МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

В.Н. КОКАРЕВ

ЗАДАЧИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Издательство "Самарский университет"
2002

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 514.7
ББК 22.151
К 597

Кокарев В.Н. Задачи по дифференциальной геометрии: Учеб. пособие, Самара: Издательство "Самарский университет", 2002. с.28.

Данное пособие предназначено для студентов 2 курса специальности «Математика». Набор задач соответствует программе курса «Дифференциальная геометрия» и включает в себя темы: «Теория кривых», «Теория поверхностей». Материал одного параграфа примерно соответствует одному практическому занятию.Звездочкой отмечены задачи повышенной трудности и дополнительные задачи.

УДК 514.7
ББК 22.151

Рецензент доц. каф. высшей математики СГАУ,
канд. физ.-мат. наук О.Ф. Меньших

В пособии используются обозначения: τ, ν, β - единичные векторы касательной, главной нормали, бинормали, $\kappa, \varkappa$ - кривизна, кручение, K, H гауссова и средняя кривизны, k_n, k_1, k_2 - нормальная и главные кривизны поверхности, n - единичная нормаль поверхности, s - длина дуги (естественный параметр).

§1. Составление уравнений кривых

Плоские кривые

1. Произвольный луч OE пересекает в точках D и E окружность

$$x^2 + (y - a/2)^2 = \frac{a^2}{4}$$

и касательную к ней, проходящую через точку C, диаметрально противоположную O. Через точки D и E проведены прямые, параллельные соответственно осям Ox и Oy, до пересечения в точке M. Составить уравнение линии, образованной точками M (локон Аньези).

2. Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составить уравнения траектории точки M, жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра (при $d = a$ - циклоида, при $d < a$ - укороченная циклоида, при $d > a$ - удлиненная циклоида).

3. Составить уравнения развертки окружности, т.е. траектории конца туго натянутой нити, сматываемой с неподвижной круглой плоской катушки.

4. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R, оставаясь внутри нее. Составить уравнения траектории точки M катящейся окружности (гипоциклоида). Что будет при $R = 4r, R = 2r$?

5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R, оставаясь вне ее. Составить уравнения траектории точки M катящейся окружности (эпициклоида). Что будет при $r = R$?

6. Найти параметризации окружности $x^2+y^2-2ax = 0$, приняв за параметр: а) угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку окружности; б) угол между осью Ox и прямой, проходящей через точку окружности и ее центр.

Пространственные кривые

7. Точка M движется так, что ее проекция на ось Oz перемещается по этой оси с постоянной скоростью, а проекция на плоскость

3. $\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t), z = z(t)$ - в цилиндрических координатах в пространстве.

4. $\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$ - в сферических координатах в пространстве.

5*. $u = u(t), v = v(t)$ - в полугеодезической системе координат на плоскости, база которой кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, где u естественный параметр.

6. Найти естественную параметризацию кривой $\mathbf{r} = (2\sin t/2, t + \sin t, \cos t)$.

7. Найти естественную параметризацию цепной линии $y = a\operatorname{ch} x/a$.

8. Найти длину дуги кривой $x = -f'(t)\sin t - f''(t)\cos t, y = f'(t)\cos t - f''(t)\sin t, t \in [a, b]$.

9. Найти длину дуги кривой

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a\cos(t/2)$$

между двумя ее точками пересечения с плоскостью xOz.

10. Доказать, что замкнутая кривая $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t$ имеет длину $s = 10$.

§4. Касательная, сопровождающий трехгранник

Найти касательные к следующим кривым:

1. $x = t^3 - 2t, y = t^2 + 1$ в точке $A(t = 1)$.

2. $y = \operatorname{tg} x$ в точках $A(x = 0), B(x = \pi/4)$.

3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке $A(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$.

Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии

4. $y^2 = 4x, x^2 = 4y$.

5. $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 6x = 9$.

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали в произвольной точке следующих кривых:

7. $\mathbf{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

8. $\mathbf{r} = a(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\cos t/2)$.

Найти сопровождающие трехгранники кривых

9*.

$$\begin{cases} xyz &= -2 \\ x^3+y^3+z^3+6 &= 0. \end{cases}$$

в точке $(1,-2,1)$ (см.§ 5,задача 12).

10*.

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= 5 \\ y^2-z^2 &= -5. \end{cases}$$

в точке $(3,2,3)$.

11. Найти уравнения линии, по которой касательные к кривой $\mathbf{r}=(t,t^2,t^3)$ пересекают плоскость xOy.

12. Найти уравнения линии, по которой бинормали кривой $\mathbf{r}=(2/t,\ln t,-t^2)$ пересекают плоскость $x-2z+2=0$.

13*. Если все соприкасающиеся плоскости кривой определены однозначно и проходят через одну и ту же точку, то кривая плоская. Доказать.

14*. Если все нормали плоской кривой проходят через одну точку, то кривая - окружность или ее часть. Доказать.

