МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. АЛЯКИН, Р.Ф. УЗБЕКОВ

ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве практикума для обучающихся по основной образовательной программе по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2023

УДК 517.1(075)
ББК В161я7
А604

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. М. Е. Ф е д и н а,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е. А. С а в и н о в

Алякин, Владимир Алексеевич

А604 **Тесты по математическому анализу. Кратные и криволинейные интегралы:** практикум / *В.А. Алякин, Р.Ф. Узбеков.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 128 с.

ISBN 978-5-7883-1888-2

Практикум состоит из краткой теории и тестовых заданий по курсу «Математический анализ». Каждый тест содержит по 20 заданий. В основном к каждой теме приводится по четыре теста. Для типичных и трудных задач в начале каждой темы приводятся схемы для решений или указания к решениям.

Предназначен для обучающихся второго курса специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Подготовлен на кафедре функционального анализа и теории функций.

УДК 517.1(075)
ББК В161я7

ISBN 978-5-7883-1888-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 1. Функции с ограниченной вариацией

Тест 1

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

P-произвольное разбиение отрезка $[0,1]$.Чему равна $V_P(f)$?
Выберите правильный вариант ответа.

a. $2x_{n-1}$ b. 1 c. x_{n-1} d. 0

2. Пусть

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

P-произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Чему равна $V_P(f)$?
Выберите правильный вариант ответа.

a. $2(x_{n-1} - x_1) + 3$ b. 5 c. $(x_{n-1} - x_1) + 3$ d. 7

3. Установите соответствие между функциями и значениями их полных вариаций на отрезке $[0,1]$.
Заполните таблицу.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

1. 2 2. 5 3. 3

f(x)	g(x)

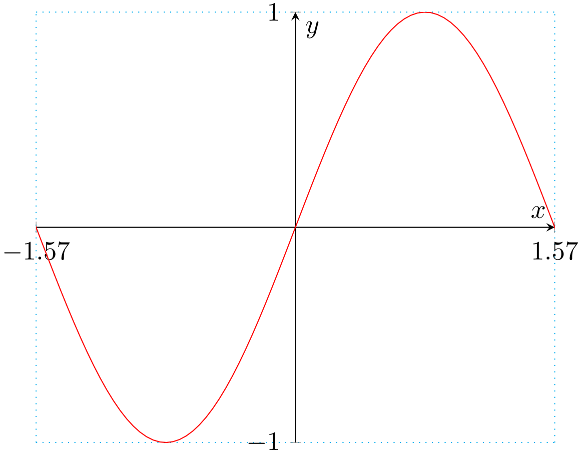
4. Укажите свойство, которым функции с ограниченной вариацией не обладают.
a°. Теорема об арифметике.
b°. Аддитивность.
c°. Ограниченность.
d°. Линейность.

5. Укажите функции, являющиеся ФОВ на заданных промежутках. Если все функции являются ФОВ, в ответе напишите 4.

a. $f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0; 15)$
b. $f(x) = |x|, \qquad x \in [-5; 5]$
c. $f(x) = 3^x, \qquad x \in [0; 2]$
d. $f(x) = x^2 - 2, \qquad x \in [0; 4]$

6. Выберите верное утверждение.
a. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.
b. Ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.
c. Определённая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.
d. Монотонная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.

7. Используя график функции определите значение $\overset{\frac{\pi}{3}}{\underset{-\frac{\pi}{3}}{V}} f$.



8. Укажите функции с одинаковой полной вариацией.

a. $f(x) = \ln x, \qquad x \in [1; e]$
b. $f(x) = x^2, \qquad x \in [0; 1]$
c. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x \in [4; 9]$
d. $f(x) = x, \qquad x \in [2; 3]$

9. Установите соответствие между функциями и значениями их вариаций на отрезках. Заполните таблицу.

a. $f(x) = |\cos x|, \quad x \in [0; 4\pi]$
b. $f(x) = |1 - x^2|, \quad x \in [-2; 2]$

1. 8
2. 4
3. другой ответ

a	b

10. Укажите функции с одинаковой полной вариацией на $[1; e]$. Если все функции имеют одинаковую вариацию на заданном промежутке, то в ответе укажите ее значение.

a. $f(x) = \ln x$
b. $f(x) = -\ln x$
c. $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$

d. $f(x) = \ln(2x - e)$

11. Для какой функции её полная вариация на заданном отрезке равна 12?Перечислите все функции в ответе.

a. $f(x) = \cos x, \qquad x \in [0; 2\pi]$
b. $f(x) = \operatorname{sign} \sin x, \quad x \in [0; 6\pi]$
c. $f(x) = |\sin x|, \qquad x \in [0; 2\pi]$
d. $f(x) = \cos^2 x, \qquad x \in [0; 4\pi]$

12. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \in [-1; 0], \\ x - x^2, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Какова её полная вариация на отрезке $[-1; 1]$?
a. 4,5 b. 2 c. 2,5 d. 6

13. Продолжите предложение.
"Для того, чтобы $f(x)$ была функцией с ограниченной вариацией на отрезке $[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была бы представима в виде разности двух..."
a. монотонно возрастающих функций.
b. монотонно убывающих функций.
c. монотонных функций.
d. функций.
14. Функция $f(x) = |x - 2|$ с ограниченной вариацией на отрезке $[0; 4]$ представлена в виде разности двух возрастающих функций, т.е $f(x) = g(x) - h(x)$. Восполните пробелы. Заполните таблицу.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 2], \\ a)..., & x \in (2; 4]; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} b)..., & x \in [0; 2], \\ -2, & x \in (2; 4]. \end{cases}$$

1. $x-2$ 2. $2x+2$ 3. $x-4$ 4. $2x+4$

a	b

15. Определите значение полной вариации данной функции на отрезке $[-2;1]$,если

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[-2;0),\\ -2, & x=0,\\ -x^2, & x\in(0;1]. \end{cases}$$

16. Пусть в задании 15 значение в точке $x=0$ равно a.Чему должно быть равно a, чтобы $\overset{1}{\underset{-2}{V}} f$ была бы наименьшей ?

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[-2;0),\\ a, & x=0,\\ -x^2, & x\in(0;1]. \end{cases}$$

17. Представьте функцию $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}, x\in[0;3]$ с ограниченной вариацией в виде разности двух возрастающих функций.

18. Доказать, что $f\notin BV([0;1])$, если

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & x\in(0;1],\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

19.Пусть кривая l задана параметрически

$$l:\begin{cases} x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t; \end{cases}$$

$t\in[0;2\pi]$. Является ли данная кривая спрямляемой ?
Ответьте да или нет. Ответ обоснуйте.

20. Докажите, что произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ с ограниченной вариацией на отрезке $[a;b]$ есть функция с ограниченной вариацией на том же отрезке.

Тест 2

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^6, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases}$$

P-произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Чему равна $V_P(f)$? Выберите правильный вариант ответа.

a. -1 b. $(x_n)^6$ c. $2(x_{n-1})^6$ d. 1

2. Пусть

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2 - x, & 0 < x < 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

P-произвольное разбиение отрезка $[0,2]$. Чему равна $V_P(f)$? Выберите правильный вариант ответа.

a. $2(x_{n-1} - x_1) + 4$ b. 4 c. $(x_{n-1} - x_1) + 4$ d. 6

3. Установите соответствие между функциями и значениями их полных вариаций.
Заполните таблицу.

$$f(x) = \begin{cases} x^6, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2 - x, & 0 < x < 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

1. 2 2. 1 3. 6

f(x)	g(x)

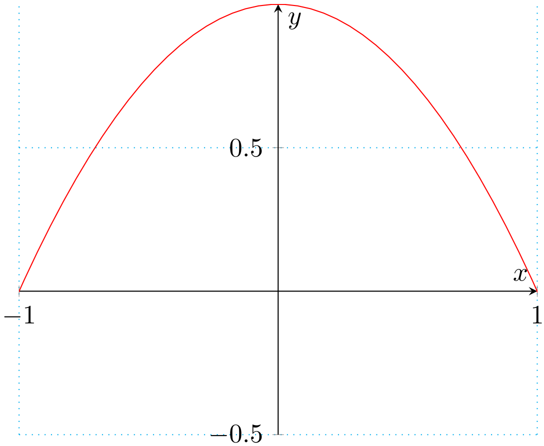
4. Укажите свойство, которым обладают функции с ограниченной вариацией.
a°. Линейность.
b°. Теорема о среднем.
c°. Аддитивность.
d°. Транзитивность.

5. Укажите функции, являющиеся ФОВ на заданных промежутках. Если все функции являются ФОВ, в ответе напишите 4.

a. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, $x \in [10; 25]$
b. $f(x) = x$, $x \in [0; 10]$
c. $f(x) = [x]$, $x \in [0; 15]$
d. $f(x) = \ln x$, $x \in [e; 20]$

6. Выберите неверное утверждение.
a. Кусочно-монотонная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.
b. Ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.
c. Липшицева на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.
d. Монотонная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.

7. Используя график функции определите значение $\overset{1}{\underset{-1}{V}} f$.



8. Укажите функции с одинаковой полной вариацией.

a. $f(x) = 2^x, \qquad x \in [0; 1]$
b. $f(x) = 4^x, \qquad x \in [0; \frac{1}{2}]$
c. $f(x) = e^x, \quad x \in [\ln 2; \ln 4]$
d. $f(x) = x^4, \qquad x \in [1; 2]$

9. Установите соответствие между функциями и значениями их вариаций на отрезках. Заполните таблицу.

a. $f(x) = \sin x, \quad x \in [0; 2\pi]$
b. $f(x) = |\sin x|, \quad x \in [0; 10\pi]$

1. 4
2. 20
3. 0

a	b

10. Укажите функции с одинаковой полной вариацией на $[0; 2]$. Если все функции имеют одинаковую вариацию на заданном промежутке, то в ответе укажите ее значение.

a. $f(x) = (2x-4)^2$
b. $f(x) = x^2 - 4$
c. $f(x) = -x^2 + 4$
d. $f(x) = x + 2$

11. Для какой функции её полная вариация на заданном отрезке равна 8 ?
Перечислите все функции в ответе.

a. $f(x) = \cos x, \qquad x \in [0; 2\pi]$
b. $f(x) = \operatorname{sign} \sin x, \quad x \in [0; 6\pi]$
c. $f(x) = |\sin x|, \qquad x \in [0; 2\pi]$
d. $f(x) = \cos^2 x, \qquad x \in [0; 4\pi]$

12. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \in [-2; 0), \\ -x+3, & x \in [0; 2]. \end{cases}$$

Какова ее полная вариация на отрезке $[-2; 2]$?
a. 4,5   b. 1   c. 3,5   d. 6

13. Продолжите предложение.
"Для того чтобы $f(x)$ была функцией с ограниченной вариацией на отрезке $[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была бы представима в виде..."
a. разности монотонно убывающих функций
b. суммы монотонно возрастающих функций
c. разности монотонно возрастающих функций
d. суммы монотонно убывающих функций

14. Функция $f(x) = 9 - x^2$ с ограниченной вариацией на отрезке $[-3; 3]$ представлена в виде разности двух возрастающих функций, т.е $f(x) = g(x) - h(x)$. Восполните пробелы. Заполните таблицу.

$$g(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \in [-3; 0], \\ a)..., & x \in (0; 3]; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} b)..., & x \in [-3;0], \\ 2x^2, & x \in (0;3]. \end{cases}$$

1. 1 2. $9 + x^2$ 3. 0 4. $9 - x^2$

a	b

15. Определите значение полной вариации данной функции на отрезке $[0;2]$,если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0;1), \\ 0, & x = 1, \\ x-1, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

16. Пусть в задании 15 значение в точке $x = 1$ равно a.Чему должно быть равно a, чтобы $\overset{2}{\underset{0}{V}} f$ была бы наименьшей?

$$f(x) = \begin{cases} x^6, & x \in [0;1), \\ a, & x = 1, \\ x-1, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

17. Представьте функцию с ограниченной вариацией в виде разности двух возрастающих функций, если

$$f(x) = \ln(x^2+4), \qquad x \in [-4;4].$$

18. Доказать, что $f \notin BV([0;1])$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \operatorname{sign} \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0;1]. \end{cases}$$

19. Пусть кривая l задана параметрически

$$l : \begin{cases} x = t(2-t), \\ y = t^2(2-t); \end{cases} \quad t \in [-16; 16]$$

Является ли данная кривая спрямляемой? Ответьте да или нет. Ответ обоснуйте.

20. Доказать, что частное двух функций $f(x)$ и $g(x)$ с ограниченной вариацией на отрезке $[a; b]$ есть функция с ограниченной вариацией на том же отрезке.

Тест 3

1. Является ли функция $f(x) = 2^{-x}$ на отрезке $[1; 4]$ функцией с ограниченной вариацией ?

a. да, так как функция монотонно возрастает на данном отрезке.
b. нет, так как функция не представима в виде разности.
c. да, так как функция является непрерывной на данном отрезке.
d. нет, так как функция ограничена на данном отрезке.

2. Даны функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [4; 9), \\ 0, & x = 9, \end{cases}$$

на отрезке $[4, 9]$;

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$.
Определите значения $V_P(f)$ и $V_P(g)$.
Выберите правильные варианты ответа и укажите их в следующем порядке: сначала значение для $f(x)$, затем значение для $g(x)$.
1. $(x_{n-1})^2$ 2. $2\sqrt{x_{n-1}}$ 3. $2(x_{n-1})^2$ 4. $2(x_{n-1})$

3. Определите значение полной вариации функции $f(x)$ на отрезке $[0;4]$, если

$$f(x) = \begin{cases} -x^4, \quad x \in [0;2), \\ 0, \quad x = 2, \\ 4, \quad x \in (2;4]. \end{cases}$$

Выберите правильный вариант ответа.
a. 36 b. 6 c. $2(x_{n-1} - x_1)^4 + 4$ d. 42

4. Какие равенства или неравенства выполняются для определённых классов функции с ограниченной вариацией ?

a. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b) - f(a)|$,

b. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq K(b-a), \quad K, a, b \in \mathbb{R}$,

c. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f, \quad a < c < b$,

d. все из приведённых.

5. Пусть дана функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ x - 1, 0 < x < 1, \\ -3, x = 1. \end{cases}$$

на отрезке $[0,1]$. P-произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Чему равна $V_P(f)$? Выберите правильный вариант ответа.

a.$2(x_{n-1} - x_1) + 3$ b. 5
c.$(x_{n-1} - x_1) + 3$ d.3

6. Найдите

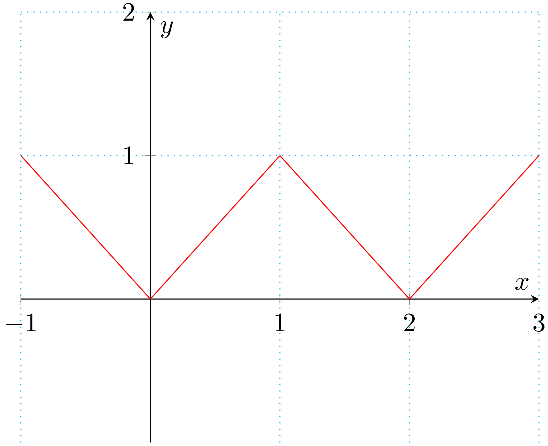
1. $\overset{1}{\underset{0}{V}} x$. 2. $\overset{4}{\underset{2}{V}} (x-2)^2$. 3. $\overset{1}{\underset{0}{V}} 9^x$.

В ответе укажите сумму трёх чисел.

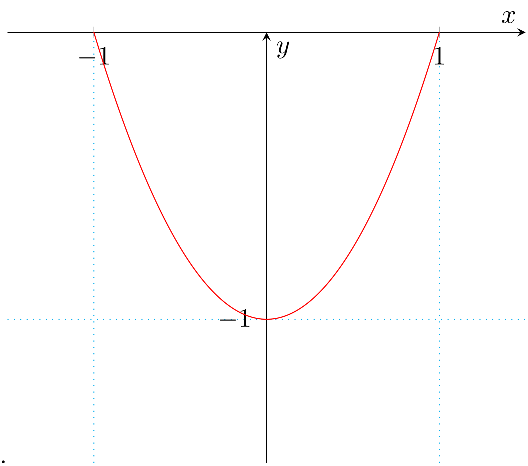
7. Являются ли функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \in [-1; \ln 4]$ и $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in (-4;4)$ функциями с ограниченной вариацией?

Ответ обоснуйте.

8. Установите соответствие между графиками функций и значениями полной вариации этих функций. Заполните таблицу.



a.



b.

1. 3 2. 4 3. 2 4. 1

a	b

9. Заполните пропуск: $|f(x)| \in BV[a;b] \quad ... \quad f(x) \in BV[a;b]$.

1. $\Rightarrow$ 2. $\Leftarrow$

10. Функция $f(x) = |x+1|$ с ограниченной вариацией на отрезке $[-2;0]$ представлена в виде разности двух возрастающих функций. Восполните пробелы. Заполните таблицу.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-2;-1], \\ a)..., & x \in (-1;0]; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} b)..., & x \in [-2;-1], \\ 1, & x \in (-1;0]. \end{cases}$$

1. $x+2$ 2. $2x+2$ 3. $-x-1$ 4. $2x+1$

a	b

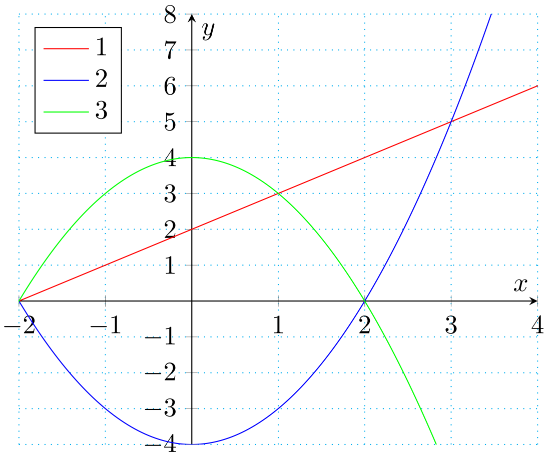
11. Выберите верное утверждение.
a. Полная вариация функции $f(x) = \operatorname{sign} \sin x$ на отрезке $[0;6\pi]$ равна 6.
b. Полная вариация функции $f(x) = \cos 2x$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{4}]$ равна 4.
c. Полная вариация функции $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[0;\pi]$ равна 1.
d. Полная вариация функции $f(x) = \cos^2 x$ на отрезке $[0;4\pi]$ равна 16.

