МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. ЖУКОВА, Е.В. ВОРОБЬЕВА, В.И. НИКОНОВ

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНУЮ ФИЗИКУ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 10.03.01 Информационная безопасность, 10.05.01 Компьютерная безопасность

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2023

УДК 53(075)
ББК В3я7
Ж860

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, доц. О. В. О с и п о в,
канд. физ.-мат. наук, доц. И. С. Ц и р о в а

Жукова, Валентина Александровна

Ж860 **Введение в общую и экспериментальную физику:** учебное пособие / *В.А. Жукова, Е.В. Воробьева, В.И. Никонов*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 112 с.

ISBN 978-5-7883-1949-0

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с организацией, методикой проведения эксперимента и методами математической обработки результатов. Показаны причины происхождения погрешностей и методы их оценки. Обсуждаются методы расчета погрешностей прямых и косвенных измерений, а также графические методы представления результатов эксперимента.

В отдельной главе приведены основные системы измерительных приборов и расчеты погрешностей с учетом класса точности приборов.

Предназначено для обучающихся младших курсов естественно-научных специальностей.

УДК 53(075)
ББК В3я7

ISBN 978-5-7883-1949-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Достоверность и высокая точность измерения физических величин имеет большое значение в научной, инженерной деятельности.

При изучении общего курса физики основным объектом являются физические величины, которые должны быть измерены с заданной точностью. Для повышения точности измерений можно увеличить точность используемых измерительных приборов, создать более совершенные методы измерений, а также использовать многократные повторные измерения.

При измерениях физических величин неизбежно возникают погрешности. Поэтому начиная с младших курсов обучающиеся должны владеть методами расчета истинных значений физических величин, уметь находить и отбрасывать «промахи», оценивать погрешности прямых и косвенных измерений, уметь рассчитывать погрешности средств измерения с помощью знания класса точности прибора. В качестве основной меры обучающиеся должны научиться пользоваться средним квадратичным отклонением и оценивать абсолютные погрешности с использованием коэффициентов Стьюдента.

Большое внимание должно быть уделено правильному оформлению полученных результатов в виде графиков, таблиц и гистограмм.

Важное значение в процессе измерений имеет выбор единиц измерения. В некоторых случаях искомый результат может быть получен методом размерностей. Поэтому важное место в пособии уделено Международной системе единиц и эталонам.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1. Роль эксперимента в процессе познания природы

Познание окружающего мира характерно для всех живых существ, в том числе и для человека, который научился эффективно приобретать новые знания, использовать их в своей жизни и накапливать для передачи следующим поколениям.

В основе физических теорий и в то же время для их проверки и уточнения служит эксперимент. ***Эксперимент*** – это метод познания, при помощи которого все явления действительности исследуются в управляемых условиях. В эксперименте изучаемый объект подвергается активному воздействию, что значительно увеличивает возможность его исследования.

Основными требованиями к физическому эксперименту являются воспроизводимость и объективность. Проведение эксперимента в другом месте, в другое время, с иными физическими объектами и измерительными приборами при тех же значениях физических величин, задающих экспериментальную ситуацию, должно давать те же значения для характеристики явления. Именно воспроизводимость эксперимента увеличивает достаточную надежность описания явления.

Физика использует разнообразные виды эксперимента:

– натурный,
– модельный,
– мысленный,
– численный,
– компьютерный.

В натурном эксперименте изучению подвергается непосредственно тот материальный объект, свойства которого являются предметом исследования.

В модельном эксперименте объектом выступает модель подлинного объекта исследования. Полученная в результате исследования модели информация о её свойствах переносится затем на подлинный объект.

В мысленном эксперименте исследователь выполняет действия в мысленном, идеальном плане.

Физика по своей сути является экспериментальной наукой, а основу научной и инженерной деятельности составляет получение, обработка и интерпретация экспериментальных данных. Полученные в результате экспериментов численные значения могут быть использованы на практике лишь в том случае, если они достоверны. Ясно, однако, что любая величина может быть измерена лишь с некоторой определяемой разными факторами точностью.

Если взять любую экспериментальную работу, посвященную измерению какой-либо физической величины, то обнаружится, что в ней обязательно встречаются словосочетания «среднее значение», «дисперсия», «доверительный интервал».

Поэтому важно с самых первых шагов экспериментальной деятельности понимать, что такое точность измерений, как правильно спланировать эксперимент, чтобы получить результат с требуемой точностью, какова степень достоверности полученных результатов.

Что же является целью измерений? Естественный ответ на этот вопрос: «получение истинного значения измеряемой величины». А что такое «истинное значение измеряемой величины»?

Измерение – это сравнение измеряемой физической величины с однородной, принятой за единицу.

В результате измерения физическая величина определяется количественно.

Однако следует помнить, что в силу множества объективных причин никакое измерение нельзя провести абсолютно точно. Это закон природы, не имеющий исключений. Данные теории и эксперимента никогда не совпадают абсолютно точно!

Теория погрешностей описывает неизбежность возникновения ошибок измерений и предлагает методы, позволяющие их минимизировать.

В науке слово «ошибка» не имеет значения чего-то неправильного, а означает неизбежную погрешность, которая присуща всем измерениям. В этом смысле ошибки нельзя свести к промахам; вы не можете их избежать, даже если будете очень точными. Самое лучшее, что можно сделать – это свести ошибки к минимуму и научиться их рассчитывать.

Чтобы понять неизбежность погрешностей, рассмотрим, как проводятся измерения.

Например, рассмотрим действия плотника, который, чтобы установить дверь, измеряет высоту дверного проема. Какие здесь возникают трудности?

– Что понимать под высотой и шириной дверного проема? Ведь можно измерить высоту проема в средней, левой, правой и т.д. частях двери.

– Каким измерительным прибором пользоваться: рулеткой, лазерным дальномером и т.д.?

То есть возникает ***проблема определения.***

1.2. Оценка погрешностей при считывании со шкалы

Выясним, как измерить длину предмета с помощью маркированной линейки. Например, для измерения длины карандаша нужно совместить торец карандаша с нулевым отсчетом линейки, а затем определить, где окажется острие карандаша.

В нашем случае острие карандаша лежит между 35 и 37 мм, более точный отсчет невозможен.

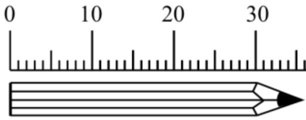


Рисунок 1 – Измерение длины карандаша

Можно сделать вывод, что

Наилучшая длина 36 *мм*

Вероятный интервал 35,5–36,5 *мм*

То есть погрешность измерения при считывании со шкалы составляет ½ цены деления шкалы (в данном случае 0,5 *мм*).

Результат измерения принято записывать в виде

$$l = (36,0 \pm 0,5)\ \text{мм}.$$

Общая запись измерения величины x такова: $x = x_{наил} \pm \Delta x$. Величина Δx называется *абсолютной погрешностью измерения.*

1.3. Значащие цифры

Следует отметить несколько правил записи погрешностей. Так как величина Δx служит оценкой погрешности, то ее нельзя приводить с большой точностью. Поясним это на примере.

Пусть студент измерял величину ускорения свободного падения и получил результат: $g = (9,82 \pm 0,02385)\ м/с^2$. Кажется невероятным, что погрешность может быть известна с точностью до пяти значащих цифр после запятой. По-видимому, погрешность следует округлить до 0,02 $м/с^2$ и записать $g = (9,82 \pm 0,02)\ м/с^2$.

Когда погрешность измерения рассчитана, необходимо проанализировать, какие цифры в измеренной величине являются значащими.

Можно сформулировать правило округления результатов: *последняя значащая цифра в любом приводимом результате обычно должна быть того же порядка величины (находиться в той же десятичной позиции), что и погрешность.*

Последняя из оставляемых в округляемом числе цифр не изменяется, если первая из отбрасываемых цифр меньше или равна 4; если же первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из оставляемых цифр увеличивается на 1. Есть только одно исключение из этого правила. Если первая цифра в погрешности 1, то лучше сохранять две значащие цифры. Например, предположим, что некоторый расчет дал для погрешности значение $\Delta x = 0{,}14$. Округлить это значение до $\Delta x = 0{,}1$ – значит на 40% уменьшить ошибку измерений.

Приведем несколько примеров округления.

Погрешность	Результат	Верная запись
0,3	92,81	92,8 ± 0,3
3	92,81	93 ± 3
30	92,81	90 ± 30

Если конкретное число является результатом измерения, то запись этого числа должна обязательно содержать все цифры вплоть до последнего разряда числа, соответствующего самому мелкому делению прибора.

Допустим, что в качестве измерительного прибора используется микрометр с ценой деления 0,01 мм, тогда результаты измерения могут быть записаны в виде $(12{,}34 \pm 0{,}01)\,мм$ или $(12{,}00 \pm 0{,}01)\,мм$. Неверной будет запись $(12 \pm 0{,}01)\,мм$.

1.4. Виды погрешностей измерений

По способу выражения различают абсолютные и относительные погрешности. Источниками возникновения погрешностей являются погрешности измерительных приборов (инструментальная погрешность), погрешности, связанные с методиками эксперимента, и промахи. По характеру проявления различают случайные и систематические погрешности.

Случайные и инструментальные погрешности рассмотрены далее более подробно, поэтому остановимся на оставшихся погрешностях.

Методические погрешности могут быть обусловлены следующими причинами:

– использование элементов экспериментальной установки с ненормированными характеристиками;

– воздействие прибора на исследуемый объект;

– измерение вспомогательной величины вместо требуемой;

– ошибка вычислений.

Промахи – это ошибки экспериментатора, поэтому они:

– не удовлетворяют требованиям реальности и достоверности измеряемой величины;

– обнаруживаются по значительному отклонению от других измерений в данной серии.

Промахи нужно исключать из рассмотрения.

Систематической погрешностью называют составляющую погрешности измерений, остающуюся постоянной или закономерно изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины. Систематические погрешности связаны с неисправностью измерительных приборов, неточностью их регулировки, несоблюдением условий их эксплуатации или причинами, которые трудно или невозможно устранить (сила трения, сила Архимеда).

1.5. Суммирование погрешностей

В науке об измерениях под суммированием погрешностей подразумевается процедура оценки результирующей погрешности по известным оценкам ее составляющих. Задача суммирования погрешностей возникает в любом, даже простейшем измерении.

Сложность задачи суммирования погрешностей состоит в том, что большая часть составляющих результирующей погрешности имеет характер граничной случайной погрешности, при этом их абсолютные погрешности неизвестны.

Поэтому теория статистики предлагает сложение погрешностей по закону «суммы квадратов»:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{ок}^2},$$

где $\Delta x_{ок}$ – ошибка округления; $\Delta x_{пр}$ – погрешность прибора; $\Delta x_{сл}$ – случайная погрешность.

Если при расчете погрешностей оказывается, что одна из погрешностей значительно меньше других, то при ее исключении результирующая погрешность изменится незначительно.

Допустим, что одна из погрешностей в 4 раза больше другой, тогда при ее исключении результат изменится в

$$\sqrt{\frac{4^2 + 1^2}{4^2}} \approx 1,031,$$

то есть примерно на 3,1%. Очевидно, что в большинстве случаев такая неточность допустима. Это существенно сокращает объем вычислений при определении результирующей погрешности.

1.6. Контрольные вопросы и упражнения

1. Сколько верных значащих цифр содержится в числах: 1) 0,002036; 2) $2,27 \cdot 10^6$; 3) 0,0357; 4) 24270; 5) $20 \cdot 10^3$.

2. Определите, какие цифры числа являются сомнительными, и запишите правильно приближенное значение числа $0,0973 \pm 0,002$.

3. Рассчитайте погрешность округления числа $0,428 \pm 0,01$.

4. Что значит измерить физическую величину?

5. Почему возникают погрешности измерений?

6. Чем вызываются погрешности измерений?

7. Почему любые измерения сопровождаются погрешностями? Приведите примеры.

ГЛАВА 2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

2.1. Абсолютные и относительные погрешности

Предположим, что мы провели n прямых измерений величины x. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots x_n$ результаты отдельных измерений, которые вследствие наличия случайных погрешностей будут в общем случае неодинаковыми. В теории вероятностей доказывается, что истинное значение измеряемой величины (при отсутствии систематических погрешностей) равно ее среднему значению, получаемому при бесконечно большом числе измерений, то есть истинное (или наилучшее) значение есть

$$x_{ист} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Позже докажем, что наиболее близким к истинному значению будет для данной серии измерений среднее арифметическое значение всех измеренных значений

$$x_{ист} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Отклонения измеренных величин от среднего значения носят случайный характер и называются *абсолютными погрешностями i-го измерения*

$$\Delta x_i = x_{ист} - x_i \ .$$

Относительной погрешностью измерения с номером i называется отношение абсолютной погрешности Δx_i к значению величины x_i, выраженное в процентах:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta x_i}{x_i} \cdot 100\% \ .$$

В табл. 1 приведен пример расчета погрешностей прямых измерений длины.

Таблица 1. Пример расчета погрешностей прямых измерений

№ опыта	L_i см	$\Delta L_i = (L_i - L_{ср})$ см	$\varepsilon_i = \frac{\Delta L_i}{L_i} \cdot 100\%$
1	10	–1	–10
2	11	0	0
3	12	1	8,3
4	12	1	8,3
5	11	0	0
6	10	–1	–10
7	11	0	0
8	10	–1	–10
9	12	1	8,3
10	9	–2	22,2
11	13	2	15,4
	$L_{ср} = 11$		

При форме записи в виде таблицы эти числа содержат мало информации.

В качестве первого шага разместим эти цифры в порядке возрастания: 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13. Затем вместо того, чтобы делать три записи 10, 10, 10, можно просто указать, что мы получили число 10 три раза.

Другими словами, мы можем записывать различные полученные значения вместе с числом, указывающим, сколько раз получено каждое значение, как показано в табл. 2.

Таблица 2

Различные значения L_k см	9	10	11	12	13
Число реализаций n_k	1	3	3	3	1
Частота реализаций $F_k = \frac{n_k}{N}$	0,09	0,27	0,27	0,27	0,09

Тогда определение среднего значения можно записать в виде

$$L_{ср} = \frac{1 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 1 \cdot 13}{11} = 11 .$$

Или в общем виде

$$L_{ср} = \frac{\sum_{k=1}^{N} n_k \cdot L_k}{N} . \tag{1}$$

Оказывается, что представление (1) более полезно в случае, когда мы делаем большое число измерений. Иногда сумма (1) называется суммой с весовыми множителями или взвешенной суммой, так как каждое значение L_k умножается на весовой множитель (взвешивается) – число n_k, показывающее, сколько раз это значение реализовалось.

Отметим, что если мы сложим все числа n_k, то получим полное число сделанных измерений $\sum_{k=1}^{N} n_k = N$.

Выводы, сформулированные выше, можно записать более удобным способом. Например, вместо того, чтобы говорить, что результат $L = 11$ был получен три раза, можно сказать, что результат L=11 был получен в трех случаях от полного числа измерений, то есть 3/11. Другими словами, вместо числа n_k , показывающего, сколько раз был получен результат $L = 11$, можно ввести отношение

$$F_k = \frac{n_k}{N} , \tag{2}$$

показывающее долю полного числа измерений N , с которой реализуется результат L_k . Будем называть величину F_k частотой выпадения значения величины.

Говорят, что частоты F_k характеризуют распределение результатов; они показывают, как результаты измерений распределены среди различных возможных значений.

В терминах частот формулу (1) можно переписать в виде

$$x_{ср} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} n_k \cdot x_k}{N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{N} \cdot x_k = \sum_{k=1}^{N} F_k \cdot x_k \,. \tag{3}$$

Таким образом, среднее значение величины x есть взвешенная сумма всех различных полученных значений x_k, то есть каждое значение x_k умножается на частоту F_k, с которой оно реализуется.

Так как $\sum\limits_{k} n_k = N$, то

$$\sum_{k} F_k = \sum_{k} \frac{n_k}{N} = \frac{\sum\limits_{k} n_k}{N} = 1 \,. \tag{4}$$

То есть, если сложить частоты всех возможных значений x_k, то должна получиться 1. Говорят, что если сумма какого-то набора чисел равна 1, то эти числа нормированы, а (4) представляет собой условие нормировки.

Распределение результатов измерений можно представить графически на **гистограмме,** как показано на рис. 2. Гистограмма представляет собой график зависимости F_k от x_k, на котором по горизонтальной оси отложены измеренные значения x_k, а частоты задаются высотой вертикальных черточек, проведенных из x_k. Такая гистограмма может быть названа гистограммой для дискретной величины, так как распределение результатов показано высотой вертикальных черточек над дискретными значениями x_k. Такой тип гистограммы удобен, когда значения x_k существенно отличаются друг от друга.

Однако в большинстве случаев измерения не приводят к точным целым значениям. Например, при измерениях могут получиться следующие значения измеряемой величины:

26,4; 23,9; 25,1; 24,6; 22,7; 23,8; 25,2; 23,9; 25,3; 25,4.

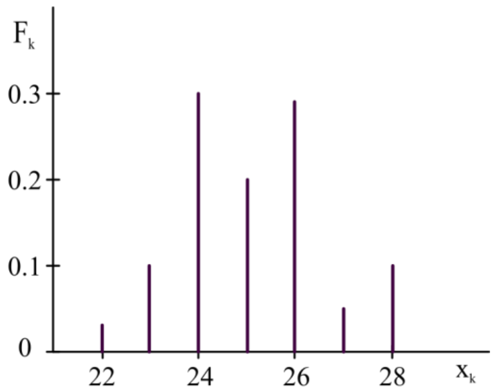


Рисунок 2 – Гистограмма для дискретной величины

В данном случае гистограмма состояла бы из десяти черточек почти одинаковой высоты и содержала бы мало информации. Поэтому удобнее разбить диапазон возможных значений на подходящее число интервалов или бинов. Например, между 22 и 23, 23 и 24, 24 и 25 и т.д. Договоримся, что, если результат попадет точно на границу интервалов, будем относить его в левый интервал. Тогда результаты можно представить в виде следующей табл. 3.

Таблица 3

Интервал	22–23	23–24	24–25	25–26	26–27
Число отсчетов в интервале	1	3	1	4	1
Частота F_k	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

Результаты измерений можно нанести на график, который назовем **гистограммой для непрерывных величин.** На этом графике доля от полного числа измерений, которая приходится на каждый интервал, показана как площадь прямоугольника, расположенного над соответствующим интервалом. Например, прямоугольник (рис. 3) от $x = 23$ до $x = 24$ имеет площадь $0,3 \times 1 = 0,3$. Это означает, что 0,3 результатов измерений попало в этот интервал. В общем случае ширину интервала обозначают Δx_k. Высота прямоугольника над этим интервалом выбирается таким образом, чтобы площадь $F_k \cdot \Delta x_k$ была равна доле измерений в заданном *k-м* интервале. Ширину интервала следует выбирать таким образом, чтобы в каждом интервале содержалось по несколько отсчетов. Следовательно, если общее число измерений мало, можно выбирать довольно широкие интервалы, а с увеличением числа интервалов их ширина может уменьшаться.

