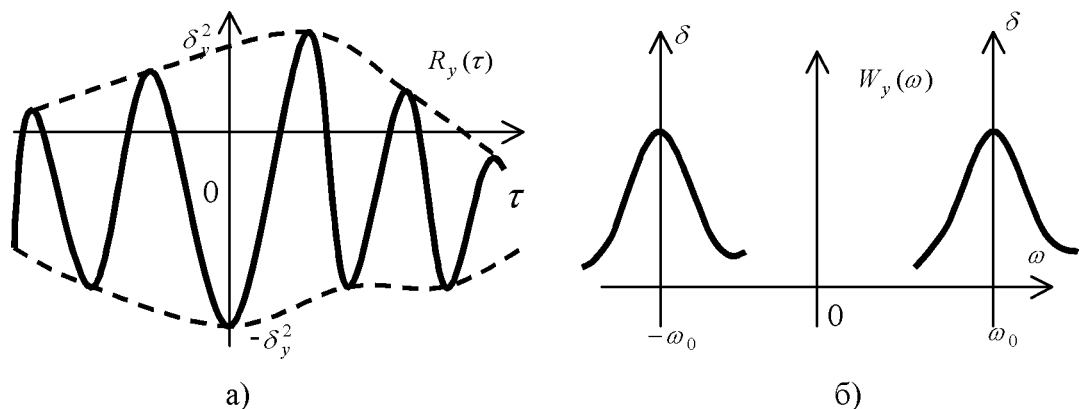


Рис. 4.17. Примерные виды графиков функций $R_y(\tau)$ (а) и $W_y(\omega)$ (б) при случайной амплитудной модуляции

На выходе случайного амплитудного модулятора присутствуют две спектральные компоненты

- непрерывная, обусловленная случайными флуктуациями амплитуды.
- дискретная, которая соответствует прохождению на выход немодулированного несущего колебания.

Дискретной компоненте спектра соответствуют δ -функции на частотах $\pm\omega_0$. Чем больше отношение $\frac{m_x}{\sigma_x}$, тем значительнее доля дискретной составляющей.

Если $X(t)$ - случайный процесс, то, как проиллюстрировано на рис. 4.18, огибающая узкополосного процесса на выходе параметрической цепи с шумоподобным коэффициентом передачи $x(t)$ есть результат нелинейного безинерционного преобразования случайного процесса $X(t)$: $U_y(t) = |U_0 x(t)|$.

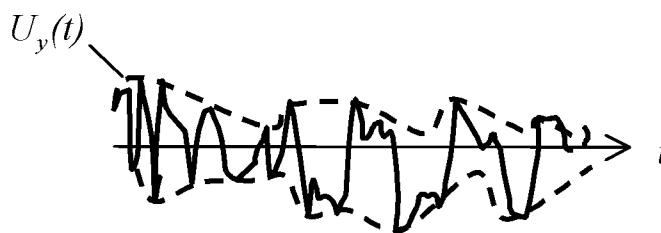


Рис. 4.18. Форма сигнала на выходе случайного амплитудного модулятора

2. Случайная угловая модуляция

В результате флуктуации передаточной функции модулятора возникает выходной сигнал

$$y(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + x(t)]. \quad (4.87)$$

Формула (4.87) соответствует модуляции фазы сигнала $s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ по случайному закону.

Корреляционная функция выходного сигнала

$$R_y(\tau) = U_0^2 M \{ \cos[\omega_0 t + x(t)] \cos[\omega_0(t + \tau) + x(t + \tau)] \}$$

после преобразования сводится к сумме слагаемых под знаком момента усреднения

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} U_0^2 M \{ \cos[2\omega_0 t + \omega_0 \tau + x(t) + x(t + \tau)] + \cos[\omega_0 \tau + x(t + \tau) - x(t)] \}. \quad (4.88)$$

Первое слагаемое в (4.88) имеет в аргументе $\omega_0 t$, что соответствует косинусу четной функции. В результате усреднения это слагаемое обращается в ноль. С учетом второго слагаемого окончательно получаем

