

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*Д. И. ЗАВЕРШИНСКИЙ, Д. С. РЯЩИКОВ*

## ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ. ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебно-методического пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика, 03.03.02 Физика, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2023

УДК 534(075)+533.9(075)  
ББК В236.35я7+В333я7  
3-134

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. А. Ю. П р и в а л о в,  
канд. физ.-мат. наук, снс. С. Ю. П и ч у г и н

**3-134** *Завершинский, Дмитрий Игоревич*  
**Теория волновых явлений. Волны в плазме:** учебно-методическое пособие / *Д. И. Завершинский, Д. С. Рячиков.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 148 с.

**ISBN 978-5-7883-1946-9**

В данном учебно-методическом пособии представлены основные разделы теории волн. Изложены базовые теоретические модели и разобран широкий спектр методик решения задач в данной области. В качестве примеров практического использования описанных методов и моделей приводятся задачи из различных разделов физики, что дает возможность научиться решать практически важные задачи. Отдельное внимание уделяется проблемам, связанным с волнами в солнечной и космической плазме.

Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 03.03.02 Физика и 03.03.01 Прикладные математика и физика, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Подготовлено на кафедре физики Самарского университета.

УДК 534(075)+533.9(075)  
ББК В236.35я7+В333я7

ISBN 978-5-7883-1946-9

© Самарский университет, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
ГЛАВА 1 ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ .....	7
1.1 Колебания в цепочках .....	7
1.2 Предельный переход к волновому процессу .....	10
1.3 Классификация волновых процессов .....	11
1.4 Примеры волновых процессов .....	13
1.4.1 Продольные волны в стержнях .....	13
1.4.2 Электромагнитные волны .....	16
1.4.3 Акустические волны.....	17
1.4.4 МГД-волны в плазме с неадиабатическим нагревом и охлаждением .....	19
1.4.5 Гравитационно-капиллярные волны.....	28
ГЛАВА 2 БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ.....	30
2.1 Волновое уравнение .....	30
2.2 Неограниченные среды. Задача Коши. Параметры волны ...	30
2.2.1 Волновое уравнение. Гармоническое начальное возмущение .....	33
2.2.2 Уравнение Клейна-Гордона. Группы волн. Дисперсия .	35
2.2.3 Энергия и импульс волн .....	40
2.3 Конечный отрезок. Одномерный случай. Стоячие волны....	42
2.4 Многомерные задачи. Волноводы и резонаторы.....	51
2.5 Объемные и поверхностные волны в магнитном плазменном слое.....	64

ГЛАВА 3 ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ.....	68
3.1 Распространение монохроматической электромагнитной волны в плазме.....	68
3.2 Приближенные методы анализа волновых процессов.....	71
3.2.1 Метод последовательных приближений .....	71
3.2.2 Асимптотический метод .....	76
3.3 Периодически неоднородные среды.....	85
ГЛАВА 4 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. ТИПЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН.....	88
4.1 Простые волны. Уравнение Римана. Уравнение Бюргерса ..	88
4.1.1 Уравнение Римана .....	88
4.1.2 Слабые ударные волны. Уравнение Бюргерса.....	97
4.2 Автоволны.....	103
4.2.1 Волна эпидемии. Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова. Фазовая автоволна переключения .....	103
4.2.2 Триггерная автоволна переключения .....	108
4.3 Солитоны.....	111
4.4 Автомодельные решения нелинейного эволюционного МГД уравнения в плазме с неадиабатическим нагревом и охлаждением .....	122
ГЛАВА 5 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН.....	129
5.1 Трехволновое взаимодействие волн .....	129
ГЛАВА 6 АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ.....	136
6.1 Бегущие и автомодельные волны.....	136
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	139

## ВВЕДЕНИЕ

Волновые явления представлены в современном мире практически повсеместно. Начиная с того, что сама жизнь на Земле существует благодаря поглощению оптического излучения, идущего от Солнца. Развитие общества и взаимодействие между людьми обязано передаче информации посредством звуковых волн, а современная цифровизация не была бы возможна без развития теории радиоволн и обработки электромагнитных сигналов. По этой причине вполне очевидным является тот факт, что теория волн с годами выделилась в отдельную дисциплину. На данный момент исследования в этой области ориентированы на сбор данных наблюдений, модификацию или создание новых математических моделей и формулировку общих принципов поведения волн различной природы.

Для того, чтобы сформировать у читателя базовое представление об актуальных математических моделях и методах их анализа, в рамках данного учебного пособия отдельное внимание уделяется развернутой демонстрации применения, описанных подходов. Верификация полученных аналитических результатов проводится путем численного решения задач с помощью расчетов в среде Wolfram Mathematica.

В связи с тем, что основной областью научных интересов авторов является физика космической и солнечной плазмы, отдельное внимание уделяется вопросам, касающимся магнитогазодинамических (МГД) волн. При этом важно отметить, что такие среды, как межзвездный газ и солнечная корона, являются термически активными. Это значит, что волны могут вступить в обратную связь со средой, что может выразиться в усилении или дополни-

тельном затухании волн. По этой причине авторы также рассматривают вопросы теории устойчивости МГД волн в плазме и описывают их поведение как в линейном режиме, так и на нелинейной стадии. Данное учебно-методическое пособие вдохновлено пособием И.П. Завершинского и Е.Я. Когана «Теория колебаний и волн». В рамках данного пособия авторы постарались продемонстрировать наиболее значимые и хорошо изученные модели теории волн, а также продемонстрировать, как данные подходы могут быть применены на практике на примере актуальных научных задач МГД – сейсмологии.

Книга поделена на следующие разделы. В первой главе оговорены базовые модели и понятия теории волн, описан переход от дискретных сред к непрерывным, введена классификация волновых процессов и приведены примеры из различных областей физики. Отдельное внимание уделено вопросам теории устойчивости волн в термически активной плазме. Во второй главе оговариваются базовые методы описания бегущих и стоячих волн в однородных средах. Так, например, авторы демонстрируют влияние граничных условий на динамику волн в корональной петле, моделируемой плоским магнитным слоем. В третьей главе оговорено влияние неоднородности на динамику волн на примере сред со слабой или периодической неоднородностью. В четвертой главе кратко описаны базовые подходы теории нелинейных волн. В качестве основного примера разобран процесс формирования слабых ударных волн в термически активной космической плазме. В пятой главе оговорены различные процессы нелинейного взаимодействия волн. В заключительной главе авторы рассматривают автомодельные волны.

Список литературы, дополняющий материалы, представленные в рамках данного учебно-методического пособия, состоит из основной [1-20], дополнительной [21-87] и справочной литературы [88-117].

# ГЛАВА 1 ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Определений волны существует великое множество. Здесь будет использоваться следующее определение, связывающее волновые процессы с колебательными.

**Волновой процесс** – это колебательный процесс в системе, состоящей из большого числа элементов [1-3].

В теории колебаний обычно имеют дело с конечным числом элементов системы, включающих один или несколько осцилляторов. Естественным является вопрос: а как будет выглядеть модель, характеризующая колебательный процесс в дискретной среде с конечным, но большим количеством элементов  $N \gg 1$  и в непрерывной среде с бесконечным количеством элементов  $N \rightarrow \infty$ ?

## 1.1 Колебания в цепочках

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим несколько примеров из различных разделов физики, где мы опишем колебательный процесс в дискретных средах с конечным, но большим количеством элементов  $N \gg 1$  (цепочках), а затем совершим предельный переход  $N \rightarrow \infty$ .

### *Пример 1. Маятники, связанные пружинами.*

Рассмотрим цепочку шариков массой  $m$ , связанных пружинами жесткостью  $k$  (см. рисунок 1), пренебрегая трением шариков о подложку [2]. Тогда для  $n$ -го шарика с координатой  $n_a + \Xi_n$  из 2-го закона Ньютона в пределе упругих деформаций пружин, описывающихся законом Гука, получаем:

$$m \frac{d^2 \Xi_n}{dt^2} = -k(\Xi_n - \Xi_{n+1}) - k(\Xi_{n-1} - \Xi_n) = k(\Xi_{n+1} - 2\Xi_n + \Xi_{n-1}). \quad (1.1.1)$$

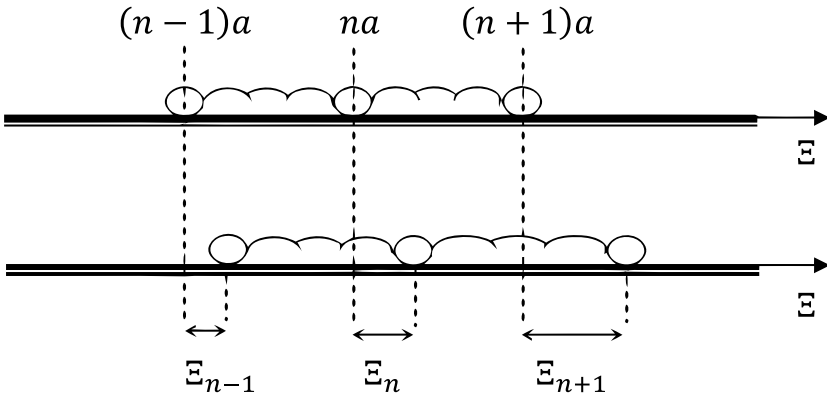


Рисунок 1. Модель системы маятников связанных пружинами

Частное решение уравнения (1.1.1) будем искать в виде  $\Xi_n = C \exp(i\omega t - iqn a)$ . Подставив это соотношение в уравнение (1.1.1), получим, сокращая на константу  $C$ :

$$-m\omega^2 e^{i\omega t - iqn a} = k \left( e^{i\omega t - iq(n+1)a} - 2e^{i\omega t - iqn a} + e^{i\omega t - iq(n-1)a} \right). \quad (1.1.2)$$

Тогда окончательно имеем соотношение, связывающее частоту колебаний шарика с параметрами среды – расстоянием между шариками  $a$  и количеством  $\Lambda$  элементов среды, вовлеченных в процесс связанных колебаний  $\Lambda \sim q^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k}{m} (2 - (\exp(iqa) + \exp(-iqa))) = \\ &= 2 \frac{k}{m} \left( 1 - \frac{\exp(iqa) + \exp(-iqa)}{2} \right) = \\ &= 2 \frac{k}{m} (1 - \cos(qa)) = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{qa}{2}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

В пределе отсутствия связей  $qa \rightarrow 0 \Leftrightarrow a/\Lambda \rightarrow 0$  отсюда получается собственная частота колебаний шарика на пружине.