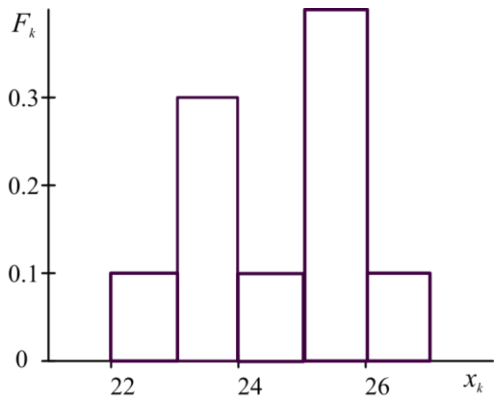


Рисунок 3 – Гистограмма для непрерывных величин

2.2. Предельное распределение

В большинстве экспериментов при увеличении числа измерений гистограмма будет принимать определенную очень простую форму. Например, возьмем 100 измерений и 1000 измерений одной и той же величины.

Результаты измерений представлены в виде табл. 4 и 5 и на рис. 4–5.

Таблица 4. Результаты 100 измерений физической величины

Интервал	22–23	23–24	24–25	25–26	26–27	27–28
Число отсчетов в интервале	3	15	42	30	8	2
Частота F_k	0,03	0,15	0,42	0,3	0,08	0,02

Таблица 5. Результаты 1000 измерений физической величины

Интервал	22–23	23–24	24–25	25–26	26–27	27–28
Число отсчетов в интервале	5	34	185	382	299	95
Частота F_k	0,005	0,034	0,185	0,382	0,299	0,095

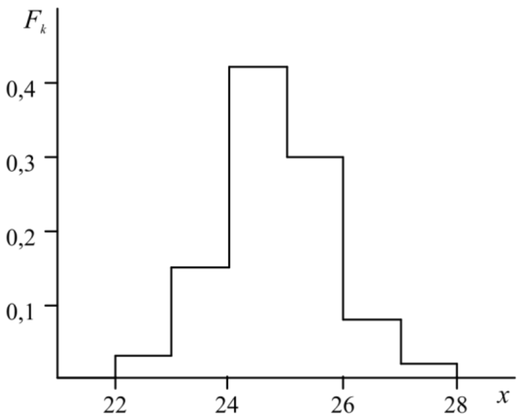


Рисунок 4 – Гистограмма результатов 100 измерений

После 100 измерений на гистограмме вырисовывается один пик. После 1000 измерений можно вполовину уменьшить величину интервалов, и гистограмма становится совсем гладкой и регулярной. Получающаяся непрерывная кривая называется **предельным распределением.** Таким образом, в нашем случае предельное распределение представляет собой симметричную колоколообразную кривую, представленную на рис. 5.

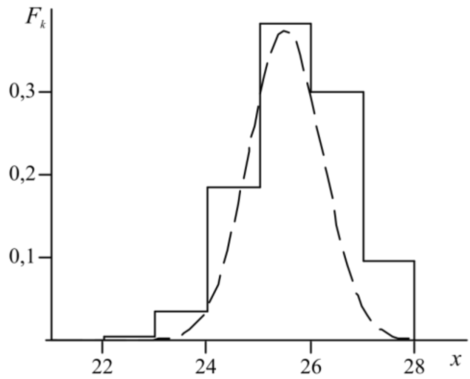


Рисунок 5 – Гистограмма результатов 1000 измерений той же величины, что и на рис. 4

Следует подчеркнуть, что предельное распределение – это теоретическая идеализация, к которой нельзя никогда приблизиться абсолютно точно. Чем больше измерений мы делаем, тем ближе становится гистограмма к предельному распределению. Но лишь при бесконечно большом числе измерений и использовании бесконечно узких интервалов мы смогли бы получить само предельное распределение. Тем не менее имеются надежные предпосылки, что почти для всех измерений существует предельное распределение, к которому экспериментальная гистограмма все более приближается по мере того, как мы делаем все больше измерений.

Предельное распределение, подобное полученной гладкой кривой, представленной на рис. 5, определяет функцию, которую обозначим $f(x)$, вид которой представлен на рис. 6.

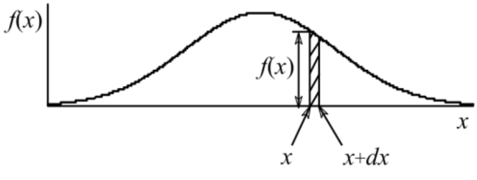


Рисунок 6 – Предельное распределение $f(x)$

С ростом числа измерений гистограмма приближается к идеальной кривой. Следовательно, доля измерений, которая попадает в интервал от x до $x+dx$, будет равна площади $f(x)\cdot dx$ заштрихованного на рисунке участка. Другими словами, величина $f(x)\cdot dx$ равна доле измерений, попадающих в интервал от x до $x+dx$. В общем случае доля измерений, которая попадает между двумя значениями a и b, равна площади под кривой $f(x)$ между $x=a$ и $x=b$. Но эта площадь есть определенный интеграл $\int_a^b f(x)\cdot dx$, величина которого определяет вероятность того, что любое единичное измерение приведет к результату, лежащему в интервале от $x=a$ и $x=b$.

Таким образом, если бы мы знали предельное распределение $f(x)$ для результатов измерений данной величины x, то мы знали бы вероятность получения результата в любом заданном интервале $a \le x \le b$.

Так как полная вероятность получения результата, лежащего в интервале $(-\infty, +\infty)$, должна быть равна 1, то предельное распределение должно удовлетворять условию (5), которое является условием нормировки функции $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1. \quad (5)$$

Если выполняются точные измерения, то все полученные результаты будут близки к истинному значению, и поэтому гистограмма результатов и предельное распределение будут выглядеть как острые пики (рис. 7).

Если же точность измерений мала, то результаты будут сильно различаться, и их распределение будет описываться широкой кривой (рис. 7).

Рисунок 7 – Два предельных распределения с различной точностью

2.3. Функция распределения

Для введения функции распределения рассмотрим некоторую величину x, которая принимает ряд значений $x_1, x_2, \ldots x_N$. Допустим, что при проведении измерений оказалось, что каждое значение повторяется несколько раз:

значение x_1 наблюдается в N_1 измерениях

значение x_2 наблюдается в N_2 измерениях

………………………………………………

значение x_n наблюдается в N_n измерениях

При этом общее число измерений $N = N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_n$.

Увеличение числа проведенных измерений до бесконечности даст вероятность измерения значения x_i:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} = P(x_i)\,.$$

Вероятность $P(x_i)$ может принимать значения в интервале $0 \le P(x_i) \le 1$. Значение $P(x_i) = 0$ соответствует случаю, когда ни при одном измерении не получается значения x_i. Вероятность $P(x_i) = 1$ возможна, только если при всех измерениях наблюдалось одно и то же значение x_i.

Сумма вероятностей $P(x_i)$ нахождения системы во всех состояниях с параметрами x_i. равна:

$$\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} N_i}{N} = 1 .$$

Однако, как уже отмечалось, чаще всего полученные значения изменяются непрерывным образом. Пусть параметр x имеет значения, лежащие в некотором интервале $a \le x \le b$.

Допустим, что в результате измерений установлено, что величина x с вероятностью $dP(x)$ попадает в интервал значений от x до $x + dx$. Тогда можно ввести функцию $f(x)$, характеризующую плотность распределения вероятностей такую, что

$$f(x) = \frac{dP(x)}{dx} . \tag{6}$$

Эта функция и называется функцией распределения. С помощью функции распределения можно вычислить вероятность того, что измеренное значение попадет в заданный интервал значений $a \le x \le b$:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx . \tag{7}$$

2.4. Нормальное распределение

Различные виды измерений имеют разные предельные распределения. Оказалось, что огромное число измерений имеет в качестве предельного распределения симметричную колоколообразную кривую.

Но прежде выясним, что такое *«истинное значение»* физической величины. Это сложный вопрос, на который нет удовлетворительного простого ответа. Поскольку очевидно, что ни в каком измерении нельзя точно определить истинное значение любой непрерывной переменной, то неясно, существует ли вообще истинное значение такой величины. Тем не менее оказывается очень удобным предполагать, что любая физическая величина имеет истинное значение, и мы всегда будем исходить из этого предположения.

Истинным значением физической величины можно считать такое значение, к которому мы приближаемся по мере осуществления все большего числа измерений, выполняемых все более тщательно. Определенное таким образом *«истинное значение»* есть идеализация, аналогичнfz понятию *«материальная точка»*.

Договоримся обозначать истинное значение физической величины прописными буквами *X, Y, Z*.

В математике функция, график которой имеет форму колоколообразной кривой, называется функцией Гаусса, которая описывается формулой

$$f(x) = e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}, \tag{8}$$

где σ называется параметром ширины или просто шириной функции Гаусса.

Перечислим свойства функции Гаусса:

1) если $x = 0$, то $f(x) = 1$;

2) функция симметрична относительно $x = 0$.

3) при удалении x от нуля функция убывает и стремится к нулю быстро, если ширина σ мала, и медленно, если ширина функции σ велика (рис. 8).

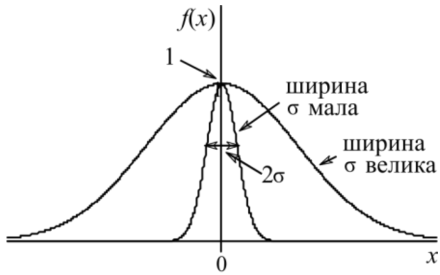


Рисунок 8 – Функция Гаусса (8) колоколообразной формы $(X = 0)$.
Кривая широка, если σ велика, и узка, если σ мала

Если центр колоколообразной кривой смещается в точку $x = X$, то в формуле (8) заменяем x на $x - X$

$$f(x) = e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}. \tag{9}$$

Однако выражение (9) не является окончательным, так как оно не описывает предельное распределение, поскольку не удовлетворяет условию нормировки функции распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Поэтому, чтобы выполнить это условие, добавим в функцию Гаусса множитель:

$$f(x) = A \cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

и подставим выражение (10) в условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Произведем замену переменных $x - X = y$; $x = X + y$; $dx = dy$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = 1.$$

Произведем еще одну замену переменных $\frac{y}{\sigma} = z$; $y = \sigma \cdot z$; $dy = \sigma \cdot dz$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1.$$

Воспользовавшись табличным интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$, получим $A \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi} = 1$, откуда $A = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11}$$

Функция (11) описывает предельную функцию результатов измерения величины x, истинное значение которой равно X и на которую оказывают влияние только случайные ошибки. Говорят, что результаты измерений распределены по нормальному закону, если их предельное распределение описывается формулой (11).

С помощью функции распределения можно найти среднее значение случайной величины x по формуле

$$x_{cp} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Произведем замену переменных $x - X = y$; $x = X + y$; $dx = dy$, получим

$$\begin{aligned} x_{cp} &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (X + y) \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \\ &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \left[X \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot X \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi} = X \end{aligned}$$

Таким образом, если результаты измерений распределены по нормальному закону, то среднее значение величины будет равно истинному значению, которое соответствует максимуму функции нормального распределения. Нужно учитывать, что полученный результат был бы верен при проведении бесконечно большого числа измерений. Его практическая ценность заключается в том, что при проведении большого числа измерений полученное среднее значение будет близко к истинному X .

Второй интересной величиной в формуле для нормального отклонения является параметр σ_x, который принято называть стандартным отклонением. Оно определяется соотношением

$$\sigma_x{}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - X \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx .$$

Вводя новые переменные $x - X = y$ и используя табличный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, получим, что $\sigma_x^2 = \sigma^2$.

2.5. Стандартное отклонение как 68%-й доверительный интервал

Если предельным распределением является нормальное распределение, то можно вычислить вероятность того, что результат измерения окажется в заданном интервале значений от $X - \sigma$ до $X + \sigma$. Эта вероятность равна

$$P(\textit{в пределах } \sigma) = \int\limits_{X-\sigma}^{X+\sigma} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx . \qquad (12)$$

Смысл записанного интеграла можно проиллюстрировать графически. Заштрихованная площадь под кривой определяет вероятность того, что результат будет лежать в пределах $\pm\sigma$ от истинного значения *X*.

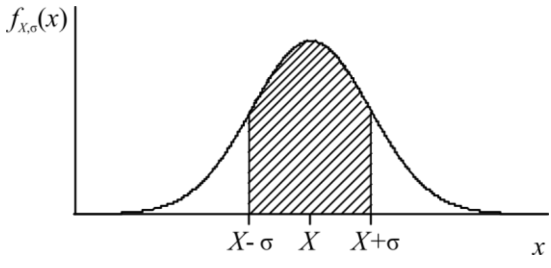


Рисунок 9 – Заштрихованная площадь между $X - \sigma$ и $X + \sigma$ равна вероятности того, что результат измерения будет лежать в пределах одного стандартного отклонения от X

При $x = X \pm \sigma$ плотность вероятности равна $\frac{f_{\max}}{\sqrt{e}}$. Рассмотрим влияние параметра σ на форму графика. На рис. 10 показан вид таких графиков $f\left(x\right)$ для трех значений параметра σ. Как видно, чем меньше σ, тем больший максимум имеет кривая, тем круче она идет. Это означает, что вероятность попадания в некоторый интервал больше для той случайной величины, распределенной по нормальному закону, для которой величина σ меньше. Следовательно, σ можно считать характеристикой разброса случайной величины *x*.

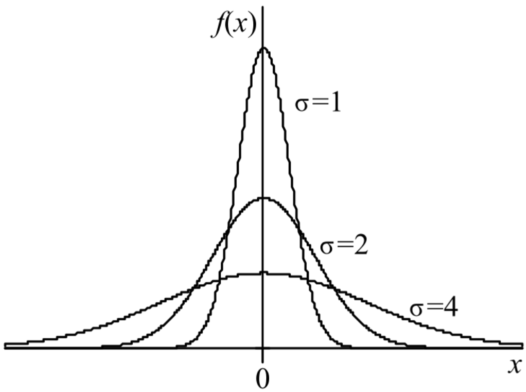


Рисунок 10 – Нормальное распределение
для различных значений параметра σ

В общем случае можно найти вероятность нахождения значений в пределах $\pm t\sigma$, где t – положительное число

$$P(\textit{в пределах } t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}dx = erf(t). \qquad (13)$$

Интеграл (13) – это стандартный интеграл математической физики, часто его называют функцией ошибок и обозначают *erf(t)* или нормальным интегралом ошибок. Его нельзя вычислить аналитически, но можно вычислить численно. В табл. 6 представлено несколько значений этого интеграла.

Таблица 6

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5	4
P,%	0	20	38	55	68	79	87	92	95,4	98,8	99,7	99,95	99,99

Можно видеть, что результат того, что значение измеренной величины окажется в пределах одного стандартного отклонения ($t=1$) составляет 68%. С увеличением параметра t вероятность быстро стремится к 1.

2.6. Обоснование среднего как наилучшей оценки

К сожалению, чаще всего мы не знаем предельного распределения, так как на практике обычно имеется конечное число измеренных значений x_1, x_2, K, x_N, и наша задача – найти наилучшие оценки для X и σ, основанные на этих измерениях.

Если бы мы знали предельное распределение $f(x)$, то было бы возможно вычислить вероятность получения значений $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$, которые были получены.

Например, вероятности получить значения в интервалах:

Интервал	Вероятность получения значений в заданном интервале
$x_1 \div x_1 + dx_1$	$P_1 = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_1 - X)^2}{2\sigma^2}} dx_1$
$x_2 \div x_2 + dx_2$	$P_2 = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_2 - X)^2}{2\sigma^2}} dx_2$
…….	……….
$x_N \div x_N + dx_N$	$P_N = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_N - X)^2}{2\sigma^2}} dx_N$

Вероятность того, что будем наблюдать всю совокупность отсчетов одновременно, равна произведению вероятностей наблюдения каждого значения

$$P\left(x_1, x_2, ..., x_N\right) = P\left(x_1\right) \cdot P\left(x_2\right) \cdot ... \cdot P\left(x_N\right) = \frac{1}{\sigma^N \left(2\pi\right)^{N/2}} \cdot e^{-\frac{\sum\left(x_i - X\right)^2}{2\sigma^2}}. \quad (14)$$

Очень важно понять значение различных величин в формуле (14). Числа x_1, x_2, x_3, ..., x_N – это результаты N измерений, то есть фиксированные, известные числа, $P\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$ – вероятность получения N результатов x_1, x_2, x_3, ..., x_N, вычисленная в терминах X и σ.

Однако значения X и σ неизвестны, поэтому нужно найти для них наилучшие значения.

Для данных N измерений наилучшими оценками X и σ будут такие, для которых эти значения будут наиболее вероятны. Значит, наилучшими оценками X и σ будут те, для которых вероятность $P\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$ максимальна.

Вероятность $P\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$ будет максимальна тогда, когда показатель степени $y = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - X\right)^2}{2\sigma^2}$ в выражении (14) будет принимать минимальное значение. Минимальное значение этой величины можно найти, приравнивая первую производную $\dfrac{dy}{dX} = 0$ нулю:

$$\frac{dy}{dX} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - X\right)}{2\sigma^2} = \frac{\left(x_1 - X\right) + \left(x_2 - X\right) + ... + \left(x_N - X\right)}{\sigma^2} = \\ = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - N \cdot X}{\sigma^2} = 0. \quad (15)$$

Из (15) получаем наилучшую оценку для величины X, наилучшая оценка истинного значения случайной величины равна среднему арифметическому всех измеренных значений

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}. \quad (16)$$

Найдем наилучшую оценку ширины функции распределения. Для этого найдем производную $\frac{dP}{d\sigma}$ и приравняем ее нулю.

$$\frac{dP}{d\sigma} = -N \cdot \sigma^{-N-1} \cdot (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum (x_i - X)^2}{2\sigma^2}} +$$

$$+\sigma^{-N} \cdot (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\sum (x_i - X)^2}{2\sigma^2}} \frac{2 \cdot \sum \cdot (x_i - X)^2}{2\sigma^3} = 0.$$

Проводя математические преобразования, получим

$$-N \cdot \sigma^2 + \sum (x_i - X)^2 = 0.$$

Откуда получим наилучшую оценку величины ширины функции нормального распределения в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - X)^2}. \quad (17)$$

Однако в литературе имеется альтернативное определение величины σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - X)^2}. \quad (18)$$

Определение (18) приводит к несколько большему значению ширины функции распределения и это компенсирует недооценку погрешности в случае, когда число измерений мало.

Поэтому для оценки погрешности серии измерений вводят среднее квадратичное отклонение (19), которое и используют для расчета абсолютной погрешности серии измерений

$$S = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - X \right)^2} \ . \qquad (19)$$

Также нужно учитывать, что при измерениях мы проводим конечное число опытов. Рассмотрим, как можно уменьшить влияние конечного числа измерений на расчет абсолютной погрешности.

2.7. Коэффициент доверия

Если мы измеряем величину x несколько раз, то наилучшей оценкой является среднее арифметическое всех измерений, а среднее квадратичное отклонение есть наилучшая оценка погрешности.

Можно сделать вывод, что

$$(\textit{значение } x) = X \pm S \, ,$$

подразумевая, что согласно наблюдениям можно ожидать, что в 68% случаев результаты любых последующих измерений величины x, сделанных с той же тщательностью, попадут в интервал $X \pm S$.