12. Какая из приведённых функций имеет ограниченную вариацию на промежутке и является липшицевой ?
a. $f(x) = x^2+x+1, \quad x \in (-1;1)$ b. $f(x) = \sin\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi;\pi)$

13. Определите полную вариацию функций
a. $f(x) = (x-9)^2, \quad x \in [0;3]$ b. $f(x) = (8x)^{\frac{1}{3}} + 5, \quad x \in [2;38]$
c. $f(x) = -3^{2x}, \quad x \in [1;2]$ d. $f(x) = x^2 - 9, \quad x \in [0;3]$

Ответьте на вопрос: есть ли среди них функции, значения полной вариации которых равны ? В ответе укажите это значение.

14. Определите по графикам, какие функции имеют одинаковую полную вариацию на $[0; 2]$. В ответе укажите номера графиков этих функций.



15. Представьте данную функцию в виде разности двух возрастающих функций на отрезке $[0; 4]$.
.

$$f(x) = \begin{cases} -x^4, & x \in [0; 2) \\ 0, & x = 2 \\ 4, & x \in (2; 4] \end{cases}$$

16. Пусть дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1), \\ a, & x = 1, \\ x - 1, & x \in (1; 2]. \end{cases}$$

Чему должно быть равно a, чтобы $\overset{2}{\underset{0}{V}} f$ приняла значение равное 9?

17. Какое утверждение справедливо для функций с ограниченной вариацией ?
a. Функция, имеющая на концах отрезка $[a;b]$ производную, ограниченную на $[a;b]$, является функцией с ограниченной вариацией.
b. Функция, имеющая во всех точках отрезка $[a;b]$ производную, ограниченную на $[a;b]$, является функцией с ограниченной вариацией.
c. Функция, имеющая на концах отрезка $[a;b]$ производную, положительную на $[a;b]$, является функцией с ограниченной вариацией.
d. Функция, имеющая во всех точках отрезка $[a;b]$ производную, положительную на $[a;b]$, является функцией с ограниченной вариацией.

18. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0;1]$.

19. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos x^\beta, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$. При каких значениях параметров α и β функция $f(x)$ принадлежит пространству $BV[0;1]$?

20. Докажите, что монотонная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.

Тест 4

1. Является ли функция $f(x) = 2^x$ на отрезке $[0;6]$ функцией с ограниченной вариацией ?

a. да, так как функция является непрерывной на данном отрезке.
b. нет, так как функция ограничена на данном отрезке.
c. да, так как функция монотонно возрастает на данном отрезке.

d. нет, так как функция не представима в виде разности.

2. Даны функции

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in [1; e), \\ 0, & x = e; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^4, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Определите значения $V_P(f)$ и $V_P(g)$.
Выберите правильные варианты ответа и укажите их в следующем порядке: сначала значение для $f(x)$, затем значение для $g(x)$.
1. $2\ln(x_{n-1})$ 2. $2(x_{n-1})^4$ 3. $\ln(x_{n-1})$ 4. $(x_{n-1})^2$

3. Определите значение полной вариации функции $f(x)$ на отрезке $[0; 2]$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^6, & x \in [0; 1), \\ 0, & x = 1, \\ x - 1, & x \in (1; 2]. \end{cases}$$

Выберите правильный вариант ответа.

a. $6 - 2x_{k+1}$ b. 15
c. 3 d. 10

4. Какие равенства или неравенства не выполняются для определённых классов функции с ограниченной вариацией ?
a. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = f(b) - f(a)$,
b. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq K(b - a), \quad K, a, b \in \mathbb{R}$,
c. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f, \quad a < c < b$,
d. все из приведённых.

5. Пусть дана функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ x - 2, 0 < x < 2 \\ -4, x = 2. \end{cases}$$

на отрезке $[0, 2]$.P-произвольное разбиение отрезка $[0, 2]$. Чему равна $V_P(f)$?

a. $2(x_{n-1} - x_1) + 4$ b. 4

c. $(x_{n-1} - x_1) + 4$ d. 6

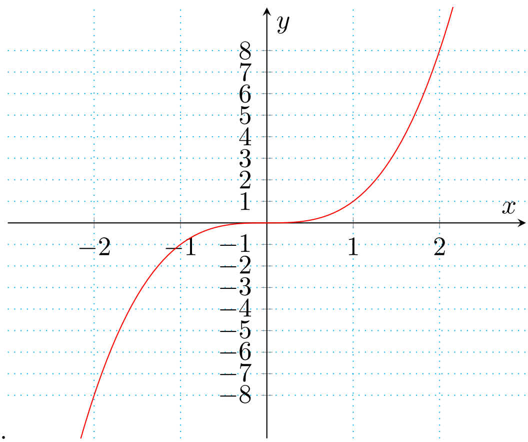
6. Найдите

1. $\overset{1}{\underset{0}{V}} 3^x$. 2. $\overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{V}} 5\cos x$. 3. $\overset{7}{\underset{0}{V}} x$.

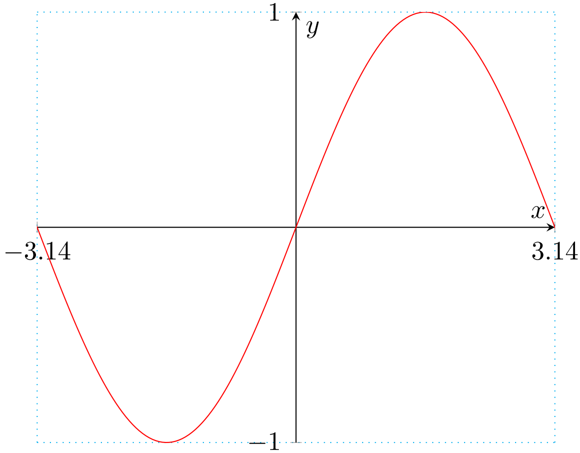
В ответе укажите произведение трёх чисел.

7. Являются ли функции $f(x) = x - [x], x \in [-12; 12]$ и $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in [0; \pi]$ функциями с ограниченной вариацией? Ответ обоснуйте.

8. Установите соответствие между графиками функций и значениями полной вариации этих функций. Заполните таблицу.



a.



b.

1. 0 2. 1 3. 4 4. 16

a	b

9. Заполните пропуск: $BV[a;b] \quad \ldots \quad C[a;b]$.

1. $\subset$
2. $\supset$

10. Функция $f(x) = x^2 - 36$ с ограниченной вариацией на отрезке $[-6; 6]$ представлена в виде разности двух возрастающих функций. Восполните пробелы. Заполните таблицу.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 36, & x \in [-6; 0] \\ a)\ldots, & x \in (0; 6] \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} b)\ldots, & x \in [-6; 0] \\ 0, & x \in (0; 6] \end{cases}$$

1. $-2x^2 + 72$ 2. $x^2 + 36$ 3. $2x^2 + 52$ 4. $x^2 - 36$

a	b

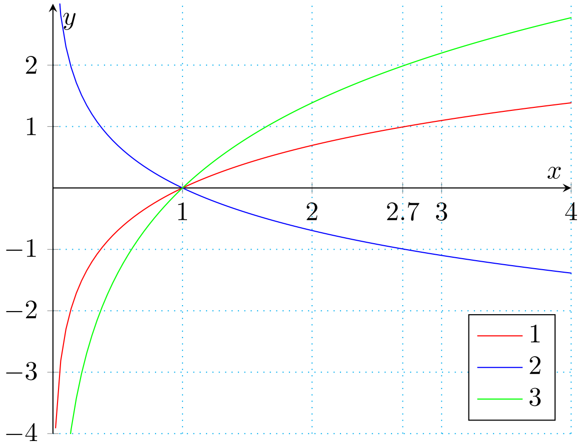
11. Выберите верное утверждение.
a. Полная вариация функции $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{6}]$ равна 6.
b. Полная вариация функции $f(x) = |\sin x|$ на отрезке $[0; 2\pi]$ равна 12.
c. Полная вариация функции $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{3}]$ равна 14.
d. Полная вариация функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ равна 16.

12. Какая из приведённых функций не имеет ограниченную вариацию на промежутке и является неограниченной функцией ?
a. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (-1; 1)$ b. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1; 1)$

13. Определите полную вариацию функций.
a. $f(x) = 16^{\frac{x}{2}}, \quad x \in [1; 4]$ b. $f(x) = x^4 - 256, \quad x \in [1; 4]$
c. $f(x) = -3^{2x}, \quad x \in [1; 2]$ d. $f(x) = x^2 - 9, \quad x \in [0; 3]$

Ответьте на вопрос: есть ли среди них функции, значения полной вариации которых равны ? Если есть, то в ответе укажите это значение. В ином случае, напишите "нет".

14. Определите по графикам, какие функции имеют одинаковую полную вариацию на $[1; e]$. В ответе укажите номера графиков этих функций.



15. Представьте данную функцию в виде разности двух возрастающих функций на отрезке $[0;2]$:
.

$$f(x) = \begin{cases} x^6, \quad x \in [0;1), \\ 0, \quad x = 1, \\ x-1, \quad x \in (1;2]. \end{cases}$$

16. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^4, \quad x \in [0;2), \\ a, \quad x = 2, \\ x-2, \quad x \in (2;4]. \end{cases}$$

Чему должно быть равно a, чтобы $\overset{4}{\underset{0}{V}} f$ приняло значение равное 16?

17. Укажите неверное утверждение.
a. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$, то ее абсолютная величина $|f(x)|$ также имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$.
b. Пусть $f(x)$- непрерывная на $[a;b]$ функция. Если $|f(x)|$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$, то и функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$.
c. Если $|f(x)|$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$, то и функция

$f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$.
d. Функция, имеющая во всех точках отрезка $[a;b]$ производную, ограниченную на $[a;b]$, является функцией с ограниченной вариацией.

18. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0;1]$.

19. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$. При каких значениях параметров α и β функция $f(x)$ принадлежит пространству $BV[0;1]$?

20. Докажите, что кусочно-монотонная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на том же отрезке.

Тема 2. Интеграл Римана-Стилтьеса

Тест 1

1. Как связаны интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$ и интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$?

а) интеграл Римана - частный случай интеграла Стилтьеса, если $f(x) = x$;
б) они не связаны;
в) интеграл Римана - частный случай интеграла Стилтьеса, если $g(x) = x$.

2. Может ли из существования интеграла Стилтьеса по всему отрезку следовать существование интегралов Стилтьеса по частям этого отрезка?

а) да, может, но не наоборот;
б) нет, не может.

3. Что следует из существования одного из следующих интегралов $\int_a^b f(x)dg(x)$ и $\int_a^b g(x)df(x)$?

а) если существует один, то существует и другой, а также выполняется следующее: $\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$;
б) данные интегралы не могут быть связаны, ничего не следует.

4. Какая из следующих сумм является интегральной суммой Стилтьеса?

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, ξ_i - произвольная точка $[x_i; x_{i-1}]$, x_i - произвольная тоска отрезка $[a; b]$;
б) $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$, ξ_i - произвольная точка $[x_i; x_{i-1}]$, x_i - произвольная тоска отрезка $[a; b]$.

5. Выберите ниже определение интеграла Стилтьеса $(s) \int f(x)dg(x)$:

а) $\lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})), \xi_i \in [x_i; x_{i-1}], \Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ - произвольное разбиение отрезка [a;b];

б) $\lim\limits_{\lambda(\Pi)\to 0} (S(\Pi) - s(\Pi)) = 0, \Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ - произвольное разбиение отрезка [a;b].

6. Сформулируйте и докажите любое свойство интеграла Стилтьеса.

7. Сформулируйте критерий существования интеграла Стилтьеса, используя понятие колебания функции на отрезке.

8. Существует ли интеграл $(s)\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$? Где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ 1, & x \in (0; 1]. \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 1] \end{cases}.$$

9. Вычислить $(s)\int_0^2 x^2 d(ln(x+1))$.

10. Вычислить $(s)\int_0^{\pi} cosxd(sinx)$.

11. Сведите интеграл Стилтьеса к интегралу Римана:

$$(s)\int_a^b f(x)d(tgx).$$

12. Сведите интеграл Римана к интегралу Стилтьеса: $\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$

13. Вычислить $\int_0^{2\pi} cosxd(sin^2 x)$.

14. Соотнесите интегралы Стилтьеса в левом столбце с интегралами Римана в правом столбце:

1) $\int x^2 d(x^2)$	а) $\int \frac{3sinx}{x}dx$
2) $\int sinxd(ln(x^3))$	б) $\int \frac{tgx}{1+x^2}dx$
3) $\int tgxd(arctgx)$	в) $\int 2x^3 dx$

15. Сформулируйте теорему о среднем как свойство интеграла Стилтьеса.

16. Вычислить $\int_0^2 x^2 dg(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [0;1), \\ 10, & x = 1, \\ x^2, x > 1. \end{cases}.$$

17. Вычислить $\int_0^2 (x+1)d[x]$, где $[x]$ - целая часть числа $x \in R$.

18. Вычислить $\int_{-1}^3 xdg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = -1, \\ 1, & x \in (-1;2), \\ -1, & x \in [2;3]. \end{cases}.$$

19. Вычислить $\int_a^b f(x)d\rho(x)$, $a < c < b$,

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \le c, \\ 1, & x > c. \end{cases}.$$

20. Вычислить $\int_0^2 (x^2+2)d\{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть числа $x \in R$.

Тест 2

1. Какой из интегралов Стилтьеса а) - б) не существует, если

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0], \\ 1, & x \in (0;1]. \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0), \\ 1, & x \in [0;1] \end{cases}?$$

а) $\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)$;
б) $\int_{0}^{1} f(x)dg(x)$;
в) $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$.

2. Какое условие, помимо того, что $f(x) \in C[a;b]$, должно выполняться для $g(x)$, чтобы интеграл $\int_a^b f(x)dg(x)$?

а) $g(x) \in C[a;b]$; б) $g(x) \in R[a;b]$; в) $g(x) \in BV[a;b]$.

3. Формула $(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx$ для вычисления интеграла Стилтьеса используется в случае, если $g(x)$:

а) непрерывная; б) разрывная; в) любая.

4. Справедливо ли следующее равенство: $\alpha\int_a^b f_1(x)dg(x) + \beta\int_a^b f_2(x)dg(x) = \int_a^b(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))dg(x)$ $\alpha, \beta \in R$?

а) да;
б) нет.

5. Можно ли сказать, что из существования $\int_a^c f(x)dg(x)$, $\int_c^b f(x)dg(x)$ вытекает из существования $\int_a^b f(x)dg(x)$?

а) нет;
б) да.

6. Сформулируйте определение интеграла Стилтьеса.

7. Составьте интегральную сумму Стилтьеса для следующего интеграла $\int_\alpha^\beta g(x)df(x)$.

8. Сформулируйте и докажите свойство аддитивности интеграла Стилтьеса.

9. Вычислить $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(sinx)$.

10. Сформулируйте достаточный признак существования интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$, где $f(x)$ - непрерывна на [a;b].

11. Сведите, не вычисляя, интеграл Стилтьеса к интегралу Римана: $\int_a^b f(x)d(x^2 lnx)$.

12. Сведите, не вычисляя, интеграл Римана к интегралу Стилтьеса: $-\int_a^b f(x)sinxdx$.

13. Соотнесите интегралы Стилтьеса в левом столбце и их значения в правом столбце:

1) $\int_{-1}^{1} xd(3x^2 op)$;	а) нет решения;
2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xd(\frac{x}{cosx})$.	б) 0.

14. Вычислить $\int_{-2}^{2} xdg(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2;-1], \\ 2, & x \in (-1;0), \\ x^2+3, & x \in [0;2]. \end{cases}.$$

15. Вычислить $\int_0^{2\pi} cosxd(sin^2 x)$.

16. Вычислить $\int_0^2 (x+1)d < x >$, где $< x >$ - дробная часть числа $x \in R$.

17. Вычислить $\int_0^2 x^2 dg(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0;\frac{1}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{1}{2};\frac{3}{2}), \\ 2, & x = \frac{3}{2}, \\ -2, & x \in (\frac{3}{2};2]. \end{cases}.$$

18. Вычислить $\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$, $a < c < b$,

$$\rho(x-c) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ 1, & x > c. \end{cases}.$$

19. Вычислить $\int_0^{2\pi} sinxdg(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0;\pi], \\ e^x, & x > \pi. \end{cases}.$$

20. Вычислить $\int_0^{2\pi} sinxd(cos^2 x)$.

Тест 3

1. Какой из следующих признаков существования интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ является достаточным?

а) Если $f(x) \in C[a;b]$ и $g(x) \in BV[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует;
б) Если $f(x) \in C[a;b]$ и $g(x) \in C[a;b], g(x) \in BV[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует.

2. Какое условие, помимо того, что $g(x)$ - липшицева функция на [a;b], должно выполняться, чтобы интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ существовал?

а) $f(x) \in R[a;b]$;
б) $f(x) \in C[a;b]$;
в) $f(x) \in BV[a;b]$.

3. Справедливо ли равенство: $\alpha \int_a^b f(x)dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x)dg_2(x) = \int_a^b f(x)d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x))$?

а) да;
б) нет.

4. Какой вид будет иметь интеграл Стилтьеса $\int_a^b xd(sinx)$, при сведении его к интегралу Римана:

а) $\int_a^b sinxdx$;

б)$\int_a^b xd(cosx)$;
в)$\int_a^b xcosxdx$.