**Пример 2. Цепочки связанных RLC – контуров. Емкостная связь.**

Рассмотрим линию, состоящую из большого числа связанных через конденсаторы RLC – контуров [2, 65] (см. рисунок 2). Применяя к  $n$ -му контуру второе правило Кирхгофа и первые правила к  $(n - 1)$ -му и  $n$ -му узлам, получим:

$$\begin{aligned} I_n R + L \frac{dI_n}{dt} - \frac{q_n}{C} + \frac{q_{n-1}}{C} &= 0, \\ I_{n-1} &= \frac{dq_{n-1}}{dt} + I_n, \\ I_n &= \frac{dq_n}{dt} + I_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

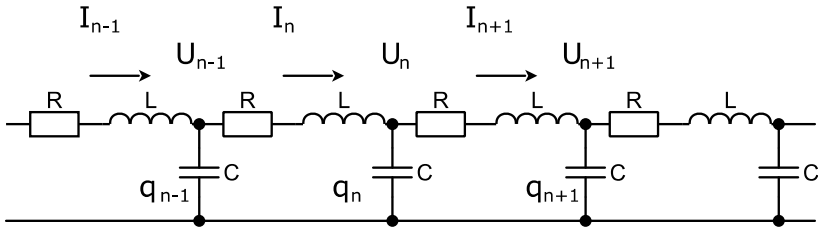


Рисунок 2. Модель цепочки связанных RLC – контуров. Емкостная связь

Дифференцируем первое уравнение, используя законы сохранения заряда в узлах. В результате приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} R \frac{dI_n}{dt} + L \frac{d^2 I_n}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{dq_n}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq_{n-1}}{dt} &= 0 \Rightarrow \\ L \frac{d^2 I_n}{dt^2} + R \frac{dI_n}{dt} - \frac{I_n - I_{n+1}}{C} + \frac{I_{n-1} - I_n}{C} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Окончательно, деля на  $L$ , имеем:

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI_n}{dt} + \frac{I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1}}{LC} = 0. \quad (1.1.6)$$

Уравнение (1.1.6) отличается от (1.1.1) только вторым слагаемым, которое учитывает потери энергии на *Джоулев* нагрев, не принимаемые во внимание при выводе уравнения (1.1.1).

## 1.2 Предельный переход к волновому процессу

Уравнения (1.1.1), (1.1.6) допускают весьма прозрачный переход к непрерывному пределу. Характерный размер отдельной ячейки равен  $a$ . Будем считать количество  $\Lambda$  элементов среды, вовлеченных в процесс связанных колебаний (пространственный масштаб движений), в цепочке много большим  $a$ . Тогда можно записать следующие соотношения:

$$I_{n-1}(t) \leftrightarrow I(x-a, t) \approx I(x, t) - \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots,$$

$$I_n(t) \leftrightarrow I(x, t), \quad (1.2.1)$$

$$I_{n+1}(t) \leftrightarrow I(x+a, t) \approx I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots$$

Подставляя эти соотношения в (1.1.6), получим уравнение, приведенное к одной произвольной точке пространства  $x$ :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + I - \frac{\partial I}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2 - 2I + I + \frac{\partial I}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2$$

$$+ \frac{\quad}{LC} = 0 \Rightarrow \quad (1.2.2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I}{LC} = 0.$$

Это уравнение при  $R \rightarrow 0$  называют уравнением Клейна-Гордона, а при  $R \rightarrow 0$ ,  $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \gg 1$  – волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0. \quad (1.2.3)$$

Число параметров системы, позволяющих определить ее состояние, бесконечно, поскольку, чтобы рассчитать изменения параметров приведенных задач, в начальный момент надо задать не две константы, как для простейшей колебательной системы, а две функции –  $I(x,0)$  и  $\left. \frac{\partial I}{\partial t} \right|_{t=0}$ , определенные для бесконечно большого числа значений  $x$ . Таким образом, волновые процессы описываются *распределенными системами*, то есть дифференциальными уравнениями в частных производных!

### 1.3 Классификация волновых процессов

Классификация волновых процессов несколько отличается от классификации колебательных процессов. Единым, пожалуй, является деление волн на линейные и нелинейные. Волны называют линейными, если они описываются линейными уравнениями, и нелинейными, если они описываются нелинейными уравнениями.

Часть отличий в классификации являются формальными, появляющимися в силу переноса центра тяжести при описании волнового процесса с отдельного элемента на саму среду (при предельном переходе, описанном в параграфе 1.2, свойства отдельного элемента нивелируются).

В самом деле, волновой процесс может происходить в отсутствие внешних воздействий, а может и в их присутствии. При этом, однако, не принято говорить о волнах свободных и вынужденных. Это, как мы увидим ниже, прежде всего связано с методами решения уравнений, описывающих соответствующие волновые процессы. Также не говорят о волнах консервативных и диссипативных, а говорят о волнах в консервативных и диссипативных средах.

Следующий критерий, по которому принято классифицировать волновые процессы, также связан со свойствами среды, точнее, с наличием у среды границ (более точно, с характером взаимодействия волны с границей), но не имеет аналога в колебательных системах. Волны в безграничных средах или в ограниченных средах с полностью поглощающими границами называют бегущими, а в ограниченных – стоячими.



Рисунок 3. Пример продольных и поперечных волн

Последние два критерия уже специфичны именно для волн. Если изменения параметров, характеризующих волновой процесс, происходят в направлении движения волны, то такие волны называют продольными, а если в направлении, перпендикулярном направлению движения волны, то поперечными (см. рисунок 3). Наконец, последний критерий связан с формой поверхности, на которой фаза волны постоянна – фронта волны. Говорят, что волна плоская, если фронт – плоскость, сферическая, если сфера и т.д., (см. рисунок 4).

Кроме того, у нелинейных волн существует своя специфическая классификация, связанная с характером взаимодействия волн, но она будет рассмотрена ниже в соответствующем разделе.

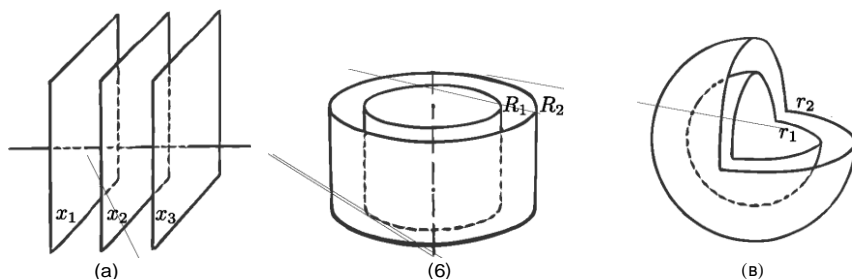


Рисунок 4. Формы фронтов (а) плоской, (б) цилиндрической, (в) сферической волны

## 1.4 Примеры волновых процессов

### 1.4.1 Продольные волны в стержнях

Такие волны могут быть возбуждены ударом молотка по одному из торцов упругого стержня [1]. Возмущение, распространяющееся вдоль стержня, визуально незаметно, однако основные закономерности такого волнового процесса можно смоделировать, если вместо стержня использовать длинную пружину с большим диаметром витков (см. рисунок 5). Если эту пружину подвесить горизонтально на нескольких нитях и резко ударить ладонью по левому торцу, то по ней побежит импульс сжатия с некоторой скоростью. Добежав до правого конца пружины, он отразится, при этом, если конец закреплен, то отраженный импульс будет также импульсом сжатия. Если правый конец свободен, то отраженный импульс будет импульсом растяжения. Он возникает в момент смещения вправо свободного конца пружины, когда до него добежит импульс сжатия (см. рисунок 5).

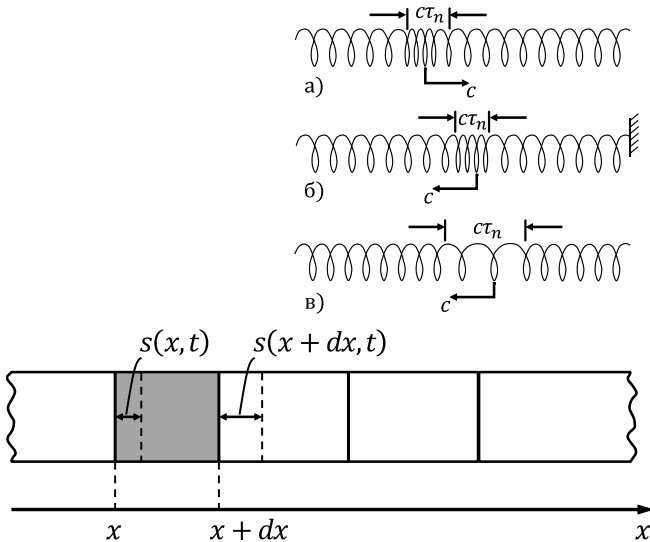


Рисунок 5. Модель распространения упругих волн в стержнях

Рассмотрим теперь распространение импульсов сжатия и растяжения в стержне. Мысленно разобьем стержень на ряд элементов длиной  $\partial x$  каждый.

При распространении продольной волны концы каждого элемента, отмеченные на рисунке 5 сплошными линиями, будут смещены в новые положения, отмеченные пунктиром. Эти смещения  $s$  будем считать положительными, если они происходят в положительном направлении оси  $x$ , и отрицательными – в противоположном случае.