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} U_0^2 \overline{\cos[\omega_0 \tau + x(t + \tau) - x(t)]} = \frac{1}{2} U_0^2 \overline{\cos[x(t + \tau) - x(t)]} \cos \omega_0 \tau - \frac{1}{2} U_0^2 \overline{\sin[x(t + \tau) - x(t)]} \sin \omega_0 \tau. \quad (4.89)$$

Если $\tau \rightarrow 0$, то $\lim_{\tau \rightarrow 0} \overline{\cos(x(t + \tau) - x(t))} = 1$, а $\lim_{\tau \rightarrow 0} \overline{\sin(x(t + \tau) - x(t))} = 0$.

Дисперсия сигнала $R_y(0) = \frac{U_0^2}{2} = \sigma_y^2$ т.е. дисперсия шума на выходе равна мощности гармонического сигнала на входе модулятора.

По аналогии с предыдущим примером можно сделать вывод: если случайный процесс $X(t)$, описывающий коэффициент передачи модулятора, образован медленными реализациями ($\Omega_x \ll \omega_0$), то сигнал на выходе модулятора – узкополосный случайный процесс с центральной частотой ω_0 .

При этом если случайный процесс $X(t)$ является гауссовским, то справедлива следующая формула, которая выводится из выражения (4.89)

$$R_y(\tau) = \frac{U_0^2}{2} \cdot \exp\left\{-\sigma_x^2[1 - r_x(\tau)]\right\} \cos \omega_0 \tau. \quad (4.90)$$

Энергетический спектр такого сигнала повторяет спектр сигнала со случайной амплитудной модуляцией, описываемый формулой (4.85).

При дисперсии входного сигнала $\sigma_x^2 \gg 1$ выходной сигнал со случайной угловой модуляцией становится широкополосным, а дискретная составляющая спектра исчезает. Непрерывная составляющая энергетического спектра вблизи центральной частоты ω_0 описывается гауссовской функцией

$$W_y(\omega) = \frac{U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sigma_x \sqrt{-r_x''(0)}} \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_x^2[-r_x''(0)]}\right\}, \quad (4.91)$$

где σ_x - среднеквадратическое отклонение входного сигнала; $r_x''(0)$ - вторая производная от коэффициента корреляции при $\tau = 0$, соответствует скорости изменения функции модуляции.

Эффективная ширина спектра выходного сигнала равна [4]

$$\Delta\omega_{\text{эф}} = \sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{-r_x''(0)}. \quad (4.92)$$

4.6. Прохождение случайных сигналов через нелинейные цепи

1. Передаточная характеристика нелинейной цепи

Основные радиотехнические преобразования при формировании сигналов специальной формы осуществляются посредством нелинейных сигналов, а также линейных систем с переменными параметрами. Однако даже линейные периодические системы часто реализуются с помощью нелинейных элементов (полупроводниковых диодов, усилителей и т.д.), которые работают в существенно нелинейном режиме.

Для анализа и расчета нелинейных цепей требуется знание их передаточных характеристик, которые часто имеют сложный вид. С целью упрощения анализа прохождения случайных сигналов через нелинейные цепи используется аппроксимация передаточных характеристик рядами элементарных функций. К таким аппроксимантам относятся степенные полиномы, кусочно-линейные функции, тригонометрические ряды и т.д. [18].

Если известна характеристика нелинейного четырехполюсника, то для первичного исследования наиболее часто используются степенные полиномы [4]. В общем виде аппроксимирующий полином записывают в виде

$$i(u) = i(U_0) + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + \dots \quad (4.93)$$

Если нелинейным элементом является транзистор, то величинам i и u в (4.70) можно присвоить следующий физический смысл: i - ток коллектора; u - напряжение между базой и эмиттером. Для вакуумного триода: i - анодный ток, u - напряжение между сеткой и катодом.