5. Сформулируйте следствие из теоремы о среднем для интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$.

6. Составьте и запишите интегральную сумму Стилтьеса.

7. Сформулируйте какой-нибудь достаточный критерий существования интеграла Стилтьеса.

8. Запишите формулу вычисления интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ в том случае, когда $g(x)$ - разрывная функция на $[a;b]$.

9. Вычислить $(S)\int xd(arctgx)$.

10. Как связаны интеграл Стилтьеса и интеграл Римана?

11. Вычислить $(S)\int_0^2 x^2d(\frac{x^2}{2})$.

12. Сведите интеграл Стилтьеса к интегралу Римана: $\int_a^b kxd(\frac{x}{cosx})$.

13. Сведите интеграл Римана к интегралу Стилтьеса: $\int_a^b (k+\frac{c}{x})$, где $c, k \in R$

14. Ниже представлены условия теоремы. Запишите названия этих теорем.

1) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta(\epsilon)\ \forall\Pi|\lambda(\Pi) < \delta \Rightarrow |S(\Pi) - s(\Pi)| < \epsilon$, $\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ - произвольное разбиение отрезка [a;b] ;

2) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta(\epsilon)\ \forall\Pi|\lambda(\Pi) < \delta \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)(g(x_i) - g(x_{i-1})) < \epsilon$, $\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ - произвольное разбиение отрезка [a;b];

3) $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta(\epsilon)\ \forall f(x)|x', x'' \in [x_i; x_{i-1}], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x')$ - - $f(x")| < \epsilon$.

15. Вычислить $\int_{-2}^{2} x^2 dg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2;-1], \\ 2, & x \in (-1;0), \\ x^2+3, & x \in [0;2]. \end{cases}.$$

16. Вычислить $\int_0^{\pi} sinxd(e^x)$.

17. Вычислить $\int_a^b f(x)d\rho(c-x)$, $a < c < b$,

$$\rho(c-x) = \begin{cases} 0, & x \geq c, \\ 1, & x < c. \end{cases}.$$

18. Вычислить $\int_0^3 (x+3)d\{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть числа $x \in R$.

19. Вычислить $\int_0^1 sinxdg(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ x^2, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

20. Вычислить $\int_{-1}^{2} (x-1)dg(x)$,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1;1], \\ 10, & x = -1, \\ x+3, & x \in (-1,+\infty). \end{cases}.$$

Тест 4

1. Какой из следующих признаков существования интеграла Стилтьеса является достаточным?

а) Если $f(x) \in C[a;b]$ и $g(x) \in BV[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует;

б) Пусть $f(x) \in R[a;b]$, а $g(x)$ - непрерывная функция на $[a;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dg(x)$ существует.

2. Какая формула используется для вычисления интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$, если $g(x)$ - непрерывная функция на $[a;b]$?

3. Какое из равенств верное?

а) $\int_a^b f_1(x)d(g_1(x)) + \int_a^b f_2(x)d(g_2(x)) = \int_a^b (f_1(x)+f_2(x))d(g_1(x)+ + g_2(x))$;

б)$\int_a^b f_1(x)d(g_1(x)) + \int_a^b f_2(x)d(g_1(x)) + \int_a^b f_1(x)d(g_2(x)) + + \int_a^b f_2(x)d(g_2(x)) = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))d(g_1(x)) + \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) d(g_2(x)) = \int_a^b f_1(x)d(g_1(x) + g_2(x)) + \int_a^b f_2(x)d(g_1(x) + g_2(x))$.

4. Какое условие нужно для справедливости следующего равенства: $\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$?

а) $f(x), g(x) \in C[a;b]$;

б) существование одного из интегралов $\int_a^b f(x)dg(x)$, $\int_a^b g(x)df(x)$.

5. Какой вид будет иметь интеграл Стилтьеса $\int_a^b sinxd(x^2)$ после сведения его к интегралу Римана?

а)$\int_a^b 2xsinxdx$;

б)$\int_a^b cosxd(x^2)$;

в)$\int_a^b 2sinxdx$.

6. Сформулируйте достаточный признак существования интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$, где $g(x) = \int_a^b \phi(t)dt + C$.

7. Вычислить $\int_{-1}^1 xd(arctgx)$.

8. Сформулируйте критерий существования интеграла Стилтьеса.

9. Вычислить $\int e^x d(x + x^2)$.

10. Сведите интеграл Стилтьеса к интегралу Римана: $\int_a^b k \cdot x^k d(arctg(kx))$.

11. Сведите интеграл Римана к какому-нибудь интегралу Стилтьеса, если это возможно: $\int_a^b 2kxdx$.

12. Вычислить $\int xd(\sqrt[3]{x})$.

13. Сформулируйте и докажите свойство линейности по $f(x)$ интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$.

14. Соотнесите интегралы Стилтьеса в левом столбце с интегралами Римана в правом столбце:

1) $\int xd(thx)$;	а) $\int \frac{-dx}{shx}$;
2) $\int \sqrt{1+x^2}dx$;	б) $\int \frac{x}{ch^2x}dx$;
3) $\int shxd(thx)$.	в) $\int (1-x^2)d(arcsinx)$.

15. Вычислить $\int_{-2}^2 (x^2+1)dg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2;-1], \\ 2, & x \in (-1;0), \\ x^2+3, & x \in [0;2]. \end{cases}.$$

16. Вычислить $\int_0^\pi sinxdg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;\frac{\pi}{2}), \\ 2, & x \in \{\frac{\pi}{2},\pi\}, \\ x-\frac{\pi}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2},\pi). \end{cases}.$$

17. Вычислить $\int_0^1 x^3dg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ x^2, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}.$$

18. Вычислить $\int_0^{\pi} cosxdg(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [0;\pi], \\ e^x, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}.$$

19. Вычислить $\int_0^3 x^2 d(x-[x])$, где $[x]$ - целая часть числа $x \in R$.

20. Найдите какую-либо функцию $g(x) \in BV[-1;1]$ для произвольной $f(x) \in C[-1;1]$ и чтобы $\int_{-1}^1 f(x)dg(x) = f(0)$.

Тест 5

1. Если $\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$.

Даны функции

$$f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

где g(x) — монотонно возрастающая функция на $[a;b]$.

Пусть

$[x_{i-1}, x_i]$ - частичное отрезок разбиения $\Pi, i = \overline{1, n}$

$\lambda(\Pi)$ – параметр разбиения

$\lambda(\Pi) \to 0$, где $\lambda(\Pi) = max\,|x_i - x_{i-1}|$

$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ - произвольная точка

Выберите формулу, в которой верно описано определение интеграла Стилтьеса.

$$a. \int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)).$$

$$b. \int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}).$$

$$c. \int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} f(\xi_i)\left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right).$$

$$d. \int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} f(\xi_i)\left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right).$$

2. Каким свойством обладает интеграл Стилтьеса?

a. Линейность по функции $f(x)$.
b. Симметричность.
c. Интегрируемость модуля.
d. Транзитивность .

3. Продолжите фразу. Если поменять местами пределы интегрирования, интеграл Римана-Стилтьеса...

a.Увеличит свое значение в два раза.
b.Ничего не изменится.
c.Уменьшит свое значение в два раза.
d.Поменяет свой знак.

4. Выберите, какой формулой задается свойство линейности интеграла Стилтьеса по f(x).

$$a. \int_a^b \left(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right) dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x)dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

$$b. \int_a^b f(x)d\left(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)\right) = \alpha \int_a^b f(x)dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

$$c. \int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$$

5. Пусть $\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – произольное разбиение отрезка $[a;b]$. Даны функции:

$$f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

где g(x) — монотонно возрастающая функция на $[a;b]$.

$[x_{i-1}, x_i]$ - частичный отрезок разбиения $\Pi, i = \overline{1,n}$.

Пусть

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad i = \overline{1,n},$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad i = \overline{1,n}.$$

Какая формула определяет верхнюю сумму Дарбу

$$a.\ S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right).$$

$$b.\ S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right).$$

$$c.\ S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right).$$

$$d.\ S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right)?$$

6. Сформулируйте хотя бы одно свойство сумм Дарбу-Стилтьеса

7. Сопоставьте интегралы в левом столбце с их значениями в правом столбце:

$1) \int_1^2 x^2 d\, ln(x);$	$a) \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2};$
$2) \int_0^2 e^x de^x;$	$b) 39;$
$3) \int_2^5 x^3 d\, ln(x);$	$c) \frac{3}{2};$
$4) \int_1^4 2x d\sqrt{x}.$	$d) \frac{14}{3}.$

8. Запишите формулу для вычисления интеграла Стилтьеса, если g(x) - непрерывная функция.

9. Вычислите и выберите правильный ответ:

$$\int_{-1}^{1} x \; d \; arcctg(x).$$

$$a) \frac{ln(5)}{4}, \qquad b) - \frac{ln(5)}{2}, \qquad c) \frac{2}{ln(5)}.$$

10. Какой интеграл больше

$$\int_{2}^{5} x^2 \; d \; tg(x)$$

или

$$\int_{3}^{7} x^3 \; d \; ctg(x) \quad ?$$

11. Определите знак интеграла

$$\int_{0}^{\pi} cos(x) \; dsin(x).$$

12. Вычислите интеграл

$$\int_{0}^{2} x^4 \; d \; ln(1+x).$$

13. Существует ли интеграл

$$\int_{0}^{1} tg(x) \; dsin(x) \quad ?$$

14. Пусть дан интеграл

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

и известно, что функция g(x) -функция с ограниченной вариацией на $[a;b]$. Какой должна быть функция f(x), чтобы интеграл существовал?

15. Напишите формулу интегрирования по частям для $\int_a^b f(x)dg(x)$.

16. Вставьте пропущенное слово в предложении : Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, а $g(x)$является ... , то существует интеграл $\int_a^b f(x)dg(x)$.

17. С помощью интегрирования по частям вычислить интеграл Стилтьеса

$$\int_0^\pi sin(x)\ de^x.$$

18. Запишите условие критерия существования интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$.

19. Вставьте пропущенное слово в предложении : Если $f(x)$ R-интегрируема на $[a;b]$, а $g(x)$является ... , то существует интеграл $\int_a^b f(x)dg(x)$.

20. Вычислить

$$\int_0^{2\pi} sin(x)dcos^2(x).$$

Тест 6

1. Пусть $\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Даны функции:

$$f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

где g(x) — монотонно возрастающая функция на $[a; b]$.

Выражения вида

$$s(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

$$S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

где

$$m_i = \underset{x \in [x_{i-1}, x_i]}{inf} f(x) \qquad i = \overline{1, n},$$

$$M_i = \underset{x \in [x_{i-1}, x_i]}{sup} f(x) \qquad i = \overline{1, n}$$

называют

a. Верхним и нижним разбиениями отрезка.

b. Верхней и нижней суммами Дарбу.

c. Верхней и нижней суммами Дарбу-Стилтьеса.

d. Значениями в точках разрыва.

2. Каким свойством не обладает интеграл Стилтьеса?

a. Линейность функции по $f(x)$.

b. Теорема о среднем.

c. Транзитивность.

d. Аддитивность.

3. Пусть $\Pi : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Даны функции:

$$f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

где g(x) — монотонно возрастающая функция на $[a; b]$.

Пусть $[x_{i-1}, x_i]$ - частичное отрезок разбиения Π, $i = \overline{1, n}$.

$$s(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i (g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

$$S(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i (g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

где

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad i = \overline{1, n},$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad i = \overline{1, n}$$

Какая формула определяет верхний интеграл Дарбу?

$$a. \quad I^* = \sup_{\Pi} \ S(\Pi).$$

$$b. \quad I^* = \inf_{\Pi} \ S(\Pi).$$

$$c.\quad I^* = \sup_{\Pi}\ s(\Pi).$$

$$d.\quad I^* = \inf_{\Pi}\ s(\Pi).$$

4. Вычислите интеграл и выбрать правильный ответ

$$\int_0^{\pi} x^2\ d\sin(x).$$

$a.2\pi$ $\quad b.\frac{3\pi}{2}$ $\quad c. -2\pi$ $\quad d.4\pi.$

5. Выберите ответы для пропущенных промежутков в следующем предложении .
При измельчении разбиения П верхняя сумма Дарбу ..., а нижняя сумма Дарбу....

a. Не увеличивается, не уменьшается.

b. Увеличивается, уменьшается.

6. Запишите формулу вычисления интеграла Стилтьеса, если g(x) не является разрывной функцией на $[a;b]$.

7. Сопоставьте интегралы в левом столбце с их значениями в правом столбце :

$1)\displaystyle\int_3^6 2x\sqrt{1-x^2}d\ arcsin(x);$	$a)\dfrac{e^9}{3}-\dfrac{1}{3};$
$2)\displaystyle\int_4^9 4x\ d\sqrt{x};$	$b)27;$
$3)\displaystyle\int_2^4 \sqrt{x}\ d\ ln(x);$	$c)\dfrac{76}{3};$
$4)\displaystyle\int_0^3 e^{2x}de^x.$	$d)4-2\sqrt{2}.$

8. Если функция g(x) монотонно возрастает, то есть ли аналогия при составлении сумм Дарбу в случае интегралов Римана и Стилтьеса. Ответьте да или нет?

9. Установите соответствия между свойствами и формулами
1.Аддитивность
2.Теорема о среднем
3.Линейность по функции $g(x)$

$$a. \int_a^b f(x)d\left(\alpha g_1(x)+\beta g_2(x)\right)=\alpha\int_a^b f(x)dg_1(x)+\beta\int_a^b f(x)dg_2(x)$$

$$b. \int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)$$

$$c. \int_a^b f(x)dg(x)=C(g(b)-g(a))$$

и запишите результат в таблице.

1	2	3

10. Вычислите

$$\int_1^2 x\ d\ ln(2+x).$$

11. Какой интеграл больше

$$\int_2^6 x^4 d\ ln(x)$$

или

$$\int_3^5 x^6 d\ ln(x) \quad ?$$

12. Существует ли интеграл

$$\int_0^{2\pi} x^2 d\, ctg(x) \quad ?$$

13. Определите знак интеграла

$$\int_0^{2\pi} sin^2(x) d\, ctg(x).$$

14. Какой интеграл меньше

$$\int_2^4 \frac{x}{2} dx^2$$

или

$$\int_2^4 \frac{x}{4} dx^2 \quad ?$$

15. Запишите свойство линейности интеграла Стилтьеса по функции $f(x)$.

16. Запишите формулу интегрирования по частям для интеграла $\int_a^b f(x)dg(x)$.

17. Сформулируйте хотя бы одно достаточное условие существования интеграла Стилтьеса.

18. Можно ли вычислить интеграл Стилтьеса, если g(x)- разрывная функция на $[a;b]$? Если да, то при каких условиях?

19. Интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)dg(x)$ по определению - это...

20. Вычислите интеграл

$$\int_0^{2\pi} sin(2x)\ dsin(x).$$

Тема 3. Криволинейные интегралы I и II рода и их приложения

Тест 1

1. Конечный предел какой интегральной суммы называют криволинейным интегралом I-ого рода?

а) $\sum_{i=1}^{n} f(M_i')|\ \overset{\smile}{M_{i-1}M_i}\ |$;

б) $\sum_{i=1}^{n} f(M_i')|\ \overset{\smile}{M_{i-1}M_{i+1}}\ |$;

в) $\sum_{j=1}^{n} f(M_i')|\ \overset{\smile}{M_{i-1}M_i}\ |$;

г) $\sum_{j=1}^{n} f(M_i')|\ \overset{\smile}{M_jM_{j+1}}\ |$.

2. Каким свойством не обладает криволинейный интеграл II-ого рода?
а) коммутативность;
б) аддитивность;
в) линейность;
г) интегрируемость модуля.

3. Выберете необходимое условие существования криволинейного интеграла I-ого рода:
а)$f(x,y)$ непрерывна на кривой l;
б)$f(x,y)$ монотонна на кривой l;
в)$f(x,y)$ ограничена сверху на кривой l;
г)$f(x,y)$ ограничена снизу на кривой l.

4. Какое из перечисленных условий НЕ является условием независимости криволинейного интеграла II-ого рода от формы кривой? Выберете правильный ответ.
а)$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ полный дифференциал I-ого порядка;
б) $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ не зависит от формы кривой, а зависит от точек A и B;
в)$\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,$\forall C \in D$,где C-замкнутый контур;
г)$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$,$\forall (x,y) \in D$.

5. Запишите формулу, которая связывает криволинейные интегралы I-ого и II-ого рода.

6. Справедлива ли формула, если $l: x = \phi(t), y = \psi(t)$, $t_0 < t < T$ - гладкая кривая, $f(\phi(t), \psi(t)) \in C[t_0, T]$

$$\int\limits_l f(x,y)\mathrm{d}l = (R)\int\limits_{t_0}^{T} f(\phi(t), \psi(t))(\dot{\phi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2)\mathrm{d}t?$$

Ответьте да или нет.

7. В чем заключается геометрический смысл криволинейного интеграла I-ого рода?

8. Вычислите длину окружности, которая задана уравнением $x^2 + y^2 = 4$.

9. Как вычислить криволинейный интеграл I-ого рода, если кривая l задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\phi)$; $\alpha \leq \phi \leq \beta$? Запишите формулу.

10. Как будет выглядеть формула для вычисления криволинейного интеграла I-ого рода $\int\limits_l (x+y)\mathrm{d}l$, где l- контур треугольника с вершинами O(0,0),A(1,0),B(0,1)?

11. Сопоставьте криволинейный интеграл I- ого рода из левого столбца с его значением в правом столбце.

1 $\int\limits_l x\mathrm{d}l$	а $\frac{\pi}{4}$
2 $\int\limits_l xy\mathrm{d}l$	б 1
3 $\int\limits_l y^2\mathrm{d}l$	в $-\frac{1}{2}$

где l-окружность, лежащая в первой четверти $x = cost; y = sint$.

