ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра высшей математики и информатики

Трусова А.Ю., Сизова Н.А.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ (ЧАСТЬ 1)

практикум для студентов социологического факультета

Самара
Издательство «Универс групп»
2007

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

ББК 22.17
УДК 519.1
Т 78

Рецензент доц. Л.К. Ширяева

Трусова, А.Ю., Сизова, Н.А.

Т 78 Задачи по математике (часть I) : практикум для студентов социологического факультета / А.Ю. Трусова, Н.А. Сизова. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2007. – 124 с.

Данная работа содержит задачи по темам: множества и отношения, графы, матрицы и определители, системы линейных уравнений, векторные пространства, линейные операторы, элементы аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи составлены согласно лекционному курсу, читаемому на социологическом факультете. Материал одного параграфа в основном соответствует одному практическому занятию. Предназначено для студентов 1 курса специальностей социология, социальная психология, социальная политология, может быть использовано студентами вузов, обучающихся по экономическим, управленческим и психологическим специальностям и направлениям.

ББК 22.17
УДК 519.1

ВВЕДЕНИЕ

Социология и примыкающие к ней науки в настоящее время представляют собой обширное поле приложений самых различных математических методов – от статистики до абстрактной алгебры. В своих исследованиях социологи в равной степени отталкиваются как от нужд практического измерения и обработки эмпирических данных, так и от попыток создания формализованных теорий. Все это свидетельствует о необходимости синтеза математики и социологии.

Курс математики, разработанный для социологов, представляет собой синтез «чисто» математических методов и «собственно» социологических подходов. Аппарат дискретной математики все больше используется специалистами социальных наук, занимающихся прикладными исследованиями. В частности, теория графов нашла широкое применение в социальных исследованиях в качестве аппарата для представления структур групп, в качестве графического метода многомерного анализа социологических наблюдений (корреляционные графы), используемого для работы с совокупностью признаков, характеризующих объект социологического исследования. В теории графов развиты алгоритмы, которые используются для вычисления социометрических коэффициентов (индексов).

Социолог, обращаясь к данным типа «государственная статистика», должен освоить приемы, способы работы с разными формами существования этой информации, в том числе в виде матрицы (типа объект-признак). Аналогичные матрицы создаются для данных, полученных в различные моменты времени, относящихся как к объектам, так и их признакам. Анализ таких матриц по вертикали и горизонтали позволяет получать различные параметры и характеристики. В своей профессиональной деятельности социолог сталкивается с самыми различными видами матриц, а именно: матрицей переходных вероятностей, матрицей смежности, матрицей инцидентности, расстояний, достижимостей, корреляции и другими. Кроме того, в современной социологии доказана потенциальная возможность моделей, описываемых системами линейных уравнений, в многомерном анализе социологических данных.

Вопросы моделирования социальных систем предполагают освоение аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой, если: A – множество всех квадратов, B – множество всех прямоугольников, C – множество всех четырёхугольников с прямыми углами, D – множество всех прямоугольников с равными сторонами, F – множество всех ромбов с прямыми углами?

2. Для каждого из слов: сосна, осколок, насос, колос составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные множества?

3. Даны множества A={1,2,3,4,5} и B={2,4,6,8,10}.Являются ли множества равными? Определить пересечение, объединение, разности A\B, B\A и A∆B этих множеств. Одинаковы ли множества A\B и B\A?

4. Даны множества A={1,2,3,4,5,6} и B={3,6,9,12}.Являются ли множества равными? Определить пересечение, объединение, разности A\B, B\A и A∆B этих множеств.

5. По данным промежуткам A=(-7,1] и B=[-3,4] на числовой прямой определить $A\cup B$, $A\cap B$, A\B, B\A и A∆B.

6. Даны множества A={0,1,2,3,4,5,6,7}, B={3,4,5,6,7,8,9}, C={-3,-2, -1,0,1,2,3,4}, D={2,3,4,5,6}. Задайте списком множество $(A\cap B)\cup(C\cap D)$.

7. Изобразить с использованием кругов Эйлера: $(A\cup B)\cup C$; $A\cup(B\cup C)$; $(A\cap B)\cap C$; $A\cap(B\cap C)$; $A\cap(B\cup C)$; $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

8. Чем отличается сумма множеств от обычного сложения чисел?

9. Доказать графически: 1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; 2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; 3) $A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$; 4) $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=A$; 5) $A\cup\left(A\cap B\right)=A$; 6) $A\cap\left(A\cup B\right)=A$.

10. Пусть U={1,2,3,4}, A={1,3,4}, B={2,3}, C={1,4}. Найти: 1) $\overline{A}\cup\overline{B}$; 2) $\overline{A\cap B}$; 3) $A\cap\overline{B}$; 4) $(B\setminus A)\cup C$.

11. Пусть U={1,2,3,4,5,6}, A={1,3,4}, B={1,3,5,6}, C={4,5,6}. Найти: 1) A\C; 2) B\C; 3) C\B; 4) A\B; 5) $\overline{A}\cup B$; 6) $B\cap\overline{A}$; 7) $A\cup C$; 8) $(C\cup A)\setminus(C\cap A)$.

12. Пусть U – множество всех сотрудников некоторой фирмы; A – множество всех сотрудников данной организации старше 35 лет; B – множество

сотрудников, имеющих стаж работы не более 10 лет; C – множество менеджеров фирмы. Каков содержательный смысл каждого из следующих множеств: 1) $\overline{B}$; 2) $\overline{A} \cap B \cap C$; 3) $A \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$; 4) $B \setminus C$; 5) $C \setminus B$; 6) $A \cap \left(B \setminus C\right)$; 7) $\left(A \cap B\right) \setminus C$; 8) $A \setminus B$; 9) $B \setminus \overline{A}$; 10) $\left(A \cap B\right) \cup C$; 11) $A \cap \left(B \cup C\right)$?

13.Пусть A={1,2}, B={2,3}, C={1,3}. Найти: 1) $A \cup B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \setminus \left(B \cup C\right)$; 4) $\left(A \setminus B\right) \cup C$; 5) $(A \cup B) \setminus \left(A \cap B\right)$.

14.Даны два произвольных множества C и D такие, что $C \cap \overline{D} = \varnothing$. Что можно сказать о $C \cap D, C \cup D$?

15.Даны два произвольных множества A и B такие, что $A \cap B = \varnothing$. Что представляют собой A\B и B\A?

16.Коллектив лаборатории состоит из 14 человек, каждый из которых знает хотя бы один из иностранных языков. 10 человек знают английский, 7 – французский, 7 – немецкий, 5 – английский и французский, 4 – английский и немецкий, 3 – французский и немецкий. Сколько человек знают: 1) все три языка; 2) ровно два; 3) ровно один; 4) только английский?

17.80% студентов читают журнал A, 50% – журнал B, 50% – журнал C, 30% – журналы A и B, 20% – журналы B и C, 40% – журналы A и C, 10% – все три журнала. Сколько в процентах студентов: 1) не читают ни одного журнала; 2) читает в точности два журнала; 3) читает не менее двух журналов; 4) читает один или два журнала?

18.Задано множество M={0;2;5;7}. Выпишите все элементы множества M^2.

19.Задано множество M={b; c; d; k}. Постройте таблицу для M^2 и выпишите все элементы множества M^2. Найдите мощность множества M^2.

20.Даны множества A={a, b, c, d} и B={1,2,3}. Задать декартово произведение A×B и B×A. Вычислить мощности | A×B| и | B×A|.

21.Даны множества A_1={a, b} и B_1={1,2,3,5}. Задать декартово произведение A×B и B×A. Вычислить мощности | A×B| и | B×A|.

22.Каждый из 800 студентов обязан посещать хотя бы один из трех спецкурсов: по математике, физике, астрономии. Три спецкурса посещают 10 студентов; по математике и физике – 30; по математике и астрономии – 25; спецкурс только по физике – 80 студентов. Известно также, что спецкурс только по математике посещают 345 студентов, по физике – 145, по астрономии – 100 студентов. Сколько студентов посещают: а) спецкурс только по астрономии; б) посещают два спецкурса?

23.500 студентов посещают три спецкурса. Спецкурс только по математике, только по математике и физике и только по физике и астрономии посещают одинаковое число студентов. Три спецкурса посещают 20 студентов. Спецкурс по математике посещают столько же студентов, сколько спецкурс по физике. Один спецкурс по физике посещают 50 студентов, а спецкурс по астрономии – 250 студентов. Сколько студентов посещают только один спецкурс?

24.Экзамен по математике содержал три задачи: по алгебре, по геометрии и по тригонометрии. Из 750 абитуриентов задачу по алгебре решили 400 абитуриентов, по геометрии – 480, по тригонометрии – 420. Задачи по алгебре или геометрии решили 630 абитуриентов, по геометрии или тригонометрии – 600 абитуриентов, по алгебре или тригонометрии – 620 абитуриентов. 100 абитуриентов не решили ни одной задачи. Сколько абитуриентов решили: а) все задачи; б) только одну задачу?

25.Экзамен по математике содержал три задачи: по алгебре, геометрии и тригонометрии. Из 800 абитуриентов задачу по алгебре решили 250 человек, по алгебре или геометрии – 660 человек, по две задачи решили 400 человек, из них две задачи по алгебре и геометрии решили 150 человек, по алгебре и тригонометрии 50 человек. Ни один абитуриент не решил все задачи; 20 абитуриентов не решили ни одной задачи; только по тригонометрии задачи решили 120 человек. Сколько человек решили: а) только одну задачу; б) задачи по геометрии?

26.На кафедре иностранных языков работает 21 преподаватель, из них 12 преподают английский язык, 11 – немецкий, 9 – французский; 5 преподавателей преподают английский и немецкий языки, 4 – английский и французский, 3 – немецкий и французский. Сколько преподавателей преподают: а) все три языка; б) только два языка?

27.На курсах иностранных языков учатся 600 человек, из них французский изучают 220 человек, английский – 270 человек, слушатели, изучающие английский язык, не изучают немецкий язык; один французский язык изучают 100 человек, один немецкий – 180 человек. Сколько человек изучают: а) по два иностранных языка; б) один иностранный язык?

28.Группа студентов из 25 человек сдала экзаменационную сессию со следующими результатами: 2 человека получили только «отлично», 3 человека получили отличные, хорошие и удовлетворительные оценки; 4 человека только «хорошо»; 3 человека только хорошие и удовлетворительные оценки. Число студентов, сдавших сессию только на «отлично», «хорошо», равно числу студентов, сдавших сессию только на «удовлетворительно». Студентов, получивших только отличные и удовлетворительные оценки, – нет. Сколько студентов: а) не явились на экзамен; б) сдали сессию только на «удовлетворительно»?

29.На курсы иностранных языков зачислены 300 слушателей. Из них французский или английский изучают 250 человек, английский и немецкий – 60 человек, английский и французский – 80 человек; число слушателей, изучающих только французский язык, равно числу слушателей, изучающих только немецкий язык; 70 человек изучают только английский язык. Занятия по французскому и немецкому языкам проводятся единовременно. Сколько слушателей: а) изучают немецкий или французский язык; б) не посещают занятия?

30.Преподаватели кафедры прикладной математики преподают на трех факультетах: механическом, технологическом, экономическом. На технологическом факультете работают 22 преподавателя, на механическом – 23 преподавателя. На механическом и экономическом работает 36 преподавателей, только на технологическом факультете – 10, 2 – на трех факультетах. Пять преподавателей работают только на механическом и экономическом факультетах. Число преподавателей, работающих только на механическом и технологическом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на экономическом и технологическом факультетах. Сколько преподавателей: а) работают на кафедре; б) работает только на одном факультете?

2. ОТНОШЕНИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД ОТНОШЕНИЯМИ

1. На множестве M={1;2;3;5;7;9;11} задается отношение R=«быть не больше». Задайте данное отношение R путем перечисления всех его элементов, таблицей отношения и изобразите граф отношения.

2. На множестве M={2;3;4;5;8;9;10} задается отношение R=«быть не меньше». Задайте данное отношение R путем перечисления всех его элементов, таблицей отношения и изобразите граф отношения.

3. дано множество M={-5;0;2;6;7;9;10}. Нарисуйте граф, соответствую-щий отношению: «быть >» на множестве M; «быть <» на множестве M; «быть≥» на множестве M; «быть ≤» на множестве M.

4. На множестве M={2,4,6} определено отношение R – «быть меньше». Задать характеристическим свойством и списком отношение R, обратное отношение R^{-1} и дополнение $\overline{R}$. Сравнить отношения. Определить их свойства.

5. Пусть R – отношение на множестве натуральных чисел: R={(a, b): a>b} – «быть больше». Выполнить операции:1) $R \cup R$, 2) $R \cap R$, 3) $R \setminus R$, 4) R^{-1}, 5) $\overline{R}$, 6) найти рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания.

6. Пусть на множестве M={1;2;3;4;5;6} определено отношение R=«бытьменьше». Охарактеризовать отношение. Задать отношения R^{-1} и $\overline{R}$. Найти композицию $R \circ R$.

7. Отношение R задано матрицей отношений. Какими свойствами обладает данное отношение? Задайте отношение перечислением пар.

R	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	1	0

Выполнить операции:1) $R \cup R$, 2) $R \cap R$, 3) $R \setminus R$, 4) R^{-1}, 5) $\overline{R}$, 6) найти рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания.

8. Пусть M={1;3;5;7} и отношение $R \subseteq M \times M$. Задать списком отношение R, обратное отношение R^{-1}, дополнение $\overline{R}$, рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания, если: 1) R={(a, b): a≤b}; 2) R={(a, b): a+2=b}; 3) R={(a, b): (a+b)/2∈M}; 4) R={(a, b): (a+b-1)∈M}; 5) R={(a, b):

a-1=b}; 6) R={(a, b): (2a+b)$\in$M}.

9. Пусть отношения R и S определены на M, где M – множество всех людей, следующим образом: R ={(a, b): a является отцом b}, S={(a, b): a дочь b}. Описать следующие отношения: 1) $R^{(2)}$; 2) $S^{(2)}$; 3) $R \circ S$; 4) $S \circ R$; 5) $S \circ R^{-1}$; 6) $R^{-1} \circ S$; 7) $R^{-1} \circ S^{-1}$; 8) $S^{-1} \circ R$; 9) $S^{-1} \circ S^{-1}$; 10) $R^{-1} \circ R^{-1}$.

10.Пусть отношение R задано матрицей отношения. Составить матрицы обратного отношения R^{-1}, дополнения $\overline{R}$, рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания, если:

1)

R	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1
3	1	1	0	0
3	0	1	0	0

; 2)

R	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
3	0	1	0	1

; 3)

R	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	1	0	1

.

11.Пусть R_1 и R_2 – отношения на M={a, b, c, d}, заданные матрицами. Выполнить операции: 1) $R_1 \cup R_2$; 2) $R_1 \cap R_2$; 3) $R_1 \setminus R_2$; 4) $R_2 \setminus R_1$; 5) $R_1 \circ R_2$; 6) $R_2 \circ R_1$; 7) $R^{(2)}{}_1 \circ R_2$; 8) $R^{(2)}{}_2 \circ R^{(2)}{}_1$, если

1)

R_1	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	1	0	1
c	1	1	0	0
d	0	1	0	1

;

R_2	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	1	0	1

; 2)

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	0	1	0
c	0	0	1	1
d	1	0	1	0

;

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

.

12.Дать характеристику отношениям: «быть руководителем», «не быть руководителем».

13.Пусть отношения R_1 и заданны перечислением пар: R_1={(1,1);(1,2); (1,3); (3,3)} и R_2={(1,1);(2,2); (3,3)}. Найти 1) $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$; 2) $R_1 \cup R_2$ и $R_1 \cap R_2$; 3) $R_1 \setminus R_2$; 4) R_1^{-1} и R_2^{-1}; 5) $R_1 \circ R_2$ и $R_2 \circ R_1$; 6) $R_1 \circ R_2^{-1}$.

3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. В классе 30 учеников. Необходимо избрать старосту, профорга и культорга. Сколькими способами можно образовать эту тройку, если одно лицо может занимать только один пост?

2. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

3. Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов?

4. В кружке юных математиков 25 членов. Необходимо избрать председателя, заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту четверку, если одно лицо может занимать только одну должность?

5. Школьная организация (150) членов выбирает 6 делегатов на конференцию. Сколькими способами может быть избрана эта шестёрка?

6. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

7. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 при условии, что цифры могут повторяться?

8. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 7 женщин и 7 мужчин, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

9. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

10.Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1 и 2?

11.Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

12.Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из 10 кандидатов?

13.Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из 10 кандидатов?

14.Есть пятиразрядный цифровой замок. Кодовое устройство замка состоит из 5 вращающихся дисков, каждый из которых имеет шесть цифр от 0 до 5. Только одна комбинация из пяти цифр позволяет открыть замок. Сколько таких комбинаций?

15.Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

16.Сколькими способами можно разделить 6 различных карандашей между тремя детьми?

17.Сколькими способами можно разделить 3 различные конфеты между тремя детьми так, чтобы каждому досталось по одной конфете?

18.Сколько трехзначных чисел, не содержащих рядом стоящих одинаковых цифр, можно составить из девяти цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

19.На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на неё и спуститься вниз? Сколькими, если подъем и спуск осуществляются различными путями?

20.Из города А в город В можно добраться четырьмя дорогами, из В в С ведут две дороги, из С в D – три дороги. Сколькими путями можно добраться 1) из А в С; 2) из В в D; 3) из А в D?

21.Для космического полета необходимо укомплектовать экипаж: командир корабля, первый помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из 25 специалистов, два бортинженера из 20 специалистов и врач – из 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж?

22.Сколькими способами можно составить разведывательную группу из трех офицеров и семи солдат, если всего 10 офицеров и 20 солдат?

23.Сколькими различными способами можно распределить 12 различных предметов между тремя лицами так, чтобы каждый получил по 4 предмета?

24.Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить из цифр от 0 до 7, чтобы в каждом числе была одна 1?

25.Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если использовать 30 букв алфавита.

26.Сколькими способами можно рассадить 5 гостей за круглым столом?

27.На железнодорожной станции имеется 5 путей. Сколькими способами можно расставить на них 3 состава?

28.Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: 1) цифры не повторяются; 2) цифры повторяются?

29.Сколькими способами можно распределить 3 билета среди 20 студентов, если: 1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета; 2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трёх) число билетов; 3) распределяются равноценные билеты на вечер, и каждый студент может получить не более одного билета?

30.Сколько существует способов выстроить 9 человек: 1) в колонну по одному; 2) в колонну по три, в каждой шеренге выстраиваются по росту, и нет людей одинакового роста?

31.В группе 25 человек. Сколькими способами можно 1) выстроить их в одну шеренгу; 2) выстроить их так, чтобы Иванов и Петров не стояли рядом?

32.Сколькими способами можно разложить по трём урнам 12 шариков?

33.Сколько различных машинных слов можно составить, переставляя буквы в словах: 1) «кофеварка»; 2) «отношение»; 3) «Самара»?

34.Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в соревнованиях. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

35.В группе из 16 детей 7 родились в Москве, 4 – в Санкт-Петербурге, 3 – в Киевеи 2 – в Минске. Сколькими способамиможно выбрать из них 4 детей так, чтобы в группе были уроженцы всех 4 городов?

36.Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

37.Надо срочно доставить 6 пакетов разным адресатам. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трёх курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров? (Курьер сам решает, в каком порядке доставлять данные ему письма.)

38.Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что все студенты экзамен сдали (получив отметку 3, 4 или 5)?

39.Трое юношей и две девушки выбирают себе место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие (туда берут лишь мужчин), два магазина, куда берут лишь женщин, и две фирмы, куда требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами они могут распределиться между этими предприятиями?

40.Сколько существует семизначных телефонных номеров, в первых трёх цифрах которых не встречаются цифры 0 и 9?

41.Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков? На сколько больше словарей придётся издать, если число различных языков равно 10?

42.В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нём 12 открыток? Сколькими способами можно купить в нём 8 открыток? Сколькими способами можно купить в нём 8 различных открыток?

43.Назовем два исхода первенства страны по футболу совпадающими в главном, если при этих исходах одно и то же распределение первых трёх мест и не меняется список двух команд, покидающих высшую лигу. Найти число различных в главном исходов первенства, если в нем участвуют 16 команд.

44.Укротитель хищных зверейхочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за друшом. Сколькими способами он может расположить зверей?

45.Сколькими способами можно переставить буквы слова «перемет» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?

46.4 танкиста, 4 летчика и 2 артиллериста хотят сфотографироваться, стоя в один ряд, но так, чтобы представители одного рода войск стояли рядом. Сколькими способоми они могут это сделать?

47.Сколькими способами можно расставить m нулей и n единиц, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

48.На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

4. ГРАФЫ

1. Найдется ли граф с пятью вершинами, у которого одна вершина изолированная, а другая – степени 4?

2. Найдется ли граф с пятью вершинами, степени которых все различны между собой, т.е. равны 0,1,2,3,4?

3. Скольким ребрам принадлежит вершина в полном графе с n вершинами, если n=3; 5; k?

4. Сколько ребер в полном графе с n вершинами, если n=3; 4; 5?

5. Нарисуйте граф с пятью вершинами, у которого ровно две вершины имеют одинаковую степень. Сколько вершин с одинаковыми степенями имеет дополнение графа, если граф имеет в точности 2 вершины с одинаковыми степенями?

6. Существует ли граф с шестью вершинами, степени которых 2, 3, 3, 4, 4, 4?

7. Существует ли полный граф с семью ребрами?