§5. Кривизна и кручение, натуральные уравнения

Найти кривизну и кручение в произвольной точке следующих кривых:

1.

$$\mathbf{r}=(e^t,e^{-t},t\sqrt{2});$$

2.

$$\mathbf{r}=(a\operatorname{ch}t,a\operatorname{sh}t,at);$$

3.

$$\mathbf{r}=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t);$$

4.

$$\mathbf{r}=(\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t).$$

Найти кривизну в произвольной точке плоских пиний:

5.

$$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t;$$

6.

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t);$$

7.

$$y = f(x);$$

8.

$$\rho = \rho(\varphi) \text{— в полярных координатах.}$$

9*.

$$F(x, y) = 0;$$

10*.

$$F(\varphi, \rho) = 0;$$

11*. Для плоской выпуклой кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma)$ введем функцию $p = \mathbf{r}\nu$ (опорная функция). Здесь σ —угол, который касательная (или нормаль) кривой составляет с фиксированным направлением. Выразить кривизну кривой через p.

12* Для кривой

$$\begin{cases} F(x, y, z) &= 0 \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{cases}$$

определим векторы

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_2 & \vec{\mathbf{e}}_3 \\ F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}, \mathbf{U} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_x & \mathbf{T}_y & \mathbf{T}_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}, \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{U}_x & \mathbf{U}_y & \mathbf{U}_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{T}$- касательный вектор кривой, векторы $\mathbf{T}, \mathbf{U}$ лежат в соприкасающейся плоскости, кривизну и кручение можно вычислить по формулам

$$\kappa = \frac{|[\mathbf{T}, \mathbf{U}]|}{|\mathbf{T}|^3}, \varkappa = \frac{(\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V})}{[\mathbf{T}, \mathbf{U}]^2}.$$

Доказать.

13*. Найти кривизну и кручение кривой

$$\begin{cases} 2xy + z^2 &= 3 \\ 2xz - y^2 &= 1. \end{cases}$$

в точке $(1, 1, 1)$.

Доказать, что следующие кривые плоские и составить уравнения плоскостей, в которых они лежат

14.
$$\mathbf{r} = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right).$$

15.
$$\mathbf{r} = \left(a_1t^2 + b_1t + c_1, a_2t^2 + b_2t + c_2, a_3t^2 + b_3t + c_3\right).$$

Составить натуральные уравнения кривых:

16.
$$\mathbf{r} = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at).$$

17.
$$\mathbf{r} = \left(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\right).$$

18. Найти векторное уравнение плоской кривой по ее натуральному уравнению $\kappa = \kappa(s)$.

§6. Соприкасающаяся окружность, эволюта, эвольвента

1. Найти центр кривизны кривой $y = x^2$ в точке $A(1,1)$.

2*. Найти соприкасающуюся окружность кривой $x^3 + 2x^2y^2 + y^3 = 4$ в точке $(1,1)$.

3. Если в точке A радиус кривизны имеет максимум, то кривая в окрестности точки A лежит внутри соприкасающейся окружности. Доказать.

4. Если в точке A радиус кривизны имеет минимум, то кривая в окрестности точки A лежит вне соприкасающейся окружности. Доказать.

5. Найти такие соприкасающиеся окружности эллипса, которые а) полностью содержатся внутри этого эллипса, б) содержат эллипс внутри себя.

Найти эволюты кривых

6. Гиперболы $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t$;

7. Астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$;

8. Кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

9. Найти эвольвенту кривой $y = \operatorname{ch} x$, проходящую через точку $(0,1)$.

10. Найти эвольвенту кривой $y = 2/3x^{3/2}$, проходящую через точку $(8, \frac{32\sqrt{2}}{3})$.

Найти длины дуг следующих кривых, представляя эти кривые в виде эволют некоторых других кривых:

11. Астроиды $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$;

12. Кардиоиды $\rho = a(1 + \cos t)$.

§7. Уравнения поверхностей

1. Написать уравнение и условия регулярности цилиндрической поверхности с направляющей $\rho = \rho(u)$ и образующими параллельными вектору **e**.

2. Написать уравнения цилиндрической поверхности с направляющей $x = u, y = u^2, z = u^3$ и образующими параллельными вектору $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$.

3. Доказать, что поверхность $x = 3u + v^2 + 1, y = 2u + v^2 - 1, z = -u + v$ цилиндрическая. Найти какую-нибудь ее направляющую. Найти прямолинейную образующую, проходящую через точку $M(16, 12, 4)$.

4. Написать уравнение и условия регулярности конической поверхности с вершиной $M(a, b, c)$ и направляющей $\rho(u) = (f(u), \varphi(u), \psi(u))$.

5. Составить неявное уравнение конуса с вершиной $(-1, 0, 0)$, описанного около параболоида $2y^2 + z^2 = 4x$.