Если оценить погрешность как

$$(\textit{значение } x) = X \pm 2S \, ,$$

то можно сказать, что в 95% случаев результат попадет в заданный интервал.

Ясно, что при представлении любого измеренного значения главное – привести интервал или погрешность измерения и коэффициент доверия t, соответствующий этому интервалу.

В теории погрешностей показывается, что величина t также распределена по нормальному закону. Закон распределения этой величины называется t-распределением или распределением Стьюдента. Это распределение похоже на нормальное, но имеет несколько меньшую величину вблизи $x = X$ и более длинные «хвосты». Эта величина зависит не только от вероятности, но и от числа измерений. При $N \to \infty$ оно превращается в распределение Гаусса.

Поэтому при проведении измерений решают как бы обратную задачу. Задается уровень вероятности, например $P = 68\,\%$, и находится значение

$$(\textit{значение } x) = X \pm t \cdot S .$$

Значение t можно определить по табл. 7 коэффициентов Стьюдента.

Таблица 7. Коэффициенты Стьюдента
(N – число измерений, P – заданная вероятность)

$P = 0,68$		$P = 0,95$		$P = 0,99$	
N	$t_{\sigma,N}$	N	$t_{\sigma,N}$	N	$t_{\sigma,N}$
2	2,0	2	12,7	2	63,7
3	1,3	3	4,3	3	9,9
4	1,3	4	3,2	4	5,8
5	1,2	5	2,8	5	4,6
6	1,2	6	2,6	6	4,0
7	1,1	7	2,4	7	3,7
8	1,1	8	2,4	8	3,5
9	1,1	9	2,3	9	3,4
10	1,1	10	2,3	10	3,3
15	1,1	15	2,1	15	3,0
20	1,1	20	2,1	20	2,9

С учетом коэффициента Стьюдента абсолютная погрешность измерения определяется по формуле $\Delta x = t_{\sigma,N} \cdot S$. В табл. 8 приведен пример расчета абсолютной погрешности серии измерений. Среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - X \right)^2} = \sqrt{\frac{11}{10 \cdot 9}} \approx 0,35 .$$

Для заданной вероятности P=95% коэффициент Стьюдента для 10 измерений равен $t_{\sigma,N} = 2,3$. Тогда абсолютная погрешность серии измерений равна $\Delta x = t_{\sigma,N} \cdot S = 2,3 \cdot 0,35 = 0,805 \approx 0,8$.

Таблица 8. Пример расчета абсолютной погрешности серии прямых измерений

№	L_i, мм	$\Delta L_i = L_i - L_{cp}$	$(L_i - L_{cp})^2$
1	10,0	–0,8	0,64
2	11,0	+0,2	0,04
3	12,0	+1,2	1,44
4	13,0	+2,2	4,84
5	10,0	–0,8	0,64
6	10,0	–0,8	0,64
7	11,0	+1,2	1,44
8	10,0	–0,8	0,64
9	10,0	–0,8	0,64
10	11,0	+0,2	0,04
	$L_{cp} = 10,8$		$\sum \left(L_i - L_{cp} \right)^2 = 11$

Таким образом, результат измерений $L = (10,8 \pm 0,8)$ мм.

2.8. Контрольные вопросы и упражнения

1. Перечислите разновидности погрешностей, возникающих в процессе измерений.
2. Какая разница между абсолютной, относительной и приведенной погрешностями измерения и в чем смысл их введения?

3. Чем отличается систематическая погрешность измерения от случайной?

4. Что такое стандартное и среднеквадратичное отклонение?

5. Как определить среднеквадратичную ошибку серии измерений?

6. Студент измеряет несколько раз некоторую величину и получает результаты: 26, 24, 26, 28, 23, 24, 25, 24, 26, 25, 23, 23, 25. Представьте полученные результаты в виде гистограммы для дискретных измерений. По оси ординат отложите величины $F_k = \frac{n_k}{N}$.

7. Используя подходящую миллиметровую бумагу и хорошо размеченные оси координат, постройте график распределения Гаусса для 1) $X = 2$, $\sigma = 1$, 2) $X = 2$, $\sigma = 0{,}2$; 3) $X = 3$, $\sigma = 0{,}3$. Представьте все три графика на одной координатной сетке для сравнения.

ГЛАВА 3. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Большинство физических величин невозможно измерить непосредственно. Сначала измеряют одну или несколько величин $x, y, \ldots$, которые могут быть непосредственно измерены, а потом с их помощью вычисляется интересующая нас величина.

Например, для вычисления площади прямоугольника измеряем ширину $\grave{a}$, длину b, а затем находим площадь $S = a \cdot b$.

Рассмотрим, как можно вычислить погрешности косвенных измерений.

3.1. Вычисление погрешности суммы и разности физических величин

Пусть измеряемая физическая величина f находится как сумма величин x и y: $f = x + y$, каждая из которых измеряется с погрешностью

$$\begin{aligned} x &= X \pm \delta x, \\ y &= Y \pm \delta y. \end{aligned} \tag{20}$$

Чтобы оценить погрешность нахождения суммы этих величин, нужно знать наибольшие и наименьшие значения величин x и y:

$$\begin{aligned} x_{\max} &= X + \delta x; \quad & x_{\min} &= X - \delta x; \\ y_{\max} &= Y + \delta y; \quad & y_{\min} &= Y - \delta y. \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда наибольшее вероятное значение суммы величин x и y

$$f_{\max} = X + \delta x + Y + \delta y = \left(X + Y\right) + \left(\delta x + \delta y\right)$$

и наименьшее вероятное значение суммы величин x и y

$$f_{\min} = X - \delta x + Y - \delta y = \left(X + Y\right) - \left(\delta x + \delta y\right).$$

Можно сделать вывод, что наилучшей оценкой суммы величин x и y будет $\left(X + Y\right)$, а ее погрешность $\left(\delta x + \delta y\right)$.

Следовательно, результат измерения суммы величин x и y можно записать в виде

$$f = \left(X + Y\right) \pm \left(\delta x + \delta y\right).$$

Если обобщить полученный результат на случай, когда несколько физических величин $x, y, z, ...$ измерены с погрешностями $\delta x, \delta y, \delta z, ...$ и используются для нахождения величины $f = x + y + z + ...$, то погрешность в рассчитываемой физической величине есть сумма погрешностей отдельных величин $\delta x + \delta y + \delta z + ...$.

Аналогично рассчитывается и погрешность для определения разности физических величин.

Пусть измеряемая физическая величина f находится как разность величин x и y: $f = x - y$, каждая из которых измеряется с погрешностью (20).

Чтобы оценить погрешность нахождения разности этих величин, нужно знать наибольшие и наименьшие значения величин x и y (21).

Тогда наибольшее вероятное значение разности

$$f_{\max} = x_{\max} - y_{\min} = (X + \delta x) - (Y - \delta y) = \left(X - Y\right) + \left(\delta x + \delta y\right)$$

и наименьшее вероятное значение разности

$$f_{\min} = x_{\min} - y_{\max} = (X - \delta x) - (Y + \delta y) = \left(X - Y\right) - \left(\delta x + \delta y\right).$$

Можно сделать вывод, что наилучшей оценкой разности величин x и y будет $\left(X - Y\right)$, а ее погрешность $\left(\delta x + \delta y\right)$.

Следовательно, результат измерения разности величин x и y можно записать в виде

$$f = \left(X - Y\right) \pm \left(\delta x + \delta y\right).$$

3.2. Вычисление погрешности произведения физических величин

Пусть измеряемая физическая величина f находится как произведение величин x и y: $f = x \cdot y$, каждая из которых измеряется с погрешностью

$$\begin{aligned} x &= X \pm \delta x, \\ y &= Y \pm \delta y. \end{aligned} \tag{22}$$

Чтобы оценить погрешность нахождения произведения этих величин, нужно знать наибольшие и наименьшие значения величин x и y:

$$\begin{aligned} x_{\max} &= X + \delta x, \quad & x_{\min} &= X - \delta x, \\ y_{\max} &= Y + \delta y, \quad & y_{\min} &= Y - \delta y. \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда наибольшее вероятное значение произведения величин x и y

$$\begin{aligned} f_{\max} &= (X + \delta x) \cdot (Y + \delta y) = \left(X \cdot Y\right) + Y \cdot \delta x + X \cdot \delta y + \delta x \cdot \delta y = \\ &= X \cdot Y + X \cdot Y \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y} + \frac{\delta x}{X} \cdot \frac{\delta y}{Y}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Так как $\dfrac{\delta x}{X}$ и $\dfrac{\delta y}{Y}$ – малые величины, то их произведение очень мало по сравнению с двумя другими слагаемыми, и им можно пренебречь.

Тогда максимальное значение произведения равно

$$f_{\max} = X \cdot Y + X \cdot Y \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y}\right).$$

Найдем наименьшее вероятное значение произведения величин x и y

$$\begin{aligned} f_{\min} &= (X - \delta x) \cdot (Y - \delta y) = \left(X \cdot Y\right) - Y \cdot \delta x - X \cdot \delta y + \delta x \cdot \delta y = \\ &= X \cdot Y - X \cdot Y \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y} - \frac{\delta x}{X} \cdot \frac{\delta y}{Y}\right). \end{aligned}$$

Так как $\frac{\delta x}{X}$ и $\frac{\delta y}{Y}$ – малые величины, то их произведение очень мало по сравнению с двумя другими слагаемыми, и им можно пренебречь.

Тогда минимальное вероятное значение произведения

$$f_{\min} = X \cdot Y - X \cdot Y \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y} \right).$$

Таким образом,

$$f = X \cdot Y \pm X \cdot Y \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y} \right). \tag{25}$$

Пример. Рассчитать величину импульса тела, масса которого равна $m = (0,53 \pm 0,01)$ *кг* и движется со скоростью $V = (9,1 \pm 0,3)$ *м/с*.

Наилучшее значение импульса $p_{ист} = m \cdot V = 0,53 \cdot 9,1 = = 4,82$ *кг·м/с*. Относительная погрешность измерения массы $\frac{\delta m}{m} = \frac{0,01}{0,53} \approx 0,02$, относительная погрешность измерения скорости $\frac{\delta V}{V} = \frac{0,3}{9,1} \approx 0,03$. Тогда абсолютная погрешность измерения импульса $\Delta p = m \cdot V \cdot \left(\frac{\delta m}{m} + \frac{\delta V}{V} \right) = 4,82 \cdot (0,02 + 0,03) \approx 0,24$ *кг·м/с*.

Получаем ответ: (*значение р*)= $(4,82 \pm 0,24)$ *кг·м/с*.

3.3. Вычисление погрешности частного физических величин

Пусть физическая величина f находится как отношение величин x и y: $f = \frac{x}{y}$, каждая из которых измеряется с погрешностью

$$\begin{aligned} x &= X \pm \delta x, \\ y &= Y \pm \delta y. \end{aligned} \tag{26}$$

Максимальному значению искомой величины будет соответствовать случай, когда числитель дроби принимает максимальное значение, а знаменатель дроби минимальное значение:

$$f_{\max} = \frac{X + \delta x}{Y - \delta y} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{1 + \dfrac{\delta x}{X}}{1 - \dfrac{\delta y}{Y}}. \tag{27}$$

Поскольку отношение $\dfrac{\delta y}{Y}$ является малой величиной, можно $\left(1 - \dfrac{\delta y}{Y}\right)^{-1}$ разложить в ряд согласно формуле

$$(1 + x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot x^3 + \ldots$$

и пренебречь слагаемыми, содержащими x^2 и x^3.

Тогда формула (27) может быть переписана в виде:

$$f_{\max} = \frac{X}{Y} \cdot \left(1 + \frac{\delta x}{X}\right) \cdot \left(1 - (-1) \cdot \frac{\delta y}{Y}\right) = \frac{X}{Y} \cdot \left(1 + \frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y} + \frac{\delta x}{X} \cdot \frac{\delta y}{Y}\right) \approx$$
$$\approx \frac{X}{Y} \cdot \left(1 + \frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y}\right).$$

Минимальному значению искомой величины будет соответствовать случай, когда числитель дроби принимает минимальное значение, а знаменатель дроби максимальное значение:

$$f_{\min} = \frac{X - \delta x}{Y + \delta y} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{1 - \dfrac{\delta x}{X}}{1 + \dfrac{\delta y}{Y}}. \tag{28}$$

Преобразовывая соотношение (28) аналогичным образом, получим

$$f_{\min} = \frac{X}{Y} \cdot \left(1 - \frac{\delta x}{X} - \frac{\delta y}{Y}\right).$$

Таким образом, значение величины f можно найти из соотношения (29)

$$f = \frac{X}{Y} \cdot \pm \frac{X}{Y} \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta y}{Y} \right). \qquad (29)$$

3.4. Измеренная величина умножается на точное число

Предположим, что мы измеряем величину x и используем ее для вычисления произведения $q = B \cdot x$, где число B не содержит погрешности.

Тогда для расчета величины q можно воспользоваться формулой (25):

$$q = B \cdot X \pm B \cdot X \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta B}{B} \right) = B \cdot X \pm B \cdot \delta x \text{ .}$$

Можно сформулировать правило: если величина x измеряется с погрешностью δx и используется для вычисления произведения $q = B \cdot x$, в котором B является точным числом, то абсолютная погрешность произведения равна $B \cdot \delta x$.

Рассчитаем вероятность получения величины $q = B \cdot x$. Выразим величину $x = \dfrac{q}{B}$ и используем формулу (14) для функции распределения.

Вероятность получения значения q

$$P(x) = f(x) \cdot dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{q}{B} - X\right)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(q - Bx)^2}{2\sigma^2 B^2}} dx \text{ .}$$

Таким образом, значения $q = B \cdot x$ также распределены по нормальному закону, максимуму кривой соответствует значение Bx, ширина функции $B\sigma$, величина максимума при этом не изменяется $f_{\max}(x) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$ (рис. 11).

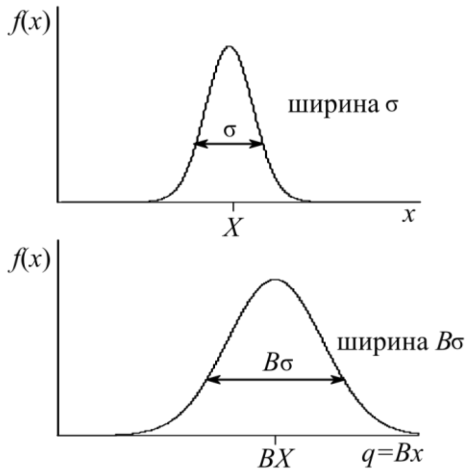


Рисунок 11 – Нормальное распределение
для величин x и $q = Bx$

3.5. Возведение в степень

При некоторых вычислениях нужно измеренную величину возвести в степень, например, при вычислении значения потенциальной энергии упругой деформации, кинетической энергии, объема куба и т.д.

Как и в предыдущем случае, можно воспользоваться формулами для вычисления погрешностей произведения.

Например, рассчитаем погрешность вычисления величины x^2, если величина $x = X \pm \delta x$. Из формулы (25) следует, что

$$f = x^2 = X \cdot X \pm X \cdot X \cdot \left(\frac{\delta x}{X} + \frac{\delta x}{X} \right) = X^2 \pm X^2 \cdot 2 \cdot \frac{\delta x}{X}.$$

Можно сформулировать правило: если величина x измеряется с погрешностью δx и измеренное значение используется для вычисления величины $f = x^n$, то относительная погрешность измерения величины f в n раз больше относительной погрешности в измерении величины x, т.е.

$$f = X^n \pm X^n \cdot \frac{n \cdot \delta x}{X}.$$

3.6. Произвольная функция одной переменной

Во многих случаях приходится вычислять более сложные функции одной переменной, например, $\sin x$; $\cos x$; $\sqrt{x}$. Рассмотрим, как оценивать погрешности в этих случаях.

Предположим, что измерили N раз некоторую физическую величину, нашли ее истинное значение X и погрешность измерения δx: $x = X \pm \delta x$. С помощью полученных измерений вычислим произвольную функцию $f(x)$. Одним из способов является графический. Построим график заданной функции (рис. 12). Наилучшим значением функции будет значение, соответствующее истинному значению $f_{ист} = f(X)$.

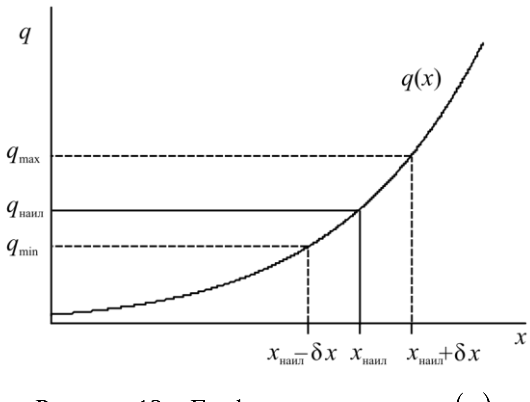


Рисунок 12 – График зависимости $q(x)$

Аналогично можно найти наибольшее $f_{\max} = f(x + \delta x)$ и наименьшее значение функции $f_{\min} = f(x - \delta x)$.

Если погрешность δx мала, то участок графика от $x-\delta x$ до $x+\delta x$ можно приближенно считать прямолинейным. Тогда изменение функции Δf из графика равно

$$\Delta f = f(X+\delta x) - f(X).$$

Достаточно малое приращение функции можно найти, используя понятие производной

$$\Delta f = \frac{df}{dx} \cdot \delta x,$$

то есть для нахождения погрешности функции нужно вычислить производную $\frac{df}{dx}$ и умножить ее на погрешность δx.

3.7. Расчет погрешности функции двух переменных

Рассмотрим случай, когда измеряем две независимые физические величины x и y, а затем находим их сумму $x+y$. Будем предполагать, что результаты измерений x и y распределены по нормальному закону около истинных значений X и Y, соответственно с ширинами σ_x и σ_y, как показано на рис. 13.