8. Докажите, что в полном графе с n вершинами $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

9. Построить граф G_1 с 5 и G_2 6 вершинами, степени которых равны: а) 4, 3, 3, 2, 2; б) 4, 4, 3, 3, 2, 2. Нарисуйте граф $\bar{G}$, являющийся дополнением графа G.

10. У графа G четыре вершины; A – одна из его вершин; $\bar{G}$ – дополнение графа G. Скольким ребрам принадлежит вершина A в графе $\bar{G}$, если в графе G эта вершина: а) принадлежит одному ребру; б) принадлежит трем ребрам; в) не принадлежит ни одному ребру?

11. Сколько вершин с одинаковыми степенями имеет дополнение графа G, если граф G имеет в точности 2 вершины с одинаковыми степенями?

12. Если в графе с пятью вершинами ровно две вершины имеют одинаковую степень, то могут ли они быть обе изолированными или обе иметь степень 4?

13. В офисе 15 телефонов. Можно ли их соединить между собой так, чтобы каждый был соединен с тремя другими?

14.В государстве 100 городов и из каждого из них выходит по 4 дороги, сколько всего дорог в государстве?

15.Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно по три дороги, быть 100 дорог?

16.На радиостанции каждый радиоузел соединен ровно с 15 другими. Может ли быть число проводов на радиостанции ровно 200?

17.Изобразите простой цикл с шестью вершинами и подсчитайте, сколько у него ребер. Из скольких ребер состоит простой цикл, если у него 10 вершин? 15 вершин? Каково наименьшее число ребер в простом цикле?

18.Сколько ребер в простом пути с b вершинами?

19.Может ли так случиться, что в одной компании из шести человек каждый знаком с двумя и только двумя другими?

20.Нарисуйте граф с шестью вершинами, соответствующий: рефлексивному отношению; антирефлексивному отношению; отношению не рефлексивному и не антирефлексивному.

21.Нарисуйте граф симметричного отношения, заданного на множестве M из шести элементов.

22.Постройте граф, соответствующий отношению делимости xRy «x делит y на отрезке [2, 10].

23.Постройте граф, соответствующий отношению неделимости xRy «x не делит y на отрезке [2, 13].

24.Какое максимальное число висячих вершин может иметь дерево, обладающее 9 вершинами? Какое минимальное число висячих вершин оно может иметь? Сделайте рисунки таких деревьев.

25.Докажите, что лес, состоящий из k деревьев и содержащий b вершин, имеет b-k ребер.

26.Сколько ребер надо удалить из связного графа, имеющего p ребер и b вершин, чтобы получить дерево, содержащее все вершины этого графа?

27.Нарисуйте граф с восемью вершинами, который: а) имеет эйлеров цикл; б) имеет эйлеров путь; в) не имеет ни эйлерова цикла, ни эйлерова пути; г) имеет простой путь, содержащий все ребра графа.

28.Для указанных ниже отношений привести примеры пар, для которых выполняются отношения, и пар, для которых отношения не выполняются: отношения, заданные на множестве элементов структуры, изображенной на рис. 8: R_1 –«быть непосредственно связанным с»; R_2 – «быть начальником»; R_3 – «быть непосредственным начальником».

29.Пусть отношение R –«быть отцом», определенное на множестве людей M={a, b, c, d, e, f, g, h}, представлено схемой рис. 1. Задать списком отношение R, матрицей отношений. Определить (назвать) родственные отношения между следующими парами: (a, b), (a, d), (b, c), (b, d), (b, h), (c, d). Записать пары, удовлетворяющие отношениям: «быть дедом», «быть родным братом или сестрой», «быть двоюродным братом или сестрой», «быть дядей», «быть племянником или племянницей», «быть сыном или дочерью».

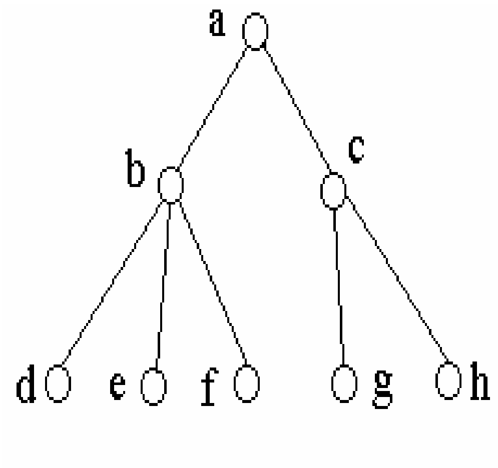

Рис. 1

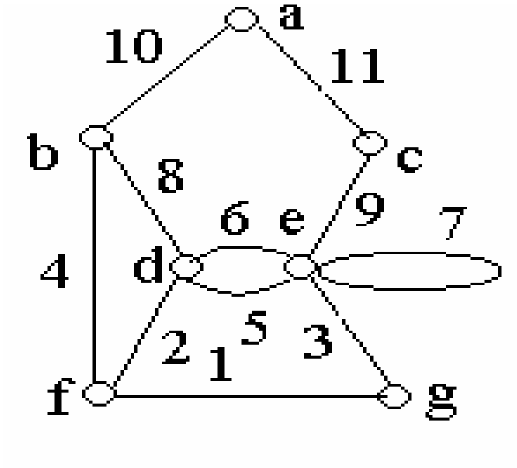

Рис. 2

30.Задать различными способами графы G_1 и G_2, представленные на рис. 2 и 3 соответственно. Вычислить число ребер по матрицам и списку ребер. Как можно перейти от описания графа списком ребер к матрице инцидентности и от матрицы смежности к списку ребер?

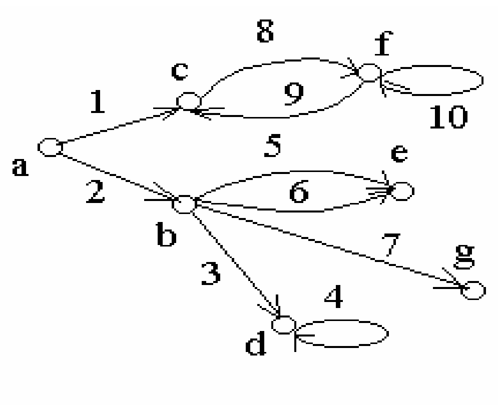

Рис. 3

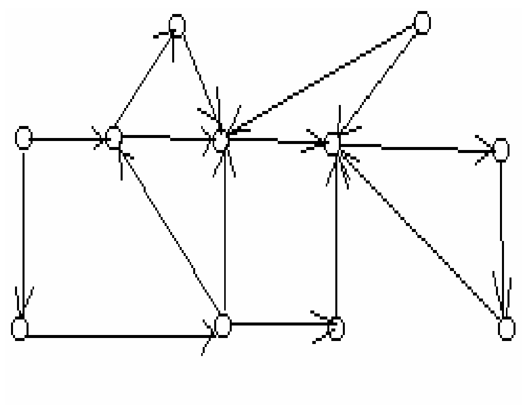

Рис. 4

31.Рассчитать индивидуальные и групповые индексы для вершин графов, изображенных на рис. 4 и 5.

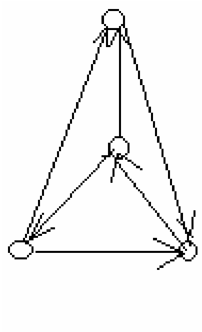
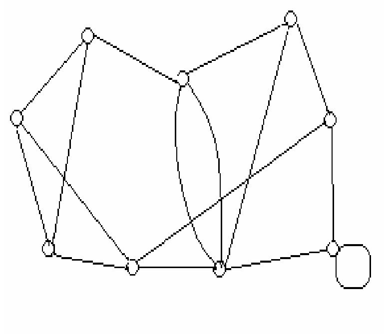
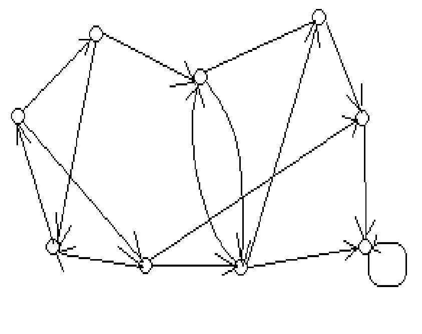

Рис. 5 Рис. 6 Рис. 7

32.По известной матрице смежности составить матрицы инцидентности и циклов:

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	1	0
b	1	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	1	1
d	1	0	1	0	1	1
e	1	0	1	1	0	1
f	0	1	1	1	1	0

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	0	0	1
b	1	0	0	1	1	1
c	1	0	0	1	1	0
d	0	1	1	0	1	1
e	0	1	1	1	0	1
f	1	1	0	1	1	0

33.Для графа, изображенного на рис. 6, 7 составить матрицы инцидентности, смежности, циклов и расстояний.

34.Определить, изоморфны ли графы G_1, G_2, изображенные на рис. 8.

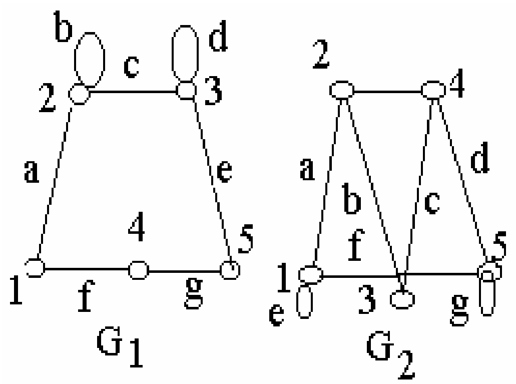

Рис. 8

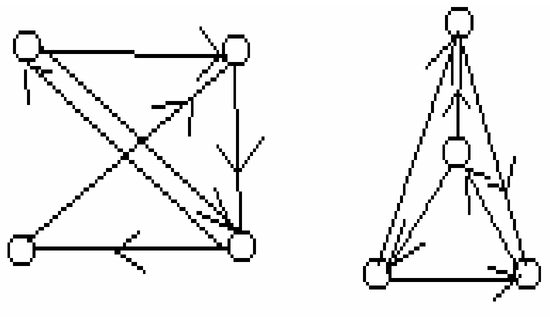

Рис. 9

35.Вычислить контрастатус элементов графов, изображенных на рис. 9.

36.Изоморфны ли графы, изображенные на рис. 10 – 13?

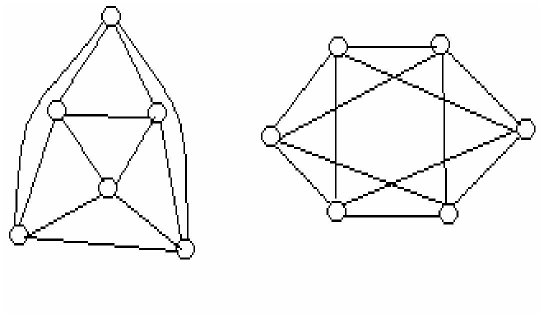

Рис. 10

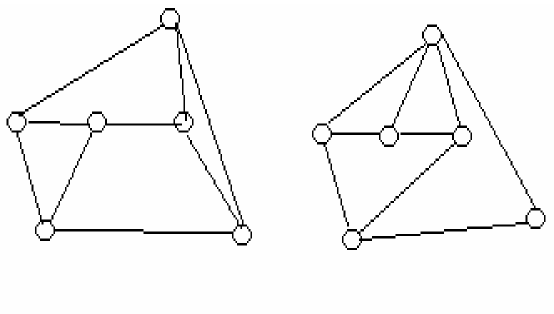

Рис. 11

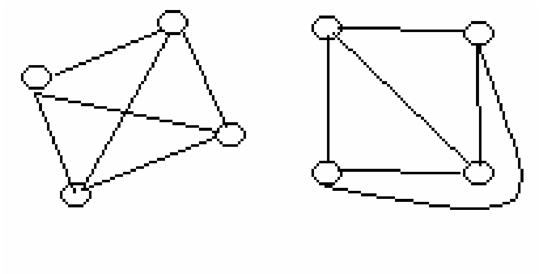

Рис. 12

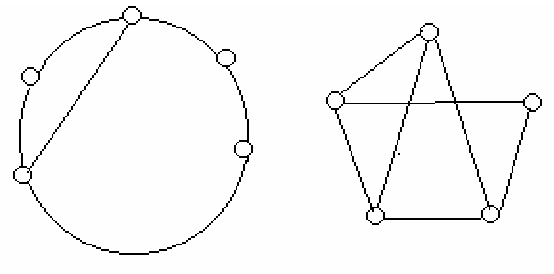

Рис. 13

37.Вычислить статус и контрастатус каждой вершины графа (рис. 14).

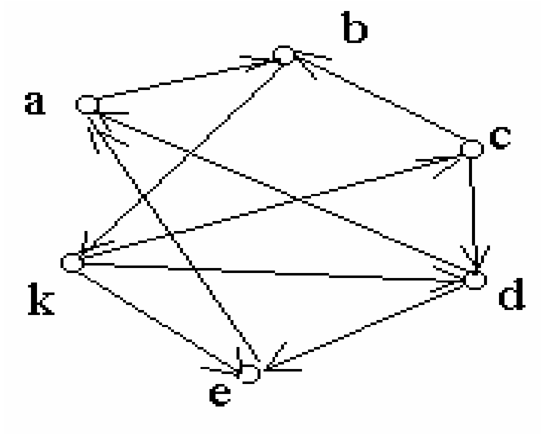

Рис. 14

5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

1. Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

1) «этот человек студент или предприниматель»;
2) «Петров женат на Марье Ивановне или Татьяне Андреевне»;
3) «если при выполнении программы отклонение контролируемых параметров превышает предусмотренные нормы (стандарты), то требуется оперативная корректировка программы или уточнение стандартов».

2. Представить формулами логики высказываний следующие суждения (сложные высказывания):

1) «если темпы роста рынка продукта корпорации высокие и размер контролируемой ею доли рынка также высок, то в соответствии с матрицей портфельного анализа этот продукт относится к категории «звезда»; он дает большой доход, но требует значительных вложений»;
2) «стратегическая хозяйственная единица корпорации занимает сильные позиции на рынке и работает в привлекательной отрасли, следовательно, имеет наиболее высокий приоритет при распределении ресурсов»;
3) «если стратегическая хозяйственная единица корпорации – лидер в непривлекательной (возможно, старой) отрасли, её стратегией может быть максимизация прибыли на уже вложенный капитал, но не вложение нового»;
4) «если при высокой доле рынка темпы роста рынка низкие, то продукт относится к категории «денежного мешка», или «дойной коровы»; он дает большие доходы и характеризуется малыми затратами в связи со стабильностью рынка»;
5) «если прогноз показывает, что можно получить крупную прибыль на выпуске новых товаров, то при разработке стратегии развития фирме следует сделать упор на маркетинг и сеть распределения, а также целесообразно открыть более крупные магазины и расширить торговую сеть»;

6) «в ситуации, где жизненно необходимо расширение фирмы или где ключевые патенты или ключевые ресурсы находятся в руках у других компаний, а данной фирме недостает технических знаний, лучшей стратегией для неё является приобретение (предприятий).

3. Записать логической формулой следующий текст: «Если компьютер при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то она исправна. Если при запуске он выдает ошибку при проверке оперативной памяти, и память установлена правильно, то либо оперативная память дефектна, либо дефектна материнская плата. Тогда если эта оперативная память правильно установлена в другой (контрольный) компьютер, и он при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то оперативная память исправна».

4. Записать логической формулой следующую пословицу: « Не ел – не мог, поел – без ног».

5. К каким схемам рассуждений относятся следующие высказывания:

1) «если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задания. Он отсутствовал на работе. Следовательно, он не выполнил задания»;
2) «Петров женат на Марье Ивановне или Татьяне Андреевне. Он женат на Марье Ивановне. Следовательно, он не женат на Татьяне Андреевне»;
3) «идет дождь или снег. Идет дождь. Следовательно, не идет снег»;
4) «если при выполнении программы отклонение контролируемых параметров превышает предусмотренные нормы (стандарты), то требуется оперативная корректировка программы или уточнение стандартов. Выявленное отклонение превышает стандарты. Следовательно, требуется корректировка программы или уточнение стандартов».

Являются ли данные рассуждения логически правильными?

6. Записать логической формулой следующие умозаключения и уточнить их справедливость:

1) «если фирма ориентирована на усиление маркетинга и сети распределения, то она намерена получить крупную прибыль на выпуске новых товаров. Если фирма предусматривает открытие бо-

лее крупных магазинов и расширение торговой сети, то она намерена получить крупную прибыль на выпуске новых товаров. Фирма предусматривает усиление маркетинга и сети распределения или собирается открыть более крупные магазины и расширить торговую сеть. Следовательно, она намерена получить крупную прибыль на выпуске новых товаров»;

2) «если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возрастет. Следовательно, правительственные расходы возрастут»;

3) «если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей».

7. Известно, что А – «и», В – «л», С – «и». Установите, какие из высказываний истинны, а какие ложны: 1) $A \vee B \vee C$; 2) $A \vee (B \wedge C)$; 3) $A \wedge B \vee C$; 4) $A \wedge (B \vee C)$; 5) $A \wedge B \wedge C$; 6) $(A \vee B) \wedge C$.

8. Выясните, в каких случаях приведенные ниже данные истинны: 1) А – «и», $A \wedge B$ – «л»; 2) А – «и», $A \wedge B$ – «и»; 3) А – «л», $A \wedge B$ – «и»; 4) А – «л», $A \wedge B$ – «л»; 5) А – «и», $A \vee B$ – «и»; 6) А – «и», $A \vee B$ – «л»; 7) А – «л», $A \vee B$ – «и»; 8) А – «л», $A \vee B$ – «л».

9. Выясните, в каких случаях можно установить значение истинности высказывания В: 1) $A \wedge B$ – «и»; 2) $A \vee B$ – «и»; 3) $A \wedge B$ – «л»; 4) $A \vee B$ – «л»; 5) $A \wedge B$ – «л», А – «и»; 6) $A \vee B$ – «л», А – «л».

10. В каких случаях можно определить значение истинности высказывания, исходя из того, что высказывание А – истинно: 1) $A \wedge B$; 2) $\bar{A} \vee B$; 3) $\bar{A} \wedge B$; 4) $A \vee B$; 5) $\overline{A} \vee \overline{B}$; 6) $\overline{A} \wedge \overline{B}$.

11. Доказать: 1) $\left(\left(\left(\neg A\right) \wedge B\right) \vee C\right) = \neg A \wedge B \vee C$; 2) $\neg P \wedge \neg Q = \neg(P \vee Q)$; 3) $\left(\left(A \oplus B\right) \wedge A\right) \Rightarrow \overline{B}$; 4) $\left(\left(A \oplus B\right) \wedge B\right) \Rightarrow \overline{A}$.

12.Установить, к каким схемам логически правильных рассуждений относятся следующие рассуждения:

1) если данный треугольник равносторонний, то он равноугольный. Если данный треугольник не равноугольный, то он не равносторонний;
2) если это вещество фосфор, то оно непосредственно с водородом не соединяется. Если вещество непосредственно с водородом не соединяется, то это вещество не является фосфором;
3) если у меня будут деньги и я буду здорова, то я поеду домой на каникулы. Если у меня были деньги и я не поехала на каникулы домой, то, следовательно, я не была здорова;
4) если ты хочешь наслаждаться искусством, то ты должен быть художественно образованным человеком. Ты хочешь наслаждаться искусством. Ты должен быть художественно образованным человеком;
5) если человек избавлен от физического труда и не приучен к умственному, то им овладевает зверство. Этот человек избавлен от физического труда и не приучен к умственному. Этим человеком овладевает зверство;
6) если река выходит из берегов, то вода заливает прилегающие территории. Вода реки не залила прилегающие территории. Река не вышла из берегов;
7) если человек при виде чужой доблести ярится, то он мерзок. Этот человек не является мерзким. Этот человек при виде чужой доблести не ярится;
8) если бухта замерзла, то суда не могут входить в бухту. Суда не могут входить в бухту. Вероятно, бухта замерзла;
9) если данное тело – графит, то оно электропроводно. Данное тело электропроводно. Вероятно, данное тело графит;
10) данный глагол может стоять или в настоящем, или в прошедшем, или в будущем времени. Данный глагол стоит в настоящем времени. Данный глагол не стоит ни в будущем, ни в прошедшем времени;
11) минеральные удобрения бывают или азотными, или фосфорны-

ми, или калийными. Данное минеральное удобрение не является ни азотным, ни фосфорным. Данное минеральное удобрение является калийным;

12) если плыть Кумой, то надо пробиваться силой, если плыть Волгой, то надо пробиваться силой. Можно плыть Кумой или Волгой. Надо пробиваться силой;

13) если я оставлю танкер в порту до прибытия минёров, то бомба может взорваться и повредить много судов; если я уведу танкер в море, то в случае взрыва пострадает только один танкер. Я могу оставить танкер в порту до прибытия минеров или увести в море. Могут пострадать много судов в порту, или в случае взрыва, пострадает только один танкер;

14) если человек болен сыпным тифом, то на 4 – 6-й день болезни у него будет высокая температура и появится сыпь. У больного нет высокой температуры или сыпи. Этот человек не болен сыпным тифом;

15) если Петров честен, то, не выполнив задания сегодня, он признается в этом, а если Петров добросовестен, то он выполнит задание к следующему разу. Но Петров не признался в том, что он сегодня не выполнил задание, или не сделал его к следующему разу. Петров не честен или не добросовестен.