6. Составить уравнения поверхности вращения с осью Oz и меридианом $x = x(u), z = z(u), y = 0$. Выяснить условия регулярности.

7. Составить уравнения и выяснить условия регулярности поверхности, полученной вращением кривой $r(u) = (x(u), y(u), z(u))$ вокруг оси Oz.

8. Кривая $z = f(x), y = 0$ (профиль) равномерно вращается вокруг оси Oz и равномерно движется в направлении этой оси. Составить уравнение образовавшейся поверхности (геликоид общего вида).

9. Составить уравнение геликоида, если его профилем является прямая а) не перпендикулярная оси Oz (косой геликоид), б) перпендикулярная оси Oz (прямой геликоид).

10. Окружность радиуса a перемещается так, что ее центр движется по заданной линии $\rho = \rho(u)$, а плоскость, в которой она расположена в каждый момент является нормальной плоскостью линии.

Составить уравнение и выяснить условия регулярности поверхности, описываемой окружностью (трубчатая поверхность).

11. Найти уравнение и условия регулярности поверхности, образованной касательными к линии $\rho = \rho(u)$.

§8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

1. $x = u + v, y = u - v, z = uv$ в точке $M(2, 1)$.
2. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u$ в точке $M(2, \pi/4)$.
3. $x = 2u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3$ в точке $M(3, 5, 7)$.
4. $x = u, y = u^2 - 2uv, z = u^3 - 3u^2 v$ в точке $M(1, 3, 4)$.
5. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3, 1, -1)$.
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на поверхности.
7. Составить уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности образованной а) касательными, б) главными нормалями, в) бинормалями к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.
8. Поверхность S' называется параллельной поверхности S на расстоянии λ, если она состоит из концов отрезков постоянной длины λ, отложенных на нормалях поверхности S от точек этой поверхности. Будем считать соответствующими точками поверхностей SиS' концы отрезков, о которых идет речь в определении. Доказать, что касательные плоскости в соответствующих точках поверхностей S и S' параллельны и, следовательно, свойство параллельности поверхностей взаимно.

9*. Доказать, что если все нормали поверхности проходят через одну точку, то эта поверхность есть сфера или область на сфере.

10*. Доказать, что если все нормали поверхности пересекают одну и ту же прямую, то эта поверхность будет поверхностью вращения.

11*. Доказать, что если плоскость α и регулярная поверхность S имеют единственную общую точку, то α - касательная плоскость поверхности S.

12*. Доказать, что линейчатая поверхность $\mathbf{R} = \mathbf{r}(u) + v\mathbf{a}(u)$ будет развертывающейся (см. задачу 11, § 12) тогда и только тогда, когда $(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$.

§9. Первая квадратичная форма поверхности

Найти первую квадратичную форму:

1. Сферы $x = R\cos u\cos v, y = R\cos u\sin v, z = R\sin u$.

2. Эллипсоида вращения $x = a\cos u\cos v, y = a\cos u\sin v, z = c\sin u$.

3. Поверхности вращения $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$.

4. Поверхности, образованной а) касательными, б) главными нормалями, в) бинормалями кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, где u - естественный параметр.

5. Поверхности $z = z(x, y)$.

6. На поверхности $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ дана кривая $v = au$. Найти длину дуги этой кривой между точками ее пересечения с кривыми $u = 1, u = 2$.

7. Найти периметр и внутренние углы криволинейного треугольника $u = \pm av^2/2, v = 1$, расположенного на поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

8. Найти под каким углом пересекаются кривые $u = t, v = -t$ и $u^3 + v^3 + u - v = 0$ на поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$.

9. Найти угол между кривыми $v = u+1$ и $v = 3-u$ на поверхности $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$.

10. Найти площадь четырехугольника, ограниченного кривыми $u = 0, u = a, v = 0, v = 1$, на прямом геликоиде $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$.

11. Найти площадь криволинейного треугольника $u = \pm av, v = 1$, расположенного на поверхности с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

12. Доказать, что любая цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости.

13. Доказать, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости.

14. Доказать, что регулярная поверхность, образованная касательными к некоторой кривой, локально изометрична плоскости.

§10. Сферическое отображение, вторая квадратичная форма поверхности

1. Найти множества точек на сфере, в которые отображаются указанные ниже поверхности при их сферическом отображении

а) сфера,

б) эллипсоид,

в) часть эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, x>0, y>0, z>0$,

г) эллптический параболоид,

д) однополостный гиперболоид вращения,

е) двуполостный гиперболоид вращения,

ж) эллиптический цилиндр,

з) параболический цилиндр,

и) круговой конус без вершины,

к) катеноид,

л) тор,

м) прямой геликоид.

Найти вторую квадратичную форму

2. Сферы $x=R\cos u\cos v, y=R\cos u\sin v, z=R\sin u$.

3. Эллипсоида вращения $x=a\cos u\cos v, y=a\cos u\sin v, z=c\sin u$.