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются выражениями и имеют смысл:

$$a_1 = \left(\frac{di}{du} \right) \Big|_{u=U_0} - \text{крутизна вольтамперной характеристики (ВАХ) в точке } u = U_0 ;$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2i}{du^2} \right) \Big|_{u=U_0} - \text{первая производная крутизны ВАХ с коэффициентом } 1/2 \text{ в точке } u = U_0 ;$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3i}{du^3} \right) \Big|_{u=U_0} - \text{вторая производная крутизны ВАХ с коэффициентом } 1/6 \text{ в точке } u = U_0 .$$

Коэффициент передачи с достаточной степенью точности может описываться двумя или тремя членами ряда. Рассмотрим некоторый элемент, в котором, при разложении коэффициента передачи в аппроксимирующий ряд, имеет место только составляющая a_2 (остальные отсутствуют или не учитываются), а входной сигнал состоит из двух гармонических колебаний

$$u_x(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t .$$

На выходе такого элемента с квадратичным характером коэффициента передачи сформируется сигнал

$$U_y(t) = a_2 u^2 = a_2 (U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t)^2 = \frac{a_2}{2} (U_1^2 + U_2^2) + \frac{a_2 U_1^2}{2} \cos 2\omega_1 t + \frac{a_2 U_2^2}{2} \cos 2\omega_2 t + a_2 U_1 U_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] .$$

Слагаемые с частотами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ представляют собой гармоники входных сигналов. Слагаемые с частотами $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$ - комбинационные колебания, возникшие в процессе преобразования.

При более полном составе спектр входного сигнала ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$) на выходе нелинейного элемента, передаточная функция которого при аппроксимации имеет составляющие более высокого порядка, включает гармоники $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, n\omega_1, n\omega_2, n\omega_3, \dots, n\omega_n, n\omega_i \pm m\omega_k$.

Таким образом, при любом сложном периодическом воздействии с частотой ω_0 на выходе нелинейного элемента имеет место также периодический процесс с основной частотой ω_0 и дополнительными гармониками. При подаче на вход нелинейного элемента нескольких колебаний с различными частотами на его выходе за счет взаимодействия гармоник возникают комбинационные частоты. Наличие комбинационных частот является отличительной особенностью нелинейных цепей.

2. Преобразование случайного сигнала в безынерционном нелинейном элементе

К безынерционным нелинейным элементам (БНЭ) относятся такие, в которых при обработке сигналов отсутствуют интегральные (апериодические) процессы, например, высокочастотные диоды и транзисторы в режимах малого сигнала. Для анализа прохождения случайных сигналов через безынерционные нелинейные элементы самым сложным представляется нахождение корреляционной функции [4, 7, 10]. Общих методов анализа преобразования случайных сигналов в таких цепях и устройствах на сегодняшний день не существует. Как правило, разработчики специальной аппаратуры решают конкретные практические задачи.

Одним из путей анализа БНЭ является идеализация характеристик анализируемых элементов и устройств на их основе. Задача ставится в следующем виде. Пусть имеется некоторый нелинейный элемент. На вход поступает случайное колебание $x(t)$ с заданной плотностью вероятности $p(x)$. Требуется найти плотность вероятности $p(y)$ выходной величины $y(t)$. Связь между x и y определяется некоторой нелинейной зависимостью $y = f(x)$.

Если $f(x)$ определяет однозначно соответствие x и y независимо от значений x до момента начала анализа, то

$$p(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \text{ при } p(x) > 0, p(y) > 0. \quad (4.94)$$

Если обратная функция $X = \phi(y)$ неоднозначна, т.е. имеет более одного решения, то

$$p(y) = \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}} + \frac{p(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2}} + \dots +, \quad (4.95)$$

где x_1, x_2, \dots - значения входной величины x , соответствующие выходному значению y .

Будем считать, что устройство из двух нелинейных элементов имеет симметричную характеристику. Это может быть двуканальный детектор из двух диодов с квадратичными характеристиками. Характеристика зависимости детектора $y = ax^2$ показана на рис. 4.19. Входной сигнал – гауссовский случайный процесс.