Пусть левый конец некоторого элемента, имеющий координату  $x$ , сместился в данный момент времени на расстояние  $s(x, t)$ , а правый конец – на  $s(x + \partial x, t)$ . Деформация растяжения (сжатия) определяется относительным удлинением элемента  $\partial x$ :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{s(x + dx, t) - s(x, t)}{dx} = \frac{\partial s}{\partial x}.$$

В отличие от поперечной волны, при растяжении (сжатии) уменьшается (увеличивается) плотность

среды  $\rho$ . Ее можно представить в виде  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ ,  $\delta\rho \ll \rho_0$ . С учетом постоянства массы деформируемого элемента  $\delta x$  можем записать:

$$\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)[dx + s(x + dx, t)] - s(x, t) = (\rho_0 + \delta\rho)(1 + \varepsilon). \quad (1.4.1)$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной второго порядка  $\delta\rho \varepsilon$ , находим:  $\delta\rho/\rho_0 = -\varepsilon$ . Спустя некоторое время после удара по торцу стержня (или после резкого оттягивания этого торца) распределение смещений деформаций и возмущений плотности  $\delta\rho$  в бегущих импульсах сжатия и растяжения будут иметь вид, показанный на рисунке 6. Пунктиром показаны распределения всех величин в один из последующих моментов времени. Уравнение волны, бегущей вдоль оси  $x$ , в обоих случаях имеет вид деформация  $\varepsilon = \partial s/\partial x$ , и колебательная скорость  $v = \partial s/\partial t$  элемента связаны соотношением

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \rho_0 S dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\sigma_n(x - dx, t) - \sigma_n(x, t))S. \quad (1.4.2)$$

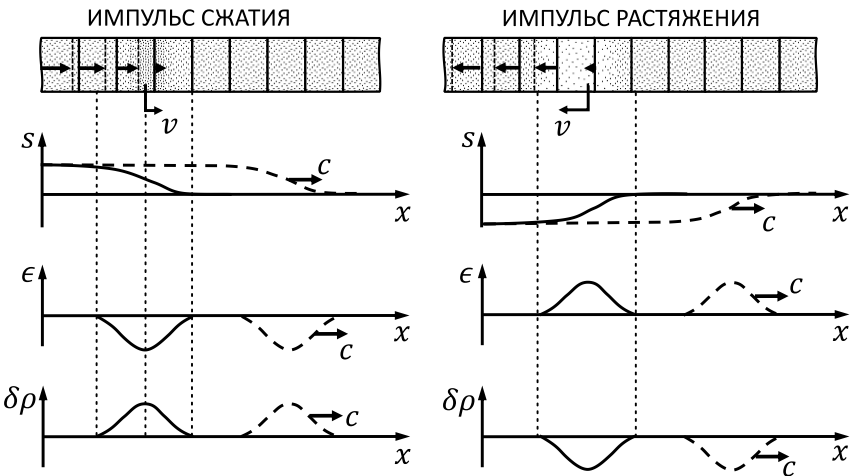


Рисунок 6. Распространение импульса сжатия и импульса растяжения

Чтобы преобразовать (1.4.2) к волновому уравнению, необходимо связать напряжения  $\sigma_n$  деформациями элементов стержня (см. рисунок 7). Наиболее просто это можно сделать для тонкого стержня. Если стержень тонкий, то деформации и напряжения вдоль координаты  $x$  связаны законом Гука:

$$\sigma_n(x, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x; \sigma_n(x + dx, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+dx}. \quad (1.4.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга. Подставляя (1.4.3) в (1.4.2) и производя деление на  $\rho_0 S dx$ , получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0. \quad (1.4.4)$$

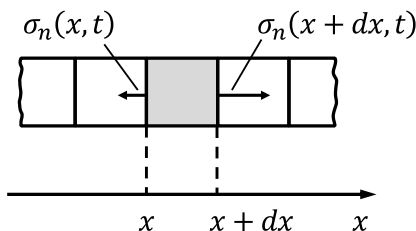


Рисунок 7. Деформация в стержне

### 1.4.2 Электромагнитные волны

Электромагнитные волны (см. рисунок 8) описываются системой уравнений Максвелла [15]

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \vec{D} = 4\pi \vec{j}, \\ \nabla \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (1.4.5)$$



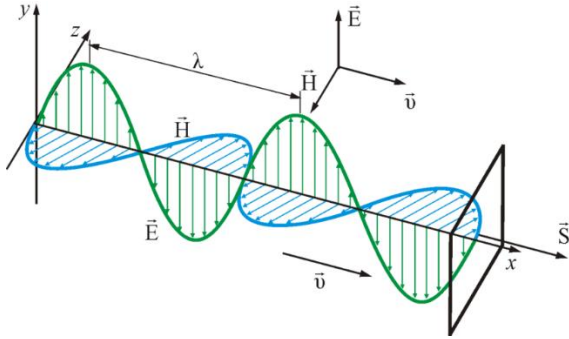


Рисунок 8. Электромагнитная волна

Будем рассматривать систему (1.4.5) в среде, где отсутствуют свободные заряды  $\rho = 0$  и токи  $\vec{j} = 0$ . Продифференцируем, например, четвертое уравнение системы (1.4.5) по времени и учтем третье уравнение этой системы:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla \times (c \nabla \times \vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (1.4.6)$$

Воспользовавшись вторым уравнением системы (1.4.5), имеем окончательно для напряженности магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \vec{H} = 0. \quad (1.4.7)$$

Аналогично получаем уравнение для напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (1.4.8)$$

### 1.4.3 Акустические волны

Исходными уравнениями для описания звуковых волн являются уравнения Навье-Стокса [16, 17, 62, 75]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.4.9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \bar{v} + \frac{\eta}{3} \nabla \operatorname{div} \bar{v}, \quad (1.4.10)$$

$$P = \rho T / M, \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned} C_{V\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{v} \nabla T \right) - \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \nabla \rho \right) = \\ = \chi \Delta T + \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Будем полагать коэффициенты вязкости и теплопроводности величинами первого порядка малости и разыскивать решение (1.4.9) – (1.4.12) в виде:  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $T = T_0 + T'$ ,  $P = P_0 + P'$ ,  $\bar{v} = \bar{v}'$ , где  $\forall A: A' \sim \varepsilon^1 \ll 1$ . Оставляя только слагаемые первого порядка малости, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla P', \\ P' = \frac{\rho_0 T' + T_0 \rho'}{M}, \quad C_{V\infty} \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Из последнего уравнения этой системы следует связь:

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{1}{C_{V\infty}} \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{C_{P\infty} - C_{V\infty}}{C_{V\infty}} \frac{\rho'}{\rho_0} = (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (1.4.14)$$

Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим:

$$P' = \frac{\rho_0 (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho'}{\rho_0} T_0 + T_0 \rho'}{M} = \frac{\gamma_\infty T_0}{M} \frac{\rho'}{\rho_0} = u_{S\infty}^2 \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad (1.4.15)$$

где  $u_{S\infty}$  – скорость звука. После подстановки последнего соотношения во второе уравнение, имеем:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{u_{S\infty}^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0. \quad (1.4.16)$$

Применим к первому уравнению оператор  $u_{sco} \rho_0^{-1} \nabla$ , а второе продифференцируем по времени, а затем вычтем первое уравнение из второго. В результате получаем:

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{v}}}{\partial t^2} - u_{sco}^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (1.4.17)$$

#### ***1.4.4 МГД-волны в плазме с неадиабатическим нагревом и охлаждением***

Исследуемая среда представляет собой квазинейтральную и полностью ионизованную плазму, в каждой точке которой на поступательные степени свободы частиц действует обобщённый источник тепловыделения, мощность которого зависит от плотности и температуры произвольным образом. Рассматриваемая среда считается однородной и находящейся под действием однородного внешнего магнитного поля. Магнитная и диэлектрическая проницаемость плазмы считаются равными 1. Кроме того, среда считается неподвижной, а влияние гравитационных эффектов не учитывается. Без учета диссипативных слагаемых, исходная система магнитогазодинамических уравнений, описывающая динамику МГД-волн в идеально проводящей одножидкостной плазме, записывается следующим образом [79]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (1.4.18)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.4.19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{V} = 0, \quad (1.4.20)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B}, \quad (1.4.21)$$

$$C_{V\infty} \frac{dT}{dt} - \frac{k_B \cdot T}{m\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = -\mathfrak{Z}(\rho, T), \quad (1.4.22)$$

$$\mathfrak{Z}(\rho, T) = L(\rho, T) - Q(\rho, T), \quad (1.4.23)$$

$$P = \frac{k_B \cdot T \cdot \rho}{m}. \quad (1.4.24)$$

Система уравнений (1.4.17) – (1.4.24) записана в абсолютной системе единиц СГС. В уравнениях (1.4.17) – (1.4.24)  $\rho, T, P$  – это, соответственно, плотность, температура и давление в плазменной среде, а  $\mathbf{V}, \mathbf{B}$  – это, соответственно, вектора скорости и магнитного поля. Здесь также используются стандартные обозначения:  $k_B$  для постоянной Больцмана и  $C_{V\infty}$  – для высокочастотной теплоемкости при постоянном объеме. Величина  $m$  – эффективная масса частицы плазмы.

Уравнения магнитной газодинамики, как и обычной газодинамики, справедливы только при малом числе Кнудсена, то есть, когда средняя длина пробега частиц плазмы значительно меньше характерного размера поля течения (длины волны – для волновых процессов). Кроме того, для применимости магнитогазодинамического приближения необходимо, чтобы длина волны была много больше ларморовского радиуса вращения заряженных частиц плазмы. Только в этом случае плазму можно рассматривать как непрерывную среду, испытывающую влияние магнитного поля. Иначе будет необходимо учитывать дискретность частиц, их взаимодействия и движение в магнитном поле.