4. Однополостного гиперболоида вращения $x=a\operatorname{ch} u\cos v, y=a\operatorname{ch} u\sin v, z=c\operatorname{sh} u$.

5. Поверхности вращения $x=f(u)\cos v, y=f(u)\sin v, z=g(u)$.

6. Псевдосферы $x=a\sin u\cos v, y=a\sin u\sin v, z=a(\ln\operatorname{tg} u/2+\cos u)$.

7. Доказать, что если вторая квадратичная форма поверхности тождественно равна нулю, то поверхность есть плоскость или ее часть.

8. Найти индикатрису Дюпена поверхности $z=2x^2+y^2/2$ в точках $(0,0,0)$ и $(1/2,1,1)$. Построить их.

9. Найти индикатрису Дюпена поверхности $x=u+v, y=u-v, z=2uv$ в точке $M(1,1)$.

10. Найти эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе.

11. Исследовать характер точек на следующих поверхностях второго порядка:

а) эллипсоид,

б) однополостный гиперболоид,
в) двуполостный гиперболоид,
г) эллиптический параболоид,
д) гиперболический параболоид,
е) эллиптический цилиндр,
ж) конус без вершины.

§11. Нормальная кривизна кривой на поверхности, главные кривизны и направления

Для следующих поверхностей, кривых, точек (задачи 1 – 4) найти в данной точке нормальную кривизну данной кривой, главные кривизны поверхности, главные направления, уравнения касательных прямых в точке M, имеющих главные направления, уравнение нормальной плоскости, которая дает нормальное сечение нулевой кривизны.

1. $\mathbf{r} = (3\sin u + v, 2\cos u + v, 2\cos u + 3\sin u)$,

$$\begin{cases} u = 2t \\ v = \sin t, \end{cases} \quad M(0,0).$$

2. $\mathbf{r} = \{v(1+\sin u), v(1+\cos u), v(\cos u + \sin u)\}$,

$$u^3 + v^3 + 2uv - 1 = 0, \quad M(1,2,1).$$

3. $\mathbf{r} = (v\cos u, 2v\sin u, v^2/2)$,

$$\begin{cases} u = \sin t \\ v = t+1, \end{cases} \quad M(0,1).$$

4. $\mathbf{r} = (u+v, 2(u-v), 2uv)$,

$$u^2 - v^3 + uv - 1 = 0, \quad M(2,0,2).$$

5. Найти главные кривизны и главные направления в вершинах двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

6*. Найти нормальную кривизну поверхности $(x+y+z)^3 - 3xyz = 8/9$ в точке $(1/3, 1/3, 1/3)$ в направлении вектора $\mathbf{a} = \{2, -1, -1\}$.

7. Поверхность S имеет главные кривизны κ_1 и κ_2. Найти главные кривизны поверхности S^* параллельной поверхности S на расстоянии λ. Доказать, что главные направления поверхностей S и S^* в соответствующих точках (см. задачу 8,§8) параллельны.

8. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности $z = f(x, y)$.

9*. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности

$$F(x, y, z) = 0.$$

10. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности, образованной а) касательными, б) главными нормалями, в) бинормалями данной кривой.

Вычислить гауссову кривизну поверхностей с первыми квадратичными формами:

11. $ds^2 = du^2 + 2\cos\omega du dv + dv^2$ (Чебышевская параметризация).

12. $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ (изотермическая параметризация).

13. $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ (ортогональная параметризация).

§ 12. Линии кривизны

Найти линии кривизны поверхностей

1. $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = v$.
2. $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$.
3. Прямого геликоида $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$.
4. Эллиптического параболоида $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.
5. Гиперболического параболоида $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.
6. Цилиндрической поверхности.
7. Конической поверхности.
8. Поверхности вращения.
9. Трубчатой поверхности (см. задачу 9, § 7).

10. Если поверхности S_1 и S_2 пересекаются по кривой l, являющейся линией кривизны поверхности S_1, то для того, чтобы l была линией кривизны и поверхности S_2 необходимо и достаточно, чтобы S_1 и S_2 пересекались под постоянным углом. Доказать.

11. Поверхность, изометричная плоскости, называется развертывающейся. Доказать, что развертывающаяся поверхность – линейчатая с постоянной касательной плоскостью вдоль каждой прямолинейной образующей.

12. Кривая на поверхности будет линией кривизны тогда и только тогда, когда нормали поверхности вдоль этой кривой образуют развертывающуюся поверхность. Доказать.

§ 13. Асимптотические линии

Найти асимптотические линии поверхностей:

1. Катеноида $x = \operatorname{ch} u \cos v, y = \operatorname{ch} u \cos v, z = u$.

2. $x = u^2 + v, y = u^3 + uv, z = u^4 + \frac{2}{3}u^2 v$.

3. Прямого геликоида $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$.

4. Однополостного гиперболоида.

5. Гиперболического параболоида.