Производная квадратичной функции

$$\frac{dy}{dx} = 2a_2x.$$

При решении дифференциального уравнения получаются два корня

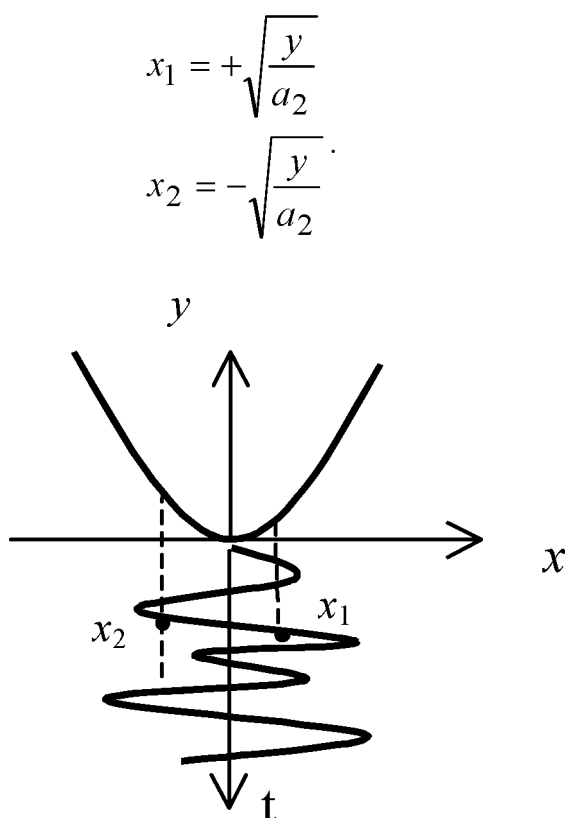


Рис. 4.19. Преобразование случайного сигнала в квадратичном детекторе

Подставив полученные значения в (4.95), находим плотность распределения выходного сигнала

$$p(y) = \begin{cases} \frac{p\left(\sqrt{\frac{y}{a_2}}\right) + p\left(-\sqrt{\frac{y}{a_2}}\right)}{2a_2\sqrt{\frac{y}{a_2}}} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (4.96)$$

Введем значение x , выраженное через y , в уравнение для $p(x)$

$$p(x_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x_{1,2}^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{-y}{2a_2\sigma_x^2}} \quad (4.97)$$

После подстановки (4.97) в (4.962) получим окончательное выражение для плотности распределения выходного сигнала

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{-y}{2a_2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (4.98)$$

График такого распределения, показанный на рис. 4.20, представляет собой убывающую экспоненту. Как отмечалось ранее, анализ нелинейной цепи после получения закона распределения выходной цепи сводится к определению энергетического спектра выходного процесса. Из-за сложности анализа спектра на выходе нелинейного элемента, естественно, применяемым путем остается определение корреляционной функции с последующим преобразованием Фурье.

В соответствии с условиями, на вход нелинейной цепи поступает функция $x(t)$ стационарного случайного процесса. При этом $y = f(x)$ - характеристика нелинейной цепи.

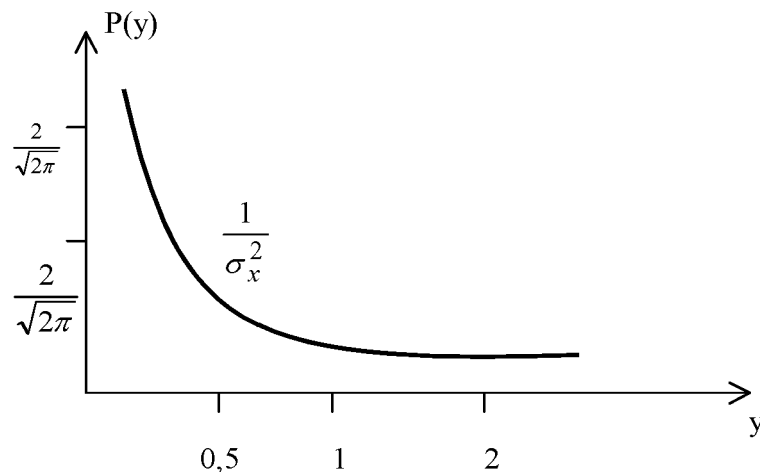


Рис. 4.20. Плотность распределения случайного сигнала на выходе двухканального квадратичного детектора

Ковариационная функция выходного сигнала имеет вид

$$K_y(t) = M[y(t), y(t + \tau)] = M\{f[x(t)]f[x(t + \tau)]\}. \quad (4.99)$$

Для усреднения произведения $f[x(t)] \cdot f[x(t + \tau)]$ необходимо знать двумерную плотность распределения входного процесса $p(x_t, x_{t+\tau})$.