12. Вставьте пропущенные слова или словосочетания.
Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$- ... , тогда определен аналог фор-

мулы Ньютона-Лейбница $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ = Φ(B)-Φ(A) - где Φ(x,y)- ... для $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

13. Найдите массу M дуги $y = 5ch(\frac{x}{5}) = \frac{5}{2}(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}})$ от x=0 до x=5 с плотностью $\rho(x,y) = x$.

14. Какую величину из механики нельзя вычислить с помощью криволинейного интегралаI-ого рода? Выберите правильный ответ.
а) вычисление массы материальной кривой;
б) определение значения работы силы при перемещении по кривой точки единичной массы;
в) статические моменты кривой относительно осей координат;
г) момент инерции кривой относительно координатной оси.

15. Вычислить криволинейный интеграл I-ого рода, взятый вдоль пространственной кривой $\int\limits_{l} x^2+y^2+z^2\mathrm{d}l$, где l-часть винтовой кривой $x = 5cost; y = 5sint; z = 4t (0 \le t \le 2\pi)$.

16. Убедитесь, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом,а затем вычислите криволинейный интеграл II-ого рода.

$$\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y.$$

17. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, где AB- парабола $y = x^2(-1 \le x \le 1)$.

18. Найдите момент инерции относительно оси OZ первого витка винтовой линии $x = 6cost; y = 6sint; z = t$ с линейной плотностью $\rho(x,y,z) = z$.

19. Вычислите криволинейный интеграл I -ого рода:
$\int\limits_{l}(x^2 + y^2)\mathrm{d}l$, где l -кривая $x = 6cost; y = -6sint(0 \le t \le 2\pi)$.

20. Вычислите криволинейный интеграл I -ого рода:
$\int\limits_{l} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$, где l -выпуклый контур, ограниченный кривыми $r = a; \phi = 0; \phi = \frac{\pi}{4}$.

Тест 2

1. Каким свойством не обладает криволинейный интеграл I-ого рода?
а) дистрибутивность;
б) аддитивность;
в) линейность;
г) интегрируемость модуля.

2. Какое из перечисленных условий НЕ является условием независимости криволинейного интеграла II-ого рода от формы кривой? Выберете правильный ответ.
а)$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ полный дифференциал I-ого порядка;
б) $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ зависит от формы кривой;
в)$\oint\limits_{C} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,$\forall C \in D$,где С-замкнутый контур;
г)$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$,$\forall(x, y) \in D$.

3. Верно ли, что для построения криволинейного интеграла I-ого рода мы берем прозвольное разбиение отрезка? Ответьте да или нет.

4. Какую величину из механики нельзя вычислить с помощью криволинейного интеграла I-ого рода? Выберите правильные ответы.
а) вычисление массы материальной кривой;
б) определение значения работы силы при перемещении по кривой точки единичной массы;
в) статические моменты кривой относительно осей координат;
г) объем цилиндрической поверхности образованного кривой.

5. Какое свойство записано ниже?
Пусть $l : x = tsht, y = t^2cht, t_0 < t < T$- гладкая кривая, и существует $\int\limits_{l}(x + xy)\mathrm{d}x + (y^2 + x^2)\mathrm{d}y$ и $\int\limits_{l}(x^4 + y)\mathrm{d}x + (y - y^6)\mathrm{d}y$,тогда существует $\int\limits_{l} 6(x + xy + x^4 + y)\mathrm{d}x + 3(y^2 + x^2 + y - y^6)\mathrm{d}y$
а) дистрибутивность;
б) аддитивность;

в) линейность;
г) интегрируемость модуля.

6. Запишите формулу для вычисления для вычисления криволинейного интеграла I-ого рода по кривой l: $y(x) = x^2; 1 \leq x \leq 9$.

7. Зависит ли данный интеграл $\int\limits_l (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ от формы кривой l? Ответьте да или нет.

8. Запишите интегральные суммы, которые имеют конечный предел, суммой этих пределов называют криволинейным интегралом II-ого рода по кривой l от выражения $\int\limits_l f(x,y))\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y$.

9. Вычислите длину окружности, которая задана уравнением $x^2 + y^2 = 9$.

10. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла II-ого рода,если l: $x = t^3; y = t^2; z = t; t \in [0,1]$
$I = \int\limits_l (x+y)\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$.

11. Сопоставьте криволинейный интеграл I- ого рода из левого столбца с его значением в правом столбце.

1 $\int\limits_l x\mathrm{d}l$	а $\frac{16\pi^3-3}{4}$
2 $\int\limits_l xy\mathrm{d}l$	б 4π
3 $\int\limits_l y^2\mathrm{d}l$	в $12\pi - 8\pi^3$

где l - окружность; $x = tcost; y = tsint$.

12. Вставьте пропущенные слова или формулы:
если l - ... ,$f(\phi(t),\psi(t)), g(\phi(t),\psi(t)) \in C[t_0,T]$
Тогда $\int\limits_l f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = (\Re)\int\limits_{t_0}^{T}$ ...

13. Найдите массу М дуги $y = 3ch(\frac{x}{3}) = \frac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}})$ от x=0 до x=3 с плотностью $\rho(x,y) = x$.

14. Найдите длину дуги пространственной кривой:
$x = 3t; y = 3t^2; z = 2t^3$ от O(0,0,0) да A(3,3,2).

15. Вычислить криволинейный интеграл I-ого рода, взятый вдоль пространственной кривой $\int\limits_l x^2+y^2+z^2 \mathrm{d}l$, где l-часть винтовой кривой $x = 7cost; y = 7sint; z = 3t(0 \leq t \leq 2\pi)$.

16. Найдите момент инерции относительно оси OZ первого витка винтовой линии $x = 6cost; y = 6sint; z = t$ с линейной плотностью $\rho(x, y, z) = z$.

17. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_l (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$,где l: $y = x^3(0 \leq x \leq 1)$.

18. Найдите статический момент однородной полуарки циклоиды: $x = 4(t - sint); y = 4(1 - cost)$ относительно оси Oy.

19. Найдите длину дуги пространственной кривой:
$x = e^{-t}cost; y = e^{-t}sint; z = e^{-t}$, при 0$\leq$ t $\leq +\infty$.

20. Вычислите криволинейный интеграл I-ого рода:
$I = \int\limits_l \frac{1}{xy}\mathrm{d}l$, где l- отрезок прямой, соединяющей точки A(1,1) и B(2,3).

Тест 3

1. Какое из перечисленных условий НЕ является условием независимости криволинейного интеграла II-ого рода от формы кривой? Выберете правильный ответ.
а)$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ полный дифференциал I-ого порядка;
б) $\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ не зависит от формы кривой, а зависит от точек A и B;
в)$\oint\limits_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \neq 0$,$\forall C \in D$, где C-замкнутый контур;
г)$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$,$\forall (x, y) \in D$.

2. Выберете правильный ответ.
Пусть кривая $l: x = \phi(t), y = \psi(t), t_0 < t < T$. При каком условии на $\phi(t), \psi(t)$ криволинейный интеграл I-ого рода будет существовать?
а)$\phi(t), \psi(t)$ непрерывны на $t_0 < t < T$;
б)$\phi(t), \psi(t)$ имеют конечное число разрывов I-ого рода на $t_0 < t < T$;
в)$\phi(t), \psi(t)$ имеют бесконечное число разрывов I-ого рода на $t_0 < t < T$;
г)$\phi(t), \psi(t)$ гладкие функции на $t_0 < t < T$.

3. Вставьте пропущенные слова или формулы.
Если l - $\quad\dots\quad$ кривая, $t_A; t_B$-значения параметра, которые соответствуют точкам A и B , т.е $t_A = t_0; t_B = T$ или $t_A = T; t_B = t_0$.
Тогда $\int\limits_l f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = (S)\int\limits_{t_A}^{t_B} \quad \dots$

4. В чем заключается геометрический смысл криволинейного интеграла I-ого рода?

5. Выберите правильный ответ.
Формула $\int\limits_l f(x,y)\mathrm{d}l = (R)\int\limits_{t_0}^{T} f(\phi(t), \psi(t))\sqrt{(\dot\phi(t)^2 + \dot\psi(t)^2)}\mathrm{d}t$ справедлива, когда l является
а) l - гладкая кривая;
б) l - ограниченная кривая;
в) l - окружность;
г) l - винтовая линия .

6. Запишите формулу для нахождения массы материальной кривой с помощью криволинейного интеграла I-ого рода.

7. Запишите формулу для нахождения криволинейный интеграл II-ого рода:
$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (x-2y)\mathrm{d}x + (y+4z-2)\mathrm{d}y + (z-x)\mathrm{d}z$, где AB отрезок прямой A(1,2,3),B(2,5,8).

8. Вычислите длину окружности, заданную уравнением $r = 10$.

9. Найдите статический момент полуарки циклоиды $x = 2(t - sint); y = 2(1 - cost)$ относительно оси Oyс линейной плотностью $\rho(t) = 3$.

10. Сопоставьте криволинейный интеграл II-ого рода по кривой l с его значением,если
$I = \int\limits_{l}(2xy)\mathrm{d}x - (x^2)\mathrm{d}y$ вдоль различных кривых соединяющих точки O(0,0) и A(2,1).

1. Прямая [OA]	а. $1\frac{1}{3}$
2. Парабола с осью Oy	б. -4
3. Ломаная [OBA], где B(2,0)	в. 0

11. Запишите формулу для вычисление площади криволинейной трапеции I типа.
Криволинейной трапецией I типа называют множество
$G = \{(x.y)|a \leq x \leq b; f(x) \leq y \leq g(x); f, g \in C[a.b]\}$.

12. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода
$\oint\limits_{C} \frac{(x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, где C-окружность единичного радиуса, пробегаемая против часовой стрелки.

13. Найдите массу дуги эллипса $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, с линейной плотностью $\rho(x, y) = |y|$.

14. Вычислите криволинейный интеграл I-ого рода
$\int\limits_{l} \frac{x}{y}\mathrm{d}l$, где l-дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками A(2,2) и B(8,4).

15. Убедитесь, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих ось Oy.

16. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_l x^2 \mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$, где l-дуга кривой $x = sint; y = sin^2 t;$
$z = sin^3 t (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$.

17. Найдите момент инерции относительно оси Ox однородной окружности $R = 5$.

18. Найдите длину дуги пространственной кривой:
$x = 3t; y = 3t^2; z = 2t^3$ от O(0,0,0) да A(9,27,54).

19. Вычислите криволинейный интеграл I-ого рода:
$\int\limits_l xy\mathrm{d}l$, где l-кривая $x = 5cht; y = 5sht; t \in [0; \pi]$.

20. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_l (x^2 - z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$, где l- кривая $x = t; y = t^2; z = t^3$
$(0 \leq t \leq 1)$.

Тест 4

1. Выберете необходимое условие существования криволинейного интеграла I-ого рода.
а)$f(x, y)$ непрерывна на кривой l;
б)$f(x, y)$ монотонна на кривой l;
в)$f(x, y)$ ограничена сверху на кривой l;
г)$f(x, y)$ ограничена снизу на кривой l.

2. Каким свойствами не обладает криволинейный интеграл I-ого рода?
а) коммутативность;
б) аддитивность;
в) линейность;
г) интегрируемость модуля.

3. Какое из перечисленных условий НЕ является условием независимости криволинейного интеграла II-ого рода от формы кривой? Выберете правильный ответ.

а)$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ полный дифференциал I-ого рода;

б) $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ не зависит от формы кривой, а зависит от точек A и B;

в)$\oint\limits_{C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$,$\forall C\in D$, где C-замкнутая кривая;

г)$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$,$\forall (x,y)\in D$.

4. Какую величину из механики нельзя вычислить с помощью криволинейного интеграла I-ого рода?

а) вычисление массы материальной кривой;

б) определение значения работы силы при перемещении по кривой точки единичной массы;

в) статические моменты кривой относительно осей координат;

г) момент инерции кривой относительно координатной оси.

5. Запишите формулу для решения криволинейного интеграла II-ого рода

$\oint\limits_{C}(y+2x)dx+2(x+y)dy$, где C образован линиями $y=4x^2$; $y=4; x=0$.

6. Справедлива ли формула, если $l: x=\phi(t), y=\psi(t)$, $t_0<t<T$ - гладкая кривая, $f(\phi(t),\psi(t))\in C[t_0,T]$

$$\int\limits_{l} f(x,y)\mathrm{d}l=(R)\int\limits_{t_0}^{T} f(\phi(t),\psi(t))\sqrt{\dot{\phi}(t)^2+\dot{\psi}(t)^2)}\mathrm{d}t?$$

Ответьте да или нет.

7. При каком условии криволинейный интеграл II-ого рода не зависит от формы кривой?

8. Вычислите длину окружности, заданную уравнением $r=1$.

9. Найдите статический момент полуарки циклоиды $x=(t-sint); y=(1-cost)$ относительно оси Ox с линейной плотностью $\rho(t)=5$.

10. Сопоставьте криволинейный интеграл II-ого рода по кривой l с его значением, если
$I = \int\limits_l (xy)\mathrm{d}x - (y^2)\mathrm{d}y$ вдоль различных кривых соединяющих точки O(0,0) и A(2,1).

1 прямая [OA]	а $\frac{4}{5}$
2 парабола с осью Oy	б -$\frac{1}{3}$
3 ломаная [OBA], где B(2,0)	в $\frac{1}{8}$

11. Запишите формулу для вычисление площади криволинейной трапеции II типа.
Криволинейной трапецией II типа называют
$G = \{(x.y)|c \le y \le d; f(y) \le x \le g(y); f, g \in C[c.d]\}$

12. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода
$\oint\limits_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, где C-окружность R=5, пробегаемая против часовой стрелки.

13. Определите массу кривой, имеющей форму отрезка от точки A(1,1) до B(2,4) с плотностью $\rho(x, y) = 3x + 2y$.

14. Вычислите криволинейный интеграл I-ого рода:
$\int\limits_l (5z - 2\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}l$, где l-дуга кривой,заданной параметрически $x = tcost; y = tsint; z = t; t \in [0, \pi]$.

15. Убедитесь, что подынтегральное выражение является полным диффенциалом. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямой $y = x$.

16. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$I = \int\limits_l (x + y)\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$, где l:$x = t^3; y = t^2; z = t; t \in [0, 1]$.

17. Найдите момент инерции относительно оси Ox однородной окружности $R = 3$.

18. Найдите длину дуги пространственной кривой:
$x = e^t cost; y = e^t sint; z - e^t, 0 \leq t \leq 5$.

19. Вычислите криволинейный интеграл I-ого рода:
$\int\limits_l (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}l$, где l-дуга астроиды $x = acos^{\phi}; y = asin^3\phi; t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

20. Вычислите криволинейный интеграл II-ого рода:
$\int\limits_l (xy - 1)\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$, где l-отрезок от точки A(1,2) до точки B(2,4) по прямой AB.

Тема 4. Кратные интегралы

Тест 1

1. Вместо многоточия вставьте правильный вариант ответа:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{\cdots} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$.

a) $\begin{matrix} min|\Delta x_i| \to 0 \\ min|\Delta y_j| \to 0 \end{matrix}$;

b) $\begin{matrix} min|\Delta x_i| \to \infty \\ min|\Delta y_j| \to \infty \end{matrix}$;

c) $\begin{matrix} max|\Delta x_i| \to 0 \\ max|\Delta y_j| \to 0 \end{matrix}$;

d) $\begin{matrix} max|\Delta x_i| \to \infty \\ max|\Delta y_j| \to \infty \end{matrix}$.

2. Укажите верную формулу:

a) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v))Jdudv$;
b) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v), y(u,v))Jdudv$;
c) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv$;
d) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv$,
где $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ - якобиан перехода к другим координатам.

3. Вычислите интеграл $\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, где Ω - прямоугольник $3 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.

a) $\frac{21}{4}$; b) $\frac{25}{4}$; c) $\ln\frac{21}{4}$; d) $\ln\frac{25}{4}$.

4. Поменяйте пределы интегрирования в $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$.

a)$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx$; c)$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx$;

b)$\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dx$; d)$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)dx$.

5. Перейдите к полярным координатам r и ϕ в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$, полагая $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$.

a)$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{cos\phi}} rf(r,\phi)dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{sin\phi}} rf(r,\phi)dr$;

b)$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{sin\phi}} rf(r,\phi)dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{cos\phi}} rf(r,\phi)dr$;

c)$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{sin\phi}} rf(r,\phi)dr$;

d)$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{\frac{1}{cos\phi}} rf(r,\phi)dr$;

6. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} xy^2 dxdy, \Omega : y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

7. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} cos(x^2+y^2)dxdy, \Omega : x^2+y^2 \leqslant a^2$.

8. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}(x^2y^2+y^2)dxdy, \Omega : \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x}, x \leqslant y \leqslant 3x$.

9. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} xydxdy, \Omega : xy = 1, x+y = \frac{5}{2}$.

10. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{|y-x^2|}dxdy, \Omega : |x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$.

11. Установите соответствие.

1. Площадь области Ω;
2. Объём цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = z(x, y)$, снизу $z = 0$ и вырезающего из плоскости OXY квадрируемую область Ω;
3. Площадь гладкой поверхности $z = z(x, y)$;
4. Центробежный момент инерции, где $z = \rho(x, y)$ - плотность области Ω.

a. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy$;
b. $\iint\limits_{\Omega} z(x, y) dxdy$;
c. $\iint\limits_{\Omega} zxydxdy$;
d. $\iint\limits_{\Omega} dxdy$.

12. С помощью двойного интеграла вычислите площадь фигуры Ω, ограниченной линиями
$y = x^2 - 1, \;\; x + y = 5$.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = \frac{x^5}{a^4}, \; y = \frac{x^5}{b^4}, \; x = \frac{y^5}{c^4}, \; x = \frac{y^5}{d^4} \; (x > 0, \; y > 0, \; 0 < a < b, \; 0 < c < d)$.