6. Тора (выяснить, будут ли асимптотические бесконечно накручиваться на тор).

7. Поверхности вращения.

8. Доказать, что для асимптотической линии в точках, где ее кривизна отлична от нуля, $\varkappa^2 = -K$ (теорема Бельтрами — Эннепера).

9. Доказать, что касательная плоскость поверхности в каждой точке асимптотической линии является ее соприкасающейся плоскостью.

§14. Геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии

Найти геодезическую кривизну:

1. Окружности радиуса r, лежащей на сфере радиуса R.

2. Линий $u = const$, лежащих на прямом геликоиде $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$.

3. Линии

$$\begin{cases} u = t^2 + t \\ v = t + \sin t, \end{cases}$$

на поверхности

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \cos v \\ y = a \operatorname{ch} u \sin v \\ z = c \operatorname{sh} u \end{cases}$$

в точке $M(0,0)$.

Найти уравнения геодезических линий

4. Псевдосферы при такой параметризации, что $ds^2 = a\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

5. Прямого геликоида.

6. Цилиндрической поверхности.

7. Поверхности, у которой $ds^2 = v(du^2 + dv^2), v > 0$.

8. Поверхности, у которой $ds^2 = \frac{du^2+dv^2+(udv-vdu)^2}{(c+u^2+v^2)^2}$.

9. Если две поверхности касаются по кривой, то геодезические кривизны этой кривой на обеих поверхностях будут равны. Если указанная кривая является геодезической линией на одной из поверхностей, то она будет геодезической и на другой. Доказать.

Пользуясь задачами 6 и 9

10. Найти геодезические линии на сфере.

11. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

12. Выяснить, когда параллель поверхности вращения будет геодезической линией.

13*. Доказать, что на поверхности вращения вдоль любой геодезической линии $\rho\cos\mu = c$, где ρ — расстояние от оси вращения, μ — угол между геодезической и параллелью, c — постоянное для данной геодезической число (теорема Клеро).

Пользуясь теоремой Клеро исследовать поведение геодезических на следующих поверхностях:

14*. На эллипсоиде вращения.

15*. На однополостном гиперболоиде вращения.

16*. На торе.

17*. На круговом конусе.

§15. Разные задачи

1*. Если L — замкнутая геодезическая на поверхности класса C^3, сферический образ которой $\nu(L)$ не имеет самопересечений, то $\nu(L)$ делит сферу на две равновеликие области. Доказать.

2*. Для замкнутой кривой γ доказать, что $\int\limits_{\gamma} \kappa ds \geq 2\pi$, где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда γ — плоская выпуклая кривая (неравенство Фенхеля).

3*. Пусть L_p^r — геодезическая окружность радиуса r с центром в точке P (т.е. множество всех точек M поверхности таких, что длина

кратчайшей геодезической MP равна r), $s(r)$ — ее длина. Доказать, что
$$\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r - s(r)}{r^3}=\frac{\pi}{3}K(P),$$
где $K(P)$ — гауссова кривизна поверхности в точке P.

4*. Пусть гауссова кривизна K поверхности S в точке P положительна, α — касательная плоскость в точке P, α_h — плоскость, параллельная α, удаленная от α на расстояние h. Пусть $V(h)$ —объем области, ограниченной плоскостью α_h и поверхностью S. Доказать, что
$$K=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi h^2}{V(h)}\right)^2.$$

5*. Пусть $\sigma(h)$ — площадь поверхности, отсекаемой плоскостью α_h из задачи 4. Доказать, что
$$K=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2\pi h}{\sigma(h)}\right)^2.$$

6*. Доказать, что для средней кривизны поверхности S имеет место формула
$$H=\lim_{\lambda\to 0}\frac{d\sigma - d\sigma^*}{2\lambda d\sigma},$$
где $d\sigma$ и $d\sigma^*$ — соответствующие элементы площади поверхности S и параллельной ей на расстоянии λ поверхности S^*.

7*. Замкнутая плоская выпуклая кривая с кривизной $\kappa \geq 1/R$ помещается в круге радиуса R. Доказать.

8*. Замкнутая выпуклая поверхность, у которой нормальная кривизна во всех точках по всем направлениям $\kappa_н \geq 1/R$ помещается в шаре радиуса R. Доказать.

Ответы

§1.

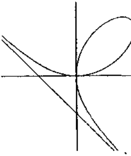
1. $\mathbf{r}=(a\operatorname{ctg}t, a\sin^2 t), t=(\widehat{DOx})$.

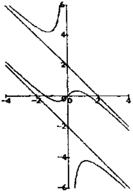
2. $x=at-d\sin t, y=ad\cos t$.

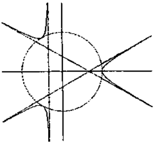
3. $x=R(\cos\frac{t}{R}+\frac{t}{R}\sin\frac{t}{R}), y=R(\sin\frac{t}{R}-\frac{t}{R}\cos\frac{t}{R})$, t — длина смотаной нити, R —радиус катушки.