Если эта функция априори известна, то ковариационная функция равна

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)f(x_2)p(x_1, x_2)dx_1dx_2, \quad (4.100)$$

где $x_1 = x(t)$, $x_2 = x(t + \tau)$.

Такой интеграл, как правило, весьма сложен для вычисления, поэтому применяются различные обходные способы. Например, нелинейная цепь, как и в предыдущем примере, характеризуется зависимостью $y = a_2 x^2$.

Двумерная плотность вероятности такого процесса $x(t)$ равна [15]

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}\right\}, \quad (4.101)$$

где $r = r_x(\tau)$ - коэффициент корреляции величин $x_1 = x(t)$, $x_2 = x(t + \tau)$.

Подставим (4.101) в (4.100) и, зная, что $f(x) = y = a_2 x^2$, получим

$$K_y(\tau) = \frac{a_2^2}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2 e^{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{a_2^2}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-r^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 e^{-\frac{2rx_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} dx_2 \right\} dx_1. \quad (4.102)$$

Внутренний интеграл в (4.102) вычисляется путем дополнения квадрата разности $x_2^2 - 2rx_1x_2 = (x_2 - rx_1)^2 - r^2x_1^2$ и заменой переменной $x_2 - rx_1 = z$ (т.е. $x_2 = z + rx_1$).

Тогда выражение в фигурных скобках (4.102) примет вид

$$e^{-\frac{r^2x_1^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} (z^2 + 2rx_1z + r^2x_1^2) e^{-\frac{z^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} dz =$$

$$e^{-\frac{r^2x_1^2}{2\sigma_x^2(1-r^2)}} \left[\sqrt{2\pi}\sigma_x^3(1-r^2)^{\frac{3}{2}} + 0 + \sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-r^2}r^2x_1^2 \right]. \quad (4.103)$$

Подставим (4.103) в (4.102) и получим

$$K_y(\tau) = \frac{a_2^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot \left[\sigma_x^2(1-r^2) \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2}} dx_1 + r^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_1^4 e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2}} dx_1 \right].$$

Окончательное выражение для ковариационной функции имеет вид

$$K_y(\tau) = a_2^2\sigma_x^4 \left[(1-r^2) - 3r^2 \right] = a_2^2\sigma_x^4 + 2a_2^2R_x^2(\tau). \quad (4.104)$$

Если процесс узкополосный, то корреляционную функцию $R_x(\tau)$ входного сигнала можно записать так

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 r_0(\tau) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0\tau \right], \quad (4.105)$$

где $r_0(\tau)$ - огибающая корреляционной функции узкополосного процесса.

Подставим (4.105) в (4.104) и получим

$$K_y(\tau) = a_2^2\sigma_x^4 + a_2^2\sigma_x^4 r_0^2(\tau) + a_2^2\sigma_x^4 r_0^2(\tau) \cos 2\omega_0\tau.$$

Далее применим преобразование Фурье (в соответствии с теоремой Винера - Хинчина) и получим выражение для энергетического спектра

$$\begin{aligned}
W_y(\omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = a_2^2 \sigma_x^4 2\pi\delta(\omega) + a_2^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \\
& + a_2^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) \cos(2\omega_0\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau .
\end{aligned}
\tag{4.106}$$

Слагаемые в выражении (4.106) имеют следующий физический смысл (рис. 4.21)

$a_2^2 \sigma_x^4 2\pi\delta(\omega) = W_{y_0}(\omega)$ - постоянная составляющая выходного колебания;

$a_2^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = W_{y_{\text{НЧ}}}(\omega)$ - низкочастотная флуктуационная составляющая колебания (спектр группируется у частоты $\omega = 0$);

$a_2^2 \sigma_x^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_0^2(\tau) \cos(2\omega_0\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = W_{y_{\text{ВЧ}}}(\omega)$ - высокочастотная флуктуационная составляющая (спектр группируется у частоты $2\omega_0$; ω_0 – центральная частота случайного сигнала $x(t)$).