13.Построить таблицу значений для формулы *F*:

1) $F = \overline{A} \wedge B \Rightarrow A \vee B$; 2) $F = \overline{A \Rightarrow B} \vee B \Rightarrow A$;

3) $F = (D \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow D) \Rightarrow \overline{D} \vee \overline{B}$; 4) $F = \left(A \vee B\right) \Rightarrow \overline{C}$; 5) $F = D \Leftrightarrow (B \wedge \overline{C})$;

6) $F = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C \Rightarrow B \wedge C)$; 7) $F = \overline{A} \vee (A \wedge B) \vee (\overline{\overline{A} \vee C})$;

8) $F = \overline{A} \vee B \Leftrightarrow D \wedge \overline{C}$; 9) $F = (\overline{A} \vee C) \wedge (B \Rightarrow (D \Rightarrow A))$.

14.Упростить формулы:

1) $\overline{X} \wedge Y \vee \overline{X \vee Y} \vee X$; 2) $(X \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Y)$;

3) $X \vee \overline{Y \wedge \overline{Z}} \vee \overline{\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}}$; 4) $(A \Rightarrow B) \wedge (\overline{A \vee B})$; 5) $(\overline{A \Rightarrow B}) \wedge (B \Rightarrow \overline{A})$;

6) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$;

7) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A \vee B \vee C})$.

6. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Выполните действия с матрицами:

1) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; 2) $(-4) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -5 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

18) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; 19) $2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

20) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \right)^{\mathrm{T}}$;

21) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители, разложив их по элементам строки

(столбца), содержащей буквы:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$.

4. Найти обратную матрицу к данным матрицам:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$;

7) $G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

7) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Найти ранг следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Решить системы уравнений по формулам Крамера:

$$1)\ \begin{cases} 2\cdot x_1-3\cdot x_2+x_3=-5 \\ -x_1+2\cdot x_2-3\cdot x_3=-4 \\ 3\cdot x_1-x_2+2\cdot x_3=1 \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} 2\cdot x_1-4\cdot x_2+9\cdot x_3=28 \\ 7\cdot x_1+3\cdot x_2-6\cdot x_3=-1 \\ 7\cdot x_1+9\cdot x_2-9\cdot x_3=5 \end{cases};$$

$$3)\ \begin{cases} 3\cdot x_1-x_2+2\cdot x_3=1 \\ -4\cdot x_1+5\cdot x_2=-6 \\ 6\cdot x_1-3\cdot x_2+2\cdot x_3=2 \end{cases};\quad 4)\ \begin{cases} x_1+x_3=4 \\ -3\cdot x_1+2\cdot x_2+4\cdot x_3=-1 \\ -4\cdot x_1+x_2-8\cdot x_3=-18 \end{cases};$$

$$5)\ \begin{cases} 2\cdot x_1-3\cdot x_2+x_3=2 \\ 3\cdot x_1-5\cdot x_2+5\cdot x_3=3 \\ 5\cdot x_1-8\cdot x_2+6\cdot x_3=5 \end{cases};\quad 6)\ \begin{cases} 3\cdot x_1-x_2+2\cdot x_3=5 \\ 2\cdot x_1-x_2-x_3=2 \\ 4\cdot x_1-2\cdot x_2-2\cdot x_3=-3 \end{cases}.$$

2. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы:

$$1)\ \begin{cases} 6x_1-3x_2+x_3=-5 \\ x_1+x_2-x_3=6 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-5 \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} x_1-2x_3=-4 \\ -2x_1+x_2+3x_3=6 \\ 3x_1-x_2+x_3=8 \end{cases};\quad 3)\ \begin{cases} x_1-4x_2+x_3=-4 \\ -2x_1+3x_2+x_3=19 \\ x_2-x_3=-5 \end{cases};$$

$$4)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-7x_3=11 \\ x_1+3x_2+4x_3=-2 \\ -x_1+x_2+3x_3=-5 \end{cases};\quad 5)\ \begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-2 \\ x_1-x_2+6x_3=-10 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases};\quad 6)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=9 \\ x_1+2x_2-3x_3=14 \\ 3x_1+4x_2+x_3=16 \end{cases}.$$

3. Решить системы методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 5x_1-2x_2+x_3-2x_4=13 \\ 8x_1+x_2-x_4=18 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=-6 \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases};$$

$$3)\ \begin{cases} -3x_1+x_2+4x_3-7x_4=-3 \\ 2x_1-x_2+x_3=-2 \\ x_1+2x_3+3x_4=-2 \\ x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases};\quad 4)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_4=9 \\ -x_2+x_3+2x_4=-7 \\ -x_1+3x_2+2x_3+x_4=6 \\ 5x_1+4x_2+x_3=17 \end{cases};$$

5) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6 \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4=6 \\ 3x_1+8x_2+2x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$.

4. Исследовать системы уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли и в случае их совместности найти решение:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=-3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=8 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=6 \\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_4=3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1 \\ x_1-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=6 \\ x_1-2x_2-4x_4=-6 \\ x_2+x_3+3x_4=16 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=6 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=1 \\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4-9x_5=4 \\ -x_1+x_2+x_3-4x_4-2x_5=4 \\ -3x_1+2x_3+2x_5=2 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} -x_1+3x_2-8x_3+x_4+3x_5=3 \\ x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=1 \\ -3x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=-1 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4-5x_5+4x_6=4 \\ -3x_1-5x_2+8x_3+4x_4+x_5+x_6=6 \\ -x_1-7x_2+14x_3+8x_4-9x_5+9x_6=9 \\ 7x_1+x_2+4x_3+4x_4-21x_5+15x_6=15 \end{cases}$;

10) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4-2x_5+4x_6=-3 \\ 3x_1-x_2+5x_3-2x_4+x_5+6x_6=10 \\ -x_1+2x_2-6x_3+5x_4-3x_5-2x_6=-8 \\ 10x_1+8x_3+2x_4-2x_5+20x_6=14 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 8x_5 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 13x_5 = -6 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$;

12) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 + 2x_6 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_5 - x_6 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 13x_5 - 3x_6 = 20 \end{cases}$;

13) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$.

5. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_5 = 0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$.

8. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

1) $\mathbf{e}_1=(1,2,3)$; $\mathbf{e}_2=(3,6,7)$.

2) $\mathbf{e}_1=(4,-2,6)$; $\mathbf{e}_2=(6,-3,9)$.

3) $\mathbf{e}_1=(2,-3,1)$; $\mathbf{e}_2=(3,-1,5)$; $\mathbf{e}_3=(1,-4,3)$.

4) $\mathbf{e}_1=(5,4,3)$; $\mathbf{e}_2=(3,3,2)$; $\mathbf{e}_3=(8,1,3)$.

5) $\mathbf{e}_1=(4,-5,2,6)$; $\mathbf{e}_2=(2,-2,1,3)$; $\mathbf{e}_3=(6,-3,3,9)$; $\mathbf{e}_4=(4,-1,5,6)$.

6) $\mathbf{e}_1=(1,0,0,2,5)$; $\mathbf{e}_2=(0,1,0,3,4)$; $\mathbf{e}_3=(0,0,1,4,7)$; $\mathbf{e}_4=(2,-3,4,11,12)$

7) $\mathbf{e}_1=(2,4,6,1)$; $\mathbf{e}_2=(2,6,0,1)$; $\mathbf{e}_3=(1,2,3,0)$.

8) $\mathbf{e}_1=(3,4,3,4,1)$; $\mathbf{e}_2=(2,3,2,3,1)$; $\mathbf{e}_3=(1,2,3,4,1)$.

9) $\mathbf{e}_1=(6,2,-1,3)$; $\mathbf{e}_2=(1,3,2,-1)$; $\mathbf{e}_3=(8,11,2,0)$.

10) $\mathbf{e}_1=(0,4,0,-1)$; $\mathbf{e}_2=(1,0,3,2)$; $\mathbf{e}_3=(6,2,2,1)$; $\mathbf{e}_4=(3,1,1,7)$.

11) $\mathbf{e}_1=(3,0,6)$; $\mathbf{e}_2=(1,1,4)$; $\mathbf{e}_3=(0,-1,5)$; $\mathbf{e}_4=(-2,7,11)$.

12) $\mathbf{e}_1=(1,0,3,8,11)$; $\mathbf{e}_2=(2,-4,3,1,0)$; $\mathbf{e}_3=(4,0,2,5,-3)$; $\mathbf{e}_4=(4,-8,6,2,0)$.

2. Показать, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют базис трехмерного пространства, и разложить вектор $\mathbf{x}$ по этому базису:

1) $\mathbf{e}_1=(4,3,7)$; $\mathbf{e}_2=(-2,1,-1)$; $\mathbf{e}_3=(1,-1,3)$; $\mathbf{x}=(16,23,33)$.

2) $\mathbf{e}_1=(3,-1,2)$; $\mathbf{e}_2=(1,2,3)$; $\mathbf{e}_3=(-1,4,-2)$; $\mathbf{x}=(10,10,5)$.

3) $\mathbf{e}_1=(-1,2,1)$; $\mathbf{e}_2=(6,1,2)$; $\mathbf{e}_3=(3,-1,1)$; $\mathbf{x}=(8,2,4)$.

4) $\mathbf{e}_1=(-2,1,3)$; $\mathbf{e}_2=(1,-3,2)$; $\mathbf{e}_3=(3,1,2)$; $\mathbf{x}=(9,3,16)$.

5) $\mathbf{e}_1=(-7,4,1)$; $\mathbf{e}_2=(1,-1,5)$; $\mathbf{e}_3=(2,3,10)$; $\mathbf{x}=(21,0,33)$.

6) $\mathbf{e}_1=(3,4,3)$; $\mathbf{e}_2=(1,2,-6)$; $\mathbf{e}_3=(0,1,3)$; $\mathbf{x}=(7,13,9)$.

3. Показать, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ образуют базис четырехмерного пространства и разложить вектор $\mathbf{x}$ по этому базису:

1) $\mathbf{e}_1=(2,1,2,1)$; $\mathbf{e}_2=(5,2,2,4)$; $\mathbf{e}_3=(11,5,3,3)$; $\mathbf{e}_4=(3,1,1,1)$; $\mathbf{x}=(2,1,-3,-3)$.

2) $\mathbf{e}_1=(7,1,3,5)$; $\mathbf{e}_2=(5,7,1,3)$; $\mathbf{e}_3=(3,5,7,1)$; $\mathbf{e}_4=(1,3,5,7)$; $\mathbf{x}=(12,0,4,16)$.

3) $\mathbf{e}_1=(1,1,2,1)$; $\mathbf{e}_2=(-1,1,7,-3)$; $\mathbf{e}_3=(-3,-2,0,1)$; $\mathbf{e}_4=(2,0,5,0)$; $\mathbf{x}=(-4,1,-4,4)$.

4. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом, и найти связь координат одного и того же вектора в этих двух базисах:

1) s=((1,2,1), (2,3,3), (3,7,1)), s'=((3,1,4), (5,2,1), (1,1,-6)); 2) s=((1,2,1), (2,3,3), (3,8,2)), s'=((3,5,8), (5,14,13), (1,9,2)); 3) s=((1,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,3,2,3), s'=((1,0,3,3), (-2,-3,-5,-4), (2,2,5,4), (-2,-3,-4,-4)).

5. Даны векторы $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}=2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c}=\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – базис линейного пространства. Доказать, что векторы **a**, **b**, **c** образуют базис. Найти координаты вектора $\mathbf{d}=2\,\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ в базисе **a**, **b**, **c**.

6. Линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ задан матрицей А. Найти образ $y=\tilde{A}(x)$ для вектора **x**, заданного в том же базисе:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}=4\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2$; 2) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}=3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$; 4) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}=2\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$;

5) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}=-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$.

7. Линейный оператор $\tilde{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ задан матрицей А. Найти матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1^*= -2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2^*=2\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$; 2) $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1^*=\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2^*=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1^*=-3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2^*=2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$;

4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1^*=3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2^*=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3^*=-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3$;

5) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1^*=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2^*=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3^*=3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$.

8. Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного

в некотором базисе матрицей А:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 8\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$; 7) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу перехода, приводящую к диагональному виду матрицу:

1) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 6\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -5\\ 3 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

10.Выясните, какие из следующих матриц линейного преобразования f можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найдите этот базис и соответствующую ему матрицу:

1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}6 & -5 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

11.Доказать, что в пространстве R^3 существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, соответственно в векторы $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

1) $\mathbf{a_1}$=(2,3,5) $\mathbf{a_2}$=(0,1,2) $\mathbf{a_3}$=(1,0,0), $\mathbf{b_1}$=(1,1,1) $\mathbf{b_2}$=(1,1,-1) $\mathbf{b_3}$=(2,1,2);

2) $\mathbf{a_1}$=(2,0,3) $\mathbf{a_2}$=(4,1,5) $\mathbf{a_3}$=(3,1,2), $\mathbf{b_1}$=(1,2,-1) $\mathbf{b_2}$=(4,5,-2) $\mathbf{b_3}$=(1,-1,1).

9. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А (2;3): а) параллельно оси Ох, б) параллельно оси Оу; в) составляющей с осью Ох угол 45^0.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: а) А (3;1) и В (5;4); б) А (3;1) и С (3;5); в) А (3;1) и О (-4;1).

3. Стороны АВ, ВС и АС треугольника АВС заданы соответственно уравнениями 4x+3y-5=0, x-3y+10=0, x-2=0. Определить координаты его вершины.

4. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых 2x-3y+1=0 и 3x-y-2=0 параллельно и перпендикулярно прямой y=x+1.

5. Найти длину и уравнение высоты ВЕ в треугольнике с вершинами А (-3;0), В (2;5), С (3;2).

6. Дан треугольник с вершинами А (-2;0), В (2;4) и С (4;0). Найти уравнения сторон треугольника, медианы АО, высоты АЕ и длину медианы АО.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2+y^2=5$ и $x^2+y^2+2x+4y-31=0$. Найти отношение радиусов окружностей.

8. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M_1(4;\ 4\sqrt{5}/3)$ и $M_2(0;4)$. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

9. Для гиперболы $3x^2-4y^2=12$ найти действительную и мнимую полуоси; координаты фокусов; эксцентриситет; уравнения асимптот.

10. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

11. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y=\frac{4-5x}{x-1}$.

12. Найти уравнение параболы и её директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Ох и что точка пересечения прямых y=x и x+y-2=0 лежит на параболе.

13.Прямые $x-y+2=0$ и $x-y-3=0$ являются сторонами ромба, а прямая $3x-y-6=0$ – его диагональю. Найти уравнения двух других сторон ромба.

14.Составить уравнение окружности с центром в точке (5;2) и касающейся прямой $4x+3y-16=0$.

15.Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.

16.Найти уравнение директрисы и фокус параболы: 1) $y^2=8x$; 2) $y^2=-8x$; 3) $x^2=12y$; 4) $x^2=-12y$.

10. ФУНКЦИЯ

1. Определить множества значений x, удовлетворяющих неравенства:

1) $|x|<3$; 2) $x^2\le 4$;

3) $x^2>16$; 4) $|x-2|<1$;

5) $|2x+3|<1$; 6) $(x+1)^2\le 9$;

7) $x^2-2x+5<0$; 8) $x^2-11x+10>10$;

9) $x^2-3x-4\le 0$; 10) $(x+3)^2\le 3$.

2. Найти области определения функций, заданных формулами:

1) $y=\frac{3x-1}{5x+6}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$; 3) $y=\sqrt{3x-1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$;

4) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; 5) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$; 6) $y=\ln(2x-1)$;

7) $y=\arccos(\lg x)$; 8) $y=\sqrt{x}-\lg(2x-3)$; 9) $y=\ln\sin x+\sqrt{4-x^2}$;

10) $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$; 11) $y=\arcsin\frac{1}{x+3}$; 12) $y=\frac{1}{\ln(1-3x)}$.

3. Определить, какая из функций является четной, нечетной и какая не является ни четной, ни нечетной:

1) $y=\cos x+x\sin x$; 2) $y=x\cdot 2^{-x}$; 3) $y=\lg(\cos 2x)$;

4) $y=\ln\frac{2-x}{2+x}$; 5) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x$; 6) $y=\frac{x}{\sin x}$;

7) $y=5\ln(x+2)$; 8) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 9) $y=2x\sin^2 x-3x^2$;

10) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$; 11) $y=2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$; 12) $y=x\cdot 4^{-x^2}$.

4. Найти период функций:

1) $y=\sin 4x$; 2) $y=\operatorname{tg}(x/2)$; 3) $y=\sin x+\cos 2x$;

4) $y=\cos^2 3x$; 5) $y=\sin 3x+\sin 2x$; 6) $y=|\sin x|$;

7) $y=\sin(3x+1)$; 8) $y=\sin^2(x/3)$; 9) $y=|\cos(x/2)|$.

5. Построить графики функций:

1) y=4x+8; 2) y=(-1/3) x+2; 3) y=|4x-1|;

4) y=2|x+1|; 5) y=-|5x+2|; 6) y=|x|+x;

7) y=-x^2+3; 8) y=2(x-5)^2-1; 9) y=1/x+2;

10) y=$\sqrt{x+1}$; 11) y=$\dfrac{x+5}{x+3}$; 12) y= $\left|\dfrac{7x+5}{5x+6}\right|$;

13) y=ln (x-2); 14) y=xsinx; 15) y=x^2+1/x.

6. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8}{x^2+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$; 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{x^2+4}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5}$; 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$;

16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$; 17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; 20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x$; 23) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x}-x$; 24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$;

25) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x$; 26) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$; 27) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$;

28) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; 29) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 30) $\lim\limits_{x\to0}x\,\mathrm{ctg}x$;

31) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 32) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$; 33) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tgx}{1-\cos x}$; 35) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$; 36) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$;

37) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$; 38) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{x}$; 39) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$;

40) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; 41) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\sin\left(\dfrac{1}{x-5}\right)$; 42) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{5x}$;

43) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$; 44) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$; 45) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

7. Какие из данных функций являются непрерывными в точке x=1? В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва:

1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$; 4) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1\\ 2, x=1\end{cases}$

8. Какие из данных функций являются непрерывными в точке x=0? В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва:

1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$; 3) $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$; 4) $y=2^{1/x}$.

9. Найти точки разрыва функции:

1) $y=\dfrac{2^{1/(x-2)}-1}{2^{1/(x-2)}+1}$; 2) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$; 3) $y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$; 4) $y=\dfrac{tgx\cdot arctg\dfrac{1}{x-3}}{x(x-5)}$;

5) $y=\begin{cases}x^2 & \text{при}\quad 0\le x\le 1\\ 2-x & \text{при}\quad 1<x\le 2\end{cases}$; 6) $y=\begin{cases}x & \text{при}\quad |x|\le 1\\ 1 & \text{при}\quad |x|>1\end{cases}$.

10. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{(x-6)(x-1)}$ на отрезке:

1) [2,5]; 2) [4,10]; 3) [0,7].

11. Исследуйте функцию на непрерывность. Найдите точки разрыва и

постройте эскиз графика функции в окрестностях этих точек:

1) $y=\frac{1}{3x+1}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+2x^4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x-1}$;

4) $y=\frac{2x+x^2}{x}$; 5) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+5}$; 6) $y=\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$;

7) $y=\frac{1}{|x|+10}$; 8) $y=\frac{1}{|x|-10}$; 9) $y=\frac{1}{2^x-1}$;

10) $y=\frac{1+x}{3^x}$; 11) $y=\frac{x}{\cos x+1}$; 12)* $y=\frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+4x+3}$.

12.Построить график функции и указать точки разрыва:

1) $y=\begin{cases} x/2 & x\neq 2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$; 2) $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$; 3) $y=\begin{cases} 0{,}5x^2 & \text{при} \quad |x|<2 \\ 2{,}5 & \text{при} \quad |x|=2 \\ 3 & \text{при} \quad |x|>2 \end{cases}$;

4) $y=\begin{cases} 2 & \text{при} \quad x=0, x=\pm 2 \\ 2{,}5 & \text{при} \quad 0<|x|<2 \\ 3 & \text{при} \quad |x|>2 \end{cases}$.

13.При каком значении A функция $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ A, & x=x_0 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)=(x^2+1)^5$, $x_0=0$; 2) $f(x)=\frac{3x-2}{9x-6}, x_0=\frac{2}{3}$;

3) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, x_0=1$; 4) $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x+3}, x_0=-3$.

11. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Найти производные функций:

1) $y=x^4(8\ln^2 x-4\ln x+1)$; 2) $y=\sqrt[4]{1+e^{4x}}+\sqrt{5}$; 3) $y=\sqrt[3]{x}(e^{3x}-5)$;

4) $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$; 5) $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^5}$; 6) $y=\ln\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $y=\mathrm{tg}^3x-3\mathrm{tg}x+3x$; 8) $y=x^3\ln^2 x$; 9) $y=\sin^2 x^3$;

10) $y=4e^{\sqrt{\ln x}}(1-\sqrt{\ln x})$; 11) $y=(xe^{2x}+3)^5$; 12) $y=\sin(x^2+2^x)$;

13) $y=(x^2-1)\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 14) $y=\dfrac{\ln\cos x}{\cos x}$; 15) $y=\cos^2 x+\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$;

16) $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$; 17) $y=e^x\ln\sin x$; 18) $y=\dfrac{\mathrm{arcctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$;

19) $y=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$; 20) $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; 21) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

22) $y=x\,\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}-\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2}$; 23) $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$; 24) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$;

25) $y=x\ln x+\arcsin\sqrt{x}$; 26) $y=3x\ln(1-x^2)$; 27) $y=\ln\ln\sqrt{x}$;

28) $y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\dfrac{1}{x}$; 29) $y=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$; 30) $y=e^{\frac{1}{\cos x}}$.