Рассмотрим линейное уравнение, описывающее возмущения бесконечно малой амплитуды в среде. Согласно стандартной методике теории возмущений, подставим в систему уравнений (1.4.17) – (1.4.24) решение в виде:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \rho = \rho_0 + \rho_1, T = T_0 + T_1, P_0 = P_0 + P_1. \quad (1.4.25)$$

Нижним нулевым индексом обозначено невозмущенное состояние газа, нижний цифровой индекс обозначает порядок малости возмущения, т.е.

$$\frac{|\mathbf{B}_1|}{B_0} \sim \frac{|\mathbf{V}_1|}{c_\infty} \sim \frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \frac{P_1}{P_0} \sim \frac{T_1}{T_0} \sim \varepsilon \ll 1. \quad (1.4.26)$$

После подстановки и исключения величин выше первого порядка малости, исходная система уравнений (1.4.17) – (1.4.24) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (1.4.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (1.4.28)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0, \quad (1.4.29)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1), \quad (1.4.30)$$

$$C_{V\infty} \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{k_B T_0}{m} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 (\mathfrak{I}_{0T} T_1 + \mathfrak{I}_{0\rho} \rho_1), \quad (1.4.31)$$

$$T_1 = \frac{m}{k_B \rho_0} P_1 - \frac{T_0}{\rho_0} \rho_1. \quad (1.4.32)$$

После ряда преобразований система уравнений (1.4.27) – (1.4.32) может быть сведена к искомому линейному уравнению, относительно возмущения вектора скорости  $\mathbf{V}_1$ :

$$\begin{aligned}
C_{V\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi \rho_0} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0))) + c_\infty^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}_1) \right) = \\
= -\frac{C_{V0}}{\tau_0} \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi \rho_0} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0))) + c_0^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}_1) \right). \quad (1.4.33)
\end{aligned}$$

Без учета влияния источника тепловыделения данное уравнение сводится к классическому виду [81]:

$$-\frac{1}{4\pi \rho_0} \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0))) + c_\infty^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}_1) = \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2}. \quad (1.4.34)$$

Для того, чтобы получить дисперсионные уравнения для МГД-мод, которые могут существовать в среде, преобразуем уравнение (1.4.33) к матричному представлению.

Для этого подставим в уравнение (1.4.33) решение в виде гармонической волны  $\mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{V}}_1 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\bar{\mathbf{V}}_1$  – амплитуда возмущения вектора скорости  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор и  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор к положению возмущения в пространстве. В этом случае производные в уравнении (1.4.33) могут быть заменены следующим образом  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ ,  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ .

С помощью преобразования векторных и скалярных произведений уравнение (1.4.33) сводится к следующему операторному выражению:

$$\mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{V}}_1 = 0, \quad (1.4.35)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} = & (C_{V0} - i\omega\tau_0 C_{V\infty}) \left( \frac{\omega^2}{k^2} - c_a^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2 \right) \mathbf{1} - \\
& - \left( (C_{V0} c_0^2 - i\omega\tau_0 C_{V\infty} c_\infty^2) + (C_{V0} - i\omega\tau_0 C_{V\infty}) c_a^2 \right) \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} + \\
& + (C_{V0} - i\omega\tau_0 C_{V\infty}) c_a^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) (\hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{B}}_0). \quad (1.4.36)
\end{aligned}$$

В уравнении (1.4.36) были использованы обозначения для единичных векторов по направлению вектора магнитного поля  $\widehat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$  и по направлению волнового вектора  $\widehat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ . Величина  $B_0$  – это абсолютное значение длины вектора индукции магнитного поля, а величина  $\mathbf{1}$  представляет собой единичную матрицу. Кроме того, было использовано выражение для скорости альфвеновских волн.

$$c_a = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}}. \quad (1.4.37)$$

Конкретизируем систему координат и направления векторов в ней. Исследование волн проводилось в декартовой системе координат  $x, y, z$ . Считалось, что волны распространяются вдоль оси  $z$ , а вектор однородного внешнего магнитного поля находится в плоскости  $x, z$ , т.е.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{B}}_0 &= \widehat{\mathbf{z}} \cos \theta + \widehat{\mathbf{x}} \sin \theta, \\ \widehat{\mathbf{k}} &= \widehat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

где  $\theta$  – это угол наклона между вектором магнитного поля и осью  $z$ ,  $\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{z}}$  – единичные вектора. Схематическое представление геометрии задачи представлено на рисунке 9.

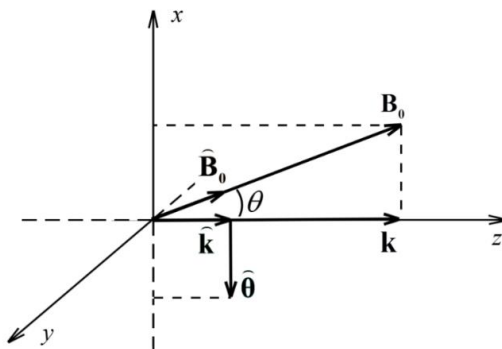


Рисунок 9. Схематическое представление геометрии задачи

Для принятого представления векторов уравнения (1.4.35), (1.4.36) преобразуются к следующему матричному представлению:

$$(C_{V0} - i\omega\tau_0 C_{V\infty}) \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & d_{22} & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.4.39)$$

Элементы полученной матрицы имеют следующий вид

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= \left( \frac{\omega^2}{k^2} - c_a^2 \cos^2 \theta \right), \\ d_{33} &= \left( \frac{\omega^2}{k^2} - (\tilde{c}^2 + c_a^2) + c_a^2 \cos^2 \theta \right), \\ d_{13} = d_{31} &= c_a^2 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

Уравнение (1.4.39) описывает три типа магнитогазодинамических волн, бегущих вправо и влево вдоль оси z: поперечные магнитогазодинамические волны (альфвеновские волны), быстрые и медленные магнитогазодинамические волны (магнитоакустические волны).

Альфвеновские волны являются строго поперечными волнами, которые распространяются вдоль магнитного поля без возмущения плотности. Впервые эти волны были предсказаны и описаны Х. Альфвеном [82].

Альфвеновские волны в плазме характеризуется не равным нулю возмущением поперечной компоненты  $V_{1y} \neq 0$  и равными нулю компонентами скорости  $V_{1x} = V_{1z} = 0$ . Подстановка указанных компонент в выражение (1.4.39) позволяет определить закон их дисперсии в следующем виде

$$\frac{\omega^2}{k^2} - c_a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (1.4.41)$$



Согласно уравнению (1.4.41) фазовая скорость альфвеновских волн, движущихся в положительном и отрицательном направлении, определяется следующим образом:

$$\frac{\omega}{k} = \pm c_a \cos \theta. \quad (1.4.42)$$

Как можно видеть из уравнения (1.4.42), альфвеновские волны являются сильно анизотропными. В направлении вектора магнитного поля они распространяются со скоростью (1.4.37), в то время как поперек магнитного поля они вовсе не распространяются.

В быстрых и медленных магнитогазодинамических волнах равна нулю поперечная компонента  $V_{1y} = 0$ , а компоненты  $V_{1x}$ ,  $V_{1z}$  могут быть не равными нулю. Поэтому в общем случае эти волны не являются ни чисто поперечными, ни чисто продольными [83]. В этом случае из уравнения (1.4.39) следует соотношение

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{31} & d_{33} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.4.43)$$

Из условия равенства нулю детерминанта (1.4.43) может быть найден закон дисперсии для быстрых и медленных магнитогазодинамических волн в следующей форме:

$$\left( \frac{\omega^2}{k^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{k^2} (c_a^2 + \tilde{c}^2) + \tilde{c}^2 c_a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (1.4.44)$$

Данное уравнение имеет два корня относительно  $\omega^2/k^2$ . Эти два корня соответствуют быстрым (знак "+") и медленным (знак "-") магнитогазодинамическим волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлении оси  $z$ :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{(c_a^2 + \tilde{c}^2) \pm \sqrt{(c_a^2 + \tilde{c}^2)^2 - 4\tilde{c}^2 c_a^2 \cos^2 \theta}}{2}. \quad (1.4.45)$$

Здесь

$$\tilde{c}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{(C_{P0} - i\omega\tau_0 C_{P\infty}) k_B T_0}{(C_{V0} - i\omega\tau_0 C_{V\infty}) m} = \gamma_{eff} \frac{k_B T_0}{m}. \quad (1.4.46)$$

В уравнении (1.4.46) используются следующие выражения для низкочастотных теплоемкостей при постоянном объеме  $C_{V0}$  и давлении  $C_{P0}$  и высокочастотной теплоемкости при постоянном давлении  $C_{P\infty}$ :

$$\begin{aligned} C_{V0} &= \mathfrak{I}_{0T} \tau_0 = \frac{k_B}{m} \mathfrak{I}_{L0T}, \quad C_{P\infty} = C_{V\infty} + \frac{k_B}{m}, \\ C_{P0} &= \tau_0 \frac{(\mathfrak{I}_{0T} T_0 - \mathfrak{I}_{0\rho} \rho_0)}{T_0} = \frac{k_B}{m} (\mathfrak{I}_{L0T} - \mathfrak{I}_{L0\rho}), \end{aligned} \quad (1.4.47)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{0T} &= \left( \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial T} \right)_{\rho_0, T_0}, \quad \mathfrak{I}_{0\rho} = \left( \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \rho} \right)_{\rho_0, T_0}, \\ \mathfrak{I}_{L0T} &= \frac{T_0 \mathfrak{I}_{0T}}{Q_0}, \quad \mathfrak{I}_{L0\rho} = \frac{\rho_0 \mathfrak{I}_{0\rho}}{Q_0}. \end{aligned} \quad (1.4.48)$$

Кроме того, введено характерное время нагрева/охлаждения среды:

$$\tau_0 = \frac{k_B T_0}{mQ(\rho_0, T_0)} = \frac{k_B T_0}{mL(\rho_0, T_0)}. \quad (1.4.49)$$

Если исключить влияние процессов тепловыделения или рассматривать строго высокочастотные волны ( $\omega\tau_0 \gg 1$ ), то комплексный член (1.4.46) в уравнениях (1.4.44), (1.4.45) принимает вид  $\tilde{c}^2 = c_\infty^2$ , и описанные законы дисперсии совпадают с общепринятыми выражениями для равновесных МГД сред [81, 84].