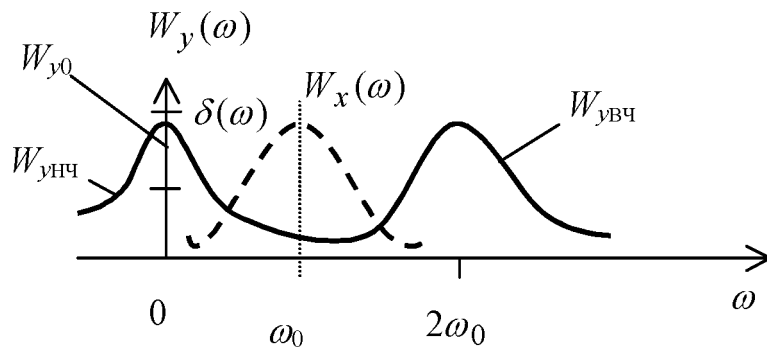


Рис. 4.21. Энергетический спектр случайного сигнала на выходе квадратичного двухканального детектора

Выводы по главе

1. Большинство устройств в радиотехнических системах специального назначения (для постановки шумов) представляет собой сочетание линейных и нелинейных элементов. При анализе цепей стремятся к упрощению, т.е. сведению всех практических задач к анализу линейных систем, в том числе приближенными методами для нелинейных систем.
2. В основе спектрального метода лежит использование передаточной функции $\dot{K}(j\omega)$ цепи, которая представляется в виде четырехполюсника. Спектральная плотность выходного сигнала является произведением частотного коэффициента передачи и спектральной плотности колебания на входе. С целью устранения ограничений при вычислении интеграла (4.1), определяющего выходной сигнал, применяют преобразования Лапласа интегродифференциальных уравнений, описывающих электрические цепи.

3. Сигнал на выходе цепи есть свертка входного сигнала и импульсной характеристики. Выбором постоянной времени цепи определяется ее характеристика как дифференцирующего или интегрирующего звена. Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика цепи связаны парой преобразований Фурье.
4. Исследование линейной цепи формирования шума сводится к определению основных статистических характеристик шума: энергетического спектра и корреляционной функции. Спектральные плотности мощности стационарных случайных процессов на входе и выходе стационарной линейной цепи связаны между собой квадратом модуля частотного коэффициента передачи. Функция корреляции случайного процесса (белого шума) на выходе апериодической цепи имеет экспоненциальный характер. Нормированная корреляционная функция шума на выходе колебательного контура представляет собой экспоненциально затухающее колебание резонансной частоты контура.
5. Прохождение ЧМ сигналов через узкополосный резонансный усилитель сопровождается изменением во времени огибающей, полной фазы и мгновенной частоты сигнала, возникновением нечетных гармоник и паразитной амплитудной модуляции. Задача воздействия ЧМ сигналов на резонансный контур решается методом мгновенной частоты при условии, что частота модуляции намного ниже центральной частоты, а частота девиации меньше или равна полосе пропускания контура. При этом предельные искажения в одностороннем контуре не превышают долей процента.
6. При качании частоты колебаний в широких пределах для анализа применяется метод интеграла наложения, как более простой. При этом достигается «укорочение» записи выражения для любого типа выходного сигнала и импульсной характеристики цепи. При линейном изменении частоты обобщенная расстройка контура пропорциональна времени. При уменьшении скорости изменения частоты огибающая выходного сигнала стремится к резонансной характеристике контура, при увеличении скорости – появляются осцилляции из-за сложения собственных и вынужденных колебаний, происходит смещение и размывание резонансной характеристики контура.
7. В сложных параметрических цепях строгое определение передаточной функции $\dot{K}(j\omega, t)$ является трудоемкой задачей, поэтому для каждого конкретного случая применяют различные методы упрощения, исходя из медленности изменения $\dot{K}(j\omega, t)$ и особенностей структуры цепи. Кроме того, для определения передаточной функции параметрической цепи необходимо знать импульсную характеристику этой цепи.
8. При изменении передаточной функции по любому периодическому закону с основной частотой Ω гармонический входной сигнал с частотой ω после преобразования образует на выходе цепи спектр, содержащий частоты ω , $\omega \pm \Omega$, $\omega \pm 2\Omega$, ..., $\omega \pm i\Omega$ и т.д. Если на вход цепи поступает сложный сигнал в диапазоне $[\omega_1, \omega_2]$, то данное свойство будет иметь место для всех спектральных составляющих в этом диапазоне.