2. Вычислить производные функций, используя правило логарифмического дифференцирования:

1) $y=x^{x^2}$; 2) $y=x^{x^x}$; 3) $y=(\sin x)^{\cos x}$; 4) $y=(\ln x)^x$;

5) $y=(x+1)^{2/x}$; 6) $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$; 7) $y=x^{\sin x}$; 8) $y=x^{\ln x}$;

9) $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; 10) $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; 11) $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$; 12) $y=x^{1/x}$;

13) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$; 14) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; 15) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$; 16) $y=2x^{\sqrt{x}}$.

3. Найти производные от y по x:

1) $x=1-t^2$, $y=t-t^3$;
2) $x=(t+1)/t$, $y=(t-1)/t$;
3) $x=\ln(1+t^2)$, y=$y=t-\mathrm{arctg}t$;
4) $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$.

4. $x=y^3-4y+1$. Найти y’.

5. $t=\arcsin 2^s$. Найти выражение для ds/dt через s; через t.

6. Составить уравнение касательной к кривой $y=\frac{8}{4+x^2}$: а) в точке x=2; б) в точке пересечения с осью Oy.

7. Дана кривая $y=x^2-2x$. Составить уравнения касательных: а) в точках пересечения её с прямой $3x+y-2=0$; б) параллельной и перпендикулярной этой прямой; в) проходящих через точку (1; -5).

8. Найти производные функций, заданных неявно: 1) $x^2+xy+y^2=6$; 2) $x^3+y^3-3axy=0$; 3) $y^3-3y+2ax=0$; 4) $2y\ln y=x$.

9. Найти дифференциалы функций:

1) $y=\sin^3 2x$;
2) $y=\ln(\sin\sqrt{x})$;
3) $y=e^{-\frac{1}{\cos x}}$;
4) $y=2^{-x^2}$;
5) $y=x\ln x$;
6) $y=x^3+x\sqrt{x}$;
7) $y=x^2\cdot\sin\sqrt{x}$;
8) $y=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$;
9) $y=x\,\mathrm{arctg}x$;
10) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$;
11) $y=\arcsin\sqrt{x}$;
12) $y=\frac{x^2}{\arcsin x}$.

10.Найти производные второго порядка от функций:

1) $y=e^{-x^2}$;
2) $y=\mathrm{tg}x$;
3) $y=\mathrm{ctg}x$;
4) $y=\arcsin(x/2)$;
5) $y=\sin^2 x$;
6) $y=\cos^2 x$;
7) $y=\sqrt{1+x^2}$;
8) $y=\mathrm{arctg}(1/x)$;
9) $y=\ln(2x-3)$;
10) $y=x\sin x$;
11) y=xarxsinx;
12) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

11.Найти производные третьего порядка от функций:

1) $y=\mathrm{arctg}(x/2)$;
2) $y=xe^{-x}$;
3) $y=e^x\cos x$;
4) $y=x^2\sin x$;
5) $y=x^3 2^x$;
6) $y=x\ln x$.

12.Найти вторую производную от функции y по x:

1) $x=t^2$, $y=(t^3/3)-t$;
2) $x=e^{2t}$, $y=e^{3t}$;
3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$;
4) $x=t^2$, $y=t^3+t$;

5) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; 6) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$.

13.Используя правило Лопиталя, вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{e^{3/x}-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\mathrm{arctg}x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\mathrm{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}$; 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\pi x}$; 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}$; 15) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; 16) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$.

14.Определить промежутки, на которых возрастают и убывают функции: 1) $f(x)=x^3+5x+6$; 2) $f(x) = x^{-2}$; 3) $f(x)=2x^2-\ln x$ $(x>0)$; 4) $f(x)=3x^2-3$; 5) $f(x)=x^3-3x+2$; 6) $f(x)=x^{12}-12x+11$.

15.Найти максимумы и минимумы функций:

1) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-x+3}$; 2) $f(x)=x\ln x$; 3) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$;

4) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; 5) $f(x)=x^2e^{-x}$; 6) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+2$.

16.Найти асимптоты графиков функций:

1) $f(x)=\frac{5x}{x-1}$; 2) $f(x)=\frac{x}{2x-1}+x$; 3) $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2-1}+2x$;

4) $f(x)=xe^{-1/x}$; 5) $f(x)=x-2\mathrm{arctg}x$; 6) $f(x)=\frac{x+5}{x-3}$.

17.Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

1) $f(x)=x^3-6x^2+x$; 2) $f(x)=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$; 3) $f(x)=(x-1)^4$;

4) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$; 5) $f(x)=2x^2+\ln x$; 6) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}x$.

18.Построить графики функций:

1) $y=x^3-3x$; 2) $y=12x-x^3$; 3) $y=(x^3/3)+x^2$; 4) $y=(x^4/4)-2x^2$;

5) $y = x + 2\sqrt{-x}$; 6) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 7) $y = \dfrac{6\sqrt{x}}{x+2}$; 8) $y = \dfrac{x}{x^2-4}$;

9) $y = xe^{-x/2}$; 10) $y = x^2 e^{1/x}$; 11) $y = x\sqrt{1-x}$; 12) $y = x - \ln x$.

19.Найти производные n-го порядка от функций:

1) $y=\ln x$; 2) $y=\sin 3x$; 3) $y=e^{x/2}$; 4) $y=2^{3x}$; 5) $y=3^x$; 6) $y=(4x+1)^4$.

12. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Интегрирование разложением:

1) $\int (x^2+3x^3+x+1)dx$; 2) $\int (x^4+\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})dx$; 3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$;

4) $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}dx$; 5) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$; 6) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$;

7) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; 8) $\int \frac{5x^8+1}{x^4}dx$; 9) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$;

10) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$; 11) $\int \frac{x^5-x+1}{1+x^2}dx$; 12) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$;

13) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$; 14) $\int \left(\sin x+5\cos x\right)dx$; 15) $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2}dx$;

16) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 17) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}}dx$; 18) $\int \frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx$;

19) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 20) $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 21) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

2. Методом подстановки (или замены переменной) вычислить интегралы:

1) $\int \cos 5x\cdot dx$; 2) $\int \sin(3x+5)dx$; 3) $\int e^{2x}dx$; 4) $\int e^{-x^2}xdx$;

5) $\int (2+5x)^9 dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$; 7) $\int \sqrt{2x-5}dx$; 8) $\int \sqrt[3]{3-7x}dx$;

9) $\int \frac{dx}{5x+2}$; 10) $\int \frac{dx}{2-3x}$; 11) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$; 12) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

13) $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$; 14) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$; 15) $\int \frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$; 16) $\int \cos^3 x\cdot\sin x dx$;

17) $\int \sin^2 x\cdot\cos x dx$; 18) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; 19) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; 20) $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}dx$.

3. Методом интегрирования по частям вычислить интегралы:

1) $\int x\operatorname{arctg}x \cdot dx$; 2) $\int \arcsin x \cdot dx$; 3) $\int x\ln x \cdot dx$; 4) $\int xe^{-x}dx$;

5) $\int xe^{5x}dx$; 6) $\int x^2e^{-x/2}dx$; 7) $\int x\cos xdx$; 8) $\int x\sin xdx$;

9) $\int (x+1)\cos 3xdx$; 10) $\int \ln^2 xdx$; 11) $\int \ln(x^2+2)dx$; 12) $\int x^2e^x dx$.

4. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_a^b x^n dx$; 2) $\int\limits_0^2 (3x^2-1)dx$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_1^2 e^x dx$;

5) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx$; 6) $\int\limits_0^\pi \sin xdx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos xdx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

9) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2}$; 10) $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 11) $\int\limits_1^2 x(3-x)dx$; 12) $\int\limits_0^\pi \sin 2xdx$;

13) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\sin xdx$; 14) $\int\limits_1^e \ln xdx$; 15) $\int\limits_1^e \ln^2 xdx$; 16) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}xdx$;

17) $\int\limits_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$; 18) $\int\limits_{-1}^1 x^2e^{-x}dx$; 19) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$; 20) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

21) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$; 22) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 23) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4xdx$; 24) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 xdx$;

25) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

5. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^n}$; 5) $\int\limits_1^\infty e^{-x}dx$;

6) $\int\limits_1^\infty xe^{-x^2}dx$; 7) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$; 8) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$; 9) $\int\limits_1^\infty x^2e^{-x/2}dx$; 10) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(1+\ln x)dx}{x}$;

11) $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x dx$; 12) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$; 13) $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$; 14) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln xdx}{x^2}$; 15) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$.

6. Смешанные примеры:

1) $\int\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)dx$; 2) $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)^5}$; 3) $\int\frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}dx$;

4) $\int\sqrt[4]{1-6x^5}\,x^4dx$; 5) $\int\limits_0^1\frac{dx}{e^x+1}$; 6) $\int\limits_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

7) $\int\limits_{-\pi/4}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}dx$; 8) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\sin^2 x dx$; 9) $\int\limits_0^{\pi/2}3x\cdot\sin 3x\cdot dx$;

10) $\int\frac{\ln^2 x+1}{x}dx$; 11) $\int\frac{dx}{(3-x/2)^7}$; 12) $\int\frac{dx}{x\cdot(3+\ln x)}$;

13) $\int\limits_0^6\sqrt[5]{1+4x}\cdot dx$; 14) $\int\limits_1^2\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^3}\cdot dx$; 15) $\int\limits_2^4\frac{x^2+1}{x-1}\cdot dx$;

16) $\int\limits_0^1\frac{2x+3}{2x+1}\cdot dx$; 17) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{3-4x}}$; 18) $\int\sqrt[3]{9+x^2}\cdot x\cdot dx$;

19) $\int\frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$; 20) $\int\frac{\ell^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx$; 21) $\int x\left(2x^2+5\right)^{10}dx$;

22) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Найти область определения функции: 1) $z=\sqrt{(1+x)(y-4)}$;

2) $z=\sqrt{2x}-\sqrt{3y}-\sqrt{1-x-y}$; 3) $z=\arcsin\frac{x}{4}+\arcsin\frac{y}{5}$;

4) $z=\ln(6-x-y)+\frac{x}{y}$; 5) $z=\operatorname{arctg}\frac{3-x}{2-y}$; 6) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; 7) $z=\sqrt{x\cdot y}$;

8) $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; 9) $z=\frac{xy}{y-x}$; 10) $z=x+\sqrt{x^2-y^2}$; 11) $\sqrt{z}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

2. Найти частные производные от функций:

1) $z=\frac{y}{x}$; 2) $z=\ln(x^2+y^2)$; 3) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 4) $z=\cos(x^3+2y^4)$;

5) $z=x\cdot e^{-yx}$; 6) $z=\sin^2(x+y)-\sin^2 x-\sin^2 y$; 7) $z=e^{-\frac{x}{y^2}}$; 8) $z=\frac{xy}{y-x}$;

9) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$; 10) $z=\frac{x}{3y-2x}$; 11) $u=\ln\sin(x-2t)$.

3. Доказать, что если $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, то $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

4. Доказать, что если $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$, то $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

5. Доказать, что если $u=e^{\frac{x}{t^2}}$, то $2x\frac{\partial u}{\partial x}+t\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

6. Доказать, что если $u=x^y$, то $\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial y}=2u$.

7. Доказать, что если $z=e^{\frac{x}{y}}\ln y$, то $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{\ln y}$.

8. Найти полные дифференциалы функций: 1) $z=x^2y$; 2) $z=\frac{xy}{y-x}$;

3) $u=e^{\frac{s}{t}}$; 4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

9. Найти $\frac{dz}{dt}$, если:

1) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t^2$, $y = t$;

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

3) $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$

10.Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \frac{x^2}{y}$, где $x = u - 2v$, $y = v + 2u$.

11.Пусть z=y+F (u), где $u=x^2-y^2$. Доказать, что $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$ для любой дифференцируемой функции F (u).

12.Доказать, что если z=yφ(u), где $u=x^2-y^2$, то $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

13.Пусть z=F (x, y). Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если: 1) u=x+2y, v=x-y; 2) $u = \sqrt{xy}$, v=x+y.

14.Доказать, что если z=xy+xF (u), где u=y/x, то $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

15.Найти частные производные третьего порядка функции:

1) $z=x^3+x^2y+y^3$; 2) u=y/x; 3) $u = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$.

16.Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций: 1) z=sin (ax-by); 2) $z=x^2/y^2$; 3) z= ln (x-2y).

17.Найти частные производные четвертого порядка функции $z=x^4+3x^2y^2-2y^4$.

18.Найти частные производные второго порядка функции:

1) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 2) $z = \frac{x^2}{1 - 2y}$.

19.Пусть $s=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$; проверить что $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$.

20.Доказать, что если *u=arctg (2x-t)*, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0$.

21.Доказать, что если $z=\frac{xy}{x-y}$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$.

22.Доказать, что если $z=e^{\frac{x}{y}}$, то $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$.

23.Доказать, что если $z=2\cos^2\left(x-\frac{t}{2}\right)$, то $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.

24.Пусть $z=4-x^2-y^2$. Найти gradz в точке (1;2).

25.Пусть $z=x^2+y^2$. Найти gradz в точке (3;2).

26.Пусть $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$. Найти gradz в точке (2;1).

27.Пусть $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках (1;1) и (3,4).

28.Даны функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=x-3y+\sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке (3;4).

29.Найти точку, в которой градиент функции $z=\ln\left(x+\frac{1}{y}\right)$ равен $\mathbf{i}-\frac{16}{9}\mathbf{j}$.

30.Пусть $z=\frac{4}{x^2+y^2}$. Найти gradz в точке (-1;2) и его длину.

31.Найти производную функции $u=2x^2-3y^2$ в точке М (1;1) в направлении градиента.

32.Найти в точке М (1;1) производную функции u по направлению вектора $\mathbf{e}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}$: а) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; б) $u=2x^2-3y^2$.

33.Найти производную функции $u=x^2-2y^2+3z^2$ по направлению вектора $\mathbf{e} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и её значение в точке M (9;6;-1).

34.Определить в точке M (1;2;3) градиент функции $u = \frac{y}{xz} + \frac{x}{yz} + \frac{z}{xy}$.

35.Найти производную функции $u=xy^2z+yz^2-3z$ в точке M_1 по направлению от точки M_1 к точке M_2, если $M_1(0;1;2)$, а $M_2(-2;3;-1)$.

36.Исследовать на экстремум функции: 1) $z=(x-2)^2+2y^2$; 2) $z=x^4+4xy-2y^2$; 3) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$; 4) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ при $0 \le x \le \pi/2$; $0 \le y \le \pi/2$; 5) $z=e^{x/2}(x+y^2)$; 6) $z=3x^2-2xy^{1/2}+y-8x+8$; 7) $z=-x^2-xy-y^2+x+y$; 8) $z=x^2+xy+y^2+1/x+1/y$, $(x>0,\ y>0)$; 9) $z=x^2+2xy-3y^2+1$; 10) $z=x^3+8y^3-6xy+1$; 11) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x - +6y$.

37.Найти экстремум функции: 1) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии, что $x+y=2$; 2) $z=x+y$ при условии, что $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$; 3) $z=xy$ при условии, что $x^2+y^2=2$.

14. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Вычислить двойные интегралы, взятые по прямоугольным областям интегрирования D, заданным условиями в скобках:

1) $\iint\limits_D xydxdy\ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$; 2) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy\ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$;

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy\ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$; 4) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}\ (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$.

2. Вычислить данные интегралы:

1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; 2) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}dy$; 3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{Lny} e^x dx$.

3. Вычислить данные интегралы:

1) $\iint\limits_D x^3y^2dxdy$, D – круг $x^2+y^2 \le R^2$; 2) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, D – область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $y^2=x$; 3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, D – область, ограниченная прямыми $x=2$, $y=x$ и гиперболой $xy=1$; 4) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, D – область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

15. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными.

1) $x^2 \cdot y^2 \cdot y' = y - 1$;

2) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$;

3) $2y\sqrt{3y - y^2}\,dx - (9 + x^2)dy = 0$;

4) $x^2(y^3+5)\,dx + (x^3+5)\,y^2 dy = 0$;

5) $\left(\sqrt{xy} + \sqrt{x}\right)y' - y = 0$;

6) $x^2 \cdot y' + y = 0$;

7) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;

8) $\varphi^2 dr + (r-a)\,d\varphi = 0$;

9) $2st^2 ds = (1+t^2)\,dt$;

10) $y'x^3 = 2y$;

11) $(x^2+x)\,y' = 2y + 1$;

12) $(1+x^2)\,y' + 1 + y^2 = 0$.

1.2. Однородные уравнения:

1) $yy' = 2y - x$;

2) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;

3) $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$;

4) $y' - \frac{3y}{x} = x$;

5) $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$;

6) $x^2 y' = y^2 + xy$;

7) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'$;

8) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

1.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

1) $y' - 4y = \cos x$;

2) $y' - y = e^x$;

3) $y' + \frac{y}{x} = 3x$;

4) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 0$;

5) $(xy)^2 y' + xy^3 = 1$;

6) $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x$;

7) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$;

8) $y' - \frac{3y}{x} = x$;

9) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;

10) $y' + y = -xy^2$;

11) $xy' + y = \ln x + 1$;

12) $(2x+1)\,y' + y = x$;

13) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x$;

14) $y' + xy = xy^3$;

15) $y' + y\cos x = \sin 2x$;

16) $y' - xy = -y^3 \exp(-x^2)$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

1) $y''' = \frac{6}{x^3}$; начальные условия: y=2, y’=1, y’’=1 при x=1;

2) y’’=4cos2x; y=0, y’=0 при x=0;

3) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$;

4) $x^3y''+x^2y'=1$;

5) $yy''+y'^2=0$;

6) y’’+y’tgx=sin2x;

7) $y''+2y\,(y')^3=0$;

8) y’’xlnx=y’;

9) $y''\mathrm{tg}y=2(y')^2$;

10) $xy''-y'=e^x x^2$;

11) $y''+2xy'^2=0$;

12) $(1+x^2)\,y''+2xy'=x^3$;

13) $y''y^3=1$;

14) $2yy''=(y')^2$;

15) $2yy''=1+y'^2$;

16) y’’tgx=y’+1.

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1) y’’-3y’+2y=0;

2) y’’-y=0;

3) y’’-2y’+y=0;

4) y’’-2y’+2y=0;

5) y’’+4y’+5y=0;

6) y’’-4y’+4y=0.

2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1) $y''+6y'+5y=25x^2-2$;

2) y’’-2y’+10y=37cos3x;

3) $y''-6y'+9y=3x-8e^x$;

4) y’’+4y’=8sin2x;

5) $y''-2y'+y=e^{2x}$;

6) $y''-4y=8x^3$;

7) y’’+3y’+2y=sin2x+2cos2x;

8) $y''+y=x+2e^x$;

9) $y''+y'-2y=6x^2$;

10) y’’-5y’+6y=13sin3x.

2.4. Решить методом вариации произвольных постоянных:

1) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$;

2) $y''+y=1/\cos^3 x$;

3) $y''+y=1/\sin^2 x$;

4) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными

коэффициентами:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - y = e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = e^{t} \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 5\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} + 4x - y = e^{-t} \\ \dfrac{dx}{dt} + 8x - 3y = 5e^{-t} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$, x=1, y=1 при t=1.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

16. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: а) сумма выпавших очков равна 5; б) произведение выпавших очков равно 12; в) сумма выпавших очков не менее 8?

2. Брошены три игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадет одно и то же число очков?

3. На пяти внешне одинаковых карточках написаны буквы А, В, Г, Л, О. Какова вероятность того, что: а) случайным образом разложив карточки, получим слово «ВОЛГА»; б) разложив ряд три случайно отобранные карточки, получим слово «ГОЛ»?

4. На шести одинаковых карточках написаны буквы А, В, М, О, С, К. Какова вероятность того, что: а) разложив их в ряд, получим слово «МОСКВА»; б) разложив в ряд четыре случайно отбранные карточки, получим слово «КВАС»; в) разложив в ряд три случайно отобранные карточки, получим слово «СОК»?

5. Слово «РАКЕТА» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с отдельными буквами тщательно перемешиваются. Какова вероятность того, что: а) разложив их в ряд, получим слово «РАКЕТА»; б) разложив в ряд четыре случайно отбранные карточки, получим слово «РЕКА»; в) разложив в ряд три случайно отобранные карточки, получим слово «РАК»?

6. На шести одинаковых карточках написаны буквы А, А, А, М, Р, С. Какова вероятность того, что: а) случайным образом разложив карточ- ки, получим слово «САМАРА»; б) разложив в ряд четыре случайно отбранные карточки, получим слово «МАРС»; в) разложив в ряд четыре случайно отбранные карточки, получим слово «РАМА»?

7. Из группы, состоящей из 15 юношей и 5 девушек, выбирают делегацию из 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся: а) все юноши; б) девушек и юношей поровну?

8. На тепловой электростанции 10 сменных инженеров, 4 из которых женщины. В смену заняты 3 человека. Какова вероятность того, что в выбранную смену будут заняты: а) всеженщины; б) одна женщина; в) хотя бы

один мужчина?

9. Группа состоит из 8 студентов факультета УЭФ, 9 студентов факультета АПК и 7 студентов факультета ПЭФ. Какова вероятность того, что три первых студента, явившихся на экзамен, окажутся: а) с факультета ПЭФ; б) двое с факультета АПК и один с факультета УЭФ?

10.Среди 20 студентов группы, из которых 12 девушек, разыгрывается 5 билетов. Какова вероятность того, что: а) все они достанутся девушкам; б) среди обладателей билетов окажутся трое юношей?