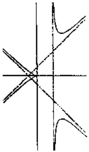
8. а)$\mathbf{r} = at(\sin\alpha\cos\omega t, \sin\alpha\sin\omega t, \cos\alpha)$,
б)$\mathbf{r} = ke^{mt}(\sin\alpha\cos\omega t, \sin\alpha\sin\omega t, \cos\alpha)$.

§2.

1. 

2. 

3. 

4. 

8. Ветвь гиперболы, асимптоты которой – стороны данного угла.
9. Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
10. $y^2 = 2p(x+p/2)$, для семейства окружностей $(x-c)^2+y^2 = 2pc$, где $c \geq p/2$. Семейство окружностей с $c < p/2$ не имеет огибающей.

§3.

1. $s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi$.

3. $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 + z'^2}\,dt$.

4. $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2 + \rho^2 \sin^2\theta\varphi'^2}dt.$

5. $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{u'^2(1-kv)^2 + v'^2}dt$, k — кривизна базы, $k > 0$, если база направлена вогнутостью в сторону возрастания v, $k < 0$, если база направлена вогнутостью в сторону убывания v.

7. $\mathbf{r} = (a \ln \frac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{a}, \sqrt{s^2+a^2})$.
9. $s = 8\sqrt{2}a$.

§4.

7. $\tau = (-\frac{3}{5}\cos t, \frac{3}{5}\sin t, -\frac{4}{5})$,
$\beta = (\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, -\frac{3}{5})$,
$\nu = (\sin t, \cos t, 0)$.
8. $\tau = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, -1)$,
$\nu = (\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}, 0)$,
$\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1)$.
9. $x + z - 2 = 0, x - z = 0, y + 2 = 0$.
10. $x - z = 0, 2x + 3y + 2z - 18 = 0, 3x - 4y + 3z - 10 = 0$.
11. $y = \frac{3}{4}x^2$.

§5.

1. $k = -\varkappa = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$.
2. $k = \varkappa = \dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.
3. $k = \dfrac{\sqrt{2}}{3e^t}, \varkappa = \dfrac{1}{3e^t}$.
4. $k = \dfrac{6}{25|\sin 2t|}, \varkappa = \dfrac{8}{25\sin 2t}$.
5. $k = \dfrac{2}{3a|\sin 2t|}$.
6. $k = \dfrac{1}{4a|\sin t/2|}$.
7. $k = \dfrac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}$.

8. $k = \dfrac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$.

9. $k = \dfrac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} = \dfrac{|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$.

10. $k = \dfrac{|F_{\rho\rho}F_\varphi^2 - 2F_{\varphi\rho}F_\varphi F_\rho + \rho F_{\varphi\varphi}F_\rho^2 + \rho^2 F_\varphi^3 + 2F_\varphi^2 F_\rho|}{(\rho^2 F_\rho^2 + F_\varphi^2)^{3/2}}$.

11. $1/k = p + p''$.

13. $k = \dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{2}}, \varkappa = -\dfrac{3}{19}$.

14. $x - 4y + 2z + 1 = 0$.

16. $k = \varkappa = \dfrac{a}{2a^2 + s^2}$.

17. $k = \dfrac{\sqrt{2}}{s\sqrt{3} + 3}, \varkappa = \dfrac{1}{s\sqrt{3} + 3}$.

18. $x = \int \cos\alpha(s)ds, y = \int \sin\alpha(s)ds, \alpha(s) = \int k(s)ds$.

§6.

1. $(-4, 7/2)$.

2. $(x + 5/2)^2 + (y + 5/2)^2 = 49/2$.

6. $\mathbf{r} = (\frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t + \frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t)$.

7. Астроида, подобная данной, с коэффициентом подобия $1/2$, повернутая относительно данной на угол $\pi/4$.

8. Кардиода, гомотетичная данной относительно точки $(\varphi = 0, \rho = a/3)$ с коэффициентом $(-1/3)$.

9. $\mathbf{r} = (t - \operatorname{sh} t/\operatorname{ch} t, 1/\operatorname{ch} t)$.

10. $x = t - \frac{2}{3}(1+t) + \frac{18}{\sqrt{1+t}}, y = -\frac{2}{3}t^{1/2} + \frac{18t^{1/2}}{\sqrt{1+t}}$.

11. $6a$.

12. $8a$.

§7.

1. $\mathbf{r} = \rho(u) + v\mathbf{e},\ \rho' \nparallel \mathbf{e}$.

4. $\mathbf{r} = (1-v)\mathbf{r}_0 + v\rho(u),\ \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM}, v \neq 0, (\rho - \mathbf{r}_0 \nparallel \rho'$.

5. $(x+1)^2 - 2y^2 - z^2 = 0$.