9. Для возбуждения колебаний в параметрической цепи (колебательный контур с переменной емкостью) требуется, чтобы частота Ω изменения емкости была определенным образом связана с частотой собственных колебаний $\omega_{св}$ контура, а глубина модуляции емкости m – с затуханием контура. Для решения задачи параметрического усиления основное значение имеет характер воздействия внешнего сигнала на изначально устойчивую систему.

10. Для анализа воздействия гармонического сигнала на цепь со случайной функцией модуляции применяется корреляционный метод. Если реализации случайного модулирующего процесса изменяются существенно медленнее сигнала ($\Omega_x \ll \omega_0$), то выходное колебание является реализацией узкополосного случайного процесса. На выходе случайного амплитудного модулятора присутствуют две спектральные компоненты: непрерывная, обусловленная случайными флуктуациями амплитуды, и дискретная, которая соответствует прохождению на выход немодулированного несущего колебания. При случайной гауссовской угловой модуляции и большой дисперсии выходной сигнал становится широкополосным, а дискретная составляющая спектра исчезает.

11. С целью упрощения анализа прохождения случайных сигналов через нелинейные цепи используется аппроксимация передаточных характеристик рядами элементарных функций, например степенные полиномы (если известна характеристика нелинейного четырехполюсника). При любом сложном периодическом воздействии с частотой ω_0 на выходе нелинейного элемента имеет место также периодический процесс с основной частотой ω_0 и дополнительными гармониками.

12. Одним из путей анализа безынерционных нелинейных элементов является идеализация характеристик анализируемых элементов и устройств на их основе. При этом, например, в квадратичном детекторе определяются имеющие место постоянная, низкочастотная (в районе центральной частоты сигнала) и высокочастотная (в районе удвоенного значения центральной частоты) флуктуационные составляющие выходного колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вакин С.А., Шустов Л.Н. Основы радиоэлектронного противодействия. - М.: Сов. радио, 1968.
2. Палий А.И. Радиоэлектронная борьба. – М.: Воениздат, 1991.
3. Цветнов В.В., Демин В.П., Куприянов А.И. Радиоэлектронная разведка и радиопротиводействие. – М.: Изд-во МАИ, 1998.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 1994.
5. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа, 2002.
6. Назаров Н.В. Кувшинов Б.И., Попов О.В. Теория передач и сигналов, М.: Связь, 1980.
7. Сиберт У.Н. Цепи и сигналы. - М.: Мир, 1988.
8. Френкс Л. Теория сигналов. - М.: Сов. радио, 1974.
9. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2000.
10. Попов В.П. Основы теории цепей. - М.: Высшая школа, 2000.
11. Проектирование передатчиков / В.В. Шахгильдян, В.Б. Козырев и др. – М.: Радио и связь, 2000.
12. Павлов В.Н., Ногин В.Н. Схемотехника аналоговых электронных устройств. – М.: Радио и связь, 1997.
13. Нефедов В.И. Основы радиоэлектроники. – М.: Высшая школа, 2000.
14. Андрушко Л.М., Федоров Н.Д. Электронные и квантовые приборы СВЧ. – М.: Радио и связь, 1981.
15. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
16. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1980.
17. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники - М.: Радио и связь, 1989.
18. Бендат Дж., Пирсол Ф. Измерение и анализ случайных процессов. - М.: Мир, 1974.