В приближении слабого усиления/затухания на длине волны  $|\operatorname{Re}(k)| \gg |\operatorname{Im}(k)|$  мы определим частотную зависимость фазовой скорости магнитогазодинамических волн в следующей форме:

$$c_{f,s}(\omega) = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k)} = \sqrt{\frac{(c_a^2 + c_{Snd}^2(\omega)) \pm \sqrt{(c_a^2 + c_{Snd}^2(\omega))^2 - 4c_{Snd}^2(\omega)c_a^2 \cos^2 \theta}}{2}} \quad (1.4.50)$$

Здесь и далее по тексту индексы  $f, s$  обозначают быстрые и медленные МГД волны соответственно.

Наличие обобщенного источника тепловыделения отражается на скорости магнитогазодинамическими возмущений аналогично тому, как это было бы для чисто акустических волн. А именно, в высокочастотном диапазоне ( $\omega\tau_0 \gg 1$ ) скорость как медленных, так и быстрых магнитогазодинамических возмущений будет определяться классическим для равновесных сред образом  $c_{f,s(\omega\tau_0 \gg 1)} = c_{\infty f,s}$ , в то время как в низкочастотном диапазоне ( $\omega\tau_0 \ll 1$ ) скорость магнитогазодинамических волн будет определяться влиянием неадиабатических процессов нагрева и охлаждения  $c_{f,s(\omega\tau_0 \ll 1)} = c_{0f,s}$ . Данные скорости легко могут быть найдены из (1.4.50) в соответствующем пределе.

$$c_{0f,s} = \sqrt{0.5 \cdot \left( c_a^2 + c_0^2 \pm \sqrt{(c_a^2 + c_0^2)^2 - 4c_a^2 c_0^2 \cos^2 \theta} \right)}, \quad (1.4.51)$$

$$c_{\infty f,s} = \sqrt{0.5 \cdot \left( c_a^2 + c_\infty^2 \pm \sqrt{(c_a^2 + c_\infty^2)^2 - 4c_a^2 c_\infty^2 \cos^2 \theta} \right)}, \quad (1.4.52)$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{C_{P0}}{C_{V0}} \frac{k_B T_0}{m}} = \sqrt{\gamma_0 \frac{k_B T_0}{m}}, c_\infty = \sqrt{\frac{C_{P\infty}}{C_{V\infty}} \frac{k_B T_0}{m}} = \sqrt{\gamma_\infty \frac{k_B T_0}{m}}. \quad (1.4.53)$$

### 1.4.5 Гравитационно-капиллярные волны

Многие из нас наблюдали за поверхностью моря или реки, по которой перекачиваются волны. Порождаемые ветром, они распространяются затем за счет сил тяжести и поверхностного натяжения. Такие волны называются гравитационно-капиллярными [62, 77]. С учетом лапласовского давления и добавки к гидростатическому давлению  $\rho g z$ , обусловленной волновым движением поверхности, имеем:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} \right) = -\nabla \left( P - \sigma \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right), \quad \nabla \bar{v} = 0. \quad (1.4.54)$$

Полагая движение потенциальным, положим

$$\bar{v} = \nabla \varphi. \quad (1.4.55)$$

Подставим (1.4.55) в (1.4.54):

$$\rho \left( \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + (\nabla \varphi \nabla) \nabla \varphi \right) = -\nabla \left( P - \sigma \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right), \quad (1.4.56)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, Здесь мы обозначили буквой  $\zeta$ , координату точек поверхности жидкости  $z$ . Система координат выбрана так, чтобы ось  $z$  была направлена вертикально вверх, а плоскость  $xy$  совпадала с невозмущенной поверхностью жидкости. Отсюда после однократного интегрирования имеем:

$$\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) + \nabla \left( P_0 - \sigma \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right) = 0. \quad (1.4.57)$$

Продифференцируем уравнение поверхности по времени, используя правило дифференцирования сложной функции и соотношения между  $\varphi$  и  $x, y, z$ , следующие из (1.4.55):

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.4.58)$$

Применяя соотношение (1.4.57) к точкам поверхности, получим окончательно самосогласованную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \zeta &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.59)$$

где  $P_0$  – давление на ее поверхности. Систему следует дополнить граничным условием у дна:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0. \quad (1.4.60)$$

Если амплитуда возмущения мала, систему (1.4.59) можно линеаризовать. В результате получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.4.61)$$

Продифференцировав первое уравнение системы по  $z$ , второе по  $t$ , и сложив:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (1.4.62)$$

Уравнение (1.4.62) описывает волновой процесс, модель которого не сводится ни к волновому уравнению, ни к уравнению Клейна-Гордона.

Частицы воды совершают в них движение по круговым и эллиптическим траекториям ("вверх – вниз" и "вперед – назад" одновременно), поэтому такие волны нельзя отнести ни к продольным, ни к поперечным.

## ГЛАВА 2 БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

### 2.1 Волновое уравнение

Как следует из приведенных выше примеров, большое количество волновых процессов описывается волновым уравнением или близкими к нему уравнениями, например, уравнением Клейна-Гордона.

Вначале рассмотрим простейший и наиболее распространенный случай, когда волновой процесс малой амплитуды описывается волновым уравнением. Волновое уравнение относится к классу гиперболических уравнений в частных производных [112-117]. Рассмотрим вначале волновое уравнение с источником:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{v} = f(\vec{r}, t). \quad (2.1.1)$$

С этим уравнением связывают два возможных типа задач, о которых пойдет речь далее. Однако отметим, что для целого ряда задач, например, поиска дисперсионного соотношения, вообще не нужно решать одну из стандартных задач для уравнений в частных производных (начальную, смешанную или граничную), а достаточно найти общее решение уравнения (2.2.11) в виде  $v = C \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$ .

### 2.2 Неограниченные среды. Задача Коши. Параметры волны

Первым классом возможных задач является начальная задача или задача Коши. Задача Коши, очевидно, ставится для систем, определенных в неограниченной области. При этом уравнение (2.1.1) должно быть дополнено двумя условиями:

$$v|_{t=0} = v_0(\vec{r}), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(\vec{r}). \quad (2.2.1)$$

Задачи этого типа решаются *методом интегральных преобразований* (Фурье или Лапласа для задач, не обладающих симметрией, Фурье-Бесселя для цилиндрически симметричных задач и т. д.). Решение задачи (2.1.1) – (2.2.1) имеет различный вид для пространств разной размерности [112-117].

В одномерной среде решение дается формулой *д'Аламбера*

$$v(x, t) = \frac{v_0(x + ct) + v_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2.2.2)$$

Способ получения соотношения (2.2.2) при  $f = 0$  будет продемонстрирован ниже при решении уравнения Клейна-Гордона, частным случаем которого является уравнение (2.1.1).

В двумерной среде решение дается *формулой Пуассона*:

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < ct} \frac{v_0(\vec{\xi}) d\vec{\xi}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{\xi} - \vec{r}|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < ct} \frac{v_1(\vec{\xi}) d\vec{\xi}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{\xi} - \vec{r}|^2}} + \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < c(t-\tau)} \frac{f(\vec{\xi}, \tau) d\vec{\xi} d\tau}{\sqrt{c^2 (t-\tau)^2 - |\vec{\xi} - \vec{r}|^2}}. \quad (2.2.3)$$

В трехмерной среде решение дается формулой Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 v(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \int_{|\vec{\xi} - \vec{r}| = ct} v_0(\vec{\xi}) dS \right] \\
 & + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{\xi} - \vec{r}| = ct} v_1(\vec{\xi}) dS + \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \int_{|\vec{\xi} - \vec{r}| < c(t-\tau)} \frac{f\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi} - \vec{r}|}{c}\right) d\vec{\xi}}{|\vec{\xi} - \vec{r}|}. \quad (2.2.4)
 \end{aligned}$$

Эти решения ассоциируют с бегущими волнами [1-3, 17].

Если волновой процесс представляет собой суперпозицию отдельных гармонических сигналов, для описания такого процесса удобно использовать такую его характеристику, как *спектр волны*.

Спектр волн в безграничных средах может быть как дискретным, так и непрерывным. Какой из видов спектра реализуется в линейной задаче, полностью определяется спектральным составом начальных условий и внешнего источника. Если их спектр дискретен, то и спектр волны дискретен, а если непрерывен, то непрерывен и спектр волны. При графическом отображении спектра волны в случае дискретного спектра по оси абсцисс указывают частоты колебаний  $\omega_n$  или волновые числа  $k_n$  или их номера  $n$ , а по оси ординат указывают квадраты их Фурье-амплитуд  $a_m^2$ , в случае непрерывного спектра по оси абсцисс указывают частоты колебаний  $\omega$  или волновые числа  $k$ , а по оси ординат указывают квадраты Фурье-образов их амплитуд  $a^2(k)$  или  $a^2(\omega)$  (см. рис. 10).