11.Студент знает 40 из 48 вопросов программы. Его экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только один вопрос билета?

12.В конверте 50 фотокарточек, из них две разыскиваемые. Из конверта наудачу извлечены 5 фотокарточек. Найти вероятность того, что среди них: а) окажется только одна разыскиваемая; б) окажутся обе разыскиваемые; в) не окажется ни одной разыскиваемой; г) окажется хотя бы одна разыскиваемая?

14.Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя одной из костей появится шестерка.

15.При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

16.Задумано двузначное число, цифры которого различны. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется: а) случайно названное двузначное число; б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

17.Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна восьми, и разность – четырем; б) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем.

18.Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «герб».

19.Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадает на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадет различное число очков (не равное шести).

20.В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные де тали окажутся окрашенными.

21.В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

22.В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

23.Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

24.В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятности того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

25. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

26.В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

27. В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

17. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. На 30 студентов для производственной практики предоставлено 10 мест в Саратове, 8 в Казани, остальные в Самаре. Какова вероятность того, что три определённых студента попадут на практику в один город?

2. На 25 студентов для производственной практики предоставлено 10 мест в Омске, 8 в Ульяновске и 7 в Казани. Какова вероятность того, что два определённых студента попадут на практику в один город?

3. Из 25 лотерейных билетов 4 выигрышных. Наудачу вынимают три билета. Какова вероятность того, что среди них окажется: а) не более одного выигрышного билета; б) хотя бы один выигрышный билет?

4. Студент пришёл на экзамен, зная лишь 30 из 40 вопросов программы. В каждом билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит правильно: а) на все вопросы наудачу взятого билета; б) хотя бы на два вопроса?

5. В мастерскую для ремонта поступило 10 часов фирмы «Заря». Известно, что 6 из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся 5 часов. Определить вероятность того, что из них нуждаются в общей чистке: а) двое часов; б) не менее четырёх часов?

6. Группа туристов состоит из 20 человек, из них 6 мужчин. Какова вероятность того, что группа из трёх человек будет состоять: а) из мужчин; б) не менее чем из двух женщин?

7. Рабочий обслуживает три станка. Для первого станка вероятность того, что в течение смены его работа потребует вмешательства рабочего, равна 0,3; для второго – 0,5, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют вмешательства рабочего: а) все три станка; б) один станок; в) два станка; г) хотя бы один станок.

8. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы, равна по 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) по крайней мере, на два вопроса.

9. 60% студентов некоторого вуза изучают английский язык, 30% – немецкий, а остальные – французский. Какова вероятность того, что из

трёх наудачу встреченных студентов: а) только один изучает английский язык; б) один изучает английский, а остальные французский; в) все изучают разные языки?

10.Вероятность того, что книга имеется в фондах первой библиотеки, равна 0,5; второй – 0,7; третьей – 0,4. Определить вероятность наличия книги в фондах хотя бы одной библиотеки.

11.Группа студентов-спортсменов, состоящая из 5 студентов II курса, 4 студентов III курса, проводит тренировку. Одновременно тренируются двое. Какова вероятность того, что, войдя случайно на тренировку, мы застанем тренирующихся двух студентов одного курса?

12.Страховая компания занимается страхованием перевозок. При страховании морских перевозок вероятность наступления страхового случая равна 0,1; при страховании железнодорожных перевозок – 0,15; при страховании авиаперевозок – 0,05. Определить вероятность того, что в течение месяца произойдёт страховой случай только одного вида перевозок.

13.На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

14.В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

15.Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

16.Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

17.Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

18.Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

19.Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

20.Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

21.Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

22.В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

23.Среди 100 лотерейных билетов есть пять выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

24.В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

25.В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

18. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

1. В сборочный цех завода поступают детали с трёх автоматов. Первый автомат даёт 3% брака, второй – 1% и третий – 2%. Определить вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с каждого автомата поступило, соответственно, 500, 200, 300 деталей.

2. Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 лампочек изготовлены на первом заводе, 250 – на втором и 150 – на третьем заводе. Известны также вероятности (0,97; 0,91; и 0,93) того, что лампочка окажется стандартной при изготовлении её, соответственно, первым, вторым и третьим заводами. Какова вероятность того, что наудачу выбранная из данной партии лампочка окажется стандартной?

3. В цехе три автоматических станка производят одни и те же детали. Их производительности соотносятся как 1:2:3. Известно, что первый станок производит 90% деталей I сорта, второй – 80%, третий – 70%. Определить вероятность того, что наудачу взятая из общего количества деталь окажется первосортной.

4. В железнодорожном составе 50 вагонов, груженных углем двух сортов, в том числе 25 вагонов содержат 70% угля I сорта и 30% угля II сорта, 15 вагонов содержат соответственно 60 и 40%, остальные – 85 и 15%. Случайно взятый для анализа кусок угля оказался II сорта. Какова вероятность того, что он взят из вагона первой группы?

5. Спрос на страховые услуги вынуждает страховую компанию заключать в месяц 20% договоров страхования морских перевозок, 30% договоров страхования авиаперевозок, 50% договоров страхования железнодорожных перевозок. Известны вероятности наступления страхового случая: при страховании морских перевозок – 0,1, железнодорожных перевозок – 0,15, авиаперевозок – 0,05. Страховой случай наступил. Вычислить вероятность того, что наступивший страховой случай имел место в процессе авиаперевозок.

6. На сборку поступают детали с трёх автоматов. Первый даёт в среднем 98% годных деталей, второй – 99%, а третий – 97%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если она выбрана случайным образом, а производительность автоматов одинакова.

7. В ящике находятся изделия, сделанные на трёх станках: 20 – на первом станке, 18 – на втором и 14 – на третьем. Вероятности того, что изделия, изготовленные на первом, втором и третьем станках, отличного качества, соответственно равны 0,7; 0,85; 0,9. Взятое наудачу изделие оказалось отличного качества. Какова вероятность того, что оно изготовлено на втором станке?

8. В спартакиаде участвуют из первой группы четыре студента, из второй – шесть и из третьей – пять. Студент первой группы попадает в сборную института с вероятностью 0,9, студент второй группы – 0,7, а студент третьей группы – 0,8. Наудачу выбранный студент попал в сборную института. Вероятнее всего, из какой он группы?

9. Банк «Цитадель» имеет филиалы в городах Солнечногорск и Отрадный. Солнечногорский филиал банка обслуживает 60% его вкладчиков, а остальные обслуживаются в Отрадненском филиале. Известно также, что 25% вкладчиков Солнечногорского филиала и 30% вкладчиков Отрадненского филиала используют кредитные карты для работы со своими вкладами. Клиент обратился к руководству банка «Цитадель» с заявлением о потере кредитной карты. Какова вероятность того, что его вклад хранился в Отрадненском филиале?

10.В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% – с заболеванием Л, 20% – с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7, болезни Л – 0,8, болезни М – 0,9. Пациент, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал заболеванием К.

11.В результате исследования, проведенного в некотором вузе, установлено, что студентов специальности «Бухгалтерский учет» в 4 раза больше, чем студенотов специальности «Менеджмент». Также известно, что 25% будущих бухгалтеров и 15% будущих менеджеров являются членами студенческого научного общества (СНО). Встреченный Вами студент оказался членом СНО. Какова вероятность того, что он будущий менеджер?

12.При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в соотношении 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок разбивает броню с вероятностью 0,9, средний – 0,3 и мелкий – 0,1. Какова вероятность того, что попавший в броню осколок пробьёт её?

13.В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

14.В вычислительной лаборатории имеются 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

15.В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

16.В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 деталей – на заводе № 2 и 18 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

17.В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

18.В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

19.Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

20.В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

21.Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

22.В санаторий приезжают в среднем 50% детей из региона *К*, 30% – из региона *L*, 20% – из региона *M*. Вероятность полной профилактики заболеваний, специфичных для региона *К* равна 0,7; для регионов *L* и *M* эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9.Ребёнок, приехавший в санаторий, прошёл полный курс профилактики. Найти вероятность того, что этот ребёнок приехал из региона *К*.

23.Событие А может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, образующих полную группу событий. После появления события А были переоценены вероятности гипотез, т.е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем оказалось, что $P_A(B_1)=0,6$ и $P_A(B_2)=0,3$. Чему равна условная вероятность $P_A(B_3)$ гипотезы B_3?

24.Имеется три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей задачи.

25.Батарея из трех орудий произвела залп, причем 2 снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1=0,4$; $p_2=0,3$; $p_3=0,5$.

26.Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4.

19. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ (ПУАССОНА И МУАВРА-ЛАПЛАСА)

1. В некоторых условиях вероятность своевременного прибытия поезда на станцию равна 0,8. Определить вероятность того, что из четырёх ожидаемых поездов прибудут своевременно: а) три; б) не менее трёх; в) более трёх; г) по крайней мере, один из поездов.

2. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная равна 0,97. Найти вероятность того, что среди десяти деталей стандартных будет не менее 9.

3. В некоторм вузе 75% студентов сдали все экзамены и зачеты, а 25% имеют академическую задолженность. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу выбранных студентов окажется без академической задолженности: а) не менее двух; б) не более двух.

4. Вероятность того, что участвующие в литературном конкурсе могут правильно ответить на все вопросы, равна 0,9. В соревновании принимают участие 15 человек. Найти наивероятнейшее число участников, правильно ответивших на все вопросы.

5. Найти наиболее вероятное число годных ламп в партии из 25 штук, если известно, что вероятность дефекта радиолампы составляет 0,1.

6. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность бесперебойной работы каждого станка равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работают хотя бы два станка.

7. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

8. Изделия некоторого производства содержат 2% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий окажется: а) одно бракованное; б) по крайней мере, одно бракованное.

9. При данном технологическом процессе 75% всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150 изделий. Найти вероят-

ность того, что в этой партии окажется наивероятнейшее число изделий высшего сорта.

10.На одном из факультетов института 40% всех студентов занимаются в спортивных секциях. Каково наиболее вероятное число студентов, состоящих в секциях, из 250 студентов второго курса и какова вероятность такого числа студентов?

11.Школьники посадили на пришкольном участке 500 деревьев. В данных климатических условиях вероятность прижиться для каждого дерева одинакова и равна 0,6. Какое количество прижившихся деревьев наиболее вероятно и какова вероятность, что именно такое количество деревьев приживется?

12.Для мастера данной квалификации, изготовляющего машинную деталь, вероятность того, что каждая сделанная им деталь окажется отличного качества, равна 0,6. За смену он изготовил 500 деталей. Какова вероятность того, что в их числе окажется 315 деталей отличного качества?

13.Найти вероятность одновременной остановки 30 машин из работающих 100 машин, если вероятность остановки для отдельной машины равна 0,28.

14.Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,04. Какова вероятность наличия 37 бракованных деталей среди взятых наудачу 900 деталей?

15.Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 180 студентов; б) не менее 180 студентов.

16.При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб.: а) не менее 3000; б) от 300 до 400 включительно.

17.Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?

18.Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти: а) с вероятностью 0,9545 границы, в которых заключена доля стандартных среди проверенных 900 деталей; б) вероятность того, что доля стандартных деталей среди них заключена в пределах от 0,8 до 0,11.

19.Вероятность того, что дилер, торгующий ценными бумагами, продаст их, равна 0,7. Сколько должно быть ценных бумаг, чтобы можно было утверждать с вероятностью 0,996, что доля проданных среди них отклонится от 0,7 не более, чем на 0,04 (по абсолютной величине)?

20.Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 10 минут равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 10 минут обрыв произойдёт в пяти веретенах.

21.Вероятность опоздания пассажира на поезд равна 0,005. Найти вероятность того, что из 1000 пассажиров опоздают не более двух.

22.Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

23.Вероятность изготовления консервной банки с недостаточной герметизацией равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1500 банок консервов с недостаточной герметизацией будет: а) не более трёх; б) не менее трёх.

24.В банк отправлено 2000 вакуумных пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков равна 0,0005. Найти вероятность того, что при проверке всех отправленных пакетов будет обнаружено ошибочно укомплектованных пакетов: а) три; б) менее трёх.

25.Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трёх выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

26.Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

27.Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

28.Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

29.Событие B появится в случае, если событие A наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события B, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,8.

30.В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

31.Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две – правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна долине отрезка и не зависит от его расположения.

32.Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

33.Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

34.Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

35.Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

36.Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p=0,8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

37.Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

38.Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

39. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течении времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

40. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

20. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. В партии из 8 деталей 6 стандартные. Наудачу взяты две детали одновременно. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных двух деталей.

2. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки.

3. Вероятность связаться с абонентом по телефону равна 0,7 (при каждой попытке). Составить закон распределения числа попыток до первого ответа абонента, если известно, что число попыток не превосходит четырёх.

4. Хладокомбинат ежедневно обслуживают три автомашины. Вероятности прибытия машин по графику равны, соответственно, 0,7; 0,9; 0,6. Составить закон распределения числа машин, прибывших на хладокомбинат по графику.

5. Случайная величина X задана следующим распределением:

а) $\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c|c|c} 10 & 14 & 15 & 20 \\ \hline 0{,}4 & ? & 0{,}2 & 0{,}3 \end{array}$; б) $\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c|c|c} 1 & 3 & 6 & 8 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}3 & ? & 0{,}2 \end{array}$; в) $\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & ? \end{array}$;

г) $\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c|c|c} 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & ? \end{array}$; д) $\dfrac{x_i}{p}\begin{array}{|c|c|c|c|c} -2 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}3 & ? & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$; е) $\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ \hline 0{,}5 & ? & 0{,}2 \end{array}$.

Найти неизвестную вероятность. Построить полигон распределения вероятностей. Составить интегральную функцию распределения и построить её график. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент асимметрии, эксцесс.

6. Случайная величина X задана следующим распределением:

а) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<0, \\ \dfrac{x^2}{16}, \text{ если } 0\le x\le 4, \\ 1, \text{ если } x>4. \end{cases}$; б) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ 0{,}2\cdot x, & \text{если} \quad 0\le x\le 5, \\ 1, & \text{если} \quad x>5. \end{cases}$;

в) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-1, \\ \frac{1}{3}\cdot(x+1), & \text{если} \quad -1\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$; г) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-2, \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & \text{если} \quad -2\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$;

д) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \frac{x^2}{36}, & \text{если} \quad 0\le x\le 6, \\ 1, & \text{если} \quad x>6. \end{cases}$; е) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-1, \\ \frac{3}{4}\cdot(x+2), & \text{если} \quad -1\le x\le \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\frac{1}{3}. \end{cases}$.

Найти дифференциальную функцию распределения $\rho(x)$. Построить графики функций F (x) и $\rho(x)$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал для распределения а) (1; 3); б) (2; 4); в) (0; 2); г) (-1; 1); д) (1; 4); е) (0; 1/3). Показать на графике вероятность попадания в интервал. Вычислить характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

7. Случайная величина X задана следующим распределением:

а) $\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<1, \\ x-a, & \text{если} \quad 1\le x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$; б) $\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<2, \\ a\cdot(x-3), & \text{если} \quad 2\le x\le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$;

в) $\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<3, \\ a\cdot(3-x), & \text{если} \quad 3\le x\le 5, \\ 0, & \text{если} \quad x>5. \end{cases}$; г) $\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ a\cdot(4x-x^3), & \text{если} \quad 0\le x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$;

д) $\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ a\cdot(3x-x^2), & \text{если} \quad 0\le x\le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$; е) $\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ a\cdot(2-x), & \text{если} \quad 0\le x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$.

Найти: неизвестный параметр a; интегральную функцию распределения; числовые характеристики; вероятность попадания в интервал для а) (1,3; 1,8); б) (2; 2,7); в) (3; 4); г) (1; 1,5); д) (1; 2); е) (0; 1).

8. Дана функция распределения случайной величины X:

$$
\text{а)}\ F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1 \\ 0,3 & \text{при} \quad 1 < x \le 2 \\ 0,7 & \text{при} \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{при} \quad x > 3 \end{cases};\ \text{б)}\ F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 4 \\ 0,2 & \text{при} \quad 4 < x \le 7 \\ 0,6 & \text{при} \quad 7 < x \le 9 \\ 1 & \text{при} \quad x > 9 \end{cases}.
$$

Найти ряд распределения; построить полигон распределения; вычислить числовые характеристики.

9. Даны законы распределения двух независимых случайных величин $X:\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 3 \\ \hline p_i & 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{array}$ и $Y:\begin{array}{c|c|c} y_j & 2 & 3 \\ \hline p_j & 0,4 & 0,6 \end{array}$. Составить закон распределения случайной величины Z=3X-2Y, вычислить M (Z), D (Z).

10. Даны законы распределения двух независимых случайных величин $X:\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline p_i & 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{array}$ и $Y:\begin{array}{c|c|c} y_j & 0 & 2 \\ \hline p_j & 0,5 & 0,5 \end{array}$. Составить закон распределения случайной величины Z=X+Y, вычислить M (Z), D (Z). Проверить справедливость свойств математического ожидания и дисперсии суммы случайных величин.

11. Даны законы распределения двух независимых случайных величин $X:\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 2 & 4 & 6 \\ \hline p_i & 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{array}$ и $Y:\begin{array}{c|c|c|c} y_j & 1 & 3 & 5 \\ \hline p_j & 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{array}$. Составить закон распределения случайной величины Z=X-Y и проверить справедливость свойств математического ожидания и дисперсии разности случайных величин.

12. Даны законы распределения двух независимых случайных величин $X:\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 4 & 5 & 7 \\ \hline p_i & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{array}$ и $Y:\begin{array}{c|c|c|c} y_j & 2 & 3 & 4 \\ \hline p_j & 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{array}$. Составить закон распределения случайной величины Z=X·Y. Найти характеристики случайных величин X, Y, Z.

13. Пусть случайная величина X – ежегодная выручка некоторой фирмы, случайная величина Y – её ежегодные издержки. Известно, что половину своей прибыли фирма тратит на благотворительные цели. Найти распределение случайной величины Z – ежегодных затрат фирмы на благотворительность, если ежегодные выручка и издержки независимы и заданы

следующими распределениями: $X: \begin{array}{c|c|c|c} x_i & 10 & 12 & 14 \\ \hline p_i & 0,5 & 0,25 & 0,25 \end{array}$ и $Y: \begin{array}{c|c|c} y_j & 2 & 4 \\ \hline p_j & 1/3 & 2/3 \end{array}$.

Каковы средние (ожидаемые) затраты фирмы на благотворительность?

14.Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

15.В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобрали две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

16.После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется составить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

17.Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: x_1=4 с вероятностью p_1=0,5; x_2=6 с вероятностью p_2=0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X)$=8.

18.Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: x_1=-1, x_2=0, x_3=1, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)$=0,1, $M(X^2)$=0,9. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие значениям x_1, x_2, x_3.

19.Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, асимметрию, эксцесс, начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

x_i	–4	6	10
p_i	0,2	0,3	0,5

; б)

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

;

в)

x_i	131	140	160	180
p_i	0,05	0,10	0,25	0,60

.

20. Случайная величина *X* задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -1,\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & \text{при} \quad -1<x\le\frac{1}{3},\\ 1, & \text{при} \quad x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение, заключенное в интервале (0; 1/3).

20. Случайная величина *X* задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -2,\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{\pi}\ \arcsin\frac{x}{2}, & \text{при} \quad -2<x\le 2,\\ 1, & \text{при} \quad x>2.\end{cases}.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение, заключенное в интервале (-1;1).

21. Случайная величина *X* задана интегральной функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -2,\\ 0{,}5x-1, & \text{при} \quad 2<x\le 4,\\ 1, & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение: а) меньшее 0,2; б) меньшее трех; в) не меньшее трех; г) не меньшее пяти.

22. Найти функцию распределения F(x) дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения: а)

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,2	0,3

;

б)

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

. Построить график.

23. Дана функция распределения непрерывной случайной величины *X*:

а) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \sin x, & \text{при} \quad 0<x\le\pi/2,\\ 1, & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \sin 2x, & \text{при} \quad 0<x\le\pi/4,\\ 1, & \text{при} \quad x>\pi/4.\end{cases}$.

Найти плотность распределения $f(x)$.

24.Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X: а) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ \sin x, & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 1, \\ x-1/2, & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$.

Найти функцию распределения $F(x)$.

25.Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания X и Y: а) Z=X+2Y, M (X)=5, M (Y)=3; б) Z=3X+4Y, M (X)=2, M (Y)=6;

26.Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины Z, если известны дисперсии X и Y: а) Z=2X+3Y, D (X)=4, D (Y)=5; б) Z=3X+2Y, D (X)=5, D (Y)=6.

21. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно в интервале (3; 6). Найти: а) дифференциальную и интегральную функции распределения, построить их графики; б) характеристики случайной величины; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (4; 5), показать эту вероятность на графике.

2. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно в интервале (-5; 15). Найти: а) дифференциальную и интегральную функции распределения, построить их графики; б) характеристики случайной величины; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (0; 5), показать эту вероятность на графике.

3. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно в интервале (9; 15). Найти: а) дифференциальную и интегральную функции распределения, построить их графики; б) характеристики случайной величины; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (11; 14), показать эту вероятность на графике.

4. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно в интервале (16;20). Найти: а) дифференциальную и интегральную функции распределения, построить их графики; б) характеристики случайной величины; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (17;22), показать эту вероятность на графике.

5. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 10 минут. Время, в течение которого пассажиру приходится ждать автобус, представляет собой величину, распределенную равномерно. Найти: а) дифференциальную функции распределения, построить её график; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятность того, что пассажир будет ожидать очередной автобус менее 5 минут.