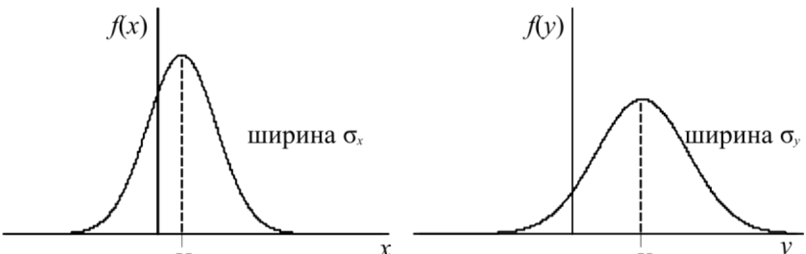


Рисунок 13 – Функции нормального распределения для величин x и y

Найдем распределение, которое описывает сумму величин $x+y$. Для простоты предположим, что истинные значения

$X = 0;\ Y = 0$. В этом случае *вероятность получения любого значения* x *равна*

$$P(x) \approx \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}},$$

вероятность получения любого значения y *равна*

$$P(y) \approx \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Так как значения x и y получаются независимо, то вероятность получения любых данных значений $x + y$ равна произведению вероятности получения значений x и вероятности получения значения y

$$\begin{aligned} P(x+y) &\approx \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} = \\ &= \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot 2\pi} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)} \end{aligned}. \qquad (30)$$

Показатель степени можно преобразовать, если воспользоваться тождеством

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \frac{\left(x+y\right)^2}{a+b} + \frac{\left(bx - ay\right)^2}{ab \cdot \left(a+b\right)} = \frac{\left(x+y\right)^2}{a+b} + z^2, \qquad (31)$$

где

$$z = \frac{\left(bx - ay\right)}{\sqrt{ab \cdot \left(a+b\right)}}$$

(легко видеть, что $a = 2\sigma_x^2$; $b = 2\sigma_y^2$). Подставим (31) в (30), получим

$$P(x+y, z) \approx \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot 2\pi} \cdot e^{-\left(\frac{(x+y)^2}{2\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)}\right)} \cdot e^{-z^2}. \qquad (32)$$

Эту вероятность можно рассматривать как вероятность получения значений $x+y$ и z. Так как нас интересует вероятность получения суммы $x+y$ независимо от значения z, то нужно проинтегрировать выражение (32) по z:

$$P(x+y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x+y,z)dz=\frac{1}{\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot 2\pi}\cdot e^{-\left(\frac{(x+y)^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz\,.$$

В этом выражении содержится табличный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=\sqrt{2\pi}$.

Тогда $P(x+y)=\dfrac{1}{\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot 2\pi}\cdot e^{-\left(\frac{(x+y)^2}{2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}\right)}\cdot\sqrt{2\pi}$.

Это выражение показывает, что значения суммы $x+y$ распределены по нормальному закону с шириной $\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$, максимум расположен при значении $X+Y$ (рис. 14).

Таким образом, если измерения двух величин выполняются независимо, то при нахождении погрешности значений $(x+y)$ равна корню квадратному из суммы квадратично сложенных погрешностей

$$\delta(x+y)=\sqrt{(\delta x)^2+(\delta y)^2}\,.$$

Как и в случае произвольной функции одной переменной, для произвольной функции $f(x,y,z,...)$ нескольких переменных, измеренных независимо с погрешностями $\delta x,\delta y,\delta z,...$, абсолютную погрешность можно вычислить с использованием частных производных

$$\Delta f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\delta x\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\delta y\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\delta z\right)^2+...}\,. \qquad (33)$$

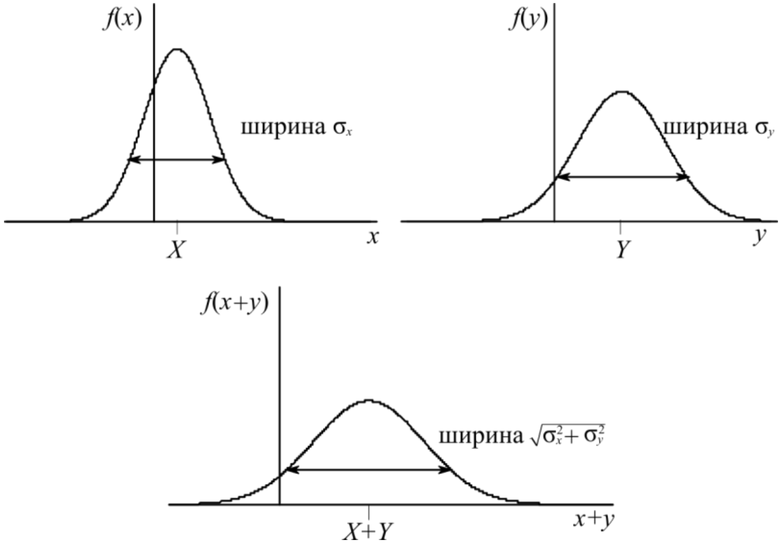


Рисунок 14 – Функции нормального распределения
для величин x, y и $x+y$

В качестве **примера** рассмотрим расчет погрешности плотности однородного цилиндра.

Для однородного тела плотность является величиной постоянной и равной массе, заключенной в единице объема: $\rho = \dfrac{m}{V}$. Если d – диаметр, h – высота цилиндра, то плотность цилиндра

$$\rho = \frac{m}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h} = \frac{4m}{\pi \cdot d^2 \cdot h}.$$

Для расчета истинного значения плотности в предыдущую формулу нужно подставить истинные значения массы, диаметра и высоты, а абсолютную погрешность рассчитать с помощью частных производных

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2}.$$

Полученные значения массы, диаметра и высоты приведены в табл. 9, 10 и 11:

Таблица 9. Расчет абсолютной погрешности измерения массы

m_i, *г*	$\lvert\Delta m_i\rvert$, *г*	$\lvert\Delta m_i\rvert^2$, *г*^{2}	$S=\sqrt{\dfrac{\sum_i(\Delta m_i)^2}{N\cdot(N-1)}}$	$t_{P,N}$	$\Delta m = S\cdot t_{P,N}$, *г*
44,5	0,3	0,09	0,17	2,8	$0,48\approx 0,5$
43,8	0,4	0,16			
44,7	0,5	0,25			
44,1	0,1	0,01			
43,9	0,3	0,09			
$m_{ист}=\dfrac{\sum m_i}{N}=44,2$		$\sum_i(\Delta m_i)^2=0,6$			

Следовательно $m=(44,2\pm 0,5)$ *г*

Таблица 10. Расчет абсолютной погрешности измерения диаметра

d_i, *см*	$\lvert\Delta d_i\rvert$, *см*	$\lvert\Delta d_i\rvert^2\cdot 10^{-6}$, *см*^{2}	$S=\sqrt{\dfrac{\sum_i(\Delta d_i)^2}{N\cdot(N-1)}}$	$t_{P,N}$	$\Delta d = S\cdot t_{P,N}$, см
2,324	0,007	49	0,002	2,8	0,006
2,332	0,001	1			
2,330	0,001	1			
2,332	0,001	1			
2,336	0,005	25			
$d_{ист}=\dfrac{\sum d_i}{N}=2,331$		$\sum_i(\Delta d_i)^2=77\cdot 10^{-6}$			

Следовательно, $d = (2,331 \pm 0,006)$ *см*.

Таблица 11. Расчет абсолютной погрешности измерения высоты

h_i , *см*	$\lvert\Delta h_i\rvert$, *см*	$\lvert\Delta h_i\rvert^2 \cdot 10^{-6}$, *см*^{2}	$S = \sqrt{\dfrac{\sum_i (\Delta h_i)^2}{N \cdot (N-1)}}$	$t_{P,N}$	$\Delta d = S \cdot t_{P,N}$, *см*
3,014	0,004	16	0,0014	2,8	0,004
3,020	0,002	4			
3,022	0,004	16			
3,017	0,001	1			
3,019	0,001	1			
$h_{ucm} = \dfrac{\sum h_i}{N} = = 3,018$		$\sum_i (\Delta h_i)^2 = = 38 \cdot 10^{-6}$			

Следовательно, $h = (3,018 \pm 0,004)$ *см*.

Среднее значение плотности $\rho = \dfrac{4 \cdot 44,2}{3,14 \cdot (2,331)^2 \cdot 3,018} \approx 3,433$ *г/см*^{3}.

Для нахождения абсолютной погрешности вычислим частные производные

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi \cdot d^2 \cdot h} = 0,078$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8m}{\pi \cdot d^3 \cdot h} = -2,946$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4m}{\pi \cdot d^2 \cdot h^2} = -1,138$$

$$\Delta\rho = \sqrt{(0,078 \cdot 0,5)^2 + (-2,946 \cdot 0,006)^2 + (-1,138 \cdot 0,004)^2} =$$
$$= \sqrt{1,521 \cdot 10^{-3} + 0,312 \cdot 10^{-3} + 0,012 \cdot 10^{-3}} = 0,043$$

Таким образом, окончательный ответ

$$\rho \approx (3,433 \pm 0,043) \text{ г/см}^3.$$

3.8. Контрольные вопросы и упражнения

1. Что означает: функция, описывающая предельное распределение, нормирована? Как записать условие нормировки?

2. Почему нормальное распределение Гаусса называют предельным?

3. Почему нельзя в реальном эксперименте получить распределение Гаусса?

4. Какой смысл имеет условие нормировки для распределения Гаусса?

5. Как по распределению Гаусса определить долю измерений, приходящихся на интересующий интервал значений?

6. Как определить среднее значение величины по распределению Гаусса?

7. Студент получил следующие результаты измерений: $a = (5 \pm 1)$ *см*, $b = (18 \pm 2)$ *см*, $c = (12 \pm 1)$ *см*, $t = (30{,}0 \pm 0{,}5)$ *с*, $m = (18 \pm 1)$ *г*. Используя правила нахождения погрешностей, вычислите абсолютные погрешности следующих величин: $a + b - c$, $c \cdot t$, $5b$, $\dfrac{m \cdot a}{t}$, $\dfrac{1}{t^2}$.

8. Скорость тела рассчитывается по формуле $v = \dfrac{S}{t}$. Путь $S = 5$ *м* измерен рулеткой с ценой деления 1 *см*. Время $t = 2$ *с* измерено секундомером с ценой деления 0,1 *с*. Запишите результат косвенного измерения скорости.

9. Ускорение тела рассчитывается по формуле $a = \dfrac{2S}{t^2}$. Путь $S = 10$ *м* измерен рулеткой с ценой деления 1 *см*. Время $t = 2$ *с* измерено секундомером с ценой деления 0,1 *с*. Запишите результат косвенного измерения ускорения.

10. Плотность вещества рассчитывается по формуле $\rho = \dfrac{m}{V}$.

Масса $m = 1\,кг$ измерена с погрешностью 10 г. Объем тела $V = 200\,см^3$ измерен с погрешностью 1 $см^3$. Запишите результат косвенного измерения плотности.

11. Как при расчетах одновременно учитывать систематические и случайные ошибки измерений?

12. Как округлять погрешность измерения?

13. Как правильно записать результат измерения?

ГЛАВА 4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В задачи экспериментальной физики входит не только измерение величин, но и исследование зависимостей между различными физическими величинами.

Большинство законов физики формируется в виде уравнений, связывающих между собой различные физические величины.

Один из наиболее интересных экспериментов состоит в измерении нескольких значений двух физических величин для исследования математической связи между ними.

Например, можно бросать камень без начальной скорости с разных высот $h_1, h_2, h_3...$ и измерять соответствующие времена падения $t_1, t_2, t_3...$, чтобы проверить, связаны ли эти значения высот и времен известным соотношением $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$.

Наиболее важными экспериментами такого рода являются те, где ожидаемая связь линейна. Рассмотрим линейную связь между двумя физическими величинами x и y:

$$y = A + B \cdot x. \tag{34}$$

В этой формуле A и B являются константами, значение которых нужно найти.

Графически зависимость (34) представляет собой прямую линию, причем она пересекает ось y в точке $x = 0, y = A$, а угол наклона определяется коэффициентом B: $tg\alpha = B$ (рис. 15).

Если бы результаты измерений не содержали погрешностей, то каждая точка определялась бы парой значений (x_i, y_i) и все экспериментальные точки легли бы на прямую $y = A + B \cdot x$.

Однако, как уже отмечали, погрешности непременно присутствуют при проведении измерений, поэтому желательно, чтобы расстояние каждой экспериментальной точки $(x_i y_i)$ от теоретической кривой было сравнимо с погрешностями измерений.

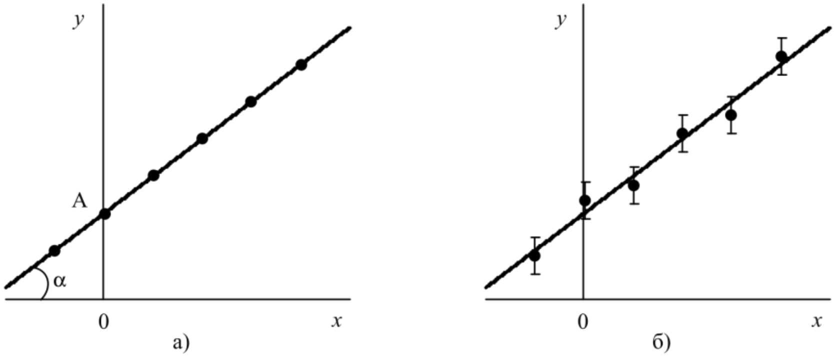


Рисунок 15 – Зависимость $y(x)$: а) теоретическая;
б) экспериментальная

На практике поступают следующим образом. На координатную плоскость наносят полученные экспериментальные точки и затем проводят прямую так, чтобы она наилучшим образом проходила через все экспериментальные точки.

Поэтому нашей задачей является нахождение наилучших значений коэффициентов A и B (в зависимости (34)).

Рассмотрим вначале более простой случай и предположим, что погрешности измерения величины x намного меньше, чем величины y. Более того, будем предполагать, что погрешности всех измерений y подчиняются нормальному распределению с одинаковой шириной σ_y.

Если бы мы знали значения A и B, то для любого значения x_i, можно было бы вычислить значение y_i:

$$Y_i \text{ (истинное значение } y_i) = A + B \cdot x_i. \qquad (35)$$

Если результаты всех измерений y подчиняются нормальному распределению с одинаковой шириной σ_y, то вероятность $P_{A,B}(y_i)$ получения значения y_i пропорциональна

$$P_{A,B}(y_i) \approx \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y_i - A - B \cdot x_i)^2}{2\ \sigma_y^2}} . \qquad (36)$$

Если измерения физических величин совершались независимо, то вероятность получения полного набора результатов $y_1, y_2, ..., y_N$ равна произведению вероятностей

$$P_{A,B}\left(y_1, y_2, ..., y_N\right) = P_{A,B}\left(y_1\right) \cdot P_{A,B}\left(y_2\right) \cdots P_{A,B}\left(y_N\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_y^N \left(\sqrt{2\pi}\right)^N} \cdot e^{-\frac{\sum_i \left(y_i - A - B \cdot x_i\right)^2}{2\sigma_y^2}} . \qquad (37)$$

Наилучшими оценками для величин A и B будут такие, для которых вероятность (37) будет максимальна, то есть для которых сумма квадратов величин

$$\eta^2 = \sum_i \left(y_i - A - B \cdot x_i\right)^2 \qquad (38)$$

будет минимальна. Вот почему метод называется методом наименьших квадратов.

Для нахождения наилучших значений постоянных исследуем выражение на экстремум. Для этого найдем частные производные (37) по A и B и приравняем нулю:

$$\frac{\partial P_{A,B}}{\partial A} = \frac{1}{\sigma_y^N \cdot \left(2\pi\right)^{N/2}} \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_y^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma_y^2} \cdot 2 \cdot \eta \cdot (-1) \right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial P_{A,B}}{\partial B} = \frac{1}{\sigma_y^N \cdot \left(2\pi\right)^{N/2}} \cdot e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma_y^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma_y^2} \cdot 2 \cdot \eta \cdot \left(-x_i\right) \right) = 0 .$$

Из этих равенств получаем систему уравнений (39) и (40):

$$\sum_{i=1}^{N} A + B \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \,, \tag{39}$$

$$A \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i + B \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i \,, \tag{40}$$

решая которую находим выражения для констант A и B

$$A = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\cdot\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\cdot\left(\sum x_i \cdot y_i\right)}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}\,, \tag{41}$$

$$B = \frac{N \cdot \left(\sum x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\cdot\left(\sum y_i\right)}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}\,. \tag{42}$$

Формулы (41) и (42) дают наилучшие оценки постоянных A и B и позволяют построить прямую, которую называют аппроксимацией методом наименьших квадратов.

Погрешности в определении A и B определяются расчетом погрешностей в косвенных измерениях

$$\sigma_A^2 = \sigma_y^2 \cdot \frac{\left(\sum x_i^2\right)}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}\,, \tag{43}$$

$$\sigma_B^2 = \sigma_y^2 \cdot \frac{N}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}\,. \tag{44}$$

Абсолютная погрешность в определении постоянных определяется произведением соответствующего среднего квадратичного отклонения (43), (44) на коэффициент Стьюдента для числа измерений $(N-2)$: $\Delta A = t_{P,\,N-2} \cdot \sigma_A$ и $\Delta B = t_{P,\,N-2} \cdot \sigma_B$.

При расчете по методу наименьших квадратов погрешности в измерении величины y определяются соотношением $\Delta y = t_{P,\,N-2} \cdot \sigma_y$, причем

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum\left(y_i - A - B \cdot x_i\right)^2}{N-2}\,. \tag{45}$$

Рассмотрим пример. На опыте получены значения x_i и y_i, представленные в табл. 12. Нужно найти наилучшую прямую, пользуясь методом наименьших квадратов.

Таблица 12

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	$y_i - A - B \cdot x_i$	$(y_i - A - B \cdot x_i)^2$
1	1	5,2	1	5,2	–0,07	0,0049
2	2	6,3	4	12,6	0,05	0,0025
3	3	7,1	9	21,3	–0,12	0,0144
4	4	8,5	16	34,0	0,30	0,09
5	5	9,2	25	46,0	0,03	0,0009
6	6	10,0	36	60,0	–0,14	0,0196
	$\sum x_i = 21$	$\sum y_i = 46,3$	$\sum x_i^2 = 91$	$\sum x_i \cdot y_i = 179,1$		$\sum = 0,1323$

Из данных таблицы определяем константы и погрешности:

$$A = \frac{\left(\sum x_i^2\right) \cdot \left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum x_i \cdot y_i\right)}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{91 \cdot 46,3 - 21 \cdot 179,1}{6 \cdot 91 - 21^2} = 4,3\,,$$

$$N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2 = 6 \cdot 91 - 21^2 = 105\,,$$

$$B = \frac{N \cdot \left(\sum x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum y_i\right)}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{6 \cdot 179,1 - 21 \cdot 46,3}{105} = 0,974\,,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum \left(y_i - A - B \cdot x_i\right)^2}{N - 2} = \frac{0,1323}{6 - 2} = 0,0331\,,$$

$$\sigma_y = 0,182\,,$$

$$\Delta y = t_{P,\,N-2} \cdot \sigma_y = t_{0,95;4} \cdot 0,182 = 3,2 \cdot 0,182 \approx 0,582\,,$$

$$\sigma_A^2 = \sigma_y^2 \cdot \frac{\left(\sum x_i^2\right)}{N \cdot \left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{0,0331 \cdot 91}{105} \approx 0,0287\,,$$

$$\sigma_A = 0{,}169\,,\ \Delta A = t_{P,\,N-2}\cdot\sigma_A = 3{,}2\cdot 0{,}169 \approx 0{,}542\,,$$

$$\sigma_B^2 = \sigma_y^2\cdot\frac{N}{N\cdot\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2} = \frac{0{,}0331\cdot 6}{105} \approx 0{,}0019\,,$$

$$\sigma_B = 0{,}043,\ \Delta B = t_{P,\,N-2}\cdot\sigma_B = 3{,}2\cdot 0{,}043 \approx 0{,}139\,.$$

Таким образом, наилучшей прямой, описывающей экспериментальные данные, является $y = 4{,}31 + 0{,}97\cdot x$. На рис. 16 в системе координат (x, y) нанесены экспериментальные точки, построена наилучшая теоретическая прямая и нанесены в виде ограниченных вертикальных отрезков для каждой экспериментальной точки в масштабе погрешности измерения величины y.