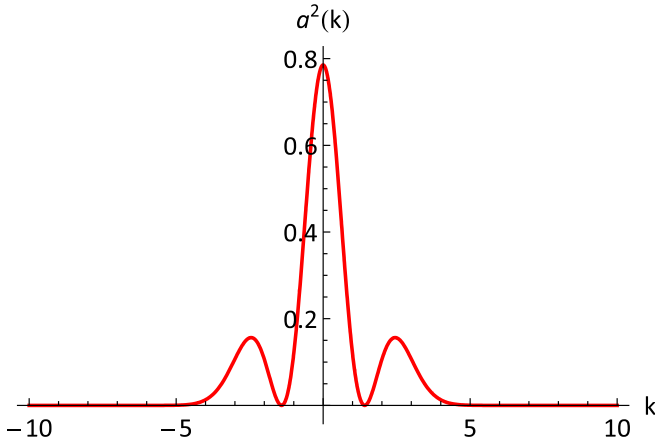


Рисунок 10. Спектр волнового пакета, представляющего собой суперпозицию четырех первых гармоник, а) и волнового пакета  $v(x) = x^2 \exp(-x^2)$

### 2.2.1 Волновое уравнение.

#### Гармоническое начальное возмущение

Большинство параметров волны удобно определить для так называемых монохроматических волн, формирующихся при гармонических начальных возмущениях. Пусть, например, в одномерном случае  $v_0(x) = A \sin kx$ ,  $v_1(x) = B \sin kx$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \frac{A}{2} (\sin k(x + ct) + \sin k(x - ct)) + \\
 &+ \frac{B}{2c} (\cos k(x + ct) + \cos k(x - ct)) = \quad (2.2.5) \\
 &= a \sin k(x + ct + \varphi) + b \sin k(x - ct + \varphi).
 \end{aligned}$$

Это решение, очевидно, описывает пару волн, бегущих в противоположных направлениях оси  $x$ . Для того чтобы выделить волну, бегущую в одном направлении, например, вправо, следует положить  $a = 0$ . Тогда  $v = b \sin k(x - ct + \varphi)$ .

Поверхность постоянной фазы волны, здесь  $x + ct + \varphi = const$ , называют *фронтом* волны, см. рис. 4 и 8. Проидифференцируем это соотношение:

$$\frac{d}{dt}(x - ct + \varphi = const) \Rightarrow \frac{dx}{dt} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{dx}{dt}. \quad (2.2.6)$$

Скорость движения фронта волны  $c$  называют *фазовой скоростью* волны. Минимальное расстояние  $\lambda = 2\pi/k$  между точками, колеблющимися в одинаковой фазе, называют *длиной* волны, см. рис. 8. Частота волны равна  $\omega = kc$ . Частота связана с периодом волны стандартным соотношением  $T = 2\pi/\omega$ . Величину  $k$  называют *волновым числом*. В соответствии с этими определениями уравнение бегущей волны переписывается в стандартной форме  $v = b \sin(kx - \omega t + \varphi)$ , а фазовая скорость волны равна:

$$v_{PH} = \frac{\omega}{k}. \quad (2.2.7)$$

Отметим также, что из соотношения (2.2.5) следует, что связь между частотой и волновым вектором можно получить непосредственно из уравнения (2.1.1), разыскивая его решение при  $f = 0$  в виде  $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$ , откуда следует соотношение:

$$-\omega^2 + \vec{c}^2 \vec{k}^2 = 0. \quad (2.2.8)$$

Соотношение между  $\omega$  и  $\vec{k}$  для волн малой амплитуды называют дисперсионным соотношением [1-3, 17].

Для волн, описываемых волновым уравнением, это соотношение имеет вид линейной связи  $\omega = \pm \vec{c}\vec{k}$ , т.е. фазовая скорость таких волн постоянна и равна  $+c$  для волн бегущих вправо и  $-c$  для волн, бегущих влево.

### 2.2.2 Уравнение Клейна-Гордона. Группы волн. Дисперсия

Снова рассмотрим волновой процесс в одномерной среде. Будем рассматривать волны, описываемые уравнением Клейна-Гордона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega_0^2 U = 0. \quad (2.2.9)$$

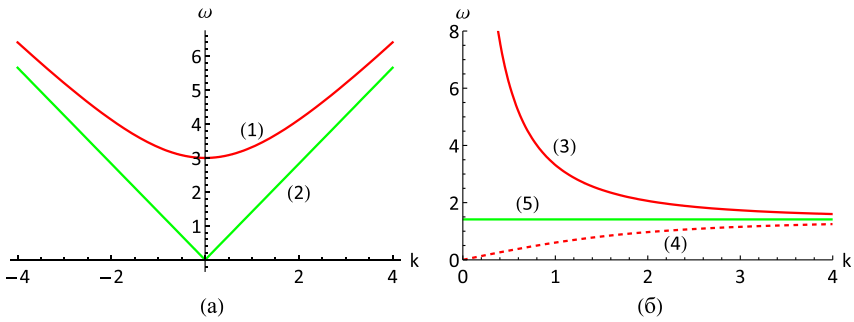


Рисунок 11. Дисперсионное соотношение для волн а), описываемых уравнением Клейна-Гордона, (1) и волновым уравнением, (2). Скорости волн, б): фазовая, (3) и групповая, (4) для уравнения Клейна-Гордона и фазовая и групповая, (5) волнового уравнения

Дисперсионное соотношение для этого уравнения уже не является линейным, а их фазовая скорость не постоянна, а является функцией волнового числа (см. рисунок 11)  $k$ :

$$\omega^2 = \omega^2(k) = \omega_0^2 + c^2 k^2 \Rightarrow v_{PH} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}}{k} \neq const. \quad (2.2.10)$$

Задачу Коши для этого уравнения снова будем решать с начальными условиями:

$$U|_{t=0} = U_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = U_1(x). \quad (2.2.11)$$

Решать задачу (2.2.9) – (2.2.11) будем методом интегральных преобразований, здесь – используя преобразование Фурье [107, 113, 114]. Решение ищем в виде:

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U(\xi, t) e^{ik(x-\xi)} d\xi. \quad (2.2.12)$$

Подставляя (2.2.12) в (2.2.9) и (2.2.11), получим ОДУ:

$$\frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + (c^2 k^2 - \omega_0^2) U(\xi, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + \Omega^2 U(\xi, t) \quad (2.2.13)$$

с начальными условиями

$$U(\xi, t)|_{t=0} = U_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = U_1(\xi). \quad (2.2.14)$$

Его решение, удовлетворяющее этим условиям, получается в результате следующей цепочки действий:

$$\begin{aligned} U(\xi, t) &= A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \quad \begin{matrix} U(\xi, t)|_{t=0} = U_0(\xi) \\ \Rightarrow \end{matrix} \\ B &= U_0(\xi) \quad \begin{matrix} \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = U_1(\xi) \\ \Rightarrow \end{matrix} \\ &\Rightarrow A \Omega \cos \Omega t - \Omega U_0(\xi) \sin \Omega t \Big|_{t=0} = U_1(\xi) \Rightarrow \quad (2.2.15) \\ &\Rightarrow A \Omega = U_1(\xi) \Rightarrow A = \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \Rightarrow \\ U(\xi, t) &= \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t + U_0(\xi) \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Подставим это решение в (2.2.12), тогда получим:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[ \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t + U_0(\xi) \cos \Omega t \right] e^{ik(x-\xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U_0(\xi) \cos \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi + \quad (2.2.16) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi = U_1(x, t) + U_2(x, t). \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования полученного соотношения воспользуемся известным соотношением для цилиндрических функций [110, 111, 117]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin r}{r} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(r \sin \varphi \cos \theta) e^{ir \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad \begin{array}{l} r \cos \varphi = -ckt; r \sin \varphi = i\omega_0 t \\ \Rightarrow \\ r^2 = \Omega^2 t^2; ct \cos \theta = \zeta \end{array} \\
 \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(i\omega_0 t \sin \theta) e^{-ickt \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_1^{-1} J_0\left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\right) e^{-ickt \cos \theta} d \cos \theta = \\
 &\quad \begin{array}{l} \theta=0 \Leftrightarrow \zeta=ct \\ = \\ \theta=\pi \Leftrightarrow \zeta=-ct \end{array} -\frac{1}{2} \int_{ct}^{-ct} J_0\left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2 \cos^2 \theta}{c^2 t^2}}\right) e^{-ickt \cos \theta} \frac{dct \cos \theta}{ct} = \\
 &\quad \begin{array}{l} \text{переворачивая} \\ = \\ \text{интеграл} \end{array} \frac{1}{2} \int_{-ct}^{ct} J_0\left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{c^2 t^2}}\right) \frac{e^{-ik\zeta}}{ct} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} I_0\left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}}\right) \frac{e^{-ik\zeta}}{t} d\zeta.
 \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
 U_2(x, t) &= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) \int_{-ct}^{ct} I_0\left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}}\right) e^{ik(x-\xi-\zeta)} d\zeta \right\} = \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \left( I_0\left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}}\right) (\Theta(\zeta - ct) - \Theta(\zeta + ct)) e^{ik(x-\xi-\zeta)} \right) d\zeta \right\} = \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik(\zeta - z)) = \delta(z) \\
 &= \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U_1(\xi) I_0\left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}\right) (\Theta(x-\xi-ct) - \Theta(x-\xi+ct)) \delta(x-\xi) \right\} d\xi = \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0\left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}\right) (\Theta(x-\xi-ct) - \Theta(x-\xi+ct)) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0\left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}\right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 U_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U_0(\xi) \cos \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \frac{\sin \Omega t}{\Omega} e^{ik(x-\xi)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Сопоставляя это равенство с выражением для  $U_2(x, t)$ , получим соотношение:

$$\begin{aligned}
 U_1(x, t) &\stackrel{\text{дифф-ие}}{=} \frac{U_o(x-ct) + U_o(x+ct)}{2} + \\
 &\int_{\text{одно нар-ам}} \\
 &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ I_0 \left( \omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\} = \\
 &= \frac{U_o(x-ct) + U_o(x+ct)}{2} + \\
 &+ \frac{\omega_0 t}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}} I_1 \left( \omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Соединяя результаты, получаем:

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \frac{U_o(x-ct) + U_o(x+ct)}{2} + \\
 &+ \frac{\omega_0 t}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}} I_1 \left( \omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0 \left( \omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

В частности, при  $\omega_0 \rightarrow 0$  отсюда следует формула д'Аламбера, т.к.  $I_0(0) = 1$ ,  $I_1(0) = 0$ . Последнее соотношение можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k \exp[i(kx - \omega(k)t)] = \\
 &= \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k e^{-i \left[ kx - \left( \omega(k_0) + (k-k_0) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} + \frac{(k-k_0)^2}{2!} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} + \dots \right) t \right]} = \\
 &= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \sum_{q=q_1}^{q_2} a_{k_0+q} e^{-i \left[ q \left( x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} \right) t - i \frac{q^2}{2!} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} t + \dots \right]} = \\
 &= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \sum_{q=q_1}^{q_2} a_{k_0+q} e^{-i \left[ q(x - v_{GR}t) - i \frac{q^2}{2!} \frac{dv_{GR}}{dk} \Big|_{k=k_0} t + \dots \right]}, \tag{2.2.22}
 \end{aligned}$$