6. Поезда метрополитена идут с интервалом 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в некоторый момент времени. Время, в течение которого пассажиру приходится ждать поезда, представляет собой величину, распределенную равномерно. Найти: а) дифференциальную функции распределения, построить её график; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятность того, что пассажир будет ожидать поезда менее одной

минуты.

7. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Время, в течение которого пассажиру приходится ждать автобус, представляет собой величину, распределенную равномерно. Найти: а) дифференциальную функции распределения, построить её график; б) математическое ожидание и дисперсию; в) вероятность того, что пассажир будет ожидать очередной автобус менее 4 минут.

8. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ=2. Найти: а) дифференциальную и интегральную функции распределения, построить их графики; б) характеристики случайной величины; в) вероятность попадания случайной величины в интервал (2; 8), показать эту вероятность на графике.

9. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с заданной интегральной функцией: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 1 - \ell^{-0,4x}, & \text{если} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (2;5), дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

10.Дана непрерывная случайная величина, распределенная по показательному закону. Известно, что её среднее значение равно 0,2. Найти: а) параметр λ данного распределения и дисперсию случайной величины; б) дифференциальную и интегральную функции распределения, построить их графики; в) вероятность того, что в результате испытания случайная величина попадёт в интервал (0,4; 1), показать эту вероятность на графике.

11.Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0,01t}$ (t≥0). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 50 часов.

12.Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0,03t}$ (t≥0). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

13.Цена деления шкалы амперметра 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

14.Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать автобус менее 3 минут.

15.Найти математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (3,7).

16.Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2,8).

17.Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2,8).

18.Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ равен: а) $\lambda=5$; б) $\lambda=6$.

19.Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\geq0$; при $x<0$ $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13; 0,7).

20.Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x\geq0$ плотностью вероятности $f(x)=0{,}04e^{-0{,}04x}$; при $x<0$ функция $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1; 2).

21.Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного дифференциальной функцией: а) $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x\geq0$, $f(x)=0$ при $x<0$; б) $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\geq0$, $f(x)=0$ при $x<0$.

22.Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного интегральной функцией: а) $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x\geq0$, $f(x)=0$ при $x<0$; б) $f(x)=10e^{-10x}$ при $x\geq0$, $f(x)=0$ при $x<0$.

23.Найти асимметрию $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$ показательного распределения.

24.Найти эксцесс $E_k=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4(X)}-3$ показательного распределения.

22. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Какие из написанных ниже законов распределения являются нормальными? Определить для нормальных законов распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение и построить их графики: а) $\rho(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot \ell^{-2(x-5)^2}$; б) $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}\cdot \ell^{\frac{-(x-2)^2}{6}}$; в) $\rho(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}\cdot \ell^{\frac{-(x-3)^2}{8}}$;

г) $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot \ell^{x^2-2x+1}$; д) $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \ell^{\frac{-(x-1)^2}{2}}$; е) $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10\pi}}\cdot \ell^{\frac{-(x-10)^2}{610}}$;

ж) $\rho(x)=\dfrac{10}{\sqrt{\pi}}\cdot \ell^{-400(x-20)^2}$; з) $\rho(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot \ell^{\frac{-(x-7)^2}{50}}$.

2. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X, соответственно, равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение в интервале (15; 25).

3. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами a=6 и σ=2. Найти вероятность того, что случайная величина X окажется в интервале (3; 7).

4. Размер детали задан полем допуска 30-32 мм. Средний размер детали равен 30,8 мм, а среднее квадратическое отклонение 0,4 мм. Считая, что размер детали подчиняется нормальному закону, найти процент брака.

5. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами a=20 км и σ=100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами: а) не менее 19,7 км; б) не более 20,1 км; в) не менее 20,3 км, но не более 20,75 км.

6. Размер гайки задан полем допуска 60-65 мм. В некоторой партии гаек средний размер оказался равным 62,8 мм, а среднее квадратическое отклонение составило 1,1 мм. Считая, что размер гайки подчиняется закону нормального распределения, вычислить вероятность брака по размеру гайки.

7. Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением равным 25 г и математическим ожидание 375 г. Найти вероятность того, что вес одной пойманной рыбы будет: а) заключен в пределах от 300 до 425 г; б) не более

450 г; в) не менее 300 г.

8. Известно, что рост человека подчиняется нормальному закону распределения. Для некоторой группы мужчин средний рост оказался равным 168,5 см, среднее квадратическое отклонение составило 6,1 см. Определить процент лиц этой группы, имеющих рост от 158 до 165 см.

9. Средний процент выполнения плана некоторыми предприятиями составляет 106%, среднее квадратическое отклонение – 9%. Полагая, что выполнения плана данной группы предприятий подчиняется нормальному закону распределения, определить процент предприятий: а) не выполняющих план; б) выполняющих план от 110 до 150%.

10. Рост людей призывного возраста предполагается нормально распределенным со средним значением 170 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить процент людей, имеющих рост: а) ниже 160 см; б) выше 180 см; в) от 160 до 175 см.

11. Рост студентов-юношей подчиняется нормальному закону распределения со средним значением 170 см, средним квадратическим отклонением 5 см. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных четырёх студентов у троих рост от 160 до 175 см?

12. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 25. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35; 40)?

13. Рост взрослых женщин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Математическое ожиданиееё равно 164 см, а среднее квадратическое отклонение – 5,5 см. Вычислить вероятность того, что ни одна из пяти наудачу выбранных женщин не будет иметь рост более 160 см.

14. Известно, что рост человека подчиняется нормальному закону распределения. Для некоторой группы средний рост оказался равным 165 см, среднее квадратическое отклонение – 5,2 см. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных четырёх человек из данной группы будет иметь рост от 164 до 166 см.

15. Случайная величина имеет нормальный закон распределения, среднее значение её равно 4 см, а дисперсия – 0,09 см^2. Записать дифференциальную и интегральную функции распределения. Вычислить вероят-

ность того, что случайная величина принимает значение от 5 до 6 см.

16.В нормально распределенной совокупности 15% значений X меньше 12, а 40% значений X превышает 16,2. Найти: а) M (X); б) σ(X).

17.Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с M (X)=0. Вероятность попадания величины X в интервал (-а; а) равна 0,5, а>0. Найти σ(X) и ρ(X).

18.Для нормально распределенной случайной величины X с а=0 определить вероятности (k=1; 2;3): а) P (X≥kσ); б) P (|X|≥kσ); в) P (|X|≤kσ).

19.Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) более 550 г; г) отличается от средней не более, чем на 30 г (по абсолютной величине)?

20.Квантиль уровня 0,15 нормально распределенной случайной величины X равен 12, а квантиль уровня 0,6 равен 16. Найти M (X) и σ(X).

21.20%-ная точка нормально распределенной случайной величины X равна 50, 40%-ная точка равна 35. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (25; 45).

22.Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 3 и среднее квадратическое отклонение – 2. Написать плотность вероятности X.

23.Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X, зная, что M (X)=3, D (X)=16.

24.Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$.Найти математическое ожидание и дисперсию X.

25.Дана интегральная функция нормированного нормального распределения $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-x^2/2}dx$. Найти плотность распределения f (x).

26.Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

27.Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).

28.Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ=0,4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

29.Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=10. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)?

30.Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=25. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40)?

31.Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью: а) $f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{32}}$; б) $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$. Найти моду и медиану X.

23. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

1. Совместное распределение дискретных случайных величин (X; Y) задано таблицей:

Y_j / Xi	-1	0	1
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,1
2	0,05	0,15	0,1
3	0,04	0,07	0,09

Найти: а) законы распределения X и Y; б) закон распределения Y при условии, что X=0; в) вероятность события $(X<2;\ Y<1)$. Зависимы или нет X и Y?

2. Совместное распределение дискретных случайных величин (X; Y) задано таблицей:

Y_j / Xi	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Найти: а) законы распределения X и Y; б) закон распределения X при условии, что Y=1; в) вероятность события $(X\geq 1;\ Y\leq 0)$. Зависимы или нет X и Y?

3. Совместное распределение дискретных случайных величин (X; Y) задано таблицей:

Y_j / Xi	0	1	2
0	0,0064	0,0192	0,0144
1	0,0512	0,1536	0,1152
2	0,1024	0,3072	0,2304

Найти: а) законы распределения X и Y; б) закон распределения Y при условии, что X=1; в) вероятность события $(X=1;\ Y>0)$. Зависимы или нет X и Y?

4. Совместное распределение дискретных случайных величин (X; Y) задано таблицей:

Y_j \ X_i	6	11	12
0	0,428	0,238	0,048
1	0,286	0	0

Найти: а) законы распределения X и Y; б) закон распределения X при условии, что Y=12; в) вероятность события (X=1; Y=11). Зависимы или нет X и Y?

5. Совместное распределение дискретных случайных величин (X; Y) задано таблицей:

Y_j \ X_i	-2	-1	0	1
-1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,29	0,1	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,1

Найти: а) законы распределения X и Y; б) все условные законы распределения Y и X; в) вероятность события (Y> X); г) коэффициент ковариации и коэффициент корреляции.

6. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

7. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих X и Y.

8. Задана дискретная двумерная случайная величина:

Y	X		
	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0,8$	0,05	0,12	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X, при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=0,4$; в) условный закон распределения Y, при условии, что X приняла значение $x_2=5$.

9. Задана дискретная двумерная случайная величина:

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условный закон распределения X, при условии, что Y=10; б) условный закон распределения Y, при условии, что X=6.

24. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Средняя величина ежемесячного спроса на некоторый продукт питания равна 200 кг. Оценить вероятность того, что в следующий месяц спрос на этот продукт: а) превысит 250 кг; б) не превысит 300 кг.

2. Среднемесячный доход граждан некоторой страны составляет 1000 у.е. Оценить вероятность того, что наудачу выбранный житель этой страны заработал в течение месяца: а) более 1100 у.е.; б) не более 1500 у.е.

3. На основе многолетних наблюдений установлено, что примерно 10% посетителей кафе заказывают гранатовый сок. Оценить вероятность того, что из 100 посетителей кафе: а) хотя бы 15 человек закажут гранатовый сок; б) не более 20 человек закажут гранатовый сок.

4. Компания, занимающаяся страхованием, раскладывает рекламные буклеты по почтовым ящикам. Прежний опыт компании показывает, что примерно в одном случае из 500 следует ожидать заключения договора по страхованию. Сколько рекламных буклетов требуется распространить, чтобы с вероятностью, большей 0,9, можно было утверждать, что число договоров, заключенных в результате такой рекламной деятельности, окажется не больше 20?

5. На основе многолетних наблюдений установлено, что тест по курсу теории вероятностей с первого раза успешно выполняют примерно 60 из 100 студентов некоторого вуза. Оценить с помощью неравенств Маркова и Чебышева вероятность того, что из 250 наудачу выбранных студентов этого вуза: а) количество студентов, успешно прошедших тестирование, отклонится от среднего числа таких студентов по абсолютной величине более, чем на 10 человек; б) число студентов, которые не смогли выполнить тест с первого раза, окажется больше 125.

6. В вузе обучается 3650 студентов. Оценить с помощью неравенств Маркова и Чебышева вероятность того, что: а) в вузе окажется более 25 студентов, родившихся 1 апреля; б) число студентов, родившихся 1 апреля, отличается от среднего (ожидаемого) числа таких студентов по абсолютной величине не более чем на 4 человека.

7. В среднем 20% населения некоторого города пользуются услугами сети «Интернет». а) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность

того, что доля пользователей этой сети из 500 наудачу опрошенных жителей окажется в пределах от 18 до 22% (включительно). б) Ответ, полученный в пункте а), уточнить с помощью центральной предельной теоремы.

8. В среднем 10% населения некоторого города – пенсионеры. а) С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среди 1000 опрошенных доля пенсионеров окажется в пределах от 7 до 13% (включительно). б) Ответ, полученный в пункте а), уточнить с помощью центральной предельной теоремы.

9. На основе многолетних наблюдений установлено, что отклонение ежегодной доходности X акций компании «Ветерок» от её средней (прогнозной) доходности по абсолютной величине не более, чем на 100 рублей может произойти с вероятностью, равной 0,36. Оценить возможный риск от приобретения акций указанной компании (то есть меру колеблемости доходности от ожидаемой средней).

10.Некто приобрёл пакт акций компании «Амиго». На основе многолетних наблюдений установлено, что средняя ежегожная доходность пакета акций не меняется год от года и составляет a рублей, в то время как риск пакета (то есть мера колеблемости доходности пакета от ожидаемой доходности) равен σ рублей. Сколько лет владелец акций должен воздерживаться от продажи, чтобы с вероятностью, большей 0,9, можно было гарантировать, что средняя арифметическая ежегодного дохода пакета отклонится от его ожидаемой доходности не более, чем на σ рублей по абсолютной величине?

11.Среднее изменение курса акции компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более, чем на 3%.

12.Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено: а) не более 200 клиентов; б) боле 150 клиетнов.

13.Вероятность того, что акции, переданные на депозит, будут востребованы, равна 0,08. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что среди 1000 клиентов от 70 до 90 востребуют свои акции.

14.В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона – безработные. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что уровень безработицы среди 10000 опрошенных работоспособных жителей будет в пределах от 9 до 11% (включительно).

15. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

16. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X\text{-}M(X)| < 0{,}2$, если $D(X) = 0{,}004$.

17. Дано: $P(|X\text{-}M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$ и $D(X) = 0{,}009$. Используя неравенство Чебышева найти ε.

18. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

19. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева оценить вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

20. Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/4. Используя неравенство Чебышева оценить вероятность того, что число X появлений события будет заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 независимых испытаний.

21. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	0,3	0,6
p_i	0,2	0,8

. Используя неравенство Чебышева оценить вероятность того, что $|X\text{-}M(X)| < 0{,}2$.

22. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	0,1	0,4	0,6
p_i	0,2	0,3	0,5

. Используя неравенство Чебышева оценить вероятность того, что $|X\text{-}M(X)| < \sqrt{0{,}4}$.

ОТВЕТЫ

1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

16. 1) 2; 2) 6; 3) 6; 4) 3.

17. 1) 0; 2) 60%; 3) 70%; 4) 90%.

20.| A×B|=12; |B×A|=12.

21.| A×B|=8; | B×A|=8.

22. а) 40; б) 45.

23. 20.

24. а) 100; б) 100.

25. а) 380; б) 560.

26. а) 1; б).

27. а) 120; б) 480.

28. а) 1; б) 6.

29. а) 220; б) 10.

30. а) 47; б) 30.

6. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 29 & 4 & 27 \\ 17 & 14 & 19 \\ 14 & -5 & 11 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix} 36 & 36 \\ -4 & 15 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 14 & 16 & 23 & 23 \\ 19 & 19 & 31 & 29 \\ 17 & 24 & 11 & 28 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -10 & 10 \\ 4 & 10 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -7 & -10 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} -23 & 11 \\ -32 & -7 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 252 & 166 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} -8 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & -8 \\ -3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$.

2. 1)43; 2) –2; 3) –21; 4) 1; 5) 1; 6) –5; 7) 0; 8) 223; 9) 48; 10) 665; 11) 18; 12) 67; 13) –8; 14) –117.

3. 1) 8a+15b+12c-19d; 2) 2a-8b+c+5d; 3) 3a-b+2c+d;
4) 4t-x-y-z.

4. 1) $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -8 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $B^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -29 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $D^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

5) $E^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix}$; 6) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2/11 & 1/11 & 0 \\ 15/11 & -9/11 & -1 \end{pmatrix}$;

7) $G^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

5. 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 9 \\ 0 & -4 & 13 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 11 & 15/2 & -13 \\ -30 & -41/2 & 37 \\ 4 & 5/2 & -4 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

6.1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 2; 5) 4; 6) 3; 7) 4; 8) 3; 9) 4; 10) 3.

7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. 1) x_1=-1, x_2=2, x_3=3; 2) x_1=2, x_2=3, x_3=4; 3) x_1=-1, x_2=-2, x_3=1; 4) x_1=3, x_2=2, x_3=1; 5) система неопределенная; 6) решений не имеет;

2. 1) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=-2$;2) $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$; 3) $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=7$; 4) $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=-1$; 5) $x_1=6$, $x_2=4$, $x_3=-2$;6) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-2$.

3. 1) $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=-2$; 2) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=-1$; 3) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=0$; 5) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$; 6) $x_1=12/5$, $x_2=-4/5$, $x_3=-7$, $x_4=-1$;

4. 1) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=0$; 2) система имеет бесчисленное множество решений; 3) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$; 4) система решений не имеет; 5) $x_1=8$, $x_2=6$, $x_3=4$, $x_4=2$; 6) система имеет бесчисленное множество решений; 7) система имеет бесчисленное множество решений; 8) система имеет бесчисленное множество решений; 9) система несовместна; 10) система несовместна; 11) система имеет бесчисленное множество решений; 12) система имеет бесчисленное множество решений. 13) общее решение: $x_3=4/3x_1+2/3x_2$, $x_4=-25/2-2x_1-4x_2$, $x_5=-15/2-2x_1-4x_2$; $(1,-3,1/2,-5/2,5/2)+c_1(1,0,-1,-2,-2)+c_2(0,1,-2,-4,-4)$.

5. 1) например, общее решение: $x_1=8x_3-7x_4$, $x_2=-6x_3+5x_4$. Фундаментальная система решений: (8, -6, 1, 0), (-7, 5, 0, 1); 2) общее решение: $x_3=-5/2x_1+5x_2$, $x_4=7/2x_1-7x_2$. Фундаментальная система решений: (1, 0, -5/2, 7/2), (0, 1, 5, -7); 3) система имеет нулевое решение. Фундаментальной системы не существует; 4) общее решение: $x_4=-(9x_1+6x_2+8x_3)/4$, $x_5=(3x_1+2x_2+4x_3)/4$. Фундаментальная система решений: (1, 0, 0, -9/4, 3/4), (0, 1, 0, -3/2,1/2), (0, 0, 1, -2,1); 5) общее решение: $x_4=(-9x_1+3x_2-10x_3)/11$, $x_5=(-3x_1+x_2+4x_3)/11$. Фундаментальная система решений: C_1 (1, 0, 0, -9/11, -3/11))+C_2(0, 1, 0, 3/11,1/11)+C_3(0,0,1, -10/11,4/11); 6) общее решение: $x_1=0$, $x_2=(x_3-2x_5)/3$, $x_4=0$. Фундаментальная система решений: C_1(0, 1/3, 1, 0, 0)+C_2 (0, -2/3, 0, 0,1); 7) общее решение: $x_1=-3x_3-5x_5$, $x_2=2x_3+3x_5$, $x_4=0$. Фундаментальная система решений: C_1(-3, 2, 1, 0, 0)+C_2 (-5, 3, 0, 0,1).

8. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1. 1), 3), 6) линейно независима; 2), 4), 5) линейно зависима.

2. 1) $\mathbf{x}=6\cdot\mathbf{e_1}+3\cdot\mathbf{e_2}-2\cdot\mathbf{e_3}$; 2) $\mathbf{x}=4\cdot\mathbf{e_1}+\cdot\mathbf{e_2}+3\cdot\mathbf{e_3}$; 3) $\mathbf{x}=\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$; 4) $\mathbf{x}=2\cdot\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+4\cdot\mathbf{e_3}$; 5) $\mathbf{x}=-2\cdot\mathbf{e_1}+\cdot\mathbf{e_2}+3\cdot\mathbf{e_3}$; 6) $\mathbf{x}=2\cdot\mathbf{e_1}+\cdot\mathbf{e_2}+3\cdot\mathbf{e_3}$.

3. 1) $\mathbf{x}=-2\cdot\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$; 2) $\mathbf{x}=2\cdot\mathbf{e_1}-\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4}$; 3) $\mathbf{x}=3\cdot\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}-2\mathbf{e_4}$.

4. 1) $x_1=-27x_1'-71x_2'-41x_3'$; $x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3'$; $x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'$;

2) $x_1=-27x_1'-71x_2'-43x_3'$; $x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3'$; $x_3=4x_1'+12x_2'+8x_3'$;

3) $x_1=-2x_1'+x_3'-x_4'$; $x_2=-3x_1'+x_2'+x_4'$; $x_3=x_1'-2x_2'+2x_3'-x_4'$; $x_4=x_1'-x_2'+x_3'-x_4'$;

5. **d**=(2,-2,1);

6. 1) (6,-19); 2) (-3,3); 3) (3,2); 4 (-4,7,7); 5) (1,3,4);

7. 1) $\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -81 & -55 & 26 \\ 117 & 80 & -33 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{pmatrix}$;

8. 1) $x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 2) $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$; 4) $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

5) $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; 6) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, c (1,1,-1), где $c\neq0$;

7) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, $c_1(1,2,0)+c_2(0,0,1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно;
8) $\lambda_1=1$, c (1,1,1), $\lambda_2=\lambda_3=0$, c (1,2,3) где $c\neq0$.

9. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. 1) $\mathbf{e_1}(1,1,1)$, $\mathbf{e_2}(1,1,0)$, $\mathbf{e_3}(1,0,-3)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 2) матрица к диагональному виду не приводится.

11. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

9. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

1. а) y=3; б) x=2; в) y=x+1;

2. а) $3x-2y-7=0$; б) $x=3$; в) $y=1$;

3. A (2;-1), B (-1;3), C (2;4);

4. $x-y=0$; $x+y-2=0$;

5. $10^{1/2}$; $3x+y-11=0$;

6. AO: $2x-5y+4=0$; AE: $x-2y+2=0$; $29^{1/2}$;

7. $2x-y=0$; $\sqrt{5}/6$;

8. $a=6$, $b=4$; $F_1(2\sqrt{5};0)$, $F_2(-2\sqrt{5};0)$, $\varepsilon=\sqrt{5}/3$;

9. $a=2$, $b=\sqrt{3}$; $F_1(-\sqrt{7};0)$, $F_2(\sqrt{7};0)$, $\varepsilon=\sqrt{7}/2$ $y=\pm(\sqrt{3}/2)x$;

10. $x^2/16-y^2/9=1$;

11. (1;-5), (0;-4) и (2;-6), $x=1$, $y=-5$;

12. $y^2=x$, $x=-1/4$;

13. $7x+y-9=0$; $7x+y-34=0$;

14. $(x-5)^2+(y-2)^2=4$;

16. 1) $x=-1$; F (2;0); 2) $x=2$; F (-2;0); 3) $y=-3$; F (0;3); 4) $y=3$; F (0;-3).

10. ФУНКЦИЯ

1. 1) (-3;3), 2) [-2;2], 3) $(-\infty; -4)$, $(4;+\infty)$, 4) (1,3), 5) (-2,-1), 6) [-4,2], 7) множество пусто;8) $(-\infty;1)$, $(10;+\infty)$, 9) [-1,4]; 10) $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$.

2. 1) $(-\infty, 6/5)$, $(6/5, +\infty)$; 2) $(-\infty; 0)$, $(3;+\infty)$, 3) [1/3,5); 4) $(-\infty;2]$, $[3;+\infty)$, 5) $x=2$; 6) $(1/2, +\infty)$; 8) $(3/2;+\infty)$, 9) (0;2]; 10) $(-\infty;+\infty)$,11) $(-\infty;-4]$, $[-2;+\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$, (0; 1/3).

3. 1) четная; 2) ни четная, ни нечетная; 3) четная; 4) нечетная; 5) нечетная; 6) четная; 7) ни четная, ни нечетная; 8) нечетная; 9) нечетная; 10) нечетная; 11) четная; 12) нечетная.

4. 1) $\pi/2$; 2) 2π; 3) 2π; 4) $\pi/3$; 5) 2π; 6) π; 7) $2\pi/3$; 8) 3π; 9) 2π.

6. 1) 1/6; 2) 10; 3) –1; 4) 1; 5) 2/3; 6) 0; 7) ∞; 8) 0; 9) 1; 10) 0; 11) ∞; 12) 1; 13) $\sqrt{2}$; 14) 1/9; 15) 3; 16) 4/5; 17) 3; 18) 4; 19) ½; 20) 1; 21) 15/2; 22) 2; 23) $+\infty$; 24) 0; 25) $+\infty$; 26) –1/2; 27) $-\infty$; 28) ½; 29) ½; 30) 1; 31) $2/\pi$; 32) ½; 33) 2; 34) 2; 35) e^3; 36) e^{10}; 37) e^{a-b}; 38) 0; 39) e^{-4}; 40) 8; 41) 1; 42) 1; 43) ∞; 44) $1/\sqrt{e}$; 45) $\sqrt{e}$.

7. 1) точка устранимого разрыва первого рода; 2) разрыв второго рода; 3) разрыв первого рода; 4) функция непрерывная.

8. 1) точка устранимого разрыва первого рода; 2) непрерывна; 3) разрыв первого рода; 4) разрыв второго рода.

9. 1) x=2 –точка разрыва первого рода; 2) x=1, x=5 – точки разрыва второго рода; 3) разрыв второго рода; 4) x=3 – точка разрыва первого рода, x=5 – точка разрыва второго рода; 5) функция непрерывная; 6) x=-1 – точка разрыва первого рода.

10. 1) функция непрерывна; 2) имеет одну точку разрыва второго рода; 3) имеет две точки разрыва второго рода.

11. 1) x=-1/3 – точка разрыва второго рода; 2) x=0 – точка разрыва второго рода; 3) x=1 – точка устранимого разрыва; 4) x=0 – точка устранимого разрыва; 5) функция непрерывна; 6) x=2, x=3/2 – точки разрыва; 7) функция непрерывна; 8) x=±10 – точки разрыва второго рода; 9) x=0 – точка разрыва второго рода; 10) функция непрерывна; 11) $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ – точки разрыва второго рода; 12) x=-1 – точка разрыва второго рода.

13. 1) 1; 2) 1/3; 3) 2; 4) –5.

11. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. $\dfrac{e^{4x}}{\sqrt[4]{(1+e^{4x})^3}}$; 2) $\dfrac{16x(x^2-1)^3}{(x^2+1)^5}$; 3) $\dfrac{e^{3x}(9x+1)-5}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $32x^3\ln^2x$; 5) $\dfrac{4}{9x^2-1}$;

6) $\dfrac{2x^4-3x^2-1}{x(x^4-1)}$; 7) $3tg^4x$; 8) $x^2\ln x\,(3\ln x+2)$; 9) $e^x\cos x$; 10) $-2e^{\sqrt{\ln x}}$;

11) $5e^{2x}(xe^{2x}+3)^4(2x+1)$; 12) $(2x+2^x\ln 2)\cos(x^2+2^x)$; 13) $x\ln\dfrac{1-x}{1+x}+1$;

14) $\dfrac{\sin x(\ln\cos x-1)}{\cos^2 x}$; 15) $\dfrac{1-\sin x\cdot\sin 2x}{\sin x}$; 16) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$; 17) $e^x(ctgx+\ln\sin x)$;

18) $-\dfrac{1+x\,arcctgx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 19) $e^{1/\cos x}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; 20) $\dfrac{4xa^2}{a^4-x^4}$; 21) $\dfrac{2}{1-4x^2}$;

22) $arctg\sqrt{2x-1}$;

23) $\frac{1}{2x\ln\sqrt{x}}$; 24) $\frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-e^{4x})^2 e^{4x}}}$; 25) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; 26) $3\left(\ln(1-x^2)-\frac{2x^2}{1-x^2}\right)$;

27) $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$; 28) $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}-\frac{1}{x^2}$; 29) $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$; 30) $3x^2\sin 2x^3$.

2. 1) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; 2) $x^{x^x}x^x(\ln^2 x+\ln x+1/x)$;

3) $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$; 4) $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$;

5) $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$; 6) $x^2 e^{x^2}\sin 2x(3+2x^2+2x\operatorname{ctg}2x)$;

7) $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}\right)$; 8) $2x^{\ln x-1}\ln x$;

9) $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; 10) $x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$;

11) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\left[(\arcsin x)^2-1\right]}\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$; 12) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;

13) $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; 14) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right)$; 15) $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$;

16) $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\cdot\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

3. 1) $(3t^2-1)/2t$; 2) –1: 3) t/2; 4) (1-tgt)/(1+tgt).

4. $\frac{1}{3y^2-4}$.

5. $\frac{1}{2^s\ln 2}\sqrt{1-2^{2s}}$, $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg}t$.

6. а) x+2y-4=0; б) y=2.

7. а) y+1=0, 6x+y+4=0; б) 12x+9y+4=0, 12x-36y-49=0; в) 4x-y-9=0, 4x+y+1=0.

8.1) $-\frac{2x+y}{x+2y}$; 2) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 3) $\frac{2a}{3(1-y^2)}$; 4) $\frac{1}{2(1+\ln y)}$.

9. 1) 3sin2x·sin4xdx; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$; 3) $\dfrac{-\operatorname{tg}x\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}$; 4) $-2x\cdot 2^{-x^2}\ln x dx$;

5) (lnx+1) dx; 6) $\left(3x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)dx$; 7) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(2x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+x^2\cos\sqrt{x}\right)dx$;

8) $\dfrac{(x-3)dx}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$; 9) $\dfrac{1}{1+x^2}\left[\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x+x\right]dx$; 10) $\dfrac{dx}{1-\sin x}$;

11) $\dfrac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$; 12) $\dfrac{x\left[2(\arcsin x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]}{(\arcsin x)^2}dx$.

10. 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 2) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 3) $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$; 4) $\dfrac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$; 5) 2cos2x;

6) –2cos2x; 7) $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$; 8) $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; 9) $\dfrac{-4}{(2x-3)^2}$; 10) 2cosx-xsinx;

11) $\dfrac{2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; 12) $\dfrac{-4}{(x-1)^3}$.

11. 1) $\dfrac{4(3x-4)}{(4+x^2)^3}$; 2) $e^{-x}(3-x)$; 3) $-2e^x(\cos x+\sin x)$;

5) $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$; $(-1/x^2)$.

12. 1) $\dfrac{1+t^2}{4t^3}$; 2) $\dfrac{3}{4e^t}$; 3) $-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}}$; 4) $\dfrac{3t^2-1}{4t^3}$; 5) $\dfrac{1}{3a\cos^4 t+\sin t}$;

6) $\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$.

13. 1) 0,5; 2) 1; 3) 3/5; 4) 2; 5) 1/3; 6) 1; 7) 2/3; 8) 0; 9) –1; 10) 0; 11) 0; 12) +∞; 13) 0; 14) +∞; 15)1; 16) 1.

14. 1) возрастает на (-∞; +∞); 2) возрастает на (-∞; 0) и убывает на (0; +∞); 3) возрастает на (1/2; + ∞) и убывает на (0; ½); 4) возрастает на (-∞; -1) и (1; +∞) и убывает на (-1;1); 5) возрастает на (-∞; -1) и (1; +∞) и убывает на (-1;1); 6) возрастает на (-∞; -2) и (2; +∞) и убывает на (-2;2).

15. 1) при x=1/2 – минимум, f (1/2)=-1/11; 2) при x=1/e – минимум, f (1/e)=-1/e; 3) при x=-1 – минимум, f (-1)=17/12; при x=0 – максимум, f (0)=2; при x=3 – минимум, f (3)=-37/4; 4) при x=-1 – минимум, f (-1)=1/12;

при x=1 – максимум, f (1)=1/2; 5) при x=0 – минимум, f (0)=0; при x=2 – максимум, f (2)=$4e^{-2}$; 6) при x=-1 – минимум, f (-1)=-3; при x=0 – максимум, f (0)=2, при x=2 – минимум, f (2)=-30.

16. 1) x=1 – вертикальная асимптота, y=5 – горизонтальная асимптота;
2) x=1/2 – вертикальная асимптота, y=x+1/2 – наклонная асимптота;
3) x=±1 – вертикальные асимптоты, y=2x+1 – наклонная асимптота;
4) x=0 – вертикальная асимптота, y=x+1 – наклонная асимптота;
5) две различные наклонные асимптоты: $y=x-\pi$ при $x\to+\infty$ и $y=x+\pi$ при $x\to-\infty$; 6) x=3 – вертикальная асимптота, y=1 – горизонтальная асимптота.

17. 1) x=2 – точка перегиба, на $(-\infty; 2)$ – выпуклость вверх, на $(2; +\infty)$ – вниз; 2) x=-2 и x=1 – точки перегиба, на $(-\infty; -2)$ – выпуклость вниз, на (-2;1) – вверх, на $(1; +\infty)$ – вниз; 3) на $(-\infty; +\infty)$ – выпуклость вниз, точек перегиба нет; 4) x=-1 и x=1 – точки перегиба, на $(-\infty; -1)$ – выпуклость вверх, на (-1; 1) – вниз, на $(1; +\infty)$ – вверх; 5) x=1/2 – точка перегиба, на $(-\infty; ½)$ – выпуклость вверх, на $(1/2; +\infty)$ – вниз; 6) на $(-\infty; +\infty)$ – выпуклость вниз, точек перегиба нет.

19. 1) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ 2) $3^n\sin\left(3x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) $e^{x/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; 4) $2^{3x}(3\ln 2)^n$;
5) $3^x(\ln 3)^n$; 6) $4^n n!$.

12. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. 1) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$; 2) $\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{5}{6}x^5\cdot\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\ln|x|+C$; 3) x-arctgx+C;

4) $x+\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$; 5) $\dfrac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$; 6) $\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$;

7) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$; 8) $x^5-\dfrac{1}{3x^3}+C$; 9) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-\ln|x|+C$;

10) x^3+arctgx+C; 11) $\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+\operatorname{arctg}x+C$; 12) cosx-ctgx+C;

13) –(ctgx+x)+C; 14) -cosx+5sinx+C; 15) $\dfrac{x^4-1}{2x^2}-2\ln|x|+C$;

16) $3\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+C$; 17) $\dfrac{2(x+2)}{\sqrt{x}}+C$; 18) $4\ln|x|-\dfrac{8}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}+C$;

19) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$; 20) 2arctgx-3arcsinx+C; 21) tgx-ctgx+C.

2. 1) (sin5x)/5+C; 2) –(cos (3x+5))/3+C; 3) $(e^{2x})/2$; 4) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;

5) $[(2+5x)^{10}]/50+C$; 6) $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C$; 7) $\frac{1}{3}(2x-5)^{3/2}+C$;

8) $-\frac{3}{28}(3-7x)^{4/3}dx+C$; 9) $\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C$; 10) $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$;

11) $6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)+C$;

12) $x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C$; 13) $\frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}+C$;

14) $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$; 15) $\frac{1}{3}\ln|1+3\sin x|+C$; 16) $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$;

17) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$; 18) ln|1+lnx|+C; 19) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C$; 20) $\frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5}$.

3. 1) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; 2) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 3) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$;

4) $-e^{-x}(x+1)+C$; 5) $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)+C$; 6) $-2e^{-x/2}(x^2+4x+8)+C$; 7) xsinx+cosx+C

8) sinx-xcosx+C; 9) ((x+3)/3) sin3x+(cos3x)/9+C; 10) x $[1+(\ln x-1)^2]+C$;

11) $x\ln(x^2+2)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 12) $e^x(x^2-2x+2)+C$.

4. 1) $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$; 2) 6; 3) ln2; 4) e (e-1); 5) 1/3; 6) 2; 7) 1; 8) π/4;

9) π/4-arctg (π/4); 10) 21/8; 11) 10/3; 12) 0; 13) 5π; 14) 1; 15) e-2;

16) (π/√3)- ln2;17) 0; 18) $(e^2-5)/e$; 19) $(\pi/a^4)/16$; 20) 4-2ln3; 21) 2ln2-1;

22) 2-ln2; 23)1/2; 24) (1-ln2)/2; 25) ln (3/2).

5. 1) 1; интегралы 2) и 30 расходятся; 4) при n≤1 расходится, при n>1 1/(n-1); 5) 1; 6) ½; 7) π/4; 8) ln2; 9) 16; 10) расходится; 11) –1; 12) 1/(1-α) при α<1, расходится при α≥. 13) 1/3; 14) 1; 15) расходится.

6. 1) $2(e^{x/2}-e^{-x/2})+C$; 2) $-\frac{1}{4(\ln x+1)^4}+C$; 3) $\frac{3}{2}(2+\ln x)^{4/3}+C$;

4) $-\frac{2}{75}(1-6x^2)^{5/4}+C$; 5)-Ln (e+1)+1+Ln2; 6) arctg (e)-π/4; 7) $\frac{\pi^3}{64}+1$; 8) 1/3;

9) -1/3; 10) $\frac{Ln^3x}{3}+Lnx+C$; 11) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(3-\frac{1}{2}x\right)^6}+C$; 12) Ln (Lnx+3)+C;

13) $\frac{125}{24}\sqrt[5]{25}-\frac{5}{24}$; 14) $\frac{53}{24}-\frac{1}{3}\sqrt{2}$; 15) -Ln (5)+2+2Ln (3); 16) 1+Ln3;

17) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{9}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{49}$; 18) $\frac{3}{8}\cdot\left(9+x^2\right)^{4/3}+C$; 19) $5\arcsin(x)+3\sqrt{1-x^2}+C$;

20) $2\ell^{\sqrt{x}}+C$; 21) $\frac{(2x^2+5)^{11}}{44}+C$; 22) $-\frac{1}{Lnx}+C$.

13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. 1) $\begin{cases} x\ge -1, \\ y\ge 4. \end{cases}$ $\begin{cases} x\le -1, \\ y\le 4 \end{cases}$; 2) $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 1$; 3) $|x|\le 4$, $|y|\le 5$;

4) $y>x-6$, $y\ne 0$; 5) $y\ne 2$; 6) $x^2+y^2\le a$; 7) первый и третий квадранты;

8) $x^2+y^2\le 1$; 9) вся плоскость, кроме прямой y=x; 10) точки внутри угла $|y|\le|x|$ и на его сторонах; 11) квадрант плоскости $x\ge 0$, $y\ge 0$.

2. 1) $-\frac{x}{y^2}$; $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{2y}{x^2+y^2}$; 3) $-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{x}{x^2+y^2}$;

4) $-3x^2\sin(x^3+2y^4)$, $-8y^3\sin(x^3+2y^4)$; 5) $e^{-xy}(1-xy)$, $-x^2e^{-xy}$;

6) $2\sin y\cdot\cos(2x+y)$, $2\sin x\cdot\cos(x+2y)$; 7) $-\frac{e^{-\frac{x}{y^2}}}{y^2}$, $-\frac{2xe^{-\frac{x}{y^2}}}{y^3}$; 8) $-\frac{y^2}{(x-y)^2}$, $\frac{x^2}{(x-y)^2}$; 10) $\frac{3y}{(3y-2x)^2}$, $-\frac{3x}{(3y-2x)^2}$; 11) ctg (x-2t), -ctg (x-2t).

10. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$.

24. *-2x**i**-2y**j***.

25. 6**i**+4**j**.

26. $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$.

27. cosα≈0,99, $\alpha=8^0$.

28. cosα≈-0,199, $\alpha\approx101^0 30'$.

29. (-1/3;3/4), (7/3;-3/4).

30. 0,32$\boldsymbol{i}$-0,64$\boldsymbol{j}$; $|\mathrm{gradz}|=0,32\sqrt{5}$.

31. $-\sqrt{13}$.

32. а) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; б) $2\sqrt{3}-3$.

33. $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}y-4z$; $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}\Big|_M=-6$.

34. –2**i**-0,5**j**+2/3**k**.

35. $\frac{\sqrt{17}}{17}$.

36. 1) в точке (2;0) минимум; 2) критическая точка (0;0); экстремума нет; 3) в точке (1; -1/2) минимум; 4) в точке (π/3;π/3) максимум; 5) в точке (-2;0) минимум; 6) в точке (2;4) минимум; 7) в точке (1/3; 1/3) максимум; 8) в точке $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ минимум; 9) экстремума нет; 10) минимум в точке (1; -1/2); 11) максимум в точке (4;4).

37. 1) минимум при x=y=1; 2) минимум при x=y=-2 и максимум при x=y=2; 3) максимум при x=y=±1, минимум при x=-y=±1.

14. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. 1) 1; 2) $(e-1)^2$; 3) π/12; 4) ln (4/3).

2. 1) $\frac{2}{3}a^{3/2}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. 13.3. 1) 0; 2) 33/140; 3) 9/4; 4) –2.

15. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. 1) $y^2+2y+\mathrm{Ln}\,(y-1)^2=-2/x+C$, y=1; 2) $y=(x+C)^3$, y=0;

3) $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{3-y}}{y}=C, y=0, y=3$; 4) $(x^3+5)(y^3+5)=C$;

5) $2\sqrt{y}+\operatorname{Ln}|y|-2\sqrt{x}=C$; 6) $y=Ce^{1/x}$; 7) $x+y=\operatorname{Ln}C\,(x+1)(y+1)$; 8) $r=Ce^{1/\varphi}+a$;

9) $s^2=(t^2-1+Ct)/t$; 10) $y=Ce^{-1/(x\cdot x)}$; 11) $2y=\frac{Cx^2}{(1+x)^2}-1$; 12) $y=\frac{C-x}{1+Cx}$.

1.2. 1) $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$; 2) $x^2-y^2=Cx$; 3) $s^2=2t^2\ln(C/t)$; 4) $y=Cx^3-x^2$; 5) $\sin\frac{y}{x}+\ln x=C$; 6) $y=\frac{x}{C-\ln x}$; 7) $y^2=Cxe^{-y/x}$; 8) При $x>0$ $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x}$, при $x<0$ $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln Cx$.

1.3. 1) $y=Ce^{4x}+\frac{1}{17}(\sin x-4\cos x)$; 2) $y=(x+C)\,e^x$; 3) $y=C/x+x^2$;

4) $y=C\,(1+x^2)$; 5) $y=\sqrt{\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}}$; 6) $y=(x^2+C)\sin x$; 7) $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$;

8) $y=Cx^3-x^2$; 9) $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$; 10) $y=\frac{1}{x\ln Cx}$; 11) $y=\ln x+C/x$;

12) $y=\frac{x-1}{3}+\frac{C}{\sqrt{2x+1}}$; 13) $y=1+\frac{\ln C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos x}$; 14) $y^2=\frac{1}{1+Ce^{x^2}}$;

15) $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$; 16) $y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+C}$.

2.1. 1) $y=3\ln x+2x^2-6x+6$; 2) $y=1-\cos 2x$; 3) $y=C_1x+x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$;
4) $y=1/x+C_1\ln x+C_2$; 5) $y^2=-C_1x+C_2$; 6) $y=C_1\sin x-x-(\sin 2x)/2+C_2$;
7) $y^3+C_1y+C_2=3x$; 8) $y=C_1x\,(\ln x-1)+C_2$; 9) $\operatorname{ctg}y=C_2-C_1x$;

10) $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$; 11) $y=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$ (при $C_1>0$),

$\frac{1}{2\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$ (при $C_1<0$), C_2-1/x (при $C_1=0$);

12) $y=\frac{x^3}{12}-\frac{x}{4}+C_1\operatorname{arctg}x+C_2$; 13) $C_1y^2=1+(C_1x+C_2)^2$; 14) $y=(C_1x+C_2)^2$;

15) $4(C_1y-1)=(C_1x+C_2)^2$; 16) $y=C_2-C_1\cos x-x$.