14. Найдите массу пластинки плотности ρ, ограниченной кривыми
$y = x^2, \;\; x + y = 2, \;\; y - x = 2 \; (x > 0)$, если $\rho = x + 2$.

15. Найдите координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной кривыми
$ay = x^2, \;\; x + y = 2a \;\; (a > 0)$.

16. Найдите моменты инерции $I_x, \;\; I_y$ пластинки $(\rho = 1)$, ограниченной кривыми
$xy = a^2, \;\; xy = 2a^2, \;\; x = 2y, \;\; 2x = y \;\; (x > 0, \; y > 0)$.

17. Найдите площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = \pm ax$.

18. Найдите площадь поверхности $cz = xy$, если $(x^2+y^2)^2 \leqslant 2c^2xy$, $z \geqslant 0$.

19. Изобразите объём, выражаемый следующим двойным интегралом $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$, где $\Omega : \{0 \leqslant x+y \leqslant 1;\ \ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0\}$.

20. Вычислите объём тела, ограниченного прямыми $z = 1+x+y,\ \ z=0,\ \ x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0$.

Тест 2

1. Вместо многоточия вставьте правильный вариант ответа:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{max|\Delta x_i, \Delta y_j|\to 0} \sum_i \sum_j \ldots,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$.

a) $f(x,y)\Delta x_i \Delta y_j$; b) $f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$; c) $f(x_i,y_j)$; d) $\Delta x_i \Delta y_j$.

2. Укажите верную формулу:

a) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$;

b) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$;

c) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f(x,y)dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$;

d) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f(x,y)dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$,

где $\Omega : \{a \leqslant x \leqslant b;\ \ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$.

3. Вычислите интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x+2y)dxdy$, где Ω - ограничена линиями $y = x^2,\ \ y=0,\ \ x+y-2=0$.

a)$\frac{9}{20}$; b)$\frac{29}{20}$; c)$\ln\frac{9}{20}$; d)$\ln\frac{29}{20}$.

4. Поменяйте пределы интегрирования в $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$.

a) $\int\limits_{-1}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx;$

b) $\int\limits_{-1}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx;$

c) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx;$

d) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx;$

5. Перейдите к полярным координатам r и ϕ в $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{1} f(x,y)dy$, полагая $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$.

a) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\phi}} rf(r,\phi)dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{-1}{\cos\phi}} rf(r,\phi)dr;$

b) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{-1}{\cos\phi}} rf(r,\phi)dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\phi}} rf(r,\phi)dr;$

c) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\phi}} rf(r,\phi)dr;$

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{-1}{\cos\phi}} rf(r,\phi)dr;$

6. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy, \Omega : y = x, y = x + a, y = a, y = 3a.$

7. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy, \Omega : x^2 + y^2 \geqslant ax.$

8. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} \frac{(x+y)^2}{x}dxdy, \Omega : 1 - x \geqslant y \geqslant 3 - x, \frac{x}{2} \geqslant y \geqslant 2x.$

9. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}(|x| + |y|)dxdy, \Omega : |x| + |y| \geqslant 1.$

10. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} |\cos(x+y)|dxdy, \Omega : 0 \geqslant x \geqslant \pi, 0 \geqslant y \geqslant \pi.$

11. Установите соответствие.

1. Площадь области Ω;
2. Объём цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = z(x, y)$, снизу $z = 0$ и вырезающего из плоскости OXY квадрируемую область Ω;
3. Площадь гладкой поверхности $z = z(x, y)$;
4. Центробежный момент инерции, где $z = \rho(x, y)$ - плотность области Ω.

a. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy$;
b. $\iint\limits_{\Omega} z(x, y)dxdy$;
c. $\iint\limits_{\Omega} zxydxdy$;
d. $\iint\limits_{\Omega} dxdy$.

12. С помощью двойного интеграла вычислите площадь фигуры Ω, ограниченной линиями
$y^2 = 2x + 4, y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми
$x^2 = py, x^2 = qy, y = ax, y = bx (0 < p < q, 0 < a < b)$.

14. Найдите массу пластинки плотности ρ, ограниченной линиями
$x = y, x - 3y = 1, y = 1, y = 3$, если $\rho = y$.

15. Найдите координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной кривыми $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0$.

16. Найдите моменты инерции $I_x, \ \ I_y$ пластинки $(\rho = 1)$, ограниченной кривыми $r = a(1 + \cos\phi)$.

17. Найдите площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

18. Найдите площадь поверхности $2z = x^2$, если $x \leqslant 2y \leqslant 4x$, $x \leqslant 2\sqrt{2}$.

19. Изобразите объём, выражаемый следующим двойным инте-

гралом $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$, где $\Omega: \{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1\}$.

20. Вычислите объём тела, ограниченного прямыми $x+y+z=a,\ \ x^2+y^2=R^2,\ \ x=0,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0 (a\geqslant\sqrt{2}R)$.

Тест 3

1. Вместо многоточия вставьте правильный вариант ответа:

Если Ω задана неравенствами: $x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y), a\leqslant y\leqslant b$, где $x_1(y), x_2(y)$- непрерывные функции на [a,b], то $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = ...$

a) $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy \int\limits_a^b f(x,y)dx$

b) $\int\limits_a^b dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$

c) $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_a^b f(x,y)dy$

d) $\int\limits_a^b dx \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dy$

2. Продолжите фразу:

Пусть $I=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$. Множество Ω симметрично относительно оси OY. Тогда из нечетности $f(x,y)$ по переменной x следует, что $I = ...$

a) $2\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$, где $\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y):x\geqslant 0\}$;
b) $2\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$, где $\Omega_1=\Omega\cup\{(x,y):x\geqslant 0\}$;
c) $\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$, где $\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y):x\geqslant 0\}$;
d) 0.

3. Вычислите интеграл $\iint\limits_{\Omega}(2x+y)dxdy$, где Ω ограничена линиями $x+y=3, y=0, x=0$.

a) $\frac{25}{2}$; b) $\frac{27}{2}$; c) $\ln\frac{25}{2}$; d) $\ln\frac{27}{2}$.

4. Поменяйте пределы интегрирования в $\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$.

a) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)dx$; c) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int\limits_{0}^{2-y}f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int\limits_{0}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$; d) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}dy\int\limits_{0}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int\limits_{0}^{2-y}f(x,y)dx$.

5. Перейдите к полярным координатам r и ϕ в $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{x^2}f(x,y)dy$, полагая $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi$.

a) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{8}}d\phi\int\limits_{0}^{\frac{1}{cos\phi}}rf(r,\phi)dr+\int\limits_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi}d\phi\int\limits_{0}^{\frac{-sin\phi}{cos^2\phi}}rf(r,\phi)dr$;

b) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{8}}d\phi\int\limits_{0}^{\frac{-sin\phi}{cos^2\phi}}rf(r,\phi)dr+\int\limits_{\frac{7\pi}{8}}^{\pi}d\phi\int\limits_{0}^{\frac{1}{cos\phi}}rf(r,\phi)dr$;

c) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\phi\int\limits_{\frac{-sin\phi}{cos^2\phi}}^{\frac{1}{cos\phi}}rf(r,\phi)dr$;

d) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\phi\int\limits_{\frac{1}{cos\phi}}^{\frac{-sin\phi}{cos^2\phi}}rf(r,\phi)dr$.

6. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy, \Omega$ – параллелограм со сторонами $y=x, y=x+a, y=a, y=3a$.

7. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \Omega: \pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$.

8. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} xy(x+y)dxdy, \Omega : -1 \leqslant x - y \leqslant 1, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x}$.

9. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy, \Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

10. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} (x+y)dxdy, \Omega : y^2 = 2x, x + y = 4, x + y = 12$.

11. Установите соответствие.

1. x_0 - координата центра масс пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x,y)$ - плотность пластинки;
2. y_0 - координата центра масс пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x,y)$ - плотность пластинки;
3. I_x - момент инерции пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x,y)$ - плотность пластинки;
4. I_y - момент инерции пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x,y)$ - плотность пластинки.

a. $\iint\limits_{\Omega} \rho y^2 dxdy$;
b. $\frac{1}{M} \iint\limits_{\Omega} \rho y dxdy$;
c. $\iint\limits_{\Omega} \rho x^2 dxdy$;
d. $\frac{1}{M} \iint\limits_{\Omega} \rho x dxdy$.

12. С помощью двойного интеграла вычислите площадь фигуры Ω, ограниченной линиями
$y^2 = 2x + 8, y^2 = \frac{-1}{2}x + 3$.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = ax^3, y = bx^3, y^2 = px, y^2 = qx$ $(0 < a < b, 0 < p < q)$.

14. Найдите массу пластинки плотности ρ, ограниченной кривыми

$y^2 = x + 4, y^2 = 4 - x, y = 0 (y \geqslant 0)$, если $\rho = y$.

15. Найдите координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной кривыми
$y = 3x - x^2, y = 0$.

16. Найдите моменты инерции I_x, I_y пластинки ($\rho = 1$), ограниченной кривыми
$x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

17. Найдите площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

18. Найдите площадь поверхности $z^2 = 2xy$, если $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

19. Изобразите объём, выражаемый следующим двойным интегралом $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, где $\Omega : x^2 + y^2 \leqslant x$.

20. Вычислите объём тела, ограниченного прямыми
$z = x^2 + y^2, x = y^2, y = 1, z = 0$.

Тест 4

1. Вместо многоточия вставьте правильный вариант ответа:

Если Ω задана неравенствами: $a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x), y_2(x)$- непрерывные функции на [a,b], то $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = ...$

а) $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_a^b f(x, y)dx$

b) $\int\limits_{a}^{b} dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$

c) $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dy$

d) $\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

2. Продолжите фразу:

Пусть $I = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$. Множество Ω симметрично относительно оси OY. Тогда из четности $f(x,y)$ по переменной x следует, что $I = ...$

a) $2\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$, где $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) : x \geqslant 0\}$;
b) $2\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$, где $\Omega_1 = \Omega \cup \{(x,y) : x \geqslant 0\}$;
c) $\iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$, где $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) : x \geqslant 0\}$;
d) 0.

3. Вычислите интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdxdy$, где Ω ограничена линиями $y = \sqrt{x}, y = x$.

a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{16}{15}$; c) $\ln\frac{1}{15}$; d) $\ln\frac{16}{15}$.

4. Поменяйте пределы интегрирования в $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$.

a)$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$; c)$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$;

b)$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$; d)$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

5. Перейдите к полярным координатам r и ϕ в $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$, полагая $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$.

a) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{1}{cos\phi}} rf(r,\phi)dr + \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{sin\phi}{cos^2\phi}} rf(r,\phi)dr;$

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{sin\phi}{cos^2\phi}} rf(r,\phi)dr + \int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{0}^{\frac{1}{cos\phi}} rf(r,\phi)dr;$

c) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{\frac{sin\phi}{cos^2\phi}}^{\frac{1}{cos\phi}} rf(r,\phi)dr;$

d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{\frac{1}{cos\phi}}^{\frac{sin\phi}{cos^2\phi}} rf(r,\phi)dr.$

6. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} x^2y^2dxdy, \Omega : y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

7. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}dxdydxdy, \Omega : x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

8. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}(x^3 + y^3)dxdy, \Omega : \frac{1}{x} \leqslant 2y \leqslant \frac{3}{x}, x^2 \leqslant y \leqslant 3x^2$.

9. Вычислите $\iint\limits_{\Omega}(x + y)dxdy, \Omega : x + y = x^2 + y^2$.

10. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} |\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2|dxdy, \Omega : x^2 + y^2 \leqslant 1$.

11. Установите соответствие.

1. x_0 - координата центра масс пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ - плотность пластинки;
2. y_0 - координата центра масс пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ - плотность пластинки;
3. I_x - момент инерции пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ - плотность пластинки;
4. I_y - момент инерции пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ - плотность пластинки.

a. $\iint\limits_{\Omega} \rho y^2 dxdy$;

b. $\frac{1}{M} \iint\limits_{\Omega} \rho y dxdy$;

c. $\iint\limits_{\Omega} \rho x^2 dxdy$;

d. $\frac{1}{M} \iint\limits_{\Omega} \rho x dxdy$.

12. С помощью двойного интеграла вычислите площадь фигуры Ω, ограниченной линиями $y = x^2, x + y = 6$.

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{x^2}{a},\ y = \frac{x^2}{b},\ y^2 = \frac{x^3}{c},\ y^2 = \frac{x^3}{d}$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d)$.

14. Найдите массу пластинки плотности ρ, ограниченной кривыми
$x^2 + y^2 = 4x,\ \ x^2 + y^2 = 4y, (xy \geqslant 0)$, если $\rho = x$.

15. Найдите координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной кривыми
$y = x^2 + 4x + 3,\ \ y = 0$.

16. Найдите моменты инерции I_x, I_y пластинки $(\rho = 1)$, ограниченной кривыми
$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2, x = 0, y = 0\ (0 \leqslant x \leqslant a)$.

17. Найдите площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$.

18. Найдите площадь поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$.

19. Изобразите объём, выражаемый следующим двойным интегралом $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdy$, где $\Omega : |x| + |y| \leqslant 1$.

20. Вычислите объём тела, ограниченного прямыми
$z = xy,\ x + y + z = 1,\ z = 0$.

Тест 5

1. Пусть G - компакт, и ∂G (граница G) - множество объема ноль. Верно ли, что G измеримо?

1) да

2) нет

2. Пусть числовая функция f задана на множестве E, которое измеримо по Жордану и $\mu E = 0$. Чему равен $\int f(x) dE$?

1) однозначно сказать нельзя

2) 0

3) 1

3. Пусть f - произвольная функция, а G - открытое множество. Пусть, к тому же, интеграл $\int f dG$ существует. Что мы можем сказать о функции f?

1) она ограничена на G

2) она непрерывна на G

3) она дифференцируема на G

4. Функция f определена на множестве $E = E' \cup E'',\ E' \cap E'' = \varnothing$. Интеграл $\int f(x) dE$ существует. Что можно сказать об интегралах $\int f(x) dE'$ и $\int f(x) dE''$?

1) ничего

2) они существуют

3) их не существует

5. Функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на E и $f(x) \leq g(x), \ \forall x \in Q \subset E$. Верно ли, что $\int\limits_E f(x) \leq \int\limits_E g(x)$?

1) верно

2) верно, если $Q = E$

3) неверно

4) зависит от функций f и g

6. Что из нижеперечисленного необходимо для интегрируемости разрывной функции f на измеримом по Жордану компакте G?

1) ограниченность f

2) то, что граница G - множество меры 0

3) то, что множество точек разрыва функции f - множество меры 0

4) ограниченность множества G

7. Функции f, g интегрируемы на Е и $\int f(x)dE = \int g(x)dE = 1$. Чему равен интеграл $\int(f(x) - g(x))dE$?

8. Вычислить интеграл $\int\limits_{0\leq x\leq 1} \int\limits_{0\leq y\leq 1} xy\ dxdy$, рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми $x = i/n, \ y = j/n, \ (i, j = 1, 2, ..., n-1)$ и выбирая значения подинтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

9. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

10. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ система непустых измеримых по Жордану множеств и $E_i \subset E, \ \forall i$. Какими из нижеперечисленных свойств должны обладать множества E_i, чтобы τ было разбиением?

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = E$

2) $\mu E_i = 0, \ \forall i$

3) $E_i \cap E_j = \varnothing, \ i \neq j$

4) $\mu(E_i \cap E_j = \varnothing), \ i \neq j$

11. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ - его разбиение и $\mu E_i = i$. Чему равна μE?

12. Существует ли интеграл $\int\limits_{\Omega}\int y(x)dxdy$, если

$$y(x) = \begin{cases} lnx, \ x \in (1;e) \\ 1, \ x = 1 \\ 0, \ x = e \end{cases}, \text{ а } \Omega = [1;e] \times [0;1]?$$

13. Пусть функция f задана на множестве E и ограничена на E и замыкании E. Какие из нижеперечисленных утверждений верны?

1) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на внутренности E

2) Из интегрируемости f на внутренности E следует ее интегрируемость на E

3) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на замыкании E

4) Из интегрируемости f на замыкании E следует ее интегрируемость на E

14. Привести пример последовательности, исчерпывающей множество $[-1;1] \times [-1;1]$.

15. Ниже приведены два условия. Поставьте между ними стрелочку, показывающую, какое из какого следует.

1) Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функ-

ция интегрируема

2) Ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны

16. Найдите площадь криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x}$ и прямыми $y=0,\ x=1$.

17. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - треугольник, ограниченный прямыми $y=x,\ y=0,\ x=1$.

18. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} 1\,dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - четырехугольник, ограниченный прямыми $y=2x+1,\ y=3x-1,\ y=-x+1,\ y=-2x-1$. Вычислить интеграл.

19. Изменить порядок интегрирования в интеграле
$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{e^x-1} f(x,y)dy$.

20. Докажите формулу Дирихле $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx$.

Тест 6

1. Пусть G - ограниченное множество, и ∂G - граница G. Верно ли, что ∂G - измеримое множество?

1) да

2) нет

2. Пусть на измеримом по Жордану множестве $E\subset\mathbb{R}^n$ задана функция $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ и $\tau=\{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ - некоторое разбиение множества E. Выберем произвольным образом точки $\xi_i\in E_i,\ i=1,...,k$. Что называется интегральной суммой Римана функции f?

1) $\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i\cdot\mu E_i$

2) $\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot E_i$

3) $\sum\limits_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \mu E_i$

3. Следует ли из ограниченности функции на множестве ее интегрируемость на этом множестве?

1) да

2) нет

4. Функция $f(x)$ интегрируема и ограничена на множестве E. Тогда величина $|\int f(x)dE| - \int |f(x)|dE$

1) не больше нуля

2) не меньше нуля

3) равна нулю

4) может быть любой

5. Функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на E, $1 \leq f(x) \leq 5$, а $g(x)$ не меняет знак на E и $\int g(x)dE = 1$. Какой величиной тогда можно ограничить сверху $\int f(x)g(x)\, dE$?