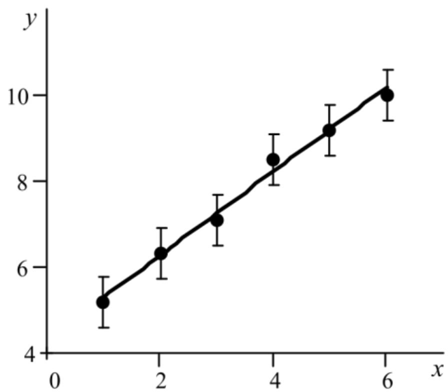


Рисунок 16 – Представление экспериментальных данных в виде прямой, построенной по методу наименьших квадратов

4.1. Приведение функции к линейному виду

Функциональная связь между экспериментальными данными может быть двух видов: линейная и нелинейная. Мы уже видели, что проверить линейную связь результатов эксперимента просто. Для этого надо убедиться, что все экспериментальные точки располагаются вблизи прямой.

Более того, широкое использование линейной функции $y = A + B \cdot x$ при обработке экспериментальных данных связано с тем, что с помощью соответствующей замены переменных функцию с двумя параметрами можно привести к линейному виду. Иногда говорят, что используется функциональный масштаб.

Например, связь показателя преломления стекла n с длиной волны λ дается формулой $n = n_0 + \frac{a}{\lambda^2}$. Если по оси ординат отложить значения показателя преломления, а по оси абсцисс величины $\frac{1}{\lambda^2}$, то график такой зависимости будет представлять прямую линию.

Если из расположения экспериментальных точек можно предположить, что экспериментальные данные могут быть описаны гиперболической зависимостью $y = a + \frac{c}{x}$, то, выполнив подстановку $\frac{1}{x} = t$, получим $y = a + c \cdot t$. Значит, по оси абсцисс нужно откладывать величины $\frac{1}{x}$, а по оси ординат – измеренные величины y.

Примеры применения функциональных масштабов приведены в табл. 13.

Таблица 13. Функциональные масштабы

Функциональная зависимость	Величина, откладываемая по оси абсцисс	Величина, откладываемая по оси ординат
$y = a \cdot x^n$	x^n	y
$y = \frac{1}{a \cdot x + c}$	x	$\frac{1}{y}$
$y = a \cdot e^{c \cdot x}$	$\ln(cx)$	$\ln y$

4.2. Проверка адекватности математической модели экспериментальным данным

Пусть в эксперименте получены данные о зависимости перемещения тела S от времени, представленные в табл. 14.

Таблица 14

t_i , с	1	2	3	4	5
S_i , м	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2

По методу наименьших квадратов оценена величина погрешности измерения времени $\Delta t = 0{,}1\,c$ и перемещения $\Delta S = 0{,}6\,м$. Ожидаемая математическая зависимость $S = 4 + 1{,}2 \cdot x$, а зависимость, рассчитанная по методу наименьших квадратов $S = 4{,}3 + x$. На рис. 17 приведены экспериментальные точки и две аппроксимации по методу наименьших квадратов и теоретическая прямая. Также на графике в виде отрезков нанесены погрешности измерений.

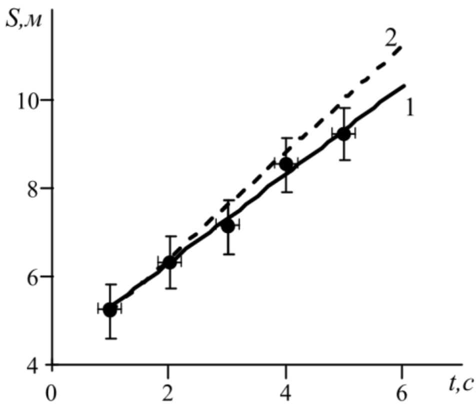


Рисунок 17 – Проверка соответствия математической модели экспериментальным данным. Кривая 1 – аппроксимации по методу наименьших квадратов, кривая 2 – теоретическая прямая

Из графика видно, что не все точки легли на теоретический график. Следовательно, используемая математическая модель не вполне соответствует экспериментальным данным.

Поскольку все физические величины измеряются с погрешностями, то одному и тому же значению t_i при повторных измерениях может соответствовать множество значений перемещения. Такая нежесткая связь в математической статистике называется корреляционной. Для оценки степени соответствия вводится понятие корреляционной связи (зависимости).

Если между физическими величинами видна линейная зависимость, то для оценки степени близости корреляционной зависимости к теоретической вводится коэффициент корреляции

$$r = \frac{N \cdot \left(\sum_i x_i \cdot y_i \right) - \left(\sum_i x_i \right) \cdot \left(\sum_i y_i \right)}{\sqrt{N \cdot \left(\sum_i x_i^2 \right) - \left(\sum_i x_i \right)^2} \cdot \sqrt{N \cdot \left(\sum_i y_i^2 \right) - \left(\sum_i y_i \right)^2}} .$$

Принято считать, что если коэффициент корреляции:

– $r > 0,7$, то имеет место сильная корреляционная связь;

– $0,5 < r < 0,7$, то имеет место связь средней силы;

– $0,3 < r < 0,5$, то имеет место умеренная связь;

– $0,2 < r < 0,3$, то имеет место слабая связь;

– $r < 0,2$, то связь отсутствует.

Вычислим коэффициент корреляции для рассматриваемого примера (табл. 15).

Коэффициент корреляции, вычисленный по таблице

$$r = \frac{5 \cdot 119,1 - 15 \cdot 36,3}{\sqrt{5 \cdot 55 - 15^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 274,03 - 36,3^2}} = 0,99 ,$$

свидетельствует о сильной корреляционной связи между временем и перемещением.

Таблица 15

№	t_i	S_i	t_i^2	$t_i \cdot S_i$	S_i^2
1	1	5,2	1	5,2	27,04
2	2	6,3	4	12,6	39,69
3	3	7,1	9	21,3	50,41
4	4	8,5	16	34	72,25
5	5	9,2	25	46	84,64
	$\sum t_i = 15$	$\sum S_i = 36,3$	$\sum t_i^2 = 55$	$\sum t_i \cdot S_i = 119,1$	274,03

4.3. Применение метода наименьших квадратов в случае произвольной функции

Пусть мы произвели N измерений, результаты которых представлены в виде таблицы.

Величина x	x_1	x_2	….	x_N
Величина y	y_1	y_2	….	y_N

Возникает практически важная задача: установить формулу, дающую аналитическое выражение функциональной зависимости между исследуемыми величинами. Формулы, полученные по экспериментальным данным, называются эмпирическими формулами.

Особенность задачи состоит в том, что наличие случайных погрешностей измерений делает невозможным подбор такой функции, которая точно бы описывала экспериментальные данные. Поэтому при подборе эмпирической формулы руководствуются следующими требованиями:

– значения, вычисленные по эмпирической формуле, должны мало отличаться от опытных данных;

– эмпирическая формула должна быть по возможности простой.

Построение эмпирической формулы производится по этапам:

1) Выбор формулы определенного типа.

Нельзя указать общий метод для выбора наилучшего типа формулы, соответствующей экспериментальным данным. Тем не менее предпочтение отдается простым формулам. Рекомендуется выбирать функции с двумя или тремя параметрами. Например:

$$y = ax + b;$$

$$y = a + b \cdot \ln x;$$

$$y = a + \frac{b}{x};$$

$$y = a \cdot x^2 + b;$$

$$y = a \cdot x^2 + bx;$$

$$y = a + b \cdot x^3.$$

Легко видеть, что некоторые функции ведут себя «похожим» образом, например

а) $y = a + b \cdot \ln x$; $y = a + \dfrac{b}{x}$; $y = \dfrac{a}{b + x}$;

б) $y = a + bx + cx^2$; $y = a + bx^3$; $y = a + bx^4$.

Тем не менее существует ряд приемов, облегчающих выбор эмпирической формулы. Самым простым является следующий. Опытные данные наносят на график, после чего проводят вблизи полученных точек наиболее правдоподобную кривую. При проведении кривой можно использовать соображения общего характера: как должна вести себя кривая при значениях аргумента, близких к нулю, при больших значениях аргумента, пересекает ли она координатные оси и т.д.

2) Определение параметров формулы, то есть значений постоянных величин, входящих в формулу.

Обозначим искомую эмпирическую зависимость через $y = f\ (x, a, b, c, ...)$, где $a, b, c, ...$ – параметры, подлежащие определению.

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими значениями параметров $a, b, c, ...$ считаются те, для которых сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от расчетных значений $f\ (x, a, b, c, ...)$, то есть величина (46) будет минимальной:

$$S(a,b,c,...) = \sum_{i=1}^{N} \left[f(x_i, a,b,c,...) - y_i \right]^2 . \qquad (46)$$

Используем необходимые условия экстремума функции нескольких переменных – равенство нулю частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial S}{\partial c} = 0, ...$$

Или в развернутом виде

$$\sum_{i=1}^{N} 2 \cdot \left[f(x, a, b, c, ...) - y_i \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial a} = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2 \cdot \left[f(x, a, b, c, ...) - y_i \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial b} = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{N} 2 \cdot \left[f(x, a, b, c, ...) - y_i \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial c} = 0 ,$$

……………………………………

Если система имеет единственное решение, оно и будет искомым.

3) Оценка результатов аппроксимации.

Результаты эксперимента более точно описывает та функция, для которой сумма квадратов отклонения экспериментальных данных от расчетных (47) будет наименьшей

$$S = \sum_{p=1}^{n} \left(y_p - y_x \right)^2 . \qquad (47)$$

Убедимся, что при найденных значениях a и b $S(a,b,c,...)$ имеет минимум. Для этого найдем вторые производные функции $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}$ и $\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}$:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 =$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i \right)^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 ,$$

т.е. выполнено достаточное условие минимума для функции двух переменных.

Рассмотрим пример: найти эмпирическую функцию, наиболее точно описывающую результаты эксперимента, представленные в табл. 16.

Таблица 16

x	2	4	6	12
y	8,00	5,25	3,50	2,10

В декартовой системе координат построим экспериментальные точки и соединим полученные точки плавной кривой.

Можно предположить, что кривая может описываться гиперболической функцией $y = a + \frac{b}{x}$ (рис. 18).

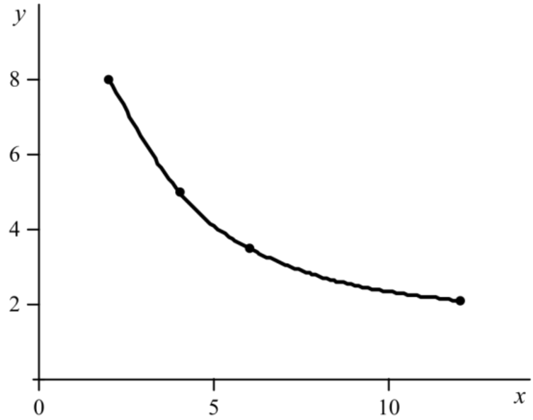


Рисунок 18 – Экспериментальная зависимость $y(x)$

Составим сумму квадратов отклонений расчетных значений $a+\dfrac{b}{x_i}$ от экспериментальных значений y_i:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{4}\left(a+\frac{b}{x_i}-y_i\right)^2 .$$

Найдем частные производные по неизвестным a и b и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{4}2\cdot\left(a+\frac{b}{x_i}-y_i\right)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{4}2\cdot\left(a+\frac{b}{x_i}-y_i\right)\cdot\frac{1}{x_i}=0.$$

Преобразуем полученную систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{4}a+b\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}-\sum_{i=1}^{4}y_i=0,$$

$$a\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}+b\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i^2}-\sum_{i=1}^{4}\frac{y_i}{x_i}=0.$$

Составим таблицу, используя экспериментальные значения:

№	x_i	$\frac{1}{x_i}$	$\frac{1}{x_i^2}$	y_i	$\frac{y_i}{x_i}$	$y_{теор}$
1	2	0,50	0,2500	8,00	4,000	8
2	4	0,25	0,0625	5,25	1,312	5
3	6	0,17	0,0289	3,50	0,583	4
4	12	0,08	0,0064	2,10	0,175	3
$\sum_{i=1}^{4}$		1	0,348	18,85	6,07	

Тогда для нахождения неизвестных параметров получим систему уравнений

$$4a + b - 18{,}85 = 0,$$
$$a + 0{,}348b - 6{,}07 = 0,$$

решая которую, находим значения a и b, так что эмпирическая формула имеет вид

$$y = 1{,}2 + \frac{14}{x}.$$

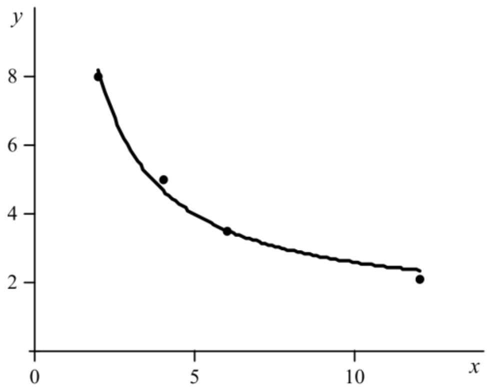


Рисунок 19 – График функции $y(x)$, построенной по методу наименьших квадратов

4.4. Контрольные вопросы и упражнения

1. Темпы роста производительности труда по годам в промышленности республики приведены в таблице.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	100	156	170	184	194	295	220	229

Предполагая, что зависимость y от x линейная, с помощью метода наименьших квадратов получена зависимость $y = 15,93x + 110,57$. Зная формулу для расчета абсолютной погрешности определения Δy, постройте график найденной зависимости и укажите на нем погрешности $\left(\sum_{i=1}^{8} x_i = 36, \ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 204, \ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 7230, \ \sum_{i=1}^{8} y_i = 1458 \right)$.

2. Как правильно выбрать масштаб графика? Как его правильно оформить?

3. Что такое функциональный масштаб и как его выбрать?

4. Как провести линию графика по точкам наилучшим образом и оценить погрешность?

5. Опишите метод наименьших квадратов для произвольной функции.

ГЛАВА 5. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ (ПРИБОРНЫЕ, АППАРАТНЫЕ) ПОГРЕШНОСТИ

До сих пор мы говорили о случайных погрешностях. Но еще существуют и систематические погрешности, связанные с используемыми приборами (средствами измерений). Этот вид погрешностей называется инструментальной погрешностью. Она определяется типом и свойствами прибора.

Абсолютные инструментальные погрешности большинства приборов, используемых для проведения практических и лабораторных работ, приведены в табл. 17.

Таблица 17. Абсолютные инструментальные погрешности приборов

Средства измерения	Предел измерения	Цена деления	Инструментальная погрешность
Линейка ученическая	До 30 см	1 мм	$\pm 0,5$ мм
Линейка чертежная	До 50 см	1 мм	$\pm 0,2$ мм
Штангенциркуль	150 мм	0,1 мм	$\pm 0,05$ мм
Микрометр	25 мм	0,01 мм	$\pm 0,005$ мм
Секундомер механический	0–30 мин	0,2 с	$\pm 0,1$ с
Термометр ртутный	До 250 ^{0}C	1 ^{0}C	$\pm 0,5\,^0$C

Погрешность отсчета связана с тем, что указатель (стрелка) прибора не всегда точно совпадает с делениями шкалы.

Все средства измерений независимо от их конкретного исполнения обладают рядом общих свойств, необходимых для выполнения ими их функционального назначения. Технические характеристики, описывающие эти свойства и оказывающие влияние на результаты и на погрешности измерений, называются метрологическими характеристиками.

Прежде всего для характеристики приборов вводят статические и динамические характеристики.

Статические характеристики прибора имеют место при измерении постоянных величин после завершения переходных процессов в элементах приборов. Иногда статическая характеристика задается как градуировочная кривая, которая устанавливает зависимость информативного параметра x от входного сигнала. Такая характеристика задается в виде таблицы или графика. В этом случае под независимой переменной x понимают значение измеряемой величины, а под зависимой характеристикой – показания прибора.

Динамические характеристики появляются при измерении переменных величин и обусловлены чаще всего инерционными свойствами.

Начнем рассмотрение со статических характеристик прибора. Для широкого круга средств измерений статическая характеристика имеет вид линейной зависимости:

$$y = S \cdot x + y_0, \quad (48)$$

где $S = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – чувствительность прибора, показывающая изменение сигнала прибора на выходе Δy величины на Δx.

Под абсолютной погрешностью измерения прибора понимают разность между результатом измерения $y(x)$ и истинным (номинальным) значением $y_í(x)$, которое дается в паспорте прибора

$$y = y(x) - y_í(x).$$

В общем случае абсолютная погрешность прибора является суммой аддитивной и мультипликативной составляющих. Аддитивная составляющая не зависит от измеряемой величины, а мультипликативная – зависит.

Аддитивная погрешность обусловлена смещением идеализированной (заданной) характеристики прибора параллельно самой себе на постоянную величину a_0 (рис. 20). *Абсолютное значение* аддитивной погрешности неизменно во всем диапазоне измеряемой величины. Иногда аддитивную погрешность называют «погрешностью нуля».

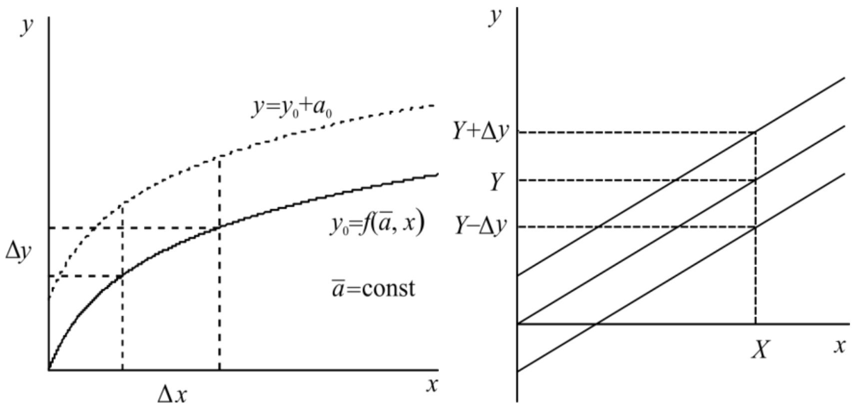


Рисунок 20 – Статическая характеристика прибора
с аддитивной погрешностью

Абсолютное значение мультипликативной погрешности изменяется пропорционально измеряемой величине (рис. 21). В этом случае реальная градуировочная характеристика отклоняется на некоторый угол от номинальной характеристической кривой. Причиной появления мультипликативной погрешности являются изменение жесткости пружин, износ отдельных деталей прибора, нелинейность характеристик преобразователей, входящих в состав приборов. Мультипликативную погрешность еще называют погрешностью чувствительности.