6. $\begin{cases} x &= x(u)\cos v \\ y &= x(u)\sin v \quad x \neq 0,\ x'^2 + y'^2 \neq 0. \\ z &= z(u) \end{cases}$

7. $\begin{cases} x &= x(u)\cos v - y(u)\sin v \\ y &= x(u)\sin v + y(u)\cos v \quad z'^2(x^2+y^2) + (xx'+yy')^2 \neq 0. \\ z &= z(u) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= f(u) + av \end{cases}$

9. $\begin{cases} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= mu + av \end{cases} \quad \begin{cases} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= av \end{cases}$

10. $\mathbf{r} = \rho(u) + a(\nu(u)\cos v + \beta(u)\sin v),\ a < 1/k$.

11. $\mathbf{r} = \rho(u) + v\rho'(u),\ v \neq 0,\ \rho' \nparallel \rho$.

§8.

1. $3x - 2y - 2z = 0$.
2. $x + y - \sqrt{2}z = 0$.
3. $18x + 3y - 4z - 41 = 0$.
4. $6x + 3y - 2z - 7 = 0$.
5. $3x - 2y + 3z - 4 = 0$.
6. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$.
7. *а*) $(\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0$,
   б) $(\mathbf{R} - \mathbf{r})((1 - vk)\beta - v\varkappa\tau) = 0$,
   в) $(\mathbf{R} - \mathbf{r})(\nu + v\varkappa\tau) = 0$.

10. Доказать, что сечения поверхности плоскостями, перпендикулярными указанной прямой, будут окружностями.

§9.

1. $R^2(du^2 + \cos^2 u\,dv^2)$.
2. $(a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)du^2 + a^2\cos^2 u\,dv^2$.
3. $(f'^2 + g'^2)du^2 + f^2 dv^2$.

4. *а*) $(1+k^2v^2)du^2+2dudv+dv^2$

   б) $((1-kv^2)+\varkappa^2v^2)du^2+dv^2$

   в) $(1+\varkappa^2v^2)du^2+dv^2$.

5. $(1+z_x^2)dx^2+2z_xz_ydxdy+(1+z_y^2)dy^2$.

6. $3\sqrt{2a^4+a^2+2}$.

7. $p=\frac{10}{3}a, \cos\alpha=1, \cos\beta=\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

8. $\cos\alpha=\frac{1-a^2}{1+a^2}$.

9. $\cos\alpha=2/3$.

10. $\frac{a^2}{2}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

11. $a^2[\frac{2-\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2}]$.

12,13,14. Доказать, что существуют параметризации данной поверхности и плоскости, в которых их первые квадратичные формы равны.

§10.

2. $R(du^2+\cos^2 u dv^2)$.

3. $\dfrac{ac(du^2+\cos^2 u dv^2)}{\sqrt{a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u}}$.

4. $\dfrac{-ac(du^2-\operatorname{ch}^2 u dv^2)}{\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 u+c^2\operatorname{ch}^2 u}}$.

5. $\dfrac{(f'g''-f''g')du^2+fg'dv^2}{\sqrt{f'^2+g'^2}}$.

6. $-a\operatorname{ctg} u(du^2-\sin^2 u dv^2)$.

§11.

1. $k_n=-\frac{8}{43\sqrt{3}}, k_1=0, k_2=-\frac{8}{27\sqrt{3}}, (0:1), (-2:3)$,
   $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{0}, \quad \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{2}$,
   $x-y+2z-2=0$.

2. $k_n=-\frac{\sqrt{2}}{4}, k_1=0, k_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2}, (0:1), (-3:1)$,
   $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}, \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$.
   $x-y+z=0$.

3. $k_n=-\frac{\sqrt{2}}{6}, k_1=-\frac{\sqrt{2}}{4}, k_2=-\frac{\sqrt{2}}{8}, (1:0), (0:1)$,
   $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1/2}{0}, \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1/2}{1}$, все нормальные сечения в точке M имеют ненулевую кривизну.

4. $k_n = -\frac{8}{43\sqrt{5}}, k_1 = \frac{1}{4\sqrt{5}}, k_2 = -\frac{1}{5\sqrt{5}}, (1:1), (-1:1)$,
$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{2}, \frac{x-2}{0} = \frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$.
$2x \pm 5y + 4z - 12 = 0$.

5. $a/b^2, a/c^2$.

6. $\sqrt{3}/8$.

7. $1/k_i^* = 1/k_i + \lambda$.

8. $K = \dfrac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}, H = \dfrac{(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy}}{2(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}}$.

9. $$K = \frac{-1}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^2}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix},$$

$$H = \frac{(F_y^2+F_z^2)F_{xx}+(F_x^2+F_z^2)F_{yy}+(F_x^2+F_y^2)F_{zz}-2F_xF_yF_{xy}-2F_xF_zF_{xz}-2F_yF_zF_{yz}}{2(F_x^2+F_y^2+F_z^2)^{3/2}}$$

для нормали (F_x, F_y, F_z).