где  $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ . Из этого выражения следует, что оно может быть представлено в виде  $U(x, t) = e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} F(x - v_{GR}t)$  при условии:

$$t \ll \frac{2\pi}{q^2 \left| \frac{dv_{GR}}{dk} \Big|_{k=k_0}} = \frac{q = \frac{k_2 - k_1}{2} = \frac{\Delta k}{2}}{8\pi (\Delta k)^2 \left| \frac{dv_{GR}}{dk} \Big|_{k=k_0}}, \tag{2.2.23}$$

где величину  $v_{GR} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0}$  называют выражением для *групповой скорости* волны [1-3, 17]. Таким образом, понятие групповой скорости имеет ограниченную область применимости. Легко видеть,

что в области применимости этой характеристики между групповой и фазовой скоростью волны существует соотношение

$$v_{GR} = v_{PH} + \frac{dv_{PH}}{dk} = v_{PH} - \frac{dv_{PH}}{d\lambda}. \quad (2.2.24)$$

Фазовая и групповая скорости совпадают только в средах с линейным законом дисперсии – *недиспергирующих средах*, рис. 11б.

### 2.2.3 Энергия и импульс волн

Рассмотрим снова уравнение Клейна-Гордона и умножим его на  $\frac{\partial U}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega_0^2 U &= 0 \left| \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right. \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) - c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) - & \quad (2.2.25) \\ - c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U^2}{\partial x} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее волновой пакет (узкополосная группа волн), медленно меняющийся в пространстве и времени  $U = a \cos(\psi + \varphi)$ . Тогда получаем [1, 2]:



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( a \cos(\Psi + \varphi) \left( \frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \Psi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\
& + c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( a \cos(\Psi + \varphi) \left( \frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \sin(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\
& + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)) \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (-c^2) \left( \frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( a \cos(\Psi + \varphi) \left( \frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) - \omega a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\
& + c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( a \cos(\Psi + \varphi) \left( \frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \sin(\Psi + \varphi) + k a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\
& + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (-c^2) \left( \frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \ln a}{\partial \ln t} - e^1 < 1; \quad \frac{\partial \ln a}{\partial \ln x} - e^1 < 1; \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \ln t} - e^1 < 1; \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \ln x} - e^1 < 1; \text{отбрасываем члены } e^{-2} \text{ и выше} \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\omega^2 + c^2 k^2) a^2 \sin^2(\Psi + \varphi) + \omega_0^2 a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [-c^2 \omega k a^2 \sin^2(\Psi + \varphi)] = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\omega^2 + c^2 k^2) a^2 + \omega_0^2 a^2}{4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{c^2 \omega k a^2}{2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2 \tag{2.2.26} \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{c^2 k^2 + \omega_0^2}{2} a^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{c^2 \omega k}{2} a^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в приведенном уравнении представляет собой производную по времени от *плотности* энергии волны, а второе – производную по координате от *плотности потока* энергии волны.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \tag{2.2.27}$$

Это соотношение можно переписать в несколько другом виде. Так как

$$\begin{aligned}
 v_{GR} &= \frac{d\omega}{dk} \stackrel{\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2}{=} \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2} \cdot c^2 k \omega}{\omega} \frac{a^2}{2} = \\
 &= \frac{1 \cdot \frac{c^2 k \omega}{2} a^2}{\frac{\omega_0^2 + c^2 k^2}{2} a^2} = \frac{S}{E} \Rightarrow S = v_{GR} E,
 \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

то (2.2.29) принимает вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (v_{GR} E)}{\partial x} = 0. \tag{2.2.29}$$

Это уравнение и его трехмерное обобщение справедливы не только для одномерного уравнения Клейна-Гордона, но и в общем случае [2].

### 2.3 Конечный отрезок. Одномерный случай. Стоячие волны

Основным методом решения задач с постоянными коэффициентами на конечном отрезке является *метод Фурье (метод разделения переменных)* [112-117]. Здесь будет проиллюстрировано его применение для решения некоторых задач. Напомним суть метода. Сначала ищутся решения вида  $v(x, t) = X(x)T(t)$ , например, уравнения (2.3.1) при граничных условиях (2.3.2). После этого решение задачи (2.3.1) – (2.3.3) ищется в виде суперпозиций полученных решений вида  $v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ . Оказывается, что суперпозиция всегда может быть подобрана так, чтобы удовлетворялись начальные условия (2.3.3). Граничные условия и само волновое уравнение удовлетворяются автоматически, поскольку каждое слагаемое суперпозиции им удовлетворяет.

В рамках данного курса мы будем интересоваться уравнениями, допускающими волновые решения. Простейшим из них является волновое уравнение. Задача для волнового уравнения для одномерной среды:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

или уравнения Клейна-Гордона в общем случае ставится при следующих начальных и граничных условиях:

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = v_1(x),$$

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=0} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=0} + \alpha_3 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} + \alpha_4 v|_{x=0} = \Phi(t), \quad (2.3.2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{x=L} + \beta_3 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=L} + \beta_4 v|_{x=L} = \Psi(t).$$

1. Вначале рассмотрим задачу (2.1.1) – (2.2.1) в отсутствие источника  $f(x, t) = 0$  и при тривиальных условиях  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ ,  $\Phi = \Psi = 0$ :

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_1(x), \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=L} = 0. \quad (2.3.3)$$

Для решения этой задачи и задач данного типа используется метод Фурье (метод разделения переменных) [112-117]. Решение задачи (2.3.1), (2.3.3) ищем в виде  $v(x, t) = X(x)T(t)$ . Подставляя это соотношение в (2.3.1), получаем:

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (2.3.4)$$

Две функции разных переменных могут быть равны друг другу тогда и только тогда, когда они одновременно равны одной и той же константе:

$$\frac{1}{Tc^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0; \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda T = 0. \quad (2.3.5)$$

Граничные условия, очевидно, преобразуются к виду:

$$T(t)X(x)|_{x=0} = 0, T(t)X(x)|_{x=L} = 0, \Rightarrow X(0) = 0, X(L) = 0. \quad (2.3.6)$$

Таким образом, для пространственной части задачи мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля [114, 115]. Общее решение пространственного уравнения системы (2.3.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} X(x) &= a \sin(\sqrt{\lambda}x + \varphi) \stackrel{X(0)=0}{\Rightarrow} a \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi n, \\ X(x) &= a \sin(\sqrt{\lambda}x + \pi n) \stackrel{X(L)=0}{\Rightarrow} a \sin(\sqrt{\lambda}L + \pi n) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a(-1)^n \sin \sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow b \sin \sqrt{\lambda}L = 0. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Отсюда:  $\sqrt{\lambda}L = \pi k \Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2 k^2}{L^2}, k \in \mathbb{N}$ .

Удобно при решении данной задачи искать нормированное пространственное решение, пользуясь условием:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L X^2(x) dx &= 1 \Rightarrow \frac{b^2}{L} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi k x}{L} dx = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{b^2}{L} \frac{L}{\pi k} \int_0^{\pi k} \sin^2 \frac{\pi k x}{L} d \frac{\pi k x}{L} = 1 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{L}}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Решение временной части системы (2.3.5) при этом принимает вид:

$$T_k(t) = a_k \sin \sqrt{\lambda_k} ct + b_k \operatorname{cosec} \sqrt{\lambda_k} ct = a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t. \quad (2.3.9)$$

Тогда функция

$$v_k(x, t) = \left( a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t \right) \sin \frac{\pi k x}{L} \quad (2.3.10)$$

является решением системы (2.3.1), (2.3.3) при любых  $a_k$ ,  $b_k$  (отметим, что в силу произвольности этих констант, нормировочный множитель пространственного решения здесь снят). Очевидно, что общее решение системы (2.3.1), (2.3.3) представляет собой суперпозицию решений (2.3.10):

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t \right) \sin \frac{\pi k x}{L}. \quad (2.3.11)$$

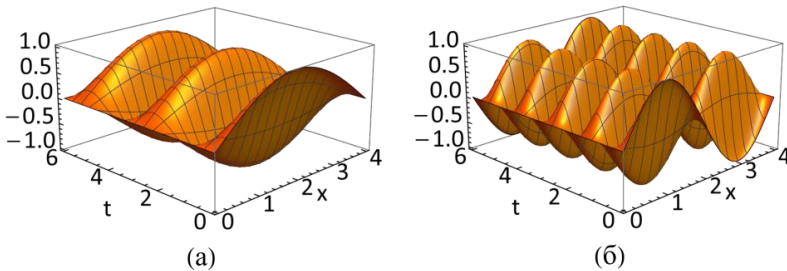


Рисунок 12. Эволюция решения в виде стоячей волны:

а) для первой(фундаментальной) моды(гармоники); б) для второй моды

Решение (2.3.11) следует еще удовлетворить начальным условиям. Тогда получаем:

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L}, \quad v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi k c}{L} \sin \frac{\pi k x}{L}. \quad (2.3.12)$$

Умножим последние соотношения на  $\sin \frac{\pi n x}{L}$  и проинтегрируем полученные соотношения от 0 до  $L$ . Отсюда получаем выражения для констант  $a_n$ ,  $b_n$ :

$$\int_0^L v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} dx =$$

$$= \frac{L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn}}{2} = \frac{L b_n}{2} \Rightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$
(2.3.13)

$$\int_0^L v_1(x, t) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi k c}{L} \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} dx =$$

$$= \frac{\pi k c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{kn}}{2} = \frac{\pi n c a_n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi n c} \int_0^L v_1(x, t) \sin \frac{\pi n x}{L} dx.$$
(2.3.14)