1) 5

2) 2.5

3) 1

4) ничего сказать нельзя

6. Существует ли интеграл $\int\limits_{\Omega}\int y(x)dxdy$, если

$$y(x) = \begin{cases} x^2,\ x \in (0;1) \\ 1,\ x = 0 \\ 0,\ x = 1 \end{cases}, \text{ а } \Omega = [0;1] \times [0;1]?$$

7. $E = \{x^2 + y^2 \leq 1\},\ E \subset \mathbb{R}^2$. Чему равен $\int dE$?

8. *Ниже приведены два условия. Поставьте между ними стрелочку, показывающую, какое из какого следует.*

1) Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция интегрируема

2) Для любого $\epsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что $S_\tau - s_\tau < \epsilon$, где s_τ и S_τ - нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие данному разбиению.

9. Функция f определена на множестве $E = E' \cup E'',\ E' \cap E'' = E'''$. Интеграл $\int f(x)dE$ существует. $\int f(x)dE' = a,\ \int f(x)dE'' = b$, $\int f(x)dE''' = c$. Чему равен $\int f(x)dE$?

10. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ система непустых измеримых по Жордану множеств и $E_i \subset E,\ \forall i$. Какими из нижеперечисленных свойств должны обладать множества E_i, чтобы τ было разбиением?

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = E$

2) $\mu E_i = 0,\ \forall i$

3) $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j$

4) $\mu(E_i \cap E_j) = \varnothing,\ i \neq j$

11. Вычислить интеграл $\int\limits_{0 \leq x \leq 1} \int\limits_{0 \leq y \leq 1} (x + y)\ dxdy$, рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми $x = i/n,\ y = j/n,\ (i, j = 1, 2, ..., n-1$ и выбирая значения подинтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

12. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

13. Пусть функция f задана на множестве E и ограничена. Ка-

кие из нижеперечисленных утверждений верны?

1) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на внутренности E

2) Из интегрируемости f на внутренности E следует ее интегрируемость на E

3) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на замыкании E

4) Из интегрируемости f на замыкании E следует ее интегрируемость на E

14. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ - его разбиение и $\mu E_i = i$. Чему равна μE?

15. Привести пример последовательности, исчерпывающей множество $[-1; 1] \times [-1; 1]$.

16. Найдите площадь криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $y = x^2 + 1$ и прямыми $y = 0,\ x = 0,\ x = 1$.

17. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - четырехугольник, ограниченный прямыми $y = 5x + 1,\ y = 6x - 1,\ y = 1,\ y = -1$.

18. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} 1\, dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - треугольник, ограниченный прямыми $y = 4x + 2,\ y = -x + 2,\ 3y = 2x + 1$. Вычислить интеграл.

19. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{0}^{e-1} dx \int\limits_{0}^{ln(x+1)} f(x, y)dy.$$

20. Докажите формулу Дирихле

$$\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)dy = \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{y}^{a} f(x, y)dx.$$

Тест 7

1. Верно ли, что кратный интеграл Римана по множеству E зависит от разбиения множества E?

1) да

2) нет

2. Пусть f - функция, ограниченная на измеримом по Жордану множестве E и $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ - некоторое разбиение множества E. Что называется нижней суммой Дарбу?

1) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot \mu E_i$, где $m_i = \sup\limits_{x \in E_i} f(x)$

2) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot \mu E_i$, где $m_i = \inf\limits_{x \in E_i} f(x)$

3) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot E_i$, где $m_i = \sup\limits_{x \in E_i} f(x)$

4) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i \cdot E_i$, где $m_i = \inf\limits_{x \in E_i} f(x)$

3. Пусть E - измеримый компакт, $E \subset \mathbb{R}^n$, а f - непрерывная на нем функция. Верно ли, что f интегрируема на E?

1) да

2) нет

4. Пусть дана функция $f(x, y) = x,\ G = \{0 < x < 2, 0 < y < 2\}$. Что можно сказать о знаке интеграла $\int f(x, y) dG$?

1) положительный

2) отрицательный

5. Функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на E, $1 \leq f(x) \leq 5$, а $g(x)$ не меняет знак на E и $\int g(x) dE = 1$. Какой величиной тогда можно ограничить снизу $\int f(x)g(x)\, dE$?

1) 5

2) 2.5

3) 1

4) ничего сказать нельзя

6. Пусть $f(x) = sinx$ и $x \in [0, \pi]$. Чему равна Жорданова мера графика функции $f(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$?

7. *Ниже приведены два условия. Поставьте между ними стрелочку, показывающую, какое из какого следует.*

1) Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция интегрируема

2) Для любого $\epsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что $S_\tau - s_\tau < \epsilon$, где s_τ и S_τ - нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие данному разбиению.

8. Пусть $G = \{|y| < 1 - |x|\}$. Чему равен $\int dG$?

9. Привести пример последовательности, исчерпывающей множество $[-1; 1] \times [-1; 1]$.

10. Вычислить интеграл $\int\limits_{0 \le x \le 1} \int\limits_{0 \le y \le 1} (cosx + siny)\, dxdy$, рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми $x = i/n,\ y = j/n,\ (i, j = 1, 2, ..., n-1$ и выбирая значения подинтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

11. Пусть $E = [0; 1] \times [0; 1]$, и $\tau_1 = E$,
$\tau_2 = \{E_{i,j} = [\frac{1}{2}(1-i); \frac{1}{2}(1-j)]\ \}_{i,j=0}^{1}$ - разбиения E.
Каково соотношение между S_{τ_1} и S_{τ_2}? (S_τ - верхняя сумма Дарбу при разбиении τ)

1) $S_{\tau_1} \le S_{\tau_2}$

2) $S_{\tau_1} \geq S_{\tau_2}$

12. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

13. Пусть функция f задана на множестве E и ограничена. Какие из нижеперечисленных утверждений верны?

1) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на внутренности E

2) Из интегрируемости f на внутренности E следует ее интегрируемость на E

3) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на замыкании E

4) Из интегрируемости f на замыкании E следует ее интегрируемость на E

14. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ - его разбиение и $\mu E_i = i$. Чему равна μE?

15. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ система непустых измеримых по Жордану множеств и $E_i \subset E$, $\forall i$. Какими из нижеперечисленных свойств должны обладать множества E_i, чтобы τ было разбиением?

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = E$

2) $\mu E_i = 0, \forall i$

3) $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j$

4) $\mu(E_i \cap E_j) = \varnothing,\ i \neq j$

16. Найдите площадь криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 0,\ x = 1$.

17. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - круг $x^2+y^2 \le 9$.

18. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} 1\, dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - четырехугольник, ограниченный прямыми $y = 4x-1,\ y = 2x+2,\ y = -x-1,\ y = 1$. Вычислить интеграл.

19. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy.$$

20. Докажите формулу Дирихле

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx.$$

Тест 8

1. Пусть множества F, G измеримы по Жордану. Можем ли мы сказать, что $F \cup G$ измеримо по Жордану?

1) да

2) нет

2. Пусть G - измеримое множество. Верно ли, что у G может не существовать разбиения некоей малой мелкости?

1) да

2) нет

3. E - измеримое множество, $E \subset \mathbb{R}^n$, а f - интегрируемая на нем функция. Пусть функция g отличается от функции f в точках, составляющих множество меры 0. Тогда, если $\int f\,dE = A$, то $\int g\,dE$ равен

1) $A \pm \epsilon$, где $\epsilon \to 0$

2) точно нельзя сказать

3) A

4. Функция f определена на множестве $E = E' \cup E'',\ E' \cap E'' = \varnothing$. Интегралы $\int f(x)dE'$ и $\int f(x)dE''$ существуют. Что можно сказать об интеграле $\int f(x)dE$?

1) ничего

2) он существует

3) его не существует

5. Функции $f(x), g(x)$ интегрируемы и ограничены на некоем множестве. В каком случае на этом же множестве интегрируемо их частное?

1) функция $f(x)$ не меняет знак на E

2) функция $g(x)$ не меняет знак на E

3) функция $g(x)$ непрерывна на E

4) инфимум $g(x)$ больше нуля на E

6. $E = \{x \in [0, \pi], y = sinx\},\ E \subset \mathbb{R}^2$. Чему равен $\int dE$?

7. *Ниже приведены два условия. Поставьте между ними стрелочку, показывающую, какое из какого следует.*

1) Ограниченная на измеримом по Жордану множестве E функция интегрируема

2) Для любого $\epsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества E, что $S_\tau - s_\tau < \epsilon$, где s_τ и S_τ - нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие данному разбиению.

8. Вычислить интеграл $\int\limits_{0 \le x \le 1} \int\limits_{0 \le y \le 1} (x + y)^2 dxdy$, рассматривая

его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми $x = i/n,\ y = j/n,\ (i, j = 1, 2, ..., n-1$ и выбирая значения подинтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

9. Построить пример функции, неограниченной и интегрируемой на множестве положительной меры.

10. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ система непустых измеримых по Жордану множеств и $E_i \subset E$, $\forall i$. Какими из нижеперечисленных свойств должны обладать множества E_i, чтобы τ было разбиением?

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = E$

2) $\mu E_i = 0$, $\forall i$

3) $E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j$

4) $\mu(E_i \cap E_j) = \varnothing,\ i \neq j$

11. Пусть E - измеримое по Жордану множество, а $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ - его разбиение и $\mu E_i = i$. Чему равна μE?

12. Пусть $E = [0; 1] \times [0; 1]$, и $\tau_1 = E$,

$\tau_2 = \{E_{i,j} = [\frac{1}{2}(1-i); \frac{1}{2}(1-j)]\ \}_{i,j=0}^{1}$ - разбиения E.

Каково соотношение между s_{τ_1} и s_{τ_2}? (s_τ - нижняя сумма Дарбу при разбиении τ)

1) $s_{\tau_1} \leq s_{\tau_2}$

2) $s_{\tau_1} \geq s_{\tau_2}$

13. Пусть функция f задана на множестве E и ограничена. Какие из нижеперечисленных утверждений верны?

1) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на внутренности E

2) Из интегрируемости f на внутренности E следует ее интегрируемость на E

3) Из интегрируемости f на E следует ее интегрируемость на замыкании E

4) Из интегрируемости f на замыкании E следует ее интегрируемость на E

14. Привести пример последовательности, исчерпывающей множество $[-1;1] \times [-1;1]$.

15. Ниже приведены два условия. Поставьте между ними стрелочку, показывающую, какое из какого следует.

1) Ограниченная на измеримом по Жордану множестве функция интегрируема

2) Ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны

16. Найдите площадь криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $y = sinx$ и прямыми $y = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$.

17. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - треугольник, ограниченный прямыми $5y = -x + 5,\ 5y = -4x + 20,\ x = 0$.

18. В двойном интеграле $\int\limits_{\Omega} 1\ dxdy$ расставить пределы в том и в другом порядке, если Ω - треугольник, ограниченный прямыми $y = x + 1,\ y = -3x + 1,\ 3y = -x - 1$. Вычислить интеграл.

19. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{tgx} f(x,y)dy.$$

20. Докажите формулу Дирихле

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx.$$

Тема 5. Замена в кратных интегралах

Тест 1

1. Укажите формулы, которые применяют для вычисления объёма тела V в цилиндрической и сферической системах координат:

1) $\iiint\limits_V \rho\ d\rho\ d\phi\ dz$;

2) $\iiint\limits_V r\sin\theta dr\ d\theta\ d\phi$;

3) $\iiint\limits_V d\rho\ d\phi\ dz$;

4) $\iiint\limits_V r^2\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$.

2. При переходе к цилиндрической системе координат в кратном интеграле используют следующую замену:

1) $x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$
$z = r\sin\psi$;

2) $x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$;

3) $x = r\cos\phi\cos\psi$
$y = r\sin\phi\cos\psi$
$z = r$;

4) $x = r\cos\phi$
$y = r\sin\phi$
$z = h$.

3. Меняется ли значение кратного интеграла при изменении значения подынтегральной функции в точках, образующих множество объёма нуль?

1) да;

2) нет.

4. Сформулируйте теорему о вычислении кратного интеграла по брусу, если $x'' = (x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, Q – замкнутый брус в $\mathbb{R}^n$, $Q'' = \{x'' \in \mathbb{R}^{n-1} | Q_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = \overline{2, n}\}$ его проекция на плоскость $x_1 = 0$.

5. Кратный интеграл не применяется для вычисления:

1) площадей, объёмов тел;

2) массы плоской фигуры;

3) статических моментов плоской фигуры относительно координатных осей;

4) потока векторного поля.

6. Измените порядок интегрирования в интеграле
$I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{3x^2}{8}}^{3\sqrt{x}} dy.$

7. Чему равно значение интеграла $\iint\limits_D (x + y + 3) dxdy$, если область D ограничена линиями $x + y = 2, x = 0, y = 0$?
$a)$ $\frac{26}{3}$; $b)$ $\frac{13}{2}$; $c)$ $\frac{52}{3}$; $d)$ $\frac{13}{3}$.

8. Вычислить массу однородной пластинки, ограниченной линиями: $x = 0,\ y = 0,\ y = 1 - x^2$, если её плотность: $\rho = x$.

9. Расставьте в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y) dxdy$ пределы интегрирования в том и другом порядке, если D – треугольник с вершинами O(0,0), A(2,1), B(-2,1).

10. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dxdy$, где D – круг $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

11. Чему равен объём тела, ограниченного координатными плоскостями и поверхностями $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2$?
$a)$ $\frac{3}{35}$; $b)$ $\frac{1}{12}$; $c)$ $\frac{1}{20}$; $d)$ $\frac{3}{18}$.

12. Найдите площадь области D, ограниченной линиями

$x-y+3=0,\ x-y-1=0,\ x+3=0,\ y-4=0.$

13. Чему равны координаты центра масс пластинки, лежащей в плоскости XOY и ограниченной линиями $y=x,\ y=2x,$
$x=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$, если её плотность $\rho(x,y)=xy$?

1) $x_o=\frac{8}{5},\ y_o=\ \frac{112}{45};$

2) $x_o=\frac{224}{15},\ y_o=\ \frac{48}{15};$

3) $x_o=\frac{112}{45},\ y_o=\ \frac{8}{5};$

4) $x_o=\frac{48}{5},\ y_o=\ \frac{224}{15}.$

14. Вычислите повторный интеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-3}^{5}\int\limits_{-y}^{y}(z+2)dxdydz.$

$a)$ 32; $b)$ 1; $c)$ 64; $d)$ 11

15. Полагая, что если r и ϕ – полярные координаты, измените порядок интегрирования в повторном интеграле
$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int\limits_{0}^{a\cos\phi}f(\phi,r)dr,\ (a>0).$

16. Вычислите двойной интеграл $I=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$, если D ограничена линиями $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ y=0,\ (x>0,\ y<0).$

17. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi.$
$a)$ $\frac{2}{\pi}$; $b)$ $\frac{\pi}{2}$; $c)$ π; $d)$ $\frac{5\pi}{2}$.

18. Вычислить объём цилиндра, ограниченного поверхностью $f(x,y)=(1-x^2)y$, в основании которого лежит круг
$x^2+y^2\leqslant 1.$

19. Найти центр тяжести квадратной пластинки 2×2 плотности $\rho(x,y)=xy.$

20. Найдите объём тела, ограниченного следующими поверхностями: $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2$.

Тест 2

1. Укажите формулы, которые применяют для вычисления площади плоской фигуры D в полярной и декартовой системах координат:

1) $\iint\limits_D \rho\ d\rho\ d\phi$;

2) $\iint\limits_D dx\ dy$;

3) $\iint\limits_D d\rho\ d\phi$;

4) $\iint\limits_D \rho^2\ \sin\theta\ d\theta\ d\phi$.

2. Для перехода к сферической системе координат используют следующую замену:

1) $x = r\cos\phi\cos\psi$
$y = r\sin\phi\cos\psi$
$z = r$;

2) $x = r\cos\phi\sin\psi$
$y = r\sin\phi\cos\psi$
$z = r\sin\psi$;

3) $x = r\cos\phi\cos\psi$
$y = r\sin\phi\cos\psi$;

4) $x = r\cos\phi\cos\psi$
$y = r\sin\phi\cos\psi$
$z = r\sin\psi$.

3. Выберите формулу для вычисления статических моментов плоской материальной фигуры относительно оси OX:

1) $\iint\limits_D \rho(x,y)ydxdy$;

2) $\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$;

3) $\iint\limits_D \rho(x,y)x^2dxdy$;

4) $\iint\limits_D \rho(x,y)xdxdy$.

4. Необходимым признаком интегрируемости $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ на брусе $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$ является:

1) непрерывность функции;

2) ограниченность функции;

3) дифференцируемость функции;

4) монотонность функции.

5. Сформулируйте теорему о вычислении кратного интеграла по жорданову множеству, если $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – жорданово множество $G' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ – проекция G на плоскость $x_n = 0$, G $= \{(x',\, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in G',\, \phi(x') \leqslant x_n \leqslant \psi(x')\}$, где $\phi,\ \psi \in C(G')$.

6. Измените порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

7. Чему равно значение интеграла $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 2,\ x = y,\ 2y = x$?

$a)\ \frac{8}{3};\ b)\ \frac{10}{3};\ c)\ \frac{5}{4};\ d)\ \frac{5}{2}$.

8. Вычислить массу однородной пластинки, ограниченной линиями: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0$.

9. Расставьте в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ пределы интегрирования в том и другом порядке, если D: треугольник с верши-

нами O(0,0), A(1,0), B(1,1).

10. Вычислите $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где D - кольцо $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$.

11. Найдите объём тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1,\ z = 0$.

$a)\ \frac{105}{88};\ b)\ \frac{88}{105};\ c)\ \frac{79}{105};\ d)\ \frac{105}{79}.$

12. Найдите площадь области D, ограниченной линиями $y = x^2 + 1,\ x - y + 3 = 0$.