10. *а*) $K = 0, H = \dfrac{\varkappa}{2k\varkappa'}$,

б) $K = \dfrac{-\varkappa^2}{[(1-vk)^2 + v^2\varkappa^2]^2}, H = \dfrac{v^2(\varkappa k' - \varkappa' k) + v\varkappa'}{2[(1-vk)^2 + v^2\varkappa^2]^{3/2}}$,

в) $K = \dfrac{-\varkappa^2}{(1+v^2\varkappa^2)^2}, H = \dfrac{v\varkappa' - k - v^2k\varkappa^2}{2(1+v^2\varkappa^2)^{3/2}}$.

v-длина отрезка а) касательной, б) главной нормали, в) бинормали.

11. $-\frac{\omega_{uv}}{\sin\omega}$.

12. $-\frac{1}{2\lambda}[(\ln\lambda)_{uu} + (\ln\lambda)_{vv}]$.

13. $\frac{-1}{2\sqrt{EG}}[(\frac{E_v}{\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{\sqrt{EG}})_u]$.

§12.

1. Координатные линии.

2. $u^4 + v^4 + \frac{u^2v^2}{2} = c, u = cv$.

3. $v = \pm\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + c$.

4. $\frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{qb^2} = 1,\ b^2 = a^2 + p - q,\ \ \frac{x^2}{pa^2} - \frac{y^2}{qb^2} = 1,\ b^2 = -a^2 - p + q\ (p < q)$ и $x = 0, y = 0$.

5. $\frac{x^2}{pa^2} - \frac{y^2}{qb^2} = 1, b^2 = a^2 + p + q,\ \ -\frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{qb^2} = 1, a^2 = b^2 + p + q$ и $x = 0, y = 0$.

10. Вдоль l на первой поверхности $d\mathbf{n}_1 = \lambda_1 d\mathbf{r}$. Для второй поверхности $d\mathbf{n}_2 = \lambda_2 d\mathbf{r} + \mu\mathbf{n}_1 + \delta\mathbf{n}_2$. Умножив это равенство на $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, доказать, что $\mu = \delta = 0$.

11. Если поверхность изометрична плоскости, то $K = k_1 k_2 = 0$. Взять координатную сеть из линий кривизны. Доказать, что если $k_1 \neq 0$ в направлении линии u, то вектор $\mathbf{n}$ вдоль этой линии постоянен, а линия u — прямая.

12. Использовать задачи 10 и 11.

§13.

1. $u \pm v = const$.
2. $u = const, u^5 = v^2(c - \sqrt{u})^2$.
3. $u = const, v = const$.
4. Прямолинейные образующие.
5. Прямолинейные образующие.
6. $v + c = \pm\int \frac{\sqrt{b}du}{\sqrt{-\cos u(a + b\cos u)}}$ и $u = \pi/2, u = 3\pi/2$.

8. Вдоль асимптотической $\beta = n$, $(\frac{d\beta}{dn})^2 = \varkappa^2 = \frac{dn^2}{ds^2}$. Вычислить, введя систему координат из линий кривизны.

§14.

1. $\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{Rr}$.
2. $\frac{|u|}{a^2+u^2}$.
3. $\frac{16a^2c^2}{(4a^2+c^2)^3}$.

4. Уравнения геодезических $\begin{cases} y'' - \frac{1}{y}y'^2 + \frac{1}{y}x'^2 & = & 0 \\ x'' - \frac{2}{y}x'y' & = & 0 \end{cases}$ имеют решения $(x - c_2)^2 + y^2 = c_1^2$ и $x = c$.

5. $v = const$ и решения уравнений $\begin{cases} u'' - \frac{2u}{a^2+u^2}u'^2 - u & = & 0 \\ u & = & u(v) \end{cases}$

$$v = \int \frac{du}{\sqrt{c_1(u^2 + a^2)^2 - (u^2 + a^2)}} + c_2.$$

7. $v = \frac{c(u-c_1)^2}{4} + \frac{1}{c}$.

8. $au + bv + c = 0$.

13. Доказать, что если начало координат лежит на оси вращения, то для любой кривой $\mathbf{r}(s)$ на поверхности вращения $(\mathbf{e}, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho \cos \mu$, где $\mathbf{e}$ — единичный орт оси вращения. Доказать, что для геодезической $(\mathbf{e}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ постоянно.

§15.

3. Провести вычисления в следующей системе координат u, v: u — длина геодезической, соединяющей P и M, v — угол между геодезической PM и фиксированным направлением в точке P, доказав, что при $M \to P, G \to 0, (\sqrt{G})_u \to 1$.

6. По теореме Гаусса $d\sigma = d\omega / K$, где $d\omega$ — элемент площади сферического образа.

7. Воспользовавшись задачей 11 § 5, оценить p.

8. Спроектировать поверхность на плоскость. Оценить кривизну границы тени.