2.2. 1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$; 3) $y=e^x(C_1+C_2x)$;
4) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 5) $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 6) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$.

2.3. 1) $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}+5x^2-12x+12$; 2) $y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\cos 3x-6\sin 3x$;
3) $y=e^{3x}(C_1+C_2x)+x/3+2/9-2e^x$; 4) $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-2x\cos 2x)$;
6) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$; 7) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+0{,}25\cdot 2^{1/2}(\cos\pi/4-2x)$;
8) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+e^x$; 9) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}-3(x^2+x+1{,}5)$;
10) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+(5\cos 3x-\sin 3x)/6$.

2.4. 1) $y=\left(\dfrac{x^2\ln x}{2}-\dfrac{3x^2}{4}+C_1+C_2x\right)e^{-2x}$; 2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+1/(2\cos x)$;

3) $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+(C_2-x-1/(2\operatorname{ctg} x))\sin 2x$;

4) $y=(C_1+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\dfrac{x}{2}+C_2x)e^x$.

3. 1) $x=C_1e^t+C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^t-3C_2e^{-3t}$; 2) $x=C_1+e^t+C_2e^{-2t}$, $y=C_1+e^t-C_2e^{-2t}$;
3) $x=2e^{-t}+C_1e^t+C_2e^{-2t}$, $y=3e^{-t}+3C_1e^t+2C_2e^{-2t}$; 4) $x=e^{-2t}(1-2t)$.

16. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1. а) 1/9; б) 1/9; в) 5/12.

2. 1/36.

3. а) 1/120; б) 1/60.

4. а) 1/720; б) 1/360; в) 1/120.

5. а) 1/360; б) 1/180; в) 1/60.

6. а) 1/120; б) 1/120; в) 1/60.**7**. а) 0,2817; б) 0,2167.

8. а) 1/30; б) 1/2; в) 29/30.

9. а) 0,0173; б) 0,1423.

10. а) 0,0511; б) 0,2384.

11. а) 0,5712; б) 0,0648.

12. а) 9/49; б) 2/245; в) 198/245; г) 47/245.

13. 5/26.

14. а) 2/3; б) 1/3.

15. а) 1/90; б) 1/81.

16. а) 1/18; б) 1/2.

17. 3/4.

18. 1/2.

19. 24/91.

20. 0,1.

21. а) $\approx 0{,}65$; б) $\approx 0{,}00005$.

22. 1/720.

23. 0,5.

24. $\approx 0{,}4$.

25. 14/55.

26. а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

17. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. 0,0976.

2. 0,3133.

3. а) 0,9435; б) 0,4217.

4. а) 0,4109; б) 0,8512.

5. а) 0,2381; б) 0,2619.

6. а) 0,0175; б) 0,7982.

7. а) 0,06; б) 0,44; в) 0,29; г) 0,79

8. а) 0,648; б) 0,954.
9. а) 0,288; б) 0,018; в) 0, 108.
10. 0,91.
11. 0,4444.
12. 0,24725.
13. 67/91.
14. 5/6.
15. 0,14.
16. 0,38.
17. 0,7.
18. 0,432.
19. 0,384.
20. а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.

21. а) 0,6976; б) 0,9572.
22. 0,2.
23. 1/495.
24. 7/24.
25. 1/14.

18. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

1. 0,977.

2. 0,935.

3. 0,7667.

4. 0,5.

5. 0,1364.

6. 0,02.

7. 0,3652.

8. Из второй группы.

9. 0,4444.

10. 0,4545.

11. 0,1304.

12. 0,24.

13. 2/3.

14. 0,89.

15. 0,85.

16. 0,78.

17. 0,5.

18. 0,4.

19. 10/17.

20. Вероятнее, что винтовка была без оптического прицела (вероятность того, что винтовка была без оптического прицела, равна 24/43; с оптическим прицелом – 19/43).

21. 3/7.

22. 5/11.

23. 0,1.

24. 4/29.

25. 20/29.

26. 10/19.

19. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ (ПУАССОНА И МУАВРА-ЛАПЛАСА)

1. а) 0,4096; б) 0,8192; в) 0,5904; г) 0,9984.

2. 0,9655.

3. а) 0,9844; б) 0,1035.

4. 14.

5. 23.

6. 0,972.

7. а)4; б) 0,2508.

8. а) 0,0922; б) 0,0961.

9. 113; 0,0749.

10. 100; 0,0515.

11. 300; 0,0364.

12. 0,0142.

13. 0,0803.

14. 0,0669.

15. а) 0,0054; б) 0,9777.

16. а) 0,97; б) 0,961.

17. 55.

18. а) (0,88; 0,92); б) 0,1396.

19. 1089.

20. 0,1563.

21. 0,1246.

22. а) 0,2240; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,9502.

23. а) 0,6472; б) 0,5768.

24. а) 0,0613; б) 0,9197.

25. 0,5.

26. Вероятнее выиграть две партии из четырех: $P_4(2)=6/16$; $P_6(3)=5/16$.

27. а) 3/16; б) 13/16.

28. 0,1792.

29. 0, 74.

30. а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62.

31. 8/27.

32. 0,0231.

33. 0,0041.

34. 0,04565.

35. 0,0782.

36. а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056.

37. а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5.

38. 0,0375.

39. 0,18.

40. а) 0,0613; б) 0,9197; в) 0,019; г) 0,632.

20. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

№	M (x)	D (x)	σ(x)	P ($x_1 \le x \le x_2$)	a
5 а)	14,4	17,24	4,15		
5 б)	5	5	2,24		
5 в)	3,3	2,01	1,42		
5 г)	1,6	1,44	1,2		
5 д)	1,3	9,01	3,01		
5 е)	1,9	1,29	1,14		
6 а)	2,67	0,8889	0,94	1/2	
6 б)	2,5	2,0833	1,44	0,4	
6 в)	0,5	0,75	0,87	2/3	
6 г)	0	1,3333	1,15	1/2	

6 д)	4	2	1,41	5/12	
6 е)	-0,33	0,1481	0,38	0,25	
7 а)	1,58	0,0764	0,28	0,525	1/2
7 б)	2,33	0,0556	0,24	0,91	-2
7 в)	4,33	0,2222	0,47	0,25	-0,5
7 г)	1,07	0,1956	0,44	0,371	0,25
7 д)	1,5	0,45	0,67	13/27	2/9
7 е)	0,67	0,2222	0,47	0,75	0,5

7. а) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<1, \\ \dfrac{x(x-1)}{2}, & \text{если} \quad 1\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<2, \\ -(x^2-6x+8), & \text{если} \quad 2\le x\le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<3, \\ \dfrac{(x-3)^2}{4}, & \text{если} \quad 3\le x\le 5, \\ 1, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

г) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2(8-x^2)}{2}, & \text{если} \quad 0\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

д) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2(9-2x)}{27}, & \text{если} \quad 0\le x\le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

е) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x(4-x)}{27}, & \text{если} \quad 0\le x\le 2,. \\ 1, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

8. а) $\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{array}$; M (x)=2; D (x)=0,6; σ(x)=0,7746; б) $\begin{array}{c|c|c} 4 & 7 & 9 \\ \hline 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{array}$;

M (x)=7,2; D (x)=3,36; σ(x)=1,833.

9. $Z:\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} z_k & -6 & -4 & -3 & -1 & 3 & 5 \\ \hline p_k & 0,12 & 0,08 & 0,3 & 0,2 & 0,18 & 0,12 \end{array}$; M (z)=-1; D (z)=12,12.

10. $Z:\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} z_k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p_k & 0,05 & 0,3 & 0,2 & 0,3 & 0,15 \end{array}$; M (z)=2,2.

13. $Z:\begin{array}{c|c|c|c|c} z_k & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline p_k & 1/3 & 1/3 & 1/4 & 1/12 \end{array}$; M (z)=49/12.

14.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

.

15.

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

.

16.

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	0,1	0,09	0,081	...	$0,9^{k-1}\cdot 0,1$	...

.

17. x_3=21, p_3=0,2.

18. p_1=0,4, p_2=0,1, p_3=0,5.

20. P (0<X<1/3)=1/4.

21. P (-1<X<1)=1/3.

22. а) 0; б) 0,5; в) 0,5; г) 1.

23. а) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 2, \\ 0,5, & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 0,7, & \text{при} \quad 4 < x \le 7, \\ 1, & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$;

б) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 3, \\ 0,2, & \text{при} \quad 3 < x \le 4, \\ 0,3, & \text{при} \quad 4 < x \le 7, \\ 0,7, & \text{при} \quad 7 < x \le 10, \\ 1, & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$.

$$\textbf{24.}\ \text{а) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ \cos x, & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/2, ; \\ 0, & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0, \\ 2\cos 2x, & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/4, . \\ 0, & \text{при} \quad x > \pi/4. \end{cases}$$

$$\textbf{25.}\ \text{а) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1-\cos x, & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/2, ; \\ 0, & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ï ðè} \quad x \le 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{ï ðè} \quad 1 < x \le 2, . \\ 1, & \text{ï ðè} \quad x > 2. \end{cases}$$

26. а) M (Z)=11; б) M (Z)=30.

27. а) D (Z)=61; б) D (Z)=69.

21. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$\textbf{1}.\ \rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 3, \\ \frac{1}{3}, & \text{если} \quad 3 \le x \le 6, ; \\ 0, & \text{если} \quad x > 6. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 3, \\ \frac{x-3}{3}, & \text{если} \quad 3 \le x \le 6, ; \\ 1, & \text{если} \quad x > 6. \end{cases} \quad M\ (x)=4{,}5;$$

D (x)=0,75; σ(x)=0,87; P (4<x<5)=0,3333.

$$\textbf{2}.\ \rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -5, \\ \frac{1}{20}, & \text{если} \quad -5 \le x \le 15, ; \\ 0, & \text{если} \quad x > 15. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < -5, \\ \frac{x+5}{20}, & \text{если} \quad -5 \le x \le 15, ; \\ 1, & \text{если} \quad x > 15. \end{cases}$$

M (x)=5; D (x)=33,3333; σ(x)=5,77; P (0<x<5)=0,25.

3. $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<9,\\ \dfrac{1}{6}, & \text{если} \quad 9\le x\le 15,\\ 0, & \text{если} \quad x>15.\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<9,\\ \dfrac{x-9}{6}, & \text{если} \quad 9\le x\le 15,\\ 1, & \text{если} \quad x>15.\end{cases}$;

M (x)=12; D (x)=3; σ(x)=1,73; P (11<x<14)=0,5.

4. $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<16,\\ \dfrac{1}{4}, & \text{если} \quad 16\le x\le 20,\\ 0, & \text{если} \quad x>20.\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<16,\\ \dfrac{x-16}{6}, & \text{если} \quad 16\le x\le 20,\\ 1, & \text{если} \quad x>20.\end{cases}$;

M (x)=18; D (x)=1,3333; σ(x)=1,15; P (17<x<22)=0,75.

5. $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{10}, & \text{если} \quad 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{если} \quad x>10.\end{cases}$; M (x)=5; D (x)=8,3333; P (x<5)=0,5.

6. $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$; M (x)=1; D (x)=0,3333; P (x<1)=0,5.

7. $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{5}, & \text{если} \quad 0\le x\le 5,\\ 0, & \text{если} \quad x>5.\end{cases}$; M (x)=2,5; D (x)=2,0833; P (x<4)=0,8.

8. $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ 2\cdot \ell^{-2x}, & \text{если} \quad x\ge 0\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ 1-\ell^{-2x}, & \text{если} \quad x\ge 0\end{cases}$;

M (x)=σ(x)=0,5; P (2<x<8)=0,0183.

9. P (2<x<5)=0,2514; D (x)=6,25; σ(x)=2,5.

10. а) λ=5; D (x)=0,04; б) $\rho(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ 5\cdot \ell^{-5x}, & \text{если} \quad x\ge 0\end{cases}$;

$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ 1-\ell^{-5x}, & \text{если} \quad x\ge 0\end{cases}$; в) P (0,4<x<1)=0,1286.

11. P (x≥50)=0,6065.

12. P (x≥100)=0,0498.

13. P (0,02<X<0,08)= 0,6.

14. P (2<X<5)=0,6.

15. M (X)=4.

16. M (X)=5.

17. D (X)=3; σ(X)=$\sqrt{3}$.

18. а) f (x)=$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$ F (x)= $\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-5x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$

б) f (x)=$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 6e^{-6x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$ F (x)= $\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-6x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$

19. P (0,13<X<0,7)= 0,555.

20. P (1<X<2)= 0,038.

21. а) M (X)=1/λ; б) M (X)=0,2.

22. а) D (X)=1/λ^2; σ(X)=1/λ; б) D (X)=0,01; σ(X)=0,1.

23. A_s =2.

24. E_k =6.

22. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Нормальный закон распределения: а; б; д; е; з.

2. 0,6826.

3. 0,6247.

4. 2.4%.

5. а) 0,99865; б) 0,8413; в) 0,00135.

6. 0,02815.

7. а) 0,97585; б) 0,99865; в) 0,99865.

8. 0,673.

9. а) 0,2514; б) 0,33.

10. а) 0,0228; б) 0,0228; в) 0,8185.

11. 0,3981.

12. 0,2.

13. 0,00068.

14. 0,4795.

15. 0,0005.

16. а) 15,36; б) 3,23.

17. σ=1,48a.

18. а) 0,1587; 0,0228; 0,00135; б) 0,3173;0,0455; 0,0027; в) 0,6827; 0,9545; 0,9973.

19. а) 0,002; б) 0,613; в) 0,341; г) 0,781.

20. $M(X) \approx 15{,}2$; $\sigma(X) \approx 3{,}1$.

21. $M(X) \approx 28{,}6$; $\sigma(X) \approx 25{,}5$; $P(35 \le X \le 45) \approx 0{,}29$.

22. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{8}}$.

23. $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{32}}$.

24. $M(X)=1$; $D(X)=25$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

26. $P(15<X<25)=0{,}6826$.

27. $P(12<X<14)=0{,}1359$.

28. $P(|X|<0{,}7)=0{,}92$.

29. $P(0<X<10)=P(10<X<20)=0{,}3$.

30. $P(35<X<40)=P(10<X<15)=0{,}2$.

31. а) Mo (X)=3, Me (X)=3; б) Mo (X)=1, Me (X)=1.

23. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

1. а) $X:\dfrac{x_i}{p_i}\left|\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{array}\right.$; $Y:\dfrac{y_j}{p_j}\left|\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline 0{,}16 & 0{,}5 & 0{,}34 \end{array}\right.$;

б) $Y\big|_{X=0}:\dfrac{y_j}{p_j}\left|\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{array}\right.$; в) $P(X<2;\ Y<1)=0{,}35$. Зависимы.

2. а) $X:\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c}0 & 1\\ \hline 0,3 & 0,7\end{array}$; $Y:\dfrac{y_j}{p_j}\begin{array}{|c|c|c}-1 & 0 & 1\\ \hline 0,3 & 0,5 & 0,2\end{array}$; б) $X\big|_{Y=1}:\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c}0 & 1\\ \hline 0 & 1\end{array}$;

в) P (X≥1; Y≤0)=0,5. Зависимы.

3. а) $X:\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c|c}0 & 1 & 2\\ \hline 0,04 & 0,32 & 0,64\end{array}$; $Y:\dfrac{y_j}{p_j}\begin{array}{|c|c|c}0 & 1 & 2\\ \hline 0,16 & 0,48 & 0,36\end{array}$;

б) $Y\big|_{X=1}:\dfrac{y_j}{p_j}\begin{array}{|c|c|c}0 & 1 & 2\\ \hline 0,16 & 0,48 & 0,36\end{array}$; в) P (X=1; Y>0)=0,2866. Независимы.

4. а) $X:\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c}0 & 1\\ \hline 0,714 & 0,286\end{array}$; $Y:\dfrac{y_j}{p_j}\begin{array}{|c|c|c}6 & 11 & 12\\ \hline 0,714 & 0,238 & 0,048\end{array}$;

б) $X\big|_{Y=12}:\dfrac{x_i}{p_i}\begin{array}{|c|c}0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}$; в) P (X=1; Y=11)=0. Зависимы.

6. $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_i & 3 & 10 & 12\\ \hline p_i & 0,27 & 0,43 & 0,30\\ \hline\end{array}$; $\begin{array}{|c|c|c|}\hline y_j & 4 & 5\\ \hline p_j & 0,55 & 0,45\\ \hline\end{array}$

7. $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline x_i & 26 & 30 & 41 & 50\\ \hline p_i & 0,14 & 0,42 & 0,19 & 0,25\\ \hline\end{array}$; $\begin{array}{|c|c|c|}\hline y_j & 2,3 & 2,7\\ \hline p_j & 0,29 & 0,71\\ \hline\end{array}$.

8. а) $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_i & 2 & 5 & 8\\ \hline p_i & 0,20 & 0,42 & 0,38\\ \hline\end{array}$; $\begin{array}{|c|c|c|}\hline y_j & 0,4 & 0,8\\ \hline p_j & 0,80 & 0,20\\ \hline\end{array}$; б) $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_i & 2 & 5 & 8\\ \hline p_i & 3/16 & 3/8 & 7/16\\ \hline\end{array}$;

в) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline y_j & 0,4 & 0,8\\ \hline p_j & 5/7 & 2/7\\ \hline\end{array}$. **9.** а) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_i & 3 & 6\\ \hline p_i & 5/7 & 2/7\\ \hline\end{array}$; б) $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline y_j & 10 & 14 & 18\\ \hline p_j & 5/14 & 5/28 & 13/28\\ \hline\end{array}$.

24. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. а) P (X>250)<0,8; б) P (X≤300)>1/3.

2. а) P (X>1100)<10/11; б) P (X≤1500)>1/3.

3. а) P (X>15)<2/3; б) P (X≤20)>1/2.

4. n≤1000.

5. а) P (|X-150|10)<0,6; б) P (X>125)<0,8.

6. а) P (X>25)<0,4;

б) P (|X-10|≤4) >55/146.

7. а) P (|X-0,2|≤0,02) >0,2; б) P (|X-0,2|≤0,02)≈0,7372.

8. P (|X-0,1|≤0,03) >0,9; б) P (|X-0,1|≤0,03)≈0,99862.

9. Риск акций компании превышает 80 рублей.

10. По меньшей мере 10 лет.

11. P≤0,1.

12. а) P≥0,5; б) P≤2/3.

13. P≥0,264.

14. P≥0,91.15. P≥0,9344.

16. $P(|X-M(X)| < 0{,}2) \geq 1-\frac{0{,}004}{0{,}04} = 0{,}9$.

17. ε=0,3.

18. а) $P(|X-0{,}5| < 2) \geq 1-\frac{0{,}475}{4} = 0{,}88$; б) $P(|X-0{,}5| > 2) \leq 1-0{,}88=0{,}12$.

19. $P(|X-50| < 10) \geq 1-\frac{25}{10^2} = 0{,}75$.

20. $P(|X-200| < 50) \geq 1-\frac{150}{50^2} = 0{,}94$.

21. $P(|X-0{,}54| < 0{,}2) \geq 1-\frac{0{,}0144}{0{,}04} = 0{,}64$.

22. $P(|X-0{,}44| < \sqrt{0{,}4}) \geq 1-\frac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,398	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2983	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2	0,054	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107

2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,000016									
5	0,0000015									

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ (*x*)	*x*	Φ (*x*)	*x*	Φ (*x*)	*x*	Φ (*x*)
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3883
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		
1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945		
1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948		
1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951		
1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953		

Приложение 3

Таблица значений функции Пуассона: $\frac{\lambda^m}{m!}\ell^{-\lambda}$

m	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,4046	0,441	0,4767	0,5116	0,5453	0,5776	0,6086	0,6381	0,6659
2	0,6672	0,6434	0,6208	0,5995	0,5797	0,5612	0,5441	0,5283	0,5138
3	0,5131	0,5255	0,5375	0,5491	0,5601	0,5705	0,5804	0,5896	0,5982
4	-	-	0,5842	0,5775	0,5712	0,5652	0,5597	0,5545	0,5498
5	-	-	-	-	0,5648	0,5682	0,5714	0,5744	0,5771
6	-	-	-	-	-	-	-	0,563	0,0003

m	λ								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1839	0,2707	0,224	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,005
3	0,0613	0,1804	0,224	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,015
4	0,0153	0,0902	0,168	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,0005	0,012	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,149	0,1221	0,0911
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,149	0,1396	0,1171
8	-	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	-	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	-	-	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,071	0,0993	0,1186
11	-	-	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,097
12	-	-	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
13	-	-	-	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	-	-	-	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0033	0,009	0,0194
16	-	-	-	-	-	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17	-	-	-	-	-	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0009	0,0029
19	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0004	0,0014
20	-	-	-	-	-	-	-	0,0002	0,0006
21	-	-	-	-	-	-	-	0,0001	0,0003
22	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0001

Содержание

Алла Юрьевна Трусова

Наталья Александровна Сизова

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ (ЧАСТЬ 1)

практикум для студентов социологического факультета

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка, макет В.И. Никонов

Подписано в печать 18.05.07

Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 7,75. Уч.-изд. л. 5,35. Тираж 150 экз. Заказ № 666

Издательство «Универс групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс групп»