13. Чему равна масса пластинки, лежащей в плоскости XOY и ограниченной линиями $x = (y-1)^2,\ y = x - 1$, если плотность $\rho(x, y) = y$.

$a)\ 4;\ b)\ \frac{27}{4};\ c)\ 27;\ d)\ \frac{3}{4}$

14. Вычислите тройной интеграл $I = \iiint\limits_V 2zdxdydz$, где область V ограничена координатными плоскостями и плоскостью
$x + y + z = 1$.

$a)\ 0;\ b)\ 12;\ c)\ \frac{1}{12};\ d)\ 3.$

15. Полагая, что если r и ϕ – полярные координаты, измените порядок интегрирования в интеграле $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin(2\phi)}} f(\phi, r)dr$, $(a > 0)$.

16. Вычислить $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$, если D ограничена линиями
$x = 0,\ y = x,\ y = \frac{\pi}{2}$.

$a)\ 0;\ b)\ \frac{\pi}{2};\ c)\ \pi;\ d)\ 2\pi.$

17. Найдите объём тела, расположенного в первом октанте, ограниченного плоскостями $y = 0,\ z = 0,\ z = x,\ z + x = 4$.

$a)\ 16;\ b)\ 2;\ c)\ 8;\ d)\ 4.$

18. Найдите объём тела, ограниченного следующими поверхностями: $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2$.

19. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\ln x}^{\ln 2x} e^y dy$.

20. Вычислите интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} (x^2+y^2)^{\frac{5}{2}} dxdy$.

Тест 3

1. Выберите из списка множество объема ноль:

1) шар;

2) куб;

3) граница параллелепипеда;

4) тетраэдр.

2. Необходимым признаком интегрируемости $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ на брусе $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$ является:

1) ограниченность функции;

2) непрерывность функции;

3) монотонность функции;

4) дифференцируемость функции.

3. Всякая ли дифференцируемая функция является непрерывной в точке? Да или нет?
Ответ обоснуйте.

4. Как записывается уравнение сферы радиуса a с центром в начале координат в сферической системе координат?

1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

2) $r^2 + z^2 = a^2$

3) $r = a^2$

4) $r = a$

5. В цилиндрической системе координат объём параболоида, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 4$ вычисляется по формуле:

1) $\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \rho \, d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dz;$

2) $\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dz;$

3) $\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \rho \, d\rho \int\limits_0^4 dz;$

4) $\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_{-2}^2 \rho \, d\rho \int\limits_0^{\rho^2} dz.$

6. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{x}^{x+2} (x + 2y) dy dx$.

a) 10; b) 8; c) 12; d) 0.

7. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^4 \int\limits_{-1}^2 dy dx$.

a) 8; b) 9; c) 12; d) 10.

8. Вычислить значение интеграла $\iint\limits_S e^{x+y} dx dy$, где область S ограничена линиями $y = 2$, $x = 0$, $y = x$.

1) $1.5e^4 - e^2 - 0.5$;

2) 0;

3) -1;

4) $0.5e^4 - 0.5$.

9. Значение интеграла $\iint\limits_S e^{y^2} dx dy$, где область S - четырёхуголь-

ник с вершинами в точках $A(1;1),\ B(0;2),\ C(6;2),\ D(4;1)$, равно:

1) 12;

2) 48;

3) $1.5e^3$;

4) $1.5(e^4 - e)$.

10. Вычислите повторный интеграл: $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} (x-y)dydx$.

11. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{x^2} \frac{y}{x^3} dy$.

$a)\ 2;\ b)\ 2x;\ c)\ \frac{4}{3};\ d)\ 3y$.

12. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \int\limits_{-\frac{y}{3}}^{\frac{y}{3}} zdzdydx$.

$a)\ 0;\ b)\ -1;\ c)\ x+2;\ d)\ 3$.

13. Чему равен кратный интеграл $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_2^3 (x^3 + 3x^2 + x + 5)dxdy$?

$a)\ 0;\ b)\ 12;\ c)\ 28;\ d)\ -5$.

14. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0,\ x + y + z = 1,\ z = 0$.
$a)\ \frac{1}{6};\ b)\ \frac{1}{2};\ c)\ \frac{1}{3};\ d)\ 6$.

15. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x-y-z)dxdydz$.

16. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e dx \int\limits_x^{2x} \frac{1}{y^2} dy$.

17. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в каком либо порядке $\int\limits_0^8 dx \int\limits_0^{(4-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} f(x,y)dy$.

18. Вычислить площадь области, ограниченной кривой
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, используя кратный интеграл.

19. Вычислить объём параллелепипеда со сторонами 4 и 6 усечённого поверхностью $f(x, y) = x^2 + y^2$.

20. Найти центр тяжести квадратной пластинки 2×2 плотности $\rho(x, y) = xy$.

Тест 4

1. Двойной интеграл проще вычислить в полярных координатах, если:

1) область интегрирования - окружность или её часть;

2) подынтегральная функция - сложная функция;

3) область интегрирования - прямоугольник.

2. Необходимым признаком интегрируемости $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ на брусе $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$ является:

1) ограниченность функции;

2) монотонность функции;

3) дифференцируемость функции;

4) непрерывность функции.

3. Масса куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, имеющего плотность $\rho(x, y, z) = x^6 y z^3$ равна:
$a)$ $\frac{1}{10}$; $b)$ 56; $c)$ $\frac{1}{56}$; $d)$ $\frac{1}{28}$.

4. Меняется ли значение кратного интеграла при изменении порядка интегрирования в повторном интеграле?

1) да;

2) нет;

3) не всегда.

5. Как обозначается общий вид кратного интеграла от $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ по брусу $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$. Напишите случай при n=2, n=3.

6. Достаточным признаком интегрируемости по брусу является:

1) ограниченность функции;

2) монотонность функции;

3) непрерывность функции;

4) дифференцируемость функции.

7. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится $\iiint\limits_D f(x,y)dxdy$, если область D ограничена линиями: $y = 3,\ x = 5,\ y = 2x + 1.$

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 2x,\ y = x.$

9. Найдите площадь области D, ограниченной линиями: $x - y + 3 = 0,\ x - y - 1 = 0,\ x + 3 = 0,\ y - 4 = 0.$

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 - 2x,\ y = x.$

11. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, область D ограничена линиями $y = x^2,\ y = 0,\ x + y - 2 = 0.$

12. Вычислить интеграл:
$\int\limits_1^3 \int\limits_2^5 (5x^2y - 2y^3)dxdy.$

13. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 0,\ x = 1.$

14. Как определить параметр разбиения в схеме построения кратного интеграла по брусу?

15. Вычислите тройной интеграл: $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x + y + z)dxdydz.$

16. Вычислите интеграл $\int\limits_6^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy.$

17. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в каком-либо порядке, а затем вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xydy.$

18. Вычислить объём цилиндра, ограниченного поверхностью $f(x, y) = (1 - x^2)y$, в основании которого лежит окружность $x^2 + y^2 \leqslant 1.$

19. Найти центр тяжести треугольной пластинки плотностью $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ со сторонами $x \in [0; 2],\ y \in [0; x].$

20. Найти массу единичного шара плотностью $p(x, y, z) = xyz.$

Тема 6. Формулы Грина, Остроградского, Стокса

Тест 1

1. Пусть определен интеграл

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

При каких условиях на функции P, Q, R и область S имеет место формула Остроградского-Гаусса?

2. Записать в общем виде формулу Остроградского-Гаусса для поверхностного интеграла 1-го рода.

3. Сопоставить название формулы и соответствующее утверждение.

I. Формула Грина	a. связывает криволинейный интеграл 2-го рода и кратный интеграл
II. Формула Стокса	b. связывает криволинейный интеграл 2-го рода и поверхностный интеграл 1-го рода

I	II

4. На что влияет непрерывность функции в теоремах? Почему наличие точек разрыва приводит к невозможности применить формулы?

5. Можно ли ослабить условия теорем и потребовать только существование частных производных (без их непрерывности)? Будут ли справедливы формулы в таком случае?

6. В каких случаях интеграл по незамкнутому контуру может быть вычислен с помощью формулы Стокса?

7. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

взятый по куску винтовой линии

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

от точки $A\ (a, 0, 0)$ до точки $B\ (a, 0, h)$.

8. Формулу Грина можно доказать как следствие формулы Остроградского-Гаусса. Провести доказательство, применяя теорему[1] о связи криволинейных интегралов.

9. Пусть определен интеграл

$$\oint\limits_C \frac{y}{x}dx + (y + \ln x)dy,$$

где C – простой замкнутый контур, ограничивающий область S. Найти какую-нибудь область так, чтобы значение интеграла было равно нулю. Для этого применить формулу Грина.

10. Привести пример криволинейного интеграла 2-го рода, который нельзя преобразовать с помощью формулы Стокса.

11. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать интеграл, полагая, что гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V:

$$\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy.$$

12. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

где C – эллипс $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, (a > 0, h > 0)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

13. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл

$$\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

где S – внешняя сторона куба $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$.

14. Пусть вектор n на плоскости Oxy характеризуется направляющими косинусами $(\cos\alpha, \cos\beta)$ и функция $u = u(x, y)$ дифференцируема на некотором множестве. По какой формуле вычисляется производная по направлению n?

15. Сопоставить название формулы и ее запись в векторной форме.

I. Остроградского-Гаусса	a. $\oint\limits_S a_n\ dS = \iiint\limits_V \text{div } \mathbf{a}\ dxdydz$
II. Формула Стокса	b. $\oint\limits_C\ \mathbf{a}\ d\mathbf{r} = \iint\limits_S (\text{rot } \mathbf{a})_n dS$

где $a_n, (\text{rot } \mathbf{a})_n$ - нормальные проекции.

I	II

16. Пусть s – гладкая кривая, параметризованная уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), a \le t \le b,$$

τ – касательный вектор, n – внешняя нормаль к s.
С помощью доказательства теоремы о связи криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода установите связь между $\cos(\widehat{n, x})$ и $\frac{dy}{ds}$, где ds – элемент длины дуги кривой, x – направляющий вектор оси Ox.

17. Найти значение интеграла

$$I = \oint\limits_C [x\cos(\widehat{\mathbf{n}, x}) + y\cos(\widehat{\mathbf{n}, y})]ds,$$

где C – простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к ней, x, y – направляющие векторы

Ox и Oy соответственно.

18. Доказать, что u есть гармоническая функция[2] тогда и только тогда, если

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

где C – произвольный замкнутый контур и $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к этому контуру.

19. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x+\alpha, y)dx + Q(x+\alpha, y)dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянной α. Достаточно показать частный случай P и Q.

20. Из общей формулы Стокса[5], определяемой в теории внешних дифференциальных форм, вывести формулу Стокса.

Тест 2

1. Пусть определен интеграл

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Сформулируйте условия, которым должны удовлетворять подынтегральные функции и поверхность S, чтобы была справедлива формула Остроградского-Гаусса?

2. Записать в общем виде формулу Остроградского-Гаусса для поверхностного интеграла 2-го рода.

3. Сопоставить название формулы и соответствующее утверждение.

I. Интеграл по контуру, каждое замкнутое подмножество которого содержит не больше двух точек самопересечений исходного множества, можно представить в виде суммы интегралов по простым контурам, так как	a. значение интеграла, заданного в точке, равно нулю
II. Интеграл по неодносвязной области представим в виде суммы интегралов по соответствующим односвязным областям, так как	b. сумма одинаковых криволинейных интегралов 2-го рода, имеющих противоположные направления обхода, равна нулю.

I	II

4. Почему формулы не имеют смысла, если хотя бы одна подынтегральная функция имеет разрыв в некоторой точке области?

5. Можно ли применить формулы, если подынтегральные функции являются дифференцируемыми, но не непрерывно дифференцируемыми?

6. Как можно преобразовать интеграл по незамкнутому контуру, чтобы была применима формула Стокса? В каких случаях это возможно?

7. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

взятый по куску винтовой линии

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{\pi}\varphi$$

от точки A $(a, 0, 0)$ до точки B $(-a, 0, h)$.

8. Доказать, что с помощью формулы Остроградского-Гаусса можно вычислить объем тела G с границей $\partial G = S$ по формуле

$$\mu(G) = \frac{1}{n} \int\limits_S \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cos \omega_i \right) dS.$$

9. Пусть определен интеграл

$$\oint\limits_C xydx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y} \right) dy,$$

где C – простой замкнутый контур, ограничивающий область S. Найти какую-нибудь область так, чтобы значение интеграла было равно нулю. Для этого применить формулу Грина.

10. Приведите пример криволинейного интеграла 1-го рода, который нельзя преобразовать с помощью формулы Стокса.

11. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать интеграл, полагая, что гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S:

$$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS.$$

12. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz,$$

где C есть кривая $x^2+y^2+z^2 = 2Rx, x^2+y^2 = 2rx$ $(0 < r < R, z > 0)$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ наименьшая область остается слева.

13. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл

$$\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

где S – внешняя сторона сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

14. Пусть вектор **n** на плоскости Oxz характеризуется направляющими косинусами $(\cos\alpha, \cos\gamma)$ и функция $u=u(x,z)$ дифференцируема на некотором множестве. По какой формуле вычисляется производная по направлению **n**?

15. Сопоставить название формулы и ее запись в векторной форме.

I. Остроградского-Гаусса	a. $\oint\limits_S a_n\ dS=\iiint\limits_V \mathrm{div}\ \mathbf{a}\ dxdydz$
II. Формула Стокса	b. $\oint\limits_C\ \mathbf{a}\ d\mathbf{r}=\iint\limits_S (\mathrm{rot}\ \mathbf{a})_n dS$

где $a_n, (\mathrm{rot}\ \mathbf{a})_n$ - нормальные проекции.

I	II

16. Пусть s – гладкая кривая, параметризованная уравнениями

$$x=x(t), y=y(t), a\le t\le b,$$

τ – касательный вектор, n – внешняя нормаль к s.
С помощью доказательства теоремы о связи криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода установите связь между $\cos(\widehat{n,y})$ и $\frac{dx}{ds}$, где ds – элемент длины дуги кривой, y – направляющий вектор оси Oy.

17. Доказать, что

$$\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint\limits_S u\Delta u dxdy+\oint\limits_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S и $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к этому контуру.

18. Доказать, что функция, гармоническая[2] внутри конечной области S и на ее границе C, однозначно определяется своими значениями на контуре C. Воспользоваться результатами номера 17.

19. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x, y+\beta)dx + Q(x, y+\beta)dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянной β. Достаточно показать частный случай P и Q.

20. Из общей формулы Стокса[5], определяемой в теории внешних дифференциальных форм, вывести формулу Грина.

Тест 3

1. Пусть определен интеграл

$$\oint\limits_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz.$$

При каких условиях на функции $P,\ Q,\ R$ и контур C имеет место формула Стокса?

2. Записать в общем виде формулу Стокса для криволинейного интеграла 1-го рода.

3. Сопоставить название формулы и соответствующее утверждение.

I. Остроградского-Гаусса	a. не зависит от выбора направления обхода области
II. Формула Стокса	b. при отрицательном направлении обхода области в формуле появляется знак минус

I	II

4. Если хотя бы одна подынтегральная функция имеет разрыв в некоторой точке области, то формулы не имеют смысла. Какое условие нарушается при отсутствии непрерывности?

5. Будут ли выполняться формулы, если подынтегральные функции не являются непрерывно дифференцируемыми, однако имеют частные производные?

6. При каких дополнительных условиях на незамкнутый контур, интеграл по нему мог быть вычислен с помощью формулы Стокса?

7. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

взятый по куску винтовой линии

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

от точки A $(a, 0, h)$ до точки B $(a, 0, 2h)$.

8. Доказать, что формула Грина справедлива для конечной области S, ограниченной несколькими простыми контурами, если под границей C последней понимать сумму всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область S остается слева.

9. Пусть определен интеграл

$$\oint\limits_C (y - \frac{1}{x})dx + \frac{dy}{y},$$

где C – простой замкнутый контур, ограничивающий область S. Выяснить, можно ли найти S так, чтобы значение интеграла было равно нулю. Для этого применить формулу Грина.

10. Приведите пример поверхностного интеграла 2-го рода, который нельзя преобразовать с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

11. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать интеграл, полагая, что гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V:

$$\iint\limits_S yzdydz + zxdzdx + xydxdy.$$

12. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

где C – сечение поверхности куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}\, a$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

13. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл

$$\iint\limits_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)dS,$$

где S – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq h)$ и $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

14. Пусть вектор $\mathbf{n}$ на плоскости Oyz характеризуется направляющими косинусами $(\cos\beta, \cos\gamma)$ и функция $u = u(y, z)$ дифференцируема на некотором множестве. По какой формуле вычисляется производная по направлению $\mathbf{n}$?

15. Сопоставить название формулы и соответствующее утверждение.

I. Остроградского-Гаусса	a. позволяет вычислять циркуляцию векторного поля по замкнутому контуру
II. Формула Стокса	b. позволяет вычислять поток векторного поля по замкнутому контуру

I	II

16. Пусть s – гладкая кривая, параметризованная уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b,$$

τ – касательный вектор, n – внешняя нормаль к s.
С помощью доказательства теоремы о связи криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода установите связь между $\cos(\widehat{n, x})$ и $\frac{dy}{ds}$, где ds – элемент длины дуги кривой, x – направляющий вектор оси Ox.

17. Доказать вторую формулу Грина на плоскости

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \oint\limits_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S и $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к C.

18. Доказать формулу Римана

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \oint\limits_C Pdx + Qdy,$$

где

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a\frac{\partial v}{\partial x} - b\frac{\partial v}{\partial y} + cv,$$

(a, b, c – постоянные), P и Q – некоторые определенные функции и контур C ограничивает конечную область S.

19. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x + \alpha, y)dx - Q(x + \alpha, y)dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянной α.
Достаточно показать частный случай P и Q.

20. Из общей формулы Стокса[5], определяемой в теории внешних дифференциальных форм, вывести формулу Остроградского-Гаусса.