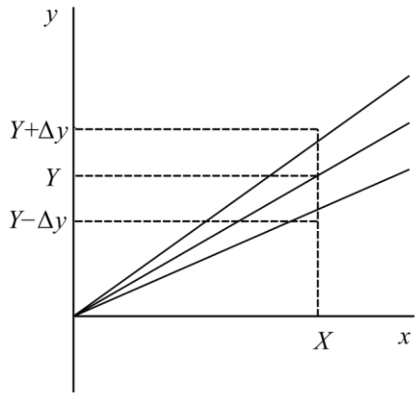


Рисунок 21 – Статистическая характеристика прибора
с мультипликативной погрешностью

Рассмотрим зависимость относительной погрешности измерения величины x от значения этой величины.

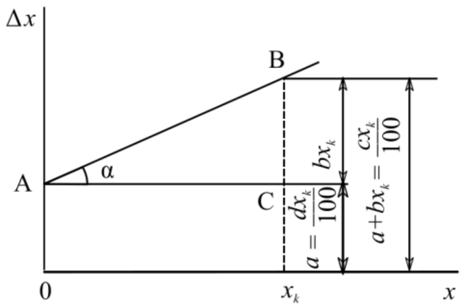


Рисунок 22 – Расчет мультипликативной погрешности

Напомним, что относительная погрешность измерения

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% .$$

Относительную погрешность измерения для конечного значения шкалы ε_N обозначим:

$$\varepsilon_N = \frac{\Delta x}{x_N} \cdot 100\% = d .$$

Будем считать, что существует только аддитивная погрешность, так что величина абсолютной погрешности для всех точек шкалы одинакова и равна $\Delta x = a$, то есть $\varepsilon_N = \dfrac{\Delta x}{x_N} \cdot 100\% =$

$= \dfrac{a}{x_N} \cdot 100\% = d$, откуда $a = \dfrac{d \cdot x_N}{100}$.

Согласно формуле (48) $\Delta y = a + b \cdot x$, тогда суммарная погрешность $c = \dfrac{\Delta y}{x_N}$. Из ΔABC

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{c - d}{100} \cdot b.$$

Тогда относительная погрешность $\dfrac{\Delta y}{x} \cdot 100 = c + d \cdot \left(\dfrac{x_N}{x} - 1 \right)$ графически представляет собой гиперболу (рис. 23).

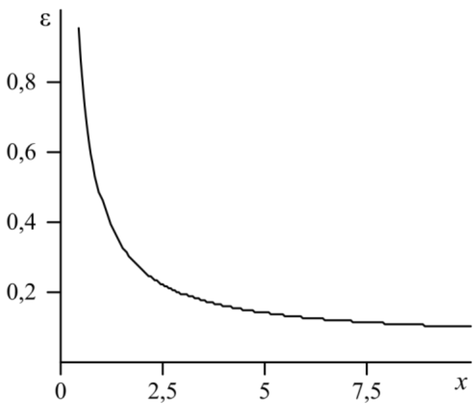


Рисунок 23 – Зависимость относительной погрешности от x

Из рисунка видно, что чем x ближе к значению x_N, тем меньше относительная погрешность. Поэтому следует выбирать такой диапазон измерений, в котором x близки к x_N.

Рассмотрим пример. Пусть амперметр предназначен для измерения силы тока до 200 $мА$. Пусть максимальная абсолютная погрешность измерения силы тока составляет $\pm 3 мА$ и является постоянной для всех точек шкалы. Тогда легко рассчитать относительную погрешность измерения силы тока (см. табл. 18).

Таблица 18

Сила тока I, $мА$	Относительная погрешность $\varepsilon = \frac{I}{I_N} \cdot 100, \%$
50	$\varepsilon = \frac{3}{50} \cdot 100 = 6$
100	$\varepsilon = \frac{3}{100} \cdot 100 = 3$
150	$\varepsilon = \frac{3}{150} \cdot 100 = 2$

То есть наибольшая относительная погрешность наблюдается для значений, полученных в начале шкалы прибора.

Если у прибора преобладает аддитивная погрешность, то его удобно характеризовать величиной абсолютной погрешности $\pm a$. Тогда приведенная относительная погрешность

$$\gamma = \pm \frac{a}{x_N} \cdot 100\%$$

(x_N – обычно предел измерений).

Если нулевая отметка находится посередине шкалы, то приведенная относительная погрешность находится по формуле

$$\gamma = \pm \frac{a}{2 \cdot x_N} \cdot 100\% .$$

Если шкала является неравномерной, то приведенная относительная погрешность определяется длиной шкалы l :

$$\gamma = \pm \frac{a}{l} \cdot 100\% .$$

По заданному значению предела допускаемой основной приведенной погрешности γ легко определить предел допускаемой основной абсолютной погрешности

$$a = \pm \frac{\gamma \cdot x_N}{100} .$$

Тогда для любой отметки шкалы x можно найти допустимую относительную погрешность

$$\varepsilon = \pm \gamma \cdot \frac{x_N}{x} .$$

5.1. Класс точности прибора

Всем измерительным приборам присваивается характеристика, называемая классом точности прибора.

Класс точности прибора – это обобщенная характеристика прибора, определяемая пределами основных и дополнительных погрешностей, а также рядом других свойств, влияющих на точность осуществляемых с их помощью измерений. Фактически класс точности – это предел допускаемой основной погрешности, которая нормирована на максимальное значение шкалы прибора или на длину шкалы:

$$P = \pm \frac{a}{x_N} \cdot 100\% ,$$

где $P = 1 \cdot 10^n; 1{,}5 \cdot 10^n; 2 \cdot 10^n; ...(n = 1, 0, -1, 0, ...)$.

В настоящее время измерительным приборам присвоено 9 классов точности $0{,}01; 0{,}02; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5; 2{,}2; 4$. Приборы классов точности от 0,01 до 0,5 называются прецезионными и используются для лабораторных исследований. Приборы классов точности от 1 до 4 называются техническими.

Класс точности прибора обозначается на шкале прибора четырьмя различными способами.

Таблица 19. Обозначения классов точности на шкале прибора и формулы расчета абсолютной погрешности

Обозначение	Формула для расчета погрешности	Тип погрешности
α	$\Delta x = \frac{\alpha}{100} \cdot x_N$	Аддитивная
α	$\Delta x = \frac{\alpha}{100} \cdot x$	Мультипликативная
α/β	$\Delta x = \frac{\alpha - \beta}{100} \cdot \lvert x \rvert + \frac{\beta}{100} \cdot x_N$	Аддитивная + мультипликативная
α	$\Delta x = k(x) \cdot \frac{\alpha}{100} \cdot 1$	Неравномерная шкала

Рассмотрим примеры.

Пример 1. На шкале амперметра с пределами 0….100 А нанесено обозначение класса точности 2,5. Рассчитать абсолютную погрешность измерения силы тока 10 А.

$$x = 10\ A;\ x_N = 100\ A,$$

$$\Delta x = \frac{\alpha}{100} \cdot x_N = \frac{2,5}{100} \cdot 100 = 2,5.$$

Результат измерений $I = (10,0 \pm 2,5)\ A$.

Пример 2. На шкале амперметра с пределами измерения 0…100 А нанесено обозначение класса точности в виде 0,4. Результат измерения 75 А. Определить абсолютную погрешность и записать результат измерения.

$$\Delta x = \frac{\alpha}{100} \cdot x = \frac{0,4 \cdot 75}{100} = 0,3.$$

Результат измерений $I = (75,0 \pm 0,3)\ A$.

Пример 3. Для прибора с классом точности 0,05/0,02 с диапазоном измерения 0…15 А определить абсолютную погрешность и записать правильно результат измерения 7 А.

$$\Delta x = \frac{\alpha - \beta}{100} \cdot |x| + \frac{\beta}{100} \cdot x_N = \frac{0,05 - 0,02}{100} \cdot 7 + \frac{0,02}{100} \cdot 15 \approx 0,005.$$

Результат измерений $I = (7,000 \pm 0,005)\ A$.

5.2. Физические явления, лежащие в основе действия измерительных приборов

На панели электроизмерительного прибора указывают следующие обозначения основных характеристик:

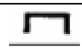
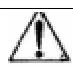
1) название прибора: амперметр А, вольтметр V, …;

2) род тока – постоянный (-- DCA, DCV) или переменный (ACA, ACV);

3) класс точности прибора, рабочее положение прибора и прочность изоляции по отношению к корпусу;

4) принцип действия прибора.

Таблица 20. Обозначения, характеризующие рабочее положение приборов и прочность изоляции по отношению к корпусу

Наименование	Обозначение
Вертикальное положение	
Горизонтальное положение	
Наклонное положение	
Измерительная цепь изолирована от корпуса и испытана напряжением …	
Осторожно! Прочность изоляции измерительной цепи не соответствует нормам (знак красного цвета)	
Внимание! Смотри дополнительные указания в паспорте прибора	

Рассмотрим основные типы электроизмерительных систем приборов.

5.3. Магнитоэлектрическая система

Приборы этой системы предназначены для измерения силы тока и напряжения. Схема измерительного механизма приведена на рис. 24. Магнитное поле создается между полюсами постоянного магнита и цилиндрическим сердечником из магнитомягкого материала. Легкая подвижная рамка насажена на ось и может поворачиваться вокруг сердечника в сильном и достаточно однородном поле зазора. К рамке прикреплена стрелка (или зеркальце), которая удерживается в нулевом положении двумя пружинами. При включении постоянного тока рамка приходит в равновесие в режиме затухающего колебательного процесса. Для сокращения времени установления равновесных показаний в прибор вводят демпфирующие устройства.

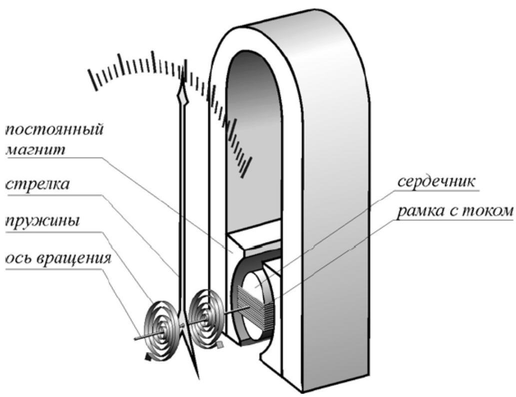


Рисунок 24 – Магнитоэлектрическая система

Рассмотрим принцип действия прибора. Поместим прямоугольный контур в магнитное поле, как показано на рис. 25. При протекании тока I через рамку возникает сила Ампера, действующая только на те участки, которые расположены под углом к вектору магнитной индукции (на рисунке линии магнитной индукции перпендикулярны направлению тока). Направление силы Ампера определяется правилом левой руки. На чертеже показана возникающая пара сил, создающая вращательный момент $M = N \cdot I \cdot S \cdot B$ (N – число витков, S – площадь рамки).

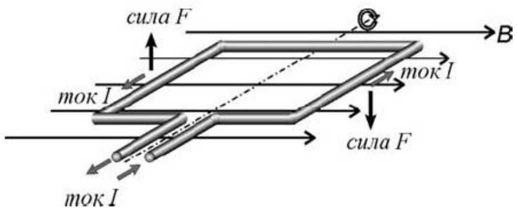


Рисунок 25 – Принцип действия магнитоэлектрического прибора

Пружины создают противодействующий момент $M_{пр} = k \cdot \varphi$ (k – коэффициент упругости, φ – угол поворота рамки), который по мере поворота рамки уравновешивает вращательный момент.

Отсюда следует, что угол поворота рамки пропорционален измеряемому току:

$$N \cdot I \cdot S \cdot B = k \cdot \varphi,$$

$$\varphi = \frac{N \cdot S \cdot B}{k} \cdot I .$$

Можно сделать вывод, что шкала прибора магнитоэлектрической системы является линейной.

При изменении направления тока изменяется направление вращательного момента и, соответственно, отклонение стрелки. Поэтому для измерения тока различной полярности используют приборы, имеющие нулевую отметку, расположенную посередине шкалы.

Достоинства:

– высокая чувствительность (до $3 \cdot 10^{-11}\,А$);

– высокая точность (до 0,1%);

– малое потребление мощности (до $1 \cdot 10^{-6}\,Вт$).

Недостатки:
– сложность изготовления;
– недопустимость перегрузок по току;
– возможность измерять только постоянный ток.

5.4. Электромагнитная система

Работа приборов электромагнитной системы основана на взаимодействии магнитного поля измеряемого тока с подвижным ферромагнитным сердечником.

Магнитное поле, действуя на сердечник (рис. 26), намагничивает его. В результате он втягивается внутрь катушки. При этом сердечник поворачивается до тех пор, пока вращательный момент не уравновесится противодействующим моментом пружин. При изменении направления тока изменяется направление магнитного поля, но изменяется и направление ориентации магнитных диполей в ферромагнетике. Поэтому сердечник по-прежнему втягивается в катушку. Приборы данной системы используются как для измерения постоянного, так и переменного тока.

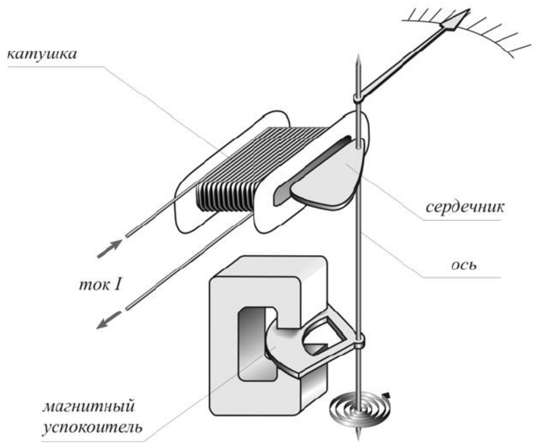


Рисунок 26 – Устройство прибора электромагнитной системы

Намагниченность сердечника в рабочих диапазонах пропорциональна величине измеряемого тока, величина вектора магнитной индукции также пропорциональна силе тока, поэтому вращающий момент равен $M_{вр} = k_1 \cdot I^2$, где k_1 – коэффициент пропорциональности. Противодействующий момент пружин при повороте на угол φ равен $M_{пр} = k_2 \cdot \varphi$. Для состояния равновесия $M_{вр} = M_{пр}$, откуда следует, что $\varphi = \dfrac{k_1}{k_2} \cdot I^2$.

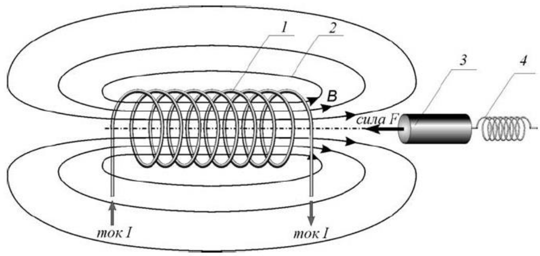


Рисунок 27 – Принцип действия электромагнитного прибора:
1 – катушка с током; 2 – линии магнитной индукции;
3 – ферромагнитный сердечник; 4 – пружина

Достоинства:

– возможность измерения переменного тока без использования дополнительных преобразователей;

– возможность измерения постоянных и переменных токов;

– простота конструкции;

– точность;

– изменяя число витков и сечение провода, легко изготовить приборы на разные токи;

– устойчивость к кратковременным перегрузкам (до стократной перегрузки по току в приборах специальной конструкции).

Недостатки:

– неравномерность шкалы;

– меньшая точность и чувствительность по сравнению с приборами магнитоэлектрической системы;

– большое потребление мощности от 0,1 до 1 Вт.

5.5. Электродинамическая система

Принцип действия приборов электродинамической системы основан на взаимодействии двух катушек, одна из которых 1 неподвижна, а вторая 2 может вращаться (рис. 28). Токи, протекающие по этим катушкам, и создаваемые ими магнитные потоки взаимодействуют, создавая вращающий момент, пропорциональный токам I_1 и I_2: $M_{вр} = k_1 \cdot I_1 \cdot I_2$.

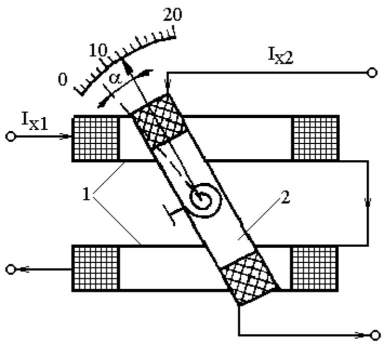


Рисунок 28 – Устройство прибора электродинамической системы

Противодействующий момент создается пружиной $M_{пр} = k_2 \cdot \varphi$. В условиях равновесия $M_{вр} = M_{пр}$, откуда следует, что $\varphi = \dfrac{k_1}{k_2} \cdot I_1 \cdot I_2$. Катушки можно соединять последовательно и параллельно. Если катушки соединены параллельно, то прибор можно использовать как амперметр.

Если катушки соединить последовательно и присоединить к ним добавочное сопротивление, то прибор выступает в качестве вольтметра.

При изменении направления тока он изменяется в обеих катушках. Следовательно, можно измерять и постоянный, и переменный ток.

Достоинства:

– высокая точность (класс точности 0,2–0,5);

– пригодность для измерения как постоянного, так и переменного тока.

Недостатки:

– малая чувствительность;

– чувствительность к перегрузкам;

– чувствительность к воздействию внешних магнитных полей;

– большая потребляемая мощность (5–10 Вт).

5.6. Электростатическая система приборов

Принцип действия приборов электростатической системы можно понять из следующего. Рассмотрим простой плоский конденсатор, выполненный в виде двух параллельных пластин, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга. Пусть одна из пластин закреплена, а вторая подвешена на пружине. В начальный момент на пластинах нет никакого заряда. При подаче напряжения U на конденсатор на поверхности пластин появится заряд Q, приводящий к возникновению электростатического поля напряженностью E. Пластины начнут притягиваться друг к другу с силой $F = Q \cdot U$, уравновешиваемой силой противодействия пружины. Поскольку и величина заряда, и напряженность электрического поля пропорциональны напряжению, а сила упругости пропорциональная смещению, то смещение подвижной части прибора будет пропорционально квадрату измеряемого напряжения.

Вращающий момент в приборах электростатической системы определяется уравнением:

$$M_{вр} = \frac{dW_3}{d\alpha} = \frac{d\left(C\dfrac{U^2}{2}\right)}{d\alpha} = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{d\alpha}.$$

При работе измерительного механизма на переменном напряжении $u(t)$ вращающий момент определяется как:

$$M_{вр} = \frac{1}{2}\frac{dC}{d\alpha}\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt = \frac{1}{2}U^2\frac{dC}{d\alpha},$$

C – емкость между подвижным и неподвижным электродами.

Уравнение шкалы прибора имеет вид:

$$\alpha_y = \frac{1}{2}\frac{U^2}{W}\frac{dC}{d\alpha}.$$

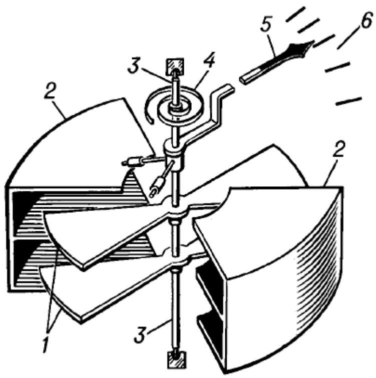


Рисунок 29 – Конструкция электростатического вольтметра.
1 – подвижный электрод; 2 – неподвижный электрод; 3 – ось вращения; 4 – пружина; 5 – стрелка; 6 – шкала

Достоинства:

– почти не потребляет энергии в цепях постоянного тока и очень незначительно в цепях переменного тока;

– имеет широкий частотный диапазон (до 10 МГц);

– обеспечивают высокую точность измерений;

– независимость показаний от температуры, частоты, формы сигнала;

– не влияют внешние магнитные поля;

– используется для измерения напряжения в широком диапазоне (от 10 В до 7,5 кВ).

Недостатки:

– низкая чувствительность;

– неравномерная шкала;

– влияние электростатических полей.

5.7. Индукционные измерительные приборы

На основе индукционного измерительного механизма выполняются, как правило, счетчики электрической энергии. Устройство прибора индукционной системы показаны на рис. 30.

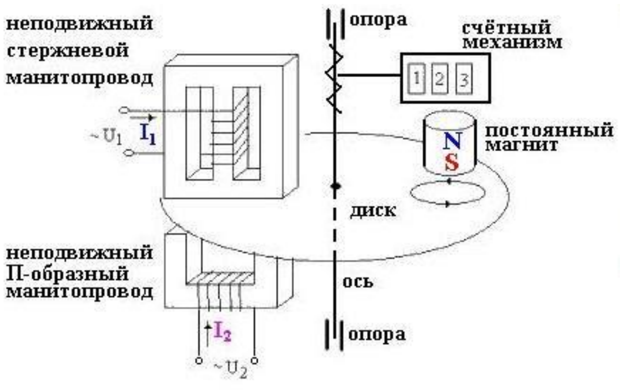


Рисунок 30 – Индукционный измерительный прибор

Механизм состоит из двух индукторов (электромагнитов), выполненных в виде стержневого и П-образного индукторов, между которыми находится подвижный неферромагнитный (алюминиевый) диск. На индукторах намотаны обмотки, по которым протекают соответственно токи I_1 и I_2, возбуждающие магнитные потоки Φ_1 и Φ_2. С осью диска связан счетный механизм, который считает число оборотов диска. Для предотвращения холостого вращения диска (для предотвращения самохода) в непосредственной близости от него укреплен постоянный магнит (тормозной магнит). Принцип действия прибора следующий: при подключении прибора в сеть переменного тока токи I_1 и I_2 возбуждают магнитные потоки Φ_1 и Φ_2, которые совпадают по фазе с соответствующими токами. Катушка на которую подается напряжение U_1 имеет большее число витков и включается параллельно нагрузке (Φ_1 пропорционален напряжению U_1), обмотка другого электромагнита включается в цепь последовательно с нагрузкой (Φ_2 пропорционален силе тока I_2).

Поэтому вращающий момент $M_{вр} = k_1 \cdot I \cdot U = k_1 \cdot P$.

Тормозящий момент определяется углом поворота φ и, следовательно, пропорционален числу оборотов диска N:

$$M_{тр} = k_2 \cdot N.$$

Таким образом, мощность тока определяется числом оборотов

$$P = \frac{k_2 \cdot N}{k_1}.$$

Достоинства:

– большой вращающий момент;

– мало подвержен влиянию внешних полей;

– прочность конструкции;

– надежность в работе.

Недостатки:

– невысокая точность;

– большое самопотребление;

– зависимость показаний от частоты и температуры.

5.8. Термоэлектрическая система приборов

Принцип действия приборов термоэлектрической системы основан на использовании электродвижущей силы, возникающей в цепи, состоящей из разнородных проводников, если место соединения этих проводников имеет температуру, отличную от температуры остальной части этой цепи.

На рис. 31 дана схема прибора термоэлектрической системы.

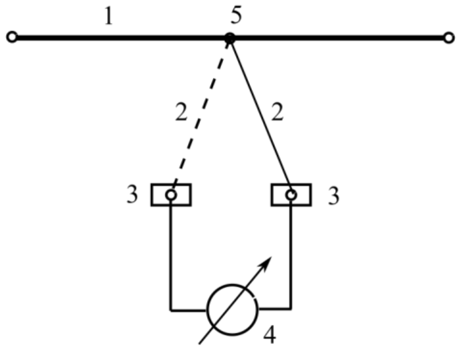


Рисунок 31 – Схема прибора термоэлектрической системы

Измеряемый ток проходит по металлической нити 1, к которой припаяны или приварены два разнородных проводника 2, например железо и константан. Свободные концы проводников 2 присоединены к металлическим колодкам 3, хорошо отводящим тепло. К колодкам подключается магнитоэлектрический измерительный прибор 4.

Когда по нити 1 проходит ток, сама нить и место спая ее с проводниками 2 (точка 5) нагреваются. Точка 5 представляет собой горячий спай термопары. Металлические колодки 3 являются холодными спаями термопары. Вследствие разности температур в замкнутом контуре возникает термо-э.д.с., которая создает в этой цепи ток. Направление термотока будет всегда одно и то же независимо от направления измеряемого тока.

Количество тепла, выделенного в горячем спае термопары, согласно закону Джоуля-Ленца, пропорционально квадрату силы тока. Поэтому шкала применяемого в этой системе магнитоэлектрического прибора неравномерна. Для получения равномерной шкалы магнитное поле магнитоэлектрического прибора делают неоднородным. Термо-э.д.с. одной термопары не превышает 15 мВ, что требует установки весьма чувствительного магнитоэлектрического прибора. Чтобы увеличить величину термо-э.д.с., соединяют несколько термопар последовательно в термобатарею.

Чувствительные термоэлектрические приборы изготовляются с термопарой, помещенной в вакуум.

Достоинства:

– точность прибора довольно высока, что дает возможность строить их в классах 0,5 и 1;

– приборы термоэлектрической системы получили наибольшее применение для измерения малых значений переменных токов в цепях повышенной и высокой частоты.

Недостатки:

– приборы термоэлектрической системы чувствительны к перегрузкам: даже при кратковременной перегрузке на 10% нагревательная нить может перегореть.

5.9. Ферродинамическая система приборов

В основе ферродинамических приборов лежит ферродинамический измерительный механизм. Принцип действия ферродинамического измерительного механизма заключается во взаимодействии магнитных полей двух систем проводников с токами и по существу является разновидностью электродинамического механизма. Отличие заключается в том, что для увеличения чувствительности измерительный механизм содержит магнитопровод из магнитомягкого материала. Наличие магнитопровода значительно увеличивает магнитное поле в рабочем зазоре и при этом возрастает вращающий момент.

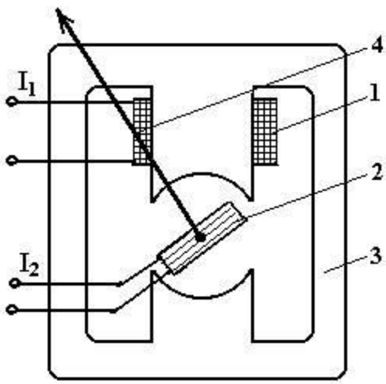


Рисунок 32 – Устройство прибора ферродинамической системы

В общем случае измерительный механизм включает в себя неподвижную катушку (катушку возбуждения), подвижную часть и магнитопровод. На рис. 32 показан один из вариантов конструктивного исполнения ферродинамического измерительного механизма. Магнитная цепь по устройству близка к магнитной цепи магнитоэлектрического измерительного механизма, в котором постоянный магнит заменен электромагнитом. Вращающий момент ферродинамического измерительного механизма возникает в результате взаимодействия подвижной катушки 1 с током и потока, создаваемого неподвижной катушкой 2. Подвижная часть соединяется с указателем 4. При протекании тока I_1 по неподвижной катушке и работе на линейном участке кривой намагничивания материала магнитопровода 3 индукцию в рабочем зазоре можно найти как

$$B = K_1 I_1, \tag{49}$$

где K_1 – коэффициент, зависящий от конструктивного исполнения измерительного механизма.

Учитывая, что подвижная часть будет реагировать вследствие своей инерционности, среднее значение вращающего момента можно написать в виде

$$M_{вр} = K_1 S_2 n_2 I_1 I_2 \cos\left(I_1, I_2\right), \tag{50}$$

где S_2, n_2 и I_2 – площадь, число витков и сила тока подвижной катушки; I_1 и I_2 – действующие значения сил токов в неподвижной и подвижной катушке; $\cos\left(I_1, I_2\right)$ – косинус угла между векторами токов I_1 и I_2.

Если противодействующий момент создается при помощи упругих элементов, то для статического равновесия

$$\alpha = K I_1 I_2 \cos\left(I_1, I_2\right), \tag{51}$$

α – угол отклонения подвижной части; $K = K_1 S_2 n_2$.

Достоинства:

- независимость от внешних магнитных полей;
- достаточно высокая чувствительность;
- малое потребление мощности;
- большой вращающий момент;
- можно использовать в качестве самопишущих приборов.

Недостатки:

- низкая точность;
- чувствительность к влиянию колебаний частоты.

5.10. Условные обозначения систем приборов

 Магнитоэлектрический с подвижной рамкой

 Логометр магнитоэлектрический

 Электромагнитный

 Электродинамический

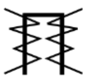
 Электростатический

 Индукционный

 Ферродинамический

 Логометр ферродинамический

 Логометр электродинамический

 Логометр электромагнитный

5.11. Контрольные вопросы и упражнения

1. Что такое динамическая погрешность?
2. Изобразите полосу абсолютной погрешности для мультипликативной составляющей погрешности.
3. Что такое статическая погрешность?
4. Как изменяется «идеальная» градуировочная кривая для аддитивной составляющей погрешности? Поясните рисунком.

5. Какой частью шкалы следует пользоваться для получения результатов с меньшей относительной погрешностью? Почему? Ответ поясните примером или обоснуйте аналитически.

6. «Прочитайте» шкалу прибора. Укажите класс точности прибора, тип измерительной системы, для измерения постоянного или переменного тока предназначен прибор, тип прибора (амперметр, вольтметр и т.д.).

7. Равномерную или неравномерную шкалу имеют приборы магнитоэлектрической системы?

ГЛАВА 6. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

Метрология является одним из древнейших разделов науки, ибо необходимость измерять – одна из первых практических потребностей человека. С развитием цивилизации знание измерений прогрессивно возрастало, соответственно возрастали требования к точности измерений.

Здравый смысл уже давно привел к формулировке основных требований к единицам меры: они должны быть не слишком велики и постоянны по величине. Уже давно бытовала мысль, чтобы заимствовать эти единицы у природы.

Однако до практической реализации этой идеи пришлось пройти долгий путь. Дело в том, что эти попытки получили материальную основу только после достижения определенного уровня развития науки и промышленного производства. Неслучайно первая система мер появилась только в конце 18 в. в период Великой Французской революции.

В 1793 г. Национальное собрание Франции приняло метрическую систему мер «*pur tous les temps*» (на все времена). Представление о масштабах проделанной работы дают три больших тома отчета, написанного выдающимися астрономами, физиками и математиками.

Каким требованиям должна удовлетворять система мер?

1. *Каждая мера должна иметь строго определенную величину*.

Неудобство существования разных мер для измерения ясно. Например, можно прочитать, что эстонским морякам до конца плавания остается три трубки, а в Японии использовалась единица измерения «башмак» и т.д.

2. *Меры должны быть постоянны*.

Так как непосредственная проверка меры по природному эталону может оказаться сложной, то необходимо, чтобы существовал образец (эталон), который проверен по его природному значению, засвидетельствован властью, хранится в государственном учреждении, производящем проверку употребляемых в обиходе мер.

3. *Необходимо, чтобы меры разных величин были друг с другом удобным образом связаны*.

4. *Необходимо выбрать единичные отношения мер*.

Вычисления значительно упрощаются, если система мер имеет единичные отношения, совпадающие с основанием системы счисления.

6.1. Единицы системы СИ (Международной системы единиц)

Уже из потребностей каждодневной жизни ясна необходимость введения и использования легко воспроизводимых единиц измерения, которые были бы к тому же по возможности долговечными. Реализовать эту программу было бы лучше всего, воспользовавшись теми взаимосвязями, которые уже существуют в природе и которые признаны неизменными.

Такая система единиц была принята в международных масштабах в 1960 г. на XI Генеральной конференции по мерам и весам. Она основывается на базисных единицах, приведенных в табл. 21.

Таблица 21. Базисные единицы системы СИ

Величина	Единица измерения		Обозначение	
	Русское название	Международное название	Русское	Международное
Длина	метр	metre (meter)	м	m
Масса	килограмм	kilogram	кг	kg
Время	секунда	second	с	s
Сила тока	ампер	ampere	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	kelvin	К	K
Сила света	кандела	candela	кд	cd
Количество вещества	моль	mole	моль	mol

Таблица 22. Производные единицы системы СИ

Величина	Единица измерения		Обозначение	
	Русское название	Международное название	Русское	Международное
Плоский угол	радиан	radian	рад	rad
Телесный угол	стерадиан	steradian	ср	sr
Температура по шкале Цельсия[1]	градус Цельсия	degree Celsius	°C	°C
Частота	герц	hertz	Гц	Hz
Сила	ньютон	newton	Н	N
Энергия	джоуль	joule	Дж	J
Мощность	ватт	watt	Вт	W
Давление	паскаль	pascal	Па	Pa
Световой поток	люмен	lumen	лм	lm
Освещённость	люкс	lux	лк	lx
Электрический заряд	кулон	coulomb	Кл	C
Разность потенциалов	вольт	volt	В	V
Сопротивление	ом	ohm	Ом	Ω
Электроёмкость	фарад	farad	Ф	F
Магнитный поток	вебер	weber	Вб	Wb
Магнитная индукция	тесла	tesla	Тл	T
Индуктивность	генри	henry	Гн	H
Электрическая проводимость	сименс	siemens	См	S

[1] Шкалы Кельвина и Цельсия связаны между собой следующим образом: °C = K – 273,15

Кратные единицы – единицы, которые в целое число раз превышают основную единицу измерения некоторой физической величины.

Международная система единиц (СИ) рекомендует следующие десятичные приставки для обозначений кратных единиц:

Таблица 23

Кратность	Приставка		Обозначение	
	Русская	Международная	Русское	Международное
10^{1}	дека	deca	да	da
10^{2}	гекто	hecto	г	h
10^{3}	кило	kilo	к	k
10^{6}	мега	Mega	М	M
10^{9}	гига	Giga	Г	G
10^{12}	тера	Tera	Т	T
10^{15}	пета	Peta	П	P
10^{18}	экса	Exa	Э	E
10^{21}	зетта	Zetta	З	Z
10^{24}	йотта	Yotta	И	Y

Дольные единицы составляют определённую долю (часть) от установленной единицы измерения некоторой величины.

Международная система единиц (**СИ**) рекомендует следующие приставки для обозначений дольных единиц:

Таблица 24

Дольность	Приставка		Обозначение	
	Русская	Международная	Русское	Международное
10^{-1}	деци	deci	д	d
10^{-2}	санти	centi	с	c
10^{-3}	милли	milli	м	m
10^{-6}	микро	micro	мк	μ (u)
10^{-9}	нано	nano	н	n
10^{-12}	пико	pico	п	p
10^{-15}	фемто	femto	ф	f
10^{-18}	атто	atto	а	a
10^{-21}	зепто	zepto	з	z
10^{-24}	йокто	yocto	и	y

Огромная роль системы СИ определяется целым рядом ее свойств, которые делают ее особенно удобной для применения в теории и на практике.

1. Единицы системы СИ универсальны и применимы во всех областях физики и техники, так как не имеют никакого отношения к свойствам конкретного материала.

2. Эти единицы могут быть реализованы с достаточной степенью точности в соответствии со своими определениями или эквивалентными им соотношениями.

3. Система СИ абсолютна: сила или энергия любой природы может быть выражена в действующих в этой системе механических единицах (соответственно, силы или энергии).

4. Система СИ принята в международных масштабах и все шире вводится в законодательном порядке.

6.2. Выбор основных единиц

В качестве основных единиц целесообразно выбрать такие, которые отражают наиболее общие свойства материи. Поскольку формами существования материи являются пространство и время, естественно включить в состав основных единиц следующие: единицы длины и единицы времени. Так как одной из наиболее общих характеристик материи является масса, то в большинстве систем в качестве третьей основной единицы измерения принимается единица массы.

Система, построенная на единицах длины, массы и времени, впервые была предложена Гауссом и названа абсолютной системой.

6.3. Единица измерения длины

8 мая 1790 г. Национальное собрание Франции приняло решение разработать применимую во всем мире систему мер и весов.

Обсуждалось использование трех естественных основ для определения единицы длины:

1) длина маятника с периодом колебаний одна секунда на широте 45^0.

Трудность осуществления этого предположения состояла в том, что прежде необходимо было установить единицу измерения времени, которую в то время еще невозможно было реализовать с необходимой точностью.

2) в качестве единицы длины предлагалось использовать ¼ часть экватора Земли.

Это предложение было отвергнуто в связи с трудностью доступа к земному экватору, правильность формы которого была установлена не так строго, как земного меридиана.

3) длина ¼ меридиональной окружности Земли.

Поэтому выбор пал на третье предложение, согласно которому единица длины должна равняться точно 10^{-7} части от ¼ меридиональной окружности. Измерения ее поручили астрономам Деламору и Мешэну. Для измерения отрезка меридиана методом триангуляции за 6 лет измерили дугу парижского меридиана длиной в 9°40' от Дюнкерка до Барселоны, проложив цепь из 115 треугольников через всю Францию и часть Испании. Эти измерения были повторены 170 раз.

Однако прежде нужно было установить форму Земли. Ответ на этот вопрос дал Исаак Ньютон, проведя мысленный эксперимент. Его решение поставленной задачи основывалось на исследованиях французской экспедиции 1672 года, обнаружившей странное расхождение в показаниях времени между маятниковыми и пружинными часами. Вблизи экватора стрелки маятниковых часов отстали на 2,5 мин.

Ньютон предположил следующее. Если представить себе два канала, выходящих из центра Земли к Северному полюсу и к экватору, и предположить, что вода не переливается ни с экватора к полюсу, ни обратно, то, значит, оба столба жидкости уравновешены. Так как центробежные силы, вызванные вращением Земли, немного уменьшают силу тяжести в экваториальном канале, то, сделав соответствующий расчет, Ньютон пришел к заключению, что экваториальный радиус на 22 км больше полярного. Отсюда следовал вывод: земной шар вовсе не шар, а эллипсоид.

В XVII в. Снеллиусом был изобретен надежный способ измерения таких расстояний – способ триангуляции (названный так от латинского слова «триангулюм», что значит «треугольник»). Этот способ удобен тем, что встречающиеся на пути препятствия – леса, реки, болота и т. п. – не мешают точному измерению больших расстояний. Измерение производится следующим образом: непосредственно по поверхности Земли очень точно измеряют расстояние между двумя близко расположенными точками *A* и *B*, из которых видны удаленные высокие предметы: холмы, башни, колокольни и т. п. Если из *A* и *B* через зрительную трубу можно разглядеть предмет, находящийся в точке *C*, то нетрудно измерить в точке А угол между направлениями *AB* и *AC*, а в точке *B* – угол между *BA* и *BC*.