Тест 4

1. Пусть определен интеграл

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Сформулируйте условия, которым должны удовлетворять подынтегральные функции и контур C, чтобы была справедлива формула Стокса.

2. Записать в общем виде формулу Стокса для криволинейного интеграла 2-го рода.

3. Сопоставить название формулы и соответствующее утверждение.

I. Грина	a. формулируется для простого замкнутого кусочно-гладкого контура, ограничивающего конечную односвязную область
II. Стокса	b. формулируется для простого замкнутого кусочно-гладкого контура, ограничивающего конечную кусочно-гладкую двустороннюю поверхность

I	II

4. Как объяснить то, что формулу нельзя применить, если хотя бы одна подынтегральная функция не является непрерывной в рассматриваемой области?

5. Справедлива ли формула, если подынтегральные функции являются дифференцируемыми, но их частные производные претерпевают разрыв первого или второго рода?

6. Каким должен быть незамкнутый контур, чтобы для соответствующего интеграла имела место формула Стокса?

7. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

взятый по куску винтовой линии

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{\pi}\varphi$$

от точки $A\ (-a, 0, \frac{h}{2})$ до точки $B\ (a, 0, h)$.

8. Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D = 0$, равен

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S – площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H – его высота.

9. Пусть определен интеграл

$$\oint\limits_{C} \arcsin x dy + \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}dx,$$

где C – простой замкнутый контур, ограничивающий область S. Найти S так, чтобы значение интеграла было равно нулю. Для этого применить формулу Грина.

10. Приведите пример поверхностного интеграла 1-го рода, который нельзя преобразовать с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

11. Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать интеграл, полагая, что гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S:

$$\iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS.$$

12. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C y^2z^2dx + z^2x^2dy + x^2y^2dz,$$

где C – замкнутая кривая $x = a\cos t, y = a\cos 2t, z = a\cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

13. С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл

$$\iint\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy,$$

где S – внешняя сторона поверхности

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

14. Пусть вектор **n** на плоскости $x + y = 1$ характеризуется направляющими косинусами $(\cos\omega_1, \cos\omega_2)$ и функция $u = u(x, y)$ дифференцируема на некотором множестве. По какой формуле вычисляется производная по направлению **n**?

15. Сопоставить название формулы и соответствующее утверждение.

I. Остроградского-Гаусса	a. позволяет вычислять циркуляцию векторного поля по замкнутому контуру
II. Формула Стокса	b. позволяет вычислять поток векторного поля по замкнутому контуру

I	II

16. Пусть s – гладкая кривая, параметризованная уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b,$$

τ – касательный вектор, n – внешняя нормаль к s.
С помощью доказательства теоремы о связи криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода установите связь между $\cos(\widehat{n, y})$ и $\frac{dx}{ds}$, где ds – элемент длины дуги кривой, y – направляющий вектор оси Oy.

17. Доказать, что если $u = u(x, y)$ – гармоническая функция[2] в замкнутой конечной области S, то

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

где C – граница области S, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к контуру C, (x, y) – внутренняя точка области S и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ – расстояние между точкой (x, y) и переменной точкой (ξ, η) контура C. Для этого вырезать точку (x, y) из области S вместе с ее бесконечно малой круговой окрестностью и применить вторую формулу Грина по оставшейся части области S.

18. Доказать теорему о среднем для гармонической функции $u(M) = u(x, y)$:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_C u(\xi, \eta) ds,$$

где C – окружность радиуса R с центром в точке M.

19. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x, y + \beta) dx - Q(x, y + \beta) dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянной β.

20. Из общей формулы Стокса[5], определяемой в теории внешних дифференциальных форм, вывести формулу Грина.

Тест 5

1. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы Остроградского-Гаусса?

а) $\int\limits_G (\sum_{i=1}^n P_i x_i(\overline{x}))d\overline{x} = \int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i)dS$

б) $\mu(G) = \frac{1}{n} \int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

в) $\iint\limits_G (Qx(x;y) - py(x;y))dxdy = \oint\limits_{\partial G} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$

г) $\iint\limits_S (\overline{\nu}, rot\overline{R})dS = \int\limits_l (\overline{\tau}, \overline{R})dl$

2. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса?

а) $\mu(G) = \frac{1}{n} \int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i)dS$

б) $\mu(G) = \frac{1}{n} \int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

в) $\mu(G) = \frac{1}{n} \int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_{n-i})dS$

г) $\mu(G) = \frac{2}{n} \int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

3. Формальной записью какой формулы является равенство $\iint\limits_S (\overline{\nu}, rot\overline{R})dS = \int\limits_l (\overline{\tau}, \overline{R})dl$?

а) формула Стокса

б) формула Остроградского-Гаусса

в) формула Грина

г) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

4. Формальной записью какой формулы является равенство $\iint\limits_G (Qx(x;y) - py(x;y))dxdy = \oint\limits_{\partial G} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$?

а) формула Стокса

б) формула Остроградского-Гаусса

в) формула Грина

г) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

5. Какие из следующих областей не являются односвязными в $\mathbb{R}^2$?

а) круг
б) пара непересекающихся кругов
в) прямоугольный треугольник
г) правильный шестиугольник

6. Какие типы интегралов связывает формула Остроградского-Гаусса?

7. Дайте определение потока векторного поля через поверхность S.

8. Сформулируйте теорему о вычислении ротора векторного поля.

9. Определена ли формула Стокса для кусочно-гладкой поверхности S? Ответ поясните.

10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

11. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\, dx + \sin 2xy\, dy)$.

12. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C (z^2 + y^2)\, dx + \sin x \cos z\, dy + xy\, dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

13. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C (2z + 2y)\, dx + xz\, dy - (x - y)^2\, dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

14. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал $\iint\limits_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dz\, dx + z^3\, dx\, dy$.

15. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверх-

ностный интерал $\iint\limits_S (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$.

16. Используя формулу Стокса, вычислить интеграл $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C - круг, взятый из пересечения $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, который пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

17. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл $I = \oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,(xy + \ln x + \sqrt{x^2+y^2})\,dy$, где контур C ограничивает конечную область S.

18. Доказать, что объём тела, ограниченного поверхностью S, равен $V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$, где $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - направляющие косинусы внешней нормали в поверхности S.

19. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\bar{a} = (3x - y)\,\bar{i} + (6z + 5x)\,\bar{k}$.

20. С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$, где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Тест 6

1. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса?

а) $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

б) $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i)dS$

в) $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_{n-i})dS$

г) $\mu(G) = \frac{2}{n}\int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

2. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы Стокса?

а) $\mu(G) = \frac{1}{n} \int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i) dS$

б) $\int\limits_G (\sum_{i=1}^n P_i x_i(\overline{x})) d\overline{x} = \int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i) dS$

в) $\iint\limits_S (\overline{\nu}, rot\overline{R}) dS = \int\limits_l (\overline{\tau}, \overline{R}) dl$

г) $\iint\limits_G (Qx(x;y) - py(x;y)) dxdy = \oint\limits_{\partial G} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$

3. Формальной записью какой формулы является равенство $\int\limits_G (\sum_{i=1}^n P_i x_i(\overline{x})) d\overline{x} = \int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i) dS$?

а) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

б) формула Остроградского-Гаусса

в) формула Грина

г) формула Стокса

4. Формальной записью какой формулы является равенство

$\iint\limits_G (Qx(x;y) - py(x;y)) dxdy = \oint\limits_{\partial G} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$?

а) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

б) формула Остроградского-Гаусса

в) формула Грина

г) формула Стокса

5. Какие из следующих областей не являются односвязными в $\mathbb{R}^2$?

а) кольцо

б) круг

в) половина круга

г) квадрат

6. Какие интегралы связывает формула Грина?

7. Дайте определение дивергенции векторного поля в точке.

8. Сформулируйте теорему о вычислении дивергенции векторного поля.

9. Определена ли формула Стокса для параметрически заданной поверхности S? Ответ поясните.

10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, где C – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

11. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C e^x[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy]$, где C – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0<x<\pi, 0<y<\sin x$.

12. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C (2z+2y)\,dx+xz\,dy-(x-y)^2\,dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

13. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C (3y-2z)\,dx+e^{xz}\,dy+(x-y)^2\,dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

14. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$.

15. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал:

$$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS.$$

16. Используя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz,$$

где C - кривая $x^2+y^2+z^2=2Rx,\ x^2+y^2=2rx\ (0<r<R,\ z>0)$, которая пробегается так, что ограниченная ей наименьшая область на внешней стороне сферы остаётся слева.

17. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x,y)$, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AmB} F(x,y)(y\,dx+x\,dy)$ не зависел от вида пути интегрирования?

18. С помощью формулы Остроградского, вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где S - внешняя сторона границы куба $0\le x\le a,\quad 0\le y\le a,\quad 0\le z\le a.$

19. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\bar a=(7x+z)\,\bar i+(-4y-8z)\,\bar j+(3z-4x)\,\bar k.$

20. Доказать, что объём тела, ограниченного поверхностью S, равен $V=\frac{1}{3}\iint\limits_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$, где $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ - направляющие косинусы внешней нормали в поверхности S.

Тест 7

1. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы Грина?

а) $\iint\limits_S(\overline{\nu},rot\overline{R})dS=\int\limits_l(\overline{\tau},\overline{R})dl$

б) $\mu(G)=\frac{1}{n}\int\limits_S(\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

в) $\iint\limits_G(Qx(x;y)-py(x;y))dxdy=\oint\limits_{\partial G}P(x;y)dx+Q(x;y)dy$

г) $\int\limits_G(\sum_{i=1}^n P_i x_i(\overline{x}))d\overline{x}=\int\limits_S(\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\,cos\omega_i)dS$

2. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы Стокса?

а) $\iint\limits_S(\overline{\nu},rot\overline{R})dS=\int\limits_l(\overline{\tau},\overline{R})dl$

б) $\mu(G)=\frac{1}{n}\int\limits_S(\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$

в) $\iint\limits_G(Qx(x;y)-py(x;y))dxdy=\oint\limits_{\partial G}P(x;y)dx+Q(x;y)dy$

г) $\int\limits_G (\sum_{i=1}^n P_i x_i(\overline{x}))d\overline{x} = \int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i)dS$

3. Формальной записью какой формулы является равенство $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i)dS$?

а) формула Грина

б) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

в) формула Остроградского-Гаусса

г) формула Стокса

4. Формальной записью какой формулы является равенство $\int\limits_G (\sum_{i=1}^n P_i x_i(\overline{x}))d\overline{x} = \int\limits_S (\sum_{i=1}^n P_i(\overline{x})\, cos\omega_i)dS$?

а) формула Грина

б) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

в) формула Остроградского-Гаусса

г) формула Стокса

5. Какие из следующих областей не являются односвязными в $\mathbb{R}^2$?

а) круг

б) пара непересекающихся кругов

в) прямоугольный треугольник

г) правильный шестиугольник

6. Что определяют $(\cos\omega_1, \cos\omega_2, \ldots, \cos\omega_n)$ в формуле Остроградского-Гаусса?

7. Дайте определение ротора векторного поля.

8. Сформулируйте теорему о вычислении дивергенции векторного поля.

9. Определена ли формула Стокса для кусочно-непрерывной поверхности S? Ответ поясните.

10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$.

11. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, где C – эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

.

12. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C z\,dx + x^2\cos z\,dy + e^x y^2\,dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

13. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C (z^2 + y^2)\,dx + \sin x\cos z\,dy + xy\,dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

14. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$.

15. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал $\iint\limits_S (\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)dS$.

16. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл: $\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где C – эллипс $x^2+y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$, $(a > h, h > 0)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

17. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $I = \oint\limits_K (x+y)^2\,dx - (x^2 - y^2)\,dy$, где K - пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$.

18. С помощью формулы Остроградского, преобразовать интеграл $\iint\limits_S ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma)\,dS$.

19. Найти дивергенцию и ротор векторного поля
$\bar{a} = (-7x - z)\,\bar{i} + (-8y - 7x)\,\bar{j} + (x + 2z)\,\bar{k}$.

20. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AmB} F(x, y)(y\,dx + x\,dy)$ не зависел от вида пути интегрирования?

Тест 8

1. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы Стокса?

а) $\iint\limits_{G}(Qx(x;y) - py(x;y))dxdy = \oint\limits_{\partial G} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$

б) $\iint\limits_{S}(\overline{\nu}, rot\overline{R})dS = \int\limits_{l}(\overline{\tau}, \overline{R})dl$

в) $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_{S}(\sum_{i=1}^{n} x_i cos\omega_i)dS$

г) $\int\limits_{G}(\sum_{i=1}^{n} P_i x_i(\overline{x}))d\overline{x} = \int\limits_{S}(\sum_{i=1}^{n} P_i(\overline{x})\,cos\omega_i)dS$

2. Какое из следующих равенств является формальной записью формулы Грина?

а) $\iint\limits_{S}(\overline{\nu}, rot\overline{R})dS = \int\limits_{l}(\overline{\tau}, \overline{R})dl$

б) $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_{S}(\sum_{i=1}^{n} x_i cos\omega_i)dS$

в) $\iint\limits_{G}(Qx(x;y) - py(x;y))dxdy = \oint\limits_{\partial G} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$

г) $\int\limits_{G}(\sum_{i=1}^{n} P_i x_i(\overline{x}))d\overline{x} = \int\limits_{S}(\sum_{i=1}^{n} P_i(\overline{x})\,cos\omega_i)dS$

3. Формальной записью какой формулы является равенство $\iint\limits_{S}(\overline{\nu}, rot\overline{R})dS = \int\limits_{l}(\overline{\tau}, \overline{R})dl$?

а) формула Стокса

б) формула Остроградского-Гаусса

в) формула Грина

г) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

4. Формальной записью какой формулы является равенство $\mu(G) = \frac{1}{n}\int\limits_S (\sum_{i=1}^n x_i cos\omega_i) dS$?

а) формула Стокса

б) формула вычисления объема области G в условиях применения формулы Остроградского-Гаусса

в) формула Остроградского-Гаусса

г) формула Грина

5. Какие из следующих областей не являются односвязными в $\mathbb{R}^2$?

а) кольцо

б) круг

в) половина круга

г) квадрат

6. Какие понятия векторного анализа связывает формула Стокса?

7. Дайте определение поверхностно-односвязной области.

8. Сформулируйте теорему о вычислении ротора векторного поля.

9. Определена ли формула Стокса для непрерывной поверхности S? Ответ поясните.

10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C xy^2 dy - x^2 y dx$, где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

11. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_C e^x [(1 - \cos y)\, dx - (y - \sin y)\, dy]$, где C – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$.

12. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C z\, dx + x^2 \cos z\, dy + e^x y^2\, dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый

контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

13. С помощью формулы Стокса, преобразовать интеграл $\oint\limits_C (3y - 2z)\,dx + e^{xz}\,dy + (x-y)^2\,dz$ к поверхностному интегралу, где C - замкнутый контур конечной кусочно-гладкой поверхности S.

14. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал

$$\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS.$$

15. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интерал $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$.

16. Применяя формулу Грина, найдите, на сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы $I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$ и $I_1 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, где $A(1,1)$, $B(2,6)$, AmB - прямая, AnB - парабола, проходящая через $(0,0)$.

17. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл:
$\oint\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, где C – сечение поверхности куба $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a, \quad 0 \le z \le a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси oX.

18. С помощью формулы Остроградского вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy$, где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

19. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\bar{a} = (3y+4z)\,\bar{i} + (-2y+x)\,\bar{j} + (2z+5y)\,\bar{k}$.

20. С помощью формулы Остроградского, преобразовать интеграл $\iint\limits_S ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma)\,dS$.

Примечания

1 *По теореме о связи криволинейных интегралов,*

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_{\breve{AB}} (f(x,y)\cos\alpha + g(x,y)\sin\alpha)dl,$$

где α *– угол, образованный положительным направлением оси* Ox *и касательной к кривой* l*, направленной в сторону возрастания дуг при движении по кривой.*

2 *Функция* $u = u(x,y)$*, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области, называется гармонической, если*

$$\Delta u \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3 *Вторая формула Грина на плоскости имеет вид*

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \oint\limits_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

где гладкий контур C *ограничивает конечную область* S *и* $\frac{\partial}{\partial n}$ *– производная по направлению внешней нормали к* C*.*

4 *Пусть* $X = \mathbb{R}^n$*. Выражение*

$$\omega \stackrel{def}{=} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_p \le n} a_{j_1 \ldots j_p}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$$

называется внешней дифференциальной формой p-го порядка. В частности,

$$\omega_1 = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n$$

– дифференциальная форма 1-го порядка,

$$d\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_p \le n} (da_{j_1 \ldots j_p}(x)) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$$

– дифференциальная форма $(p+1)$*-го порядка.*

5 *Теорема Стокса.*
Пусть $\Omega \subset X$ *– некоторая область,* Γ *– граница области,* $\dim\Gamma = p$*,* $\dim\Omega = p+1$*,* ω *– дифференциальная форма* p*-го порядка на* Γ*. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Omega} d\omega.$$

(общая формула Стокса)

Список литературы

[1] Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Б. П. Демидович. - Москва: Издательство «Астрель», Издательство «АСТ», 2002. - 558 с. - ISBN 5-17-010062-0, 5-271-03601-4.

[2] Кудрявцев Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 472 с. - ISBN 5-9221-0308-3.

[3] Берман, Г. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Г. Н. Берман. - Санкт-Петербург: Профессия, 2001. - 432 с. - ISBN 5-93913-009-7

[4] Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебное пособие / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. - Москва: Дрофа, 2001. - 725 с. - ISBN 5-7107-4294-5.

Учебное издание

Алякин Владимир Алексеевич
Узбеков Роман Фатихович

ТЕСТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Практикум

Набор и верстка Токарева Захара

Редакционно-издательская обработка А.С. Никитиной

Подписано в печать 03.05.2023. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 8,0.
Тираж 27 экз. Заказ . Арт. – 2 (ПР/Р1)2023.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.