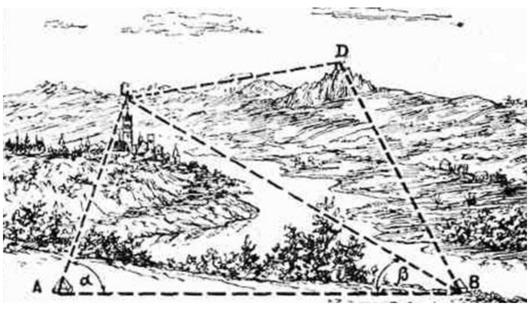


Рисунок 33 – Метод триангуляции

После этого по измеренной стороне *AB* и двум углам при вершинах *A* и *B* можно построить треугольник *ABC* и, следовательно, найти длины сторон AC и BC, т. е. расстояния от A до C и от B до С, например, по теореме синусов: $AC = AB \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$; $BC = AB \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$. Такое построение можно выполнить на бумаге, уменьшив все размеры в несколько раз или с помощью вычисления по правилам тригонометрии. Зная расстояние от B до C и наводя из этих точек зрительную трубу измерительного инструмента (теодолита) на предмет в какой-либо новой точке D, мы тем же путем сумеем измерить и расстояния от B до D и от C до D. Продолжая измерения, мы как бы покроем часть поверхности Земли сетью треугольников: ABC, BCD и т. д., – в которых можно последовательно определить все стороны и углы. После того как измерена сторона AB первого треугольника (базис), все дело сводится к измерению углов между двумя направлениями. Имея сеть треугольников, можно высчитать при помощи тригонометрии расстояние от вершины одного треугольника до вершины любого другого треугольника, как бы далеко друг от друга эти вершины ни находились. Так решается вопрос об измерении больших расстояний на поверхности Земли.

С помощью таких измерений было установлено, что 1 метр=0,513074 туаз.

В ходе развития измерительной техники эталон метра оказался недостаточно точным, а как концевая мера длины часто неэффективным. Поэтому он был заменен штриховым масштабом из 90% платины и 10% иридия, неизменность которого можно считать гарантированной. В поперечнике он обладает Х-образным профилем длиной 1020 мм, его средняя линия проходит по поверхности желоба. На нейтральной плоскости при 0 °С было нанесено по три штриха с каждой стороны, расстояние между средними штрихами составляло 1 метр (рис. 34).

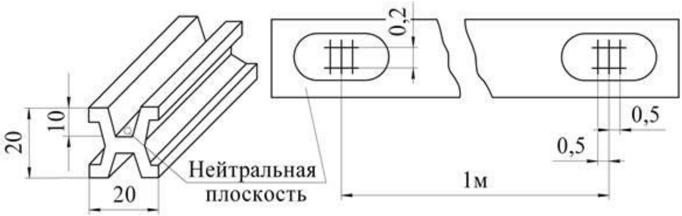


Рисунок 34 – Эталон метра

После создания этого эталона отпала надобность в прежней единице длины. Более того в 1837 г. Бессель установил, что новая единица длины на 0,2 мм короче прежней.

Однако и в отношении нового эталона не было уверенности, что его длина не станет очень слабо изменяться в силу перекристаллизации металла.

Предполагают, что с 1889 г. по 1957 г эталон укоротился на 0,5 мкм. Кроме того, значительно возросли требования к точности измерений.

Например, в 1800 г. вполне достаточной считалась точность 0,25 мм; в 1900 г – 0,01 мм; 1950 г. – 0,25 мкм; в настоящее время – $10^{-9} - 10^{-10}$ м.

Эталоны хранились в стерильных условиях в метрологических лабораториях по всему миру, пока в 1960 году не было решено отказаться от использования не так уж точно воспроизводимого предмета, подверженного старению, в пользу физического явления, которое можно точно воспроизвести в лаборатории с нужной точностью и через многие годы. С тех пор метр определялся как 1 650 763.73 длин волн оранжевой линии (6 056 Å) спектра, излучаемого изотопом криптона ^{86}Kr в вакууме (переход между уровнями $2p^{10}$ и $5d^{5}$). Точность эталона составила 4 нанометра.

В 1983 году пошли ещё дальше и определили метр как расстояние, проходимое светом в вакууме за 1/299792458 долю секунды. При соблюдении всех условий и введении поправок воспроизводимость современного эталона метра составляет 0.1 нм (относительная погрешность 10^{-10}). Последняя величина – характерный размер атома.

6.4. Реализация единицы массы

Понятие массы впервые появляется в динамике при установлении связи между силой и ускорением $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. В этом соотношении масса определяется как мера инертности.

Масса – это единственная величина, связанная с существованием искусственно созданного материального прототипа, который может быть выбран свободно и который не требует проведения опытов для обеспечения неизменности прототипа.

Прототип 1 кг массы представляет собой цилиндр из сплава 90% платины и 10% иридия диаметром 39 мм и такой же высоты.

Рисунок 35 – Эталон килограмма

6.5. Реализация единицы времени

Единицы длины и массы поддаются овеществлению вне зависимости от того, удается ли нам присоединить к ним неизменную меру. Можно вновь и вновь сравнивать масштабы с эталоном.

В отношении времени все иначе. С одной стороны, единица времени не поддается хранению. С другой стороны, требуется, чтобы при измерениях можно было проводить количественное сравнение с прошедшими отрезками времени.

Очень большие отрезки времени используются в астрономии, а в обыденной жизни требуются намного меньшие интервалы.

Человек измерял время мгновениями ока (0,1–0,3 с) и ударами сердца (0,4–1 с). Важнейшими же отрезками были сутки, месяц и год.

В древности для измерения времени использовали специальные обелиски, которые назвали гномонами. Гномон – это древнейший астрономический прибор. С помощью него определяли момент, когда тень от вертикального столба была минимальной, а высота Солнца самой большой. При этом оказалось, что дуга пути поднимающегося Солнца равна дуге пути Солнца опускающегося. Момент высшего положения Солнца назвали полднем. Оказалось, что полуденная тень в Северном полушарии всегда направлена на север. Таким образом, гномон – это первые часы, показывающие пока только один час – полдень.

Когда вокруг гномона поставили визиры на точки восхода Солнца в День первой травы или в День первой воды, то получили календарь, позволяющий узнать о возвращении даты через год. Так удалось определить, что продолжительность года составляет 360–365 суток.

Число 360 привело древних теоретиков в восторг: 3х4х5х6=360. Само небо послало людям число, делящееся без остатка на все числа от 2 до 6! Это было предметом гордости вавилонян:

$$3\times 4=12,$$

$$12\times 5=60,$$

$$60\times 6=360.$$

А с остатком в 5 суток как-нибудь разберемся. Дальше все было бы просто: разделим 360 на 12 и получим продолжительность месяца 30 дней.

Однако Земля обходит вокруг Солнца за 365 суток 5 часов 48 минут 45,84 секунды. Поэтому построить во всех отношениях удобный календарь не удалось и по сей день.

Во-первых, оказалось, что существуют звездные и солнечные сутки. Если смастерить простейший визир – вбить в доску два гвоздя, навести визир на любую звезду и оставить прибор неподвижным на сутки, то через сутки Земля нацелит визир на ту же звезду через 23 часа 56 минут. Этот промежуток времени и называется звездными сутками.

Будем теперь наблюдать за Солнцем с помощью гномона. Оказалось, что интервал между двумя полуднями равен ровно 24 часа. Этот промежуток времени назвали солнечными сутками.

Чтобы гномон показывал звездное время, его надо нацелить в направлении земной оси, то есть на Полярную звезду.

Такое усовершенствование гномона осуществил древний грек Анаксимен Милетский около 530 г до нашей эры. Он построил в Лакедомоне первые солнечные часы. С этого момента гномон остается главным прибором для измерения времени.

Астрономическая шкала времени определяется в основном двумя движениями – вращением Земли вокруг своей оси и вращением Земли вокруг Солнца по слегка эллиптической орбите, в одном из фокусов которой расположено Солнце. Интервал между двумя последовательными прохождениями Солнца через меридиан наблюдателя на Земле определяет продолжительность истинного солнечного дня. Обычно солнечные сутки определяются для меридиана Гринвича.

Непрерывное сравнение на протяжении года показывает, что продолжительность истинных солнечных суток не постоянна, а все время колеблется. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, из закона тяготения следует, что в перигелии Земля движется быстрее, чем в афелии. Во-вторых, продолжительность суток определяется по полному обороту небесной сферы вдоль экватора. Разницу между истинным и средним солнечным временем называют уравнением времени. Эта величина отложена по оси ординат, а по оси абсцисс отложены дни (рис. 36).

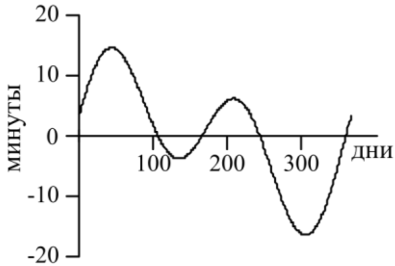


Рисунок 36 – Уравнение времени

Из графика видно, что четыре раза в году уравнение времени равно нулю. Это бывает около 14 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря. Наибольшие численные значения уравнение времени принимает около 12 февраля ($\eta = +14$ мин.) и около 3 ноября ($\eta = -16$ мин.).

В некоторых календарях и ежегодниках уравнение времени дается в смысле «истинное время минус среднее» и тогда имеет противоположный знак.

Еще одним способом задания единицы времени было введение тропического года, то есть времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия. Его продолжительность 365, 25220 средних солнечных суток, что превышает год в 365 дней на ¼ суток. Поэтому каждые четыре года добавляется один день (високосный год). Чтобы правильно учитывать следующие десятичные знаки, первый год столетия не считается високосным. Кроме того високосный 1872 год был специально удлинен, в него добавили две секунды. Еще по одной секунде добавили в 1973 и 1974 годах.

Альтернативой введения тропического года выступает сидерический год, равный промежутку времени, через который Земля при своем движении вокруг Солнца возвращается в прежнее положение относительно неподвижных звезд. В этом случае определяют положение точки весеннего равноденствия относительно неподвижных звезд. Оказалось, что сидерический год длиннее тропического на 0,014 суток.

Было принято, что одна секунда – это $1\,c = \dfrac{1}{31556925{,}9747}$ тропического года 1900.

Точность этой единицы времени составляет $10^{-8}\,c$.

В 1964 году XII конференция по мерам и весам уполномочила установить молекулярную или атомную частоту, которая должна быть официально принятым стандартом.

В качестве такой частоты принят квантовый переход между линиями сверхтонкой структуры атома цезия с частотой 9,192631770 Гц. Тогда одна секунда равна $9{,}192631770 \cdot 10^9$ колебаниям излучения при этом переходе.

6.6. Реализация единицы силы тока

В соответствии с определением силы тока эталон должен быть основан на взаимодействии двух прямолинейных проводников бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных на расстоянии 1 м в вакууме. При силе электрического тока в проводнике в 1 А сила взаимодействия составляет $2 \cdot 10^{-7}\,H$ на каждый метр длины (рис. 37). Однако практически реализовать такой эталон не представляется возможным.

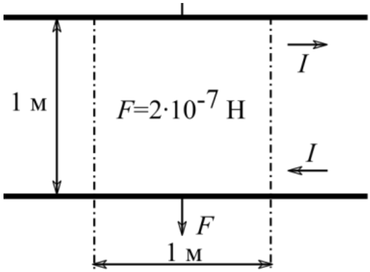


Рисунок 37 – Реализация силы тока в 1 А

Поэтому на практике пользуются двумя установками: 1) измеряют силу, действующую на подвижную катушку, помещенную внутрь другой катушки (взвешивание токов по Рэлею – рис. 38).

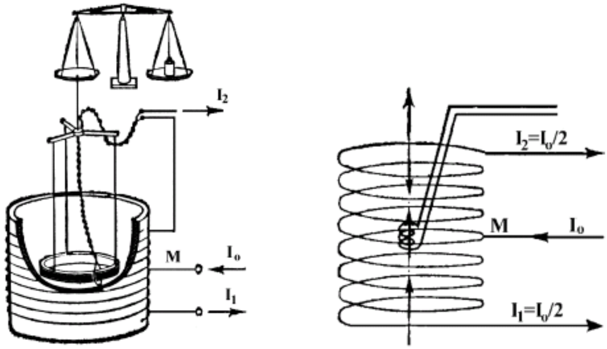


Рисунок 38 – Взвешивание токов по Рэлею

Внутрь большой катушки длиной 27,5 см и диаметром 46 см помещается измерительная катушка, на которую действует подлежащая измерению сила. Измерительная катушка имеет длину 2,6 см и диаметр 2,45 см. Число витков большой катушки 344, малой – 41. Измерительная катушка подвешена к коромыслу чувствительных весов, на вторую чашку которых помещаются гирьки.

Электрическая цепь собрана таким образом, что подводимый к большой катушке ток делится на две равные части и каждая часть протекает в противоположных направлениях через нижнюю и верхнюю половины катушек. При этом часть тока I_2 проходит через измерительную катушку. В половинах большой катушки возникают противоположно направленные магнитные поля B_0 и B_0'.

Магнитный момент, создаваемый в измерительной катушке, действует с силой $F = M \cdot \dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ на большую катушку. Причем величину этой силы можно рассчитать по закону Ампера $F = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \cdot \dfrac{I_1 \cdot I_2}{R} \cdot \Delta l$.

Тогда, используя весы, можно рассчитать силу тока. Погрешность воспроизведения данным эталоном единицы ампера составляет $4 \cdot 10^{-6}$.

6.7. Реализация температурной шкалы

В качестве единицы измерения температуры принят один градус по шкале Кельвина. При этом в качестве параметра используется термодинамическая температура. Измерение термодинамической температуры требует осуществить воспроизведение многих температурных точек, совокупность которых образует температурную шкалу.

Понятие термодинамической температуры было введено после открытия цикла Карно. Карно установил, что для созданной им идеальной тепловой машины невозможно все тепло, взятое у нагревателя, превратить в механическую работу. Величина коэффициента полезного действия определяется количеством теплоты, полученным от нагревателя Q_1, количеством теплоты, отданным холодильнику Q_2 или от температуры T_1 нагревателя и температуры T_2 холодильника:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда получаем соотношение $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$, которое показывает, что кпд тепловой машины не зависит от рабочего тела.

Выберем в качестве рабочего тела воду при температуре $T_1 = 373\,K$. В качестве второй точки выберем лед, тающий при атмосферном давлении при температуре $T_2 = 273\,K$.

Разность температур $T_1 - T_2$ делится на произвольное число частей, чем устанавливается размер градуса.

Теперь, если взять другое тело и использовать его в качестве нагревателя при температуре T и прежнем холодильнике, то проводя с ним цикл Карно, получим

$$\frac{Q_1'}{T} = \frac{Q_2'}{T_2},\ T = T_2 \cdot \frac{Q_2'}{Q_1'}.$$

Эта температура T называется термодинамической температурой.

В 1954 г. X Генеральная конференция по мерам и весам постановила принять за термодинамическую температуру $T = 273{,}16\,K$ тройной точки воды в условиях вакуума над тающим льдом при давлении 611 Па.

В настоящее время температура тройной точки установлена как $T = 273{,}15\,K$.

6.8. Реализация единицы силы света

Видимый свет представляет собой часть электромагнитного спектра в диапазоне длин волн приблизительно от 380 до 780 нм. Свет можно характеризовать тем, насколько ярким он кажется человеческому глазу. В XIX в. появилась необходимость количественного сравнения источников света. Фотометрические величины оценивались глазом следующим образом.

Так как чувствительность глаза к разным длинам волн у человека неодинакова, в 1931 году Международная комиссия по освещению ввела понятие стандартного наблюдателя как некоего среднего для людей со стандартным зрением. Этот эталон не что иное, как таблица световой эффективности излучения с длинами волн в диапазоне от 380 до 780 нм (рис. 39).

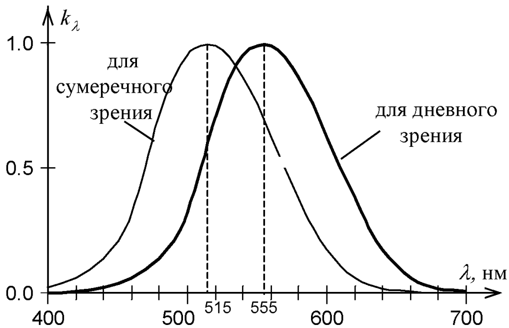


Рисунок 39 – Кривые спектральной чувствительности глаза

Под силой света понимают пространственную плотность светового потока, равную отношению светового потока Φ к величине телесного угла Ω, в котором поток распространяется $I = \dfrac{\Phi}{\Omega}$.

Долгое время мерой силы света была свеча. За 1 свечу принимали силу света, излучаемую 1 см^2 поверхности затвердевающей платины в направлении нормали к поверхности.

Современной единицей силы света является 1 канделла – это сила света, испускаемого в заданном направлении источником монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ *Гц*, энергетическая сила которого равна $\dfrac{1}{683} \dfrac{Вт}{стерадиан}$.

6.9. Контрольные вопросы и упражнения

1. Выразите производные единицы системы СИ через основные единицы (сопротивление, магнитный поток, индуктивность, энергия, поверхностное натяжение, количество теплоты).
2. Что принято за эталон единицы длины в Международной системе единиц?
3. Что принято за эталон единицы массы в Международной системе единиц?
4. Что принято за эталон единицы силы тока в Международной системе единиц?
5. Что принято за эталон единицы времени в Международной системе единиц?
6. Выразите единицу измерения емкости через основные единицы измерения системы СИ.
7. Выразите единицу измерения электрического сопротивления через основные единицы измерения системы СИ.
8. Выразите единицу измерения магнитной индукции через основные единицы измерения системы СИ.

Рекомендуемая литература

1. Старовиков, М.И. Введение в экспериментальную физику: учебное пособие / М.И. Старовиков. – СПб.: «Лань», 2008. – 240 с.

2. Новицкий, П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат,1991. – 304 с.

3. Тейлор, Дж. Введение в теорию погрешностей / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

4. Зайдель, А.Н. Ошибки измерений физических величин / А.Н. Зайдель. – Л.: Лань, 2021. – 112 с.

5. Сена, Л.А. Единицы физических величин и их размерности / Л.А. Сена . – Л.: Наука, 1977. – 336 с.

6. Измерение электрических и неэлектрических величин: учеб. пособие для вузов / Н. Н. Евтихиев, Я.А. Купершмидт, В.Ф. Папуловский, В.Н. Скугоров; Под общ. ред. Н.Н. Евтихиева. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 352 с.

7. Лисенков, А.А. Международная система единиц / А.А. Лисенков. – М.: Наука, 1966. –72 с.

8. Широков, К.П. Международная система единиц / К.П. Широков, М.Г. Богуславский. – М.: Издательство стандартов, 1984. – 112 с.

Учебное издание

Жукова Валентина Александровна,
Воробьева Елена Владимировна,
Никонов Владимир Иванович

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНУЮ ФИЗИКУ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.С. Никитиной

Подписано в печать 05.10.2023. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 7,0.
Тираж 27 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.