Решение (2.3.11) ассоциируют с так называемыми стоячими волнами, а отдельные слагаемые в (2.3.11), соответствующие значениям  $k = 1, 2, 3, \dots$ , называют модами. На рис. 12 показаны первая  $k = 1$  и вторая моды колебаний при  $k = 2$ . Пусть, например,  $v_0(x) = v_0 \sin \frac{\pi n x}{L}$ ,  $v_1(x) = 0$  (эта задача соответствует возбуждению  $m$ -й акустической моды слева между двумя бесконечно высокими плоскими стенками). Тогда

$$a_n \equiv 0, \forall n, b_n = b_m = \frac{v_0}{\pi n}, n = m,$$

$$b_n \equiv 0, n \neq m \Rightarrow v(x, t) = \frac{v_0}{\pi m} \cos \frac{\pi n c t}{L} \sin \frac{\pi n x}{L}.$$
(2.3.15)

2. Рассмотрим ту же задачу при граничных условиях [113].

$$v|_{t=0} = v_0(x); \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x); \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{L=0} = 0; \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} + \beta_4 v(L, t) = 0. \quad (2.3.16)$$

Применение метода разделения переменных снова приводит нас к системе (2.3.5), но с граничными условиями вида:

$$\begin{aligned}
T(t) \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0, \\
T(t) \left( \frac{dX(x)}{dx} + \beta_4 X(x) \right) \Big|_{x=L} &= 0 \Rightarrow \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \\
\left( \frac{dX(x)}{dx} + \beta_4 X(x) \right) \Big|_{x=L} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Снова для пространственной части задачи мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля. Применение условий (2.3.17) дает

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda}x + \varphi) \xRightarrow{\frac{dX}{dx} \Big|_{x=0} = 0} a\sqrt{\lambda} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, \tag{2.3.18}$$

$$\begin{aligned}
X(x) &= a \sin(\sqrt{\lambda}x + \pi n) \xRightarrow{\left( \frac{dX}{dx} + \beta_4 X \right) \Big|_{x=L} = 0} \\
\Rightarrow a\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}L + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) + \beta_4 a \sin\left(\sqrt{\lambda}L + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Отсюда получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений задачи  $\lambda_k$ :

$$\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}L - \beta_4 \cos \sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}L = \beta_4. \tag{2.3.20}$$

Отсюда

$$X_k(x) = a \sin\left(\sqrt{\lambda_k}x + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = a \cos(\sqrt{\lambda_k}x), \tag{2.3.21}$$

а функция

$$v_k(x, t) = \left( a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}ct) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k}ct) \right) \cos(\sqrt{\lambda_k}x) \tag{2.3.22}$$

является решением системы (2.3.16), (2.3.17) при любых  $a_k$ ,  $b_k$ .

Очевидно, что общее решение системы (2.3.16), (2.3.17) представляет собой суперпозицию решений (2.3.22):

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}ct) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k}ct) \right) \cos(\sqrt{\lambda_k}x). \tag{2.3.23}$$

Решение (2.3.23) следует удовлетворить начальным условиям. Тогда получаем:

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x),$$

$$v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x),$$
(2.3.24)

Умножим последние соотношения на  $\cos(\sqrt{\lambda_k} x)$  и проинтегрируем полученные соотношения от 0 до  $L$ . Отсюда получаем выражения для  $a_n$ ,  $b_n$ :

$$\int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx =$$

$$= \frac{L}{2} \left[ 1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn} \Rightarrow$$

$$\int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \frac{L}{2} \left[ 1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn} \Rightarrow$$

$$\frac{L b_n}{2} \left[ 1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{L} \left[ 1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx$$

$$\int_0^L v_1(x, t) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{Lc\sqrt{\lambda_k}} \left[ 1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx.$$
(2.3.25)

Определение вида стоячих волн при более сложных граничных условиях производится аналогичными методами.



3. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами в среде без сопротивления, к которой с момента  $t=0$  приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью  $\Phi(x,t) = \Phi(x) \sin \omega t$  [113].

В соответствии с вышесказанным имеется смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x)}{\rho} \sin \omega t, \quad (2.3.26)$$

$$s(0,t) = 0; \quad s(l,t) = 0; \quad s(x,0) = 0; \quad \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.3.27)$$

Известно [113, 117], что решение неоднородной задачи вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + au + \Phi(x)\Psi(t) \quad (2.3.28)$$

следует проводить таким образом:

- функция  $\Psi$  разлагается в ряд Фурье  $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \exp(i\omega_n t)$  и

ищется частное решение уравнения (2.3.26) в виде

$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \exp(i\omega_n t)$ , удовлетворяющее граничным условиям (2.3.27);

- путем подстановки этих рядов в (2.3.26) получается ОДУ вида:

$$-\omega_n^2 u_n = c^2 \frac{d^2 u_n}{dx^2} + b \frac{du_n}{dx} + 2i\gamma \omega_n u_n + au_n + \Phi(x)\Psi_n, \quad (2.3.29)$$

для которого решается задача Штурма-Лиувилля и находятся функции  $u_n$ .

При решении задачи (2.1.1) – (2.2.1) будем рассматривать два случая:

**Случай А.** Частота внешней силы не совпадает ни с одной из собственных частот однородной задачи  $\omega \neq \pi c / L$ .

Будем искать частное решение (2.3.26), (2.3.27) в виде  $s(x, t) = S(x) \sin \omega t$ . Подставим это выражение в (2.3.26), (2.3.27), тогда получим:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} S(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0}, \quad S(0) = S(L) = 0, \quad (2.3.30)$$

где  $T_0$  – натяжение струны. Решение задачи (2.3.30) имеет вид [113]:

$$S(x) = \frac{c}{\omega T_0} \frac{\sin \frac{\omega}{c} x}{\sin \frac{\omega}{c} L} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (L - \zeta) d\zeta - \frac{c}{\omega T_0} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (x - \zeta) d\zeta. \quad (2.3.31)$$

**Случай Б:** Частота внешней силы совпадает с собственными частотами  $\omega = \frac{\pi m c}{L}$ .

Введем функцию

$$\varphi(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0} + A_m \sin \frac{\pi m x}{L}, \quad (2.3.32)$$

где

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\Phi(\zeta)}{T_0} \sin \frac{\pi m \zeta}{L} d\zeta, \quad (2.3.33)$$

ортогональную  $\sin \frac{\pi m x}{L}$  на отрезке  $0 < x < L$ , и перепишем (2.3.26) в виде:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\rho} \varphi(x) \sin \omega t + \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \omega t. \quad (2.3.34)$$

В силу линейности задачи можно представить функцию  $s$  в виде  $s(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$  и разделить уравнение (2.3.34) на два:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \frac{\pi mx}{L} \sin \omega t, \quad (2.3.35)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\rho} \varphi(x) \sin \omega t. \quad (2.3.36)$$

Общее решение уравнения (2.3.36) имеет вид [98]:

$$w(x, t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \int_0^x \varphi(z) \sin \frac{\omega}{c} (x - z) dz. \quad (2.3.37)$$

Частное решение уравнения (2.3.35) будем искать в виде  $v(x, t) = T(t) \sin \frac{\pi mx}{L}$ , удовлетворяющем условиям (2.3.27) при любых  $T(t)$ . Подставляя это выражение в (2.3.34) и имея в виду, что  $\omega = \pi c/L$ , получаем:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \omega t. \quad (2.3.38)$$

Окончательно получаем:

$$s(x, t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \int_0^x \varphi(z) \sin \frac{\omega}{c} (x - z) dz - \frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{\pi mx}{L}. \quad (2.3.39)$$

## 2.4 Многомерные задачи. Волноводы и резонаторы

Задачи о распространении волн в волноводах (прежде всего, электромагнитных и акустических) представляют собой примеры волновых процессов в многомерных ограниченных и частично ограниченных системах.

1. Распространение электромагнитных волн  $E$  – типа в круглом волноводе с идеально проводящими стенками [15, 17].

Волновод представляет собой полость (трубу) неограниченной длины. Вдоль одной из осей (для определенности –  $z$ ) возможно распространение бегущих волн, в поперечном направлении волна является стоячей, причем в общем случае волны в волноводе не являются поперечными. Волны, у которых  $E_z \neq 0$ ,  $H_z = 0$ , называют волнами *электрического типа* ( $E$ -волнами), а волны с  $H_z \neq 0$ ,  $E_z = 0$  – волнами *магнитного типа* ( $H$ -волнами). Типы волн, которые могут распространяться в волноводе, определяются путем решения уравнений:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \vec{H} = 0; \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (2.4.1)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями.

Будем решать задачу (2.4.1) методом Фурье, положив  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]$ . В результате система (2.4.1) сводится к граничной задаче:

$$\Delta \vec{E} + \left( \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0, \quad (2.4.2)$$

$$\Delta \vec{H} + \left( \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \vec{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = 0. \quad (2.4.3)$$

Положив  $E_z \neq 0$ ,  $H_z = 0$ , из (2.4.2), (2.4.3) получим:

$$\begin{aligned} \Delta E_X + \kappa^2 E_X &= 0; \quad \Delta E_Y + \kappa^2 E_Y = 0, \quad \Delta E_Z + \kappa^2 E_Z = 0, \\ \Delta H_X + \kappa^2 H_X &= 0; \quad \Delta H_Y + \kappa^2 H_Y = 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Система (2.4.4) должна быть дополнена граничным условием для тангенциальной составляющей электрического поля на стенке волновода:

$$E_z(S) = 0, \quad (2.4.5)$$

где  $S$  – уравнение поверхности стенки. Нетрудно видеть, что для определения компонент электрического и магнитного поля достаточно одного из уравнений системы (2.4.4):

$$\Delta E_z + \kappa^2 E_z = 0. \quad (2.4.6)$$

Остальные компоненты могут быть выражены через  $E_z$  с использованием уравнений Максвелла. В цилиндрической системе координат уравнение (2.4.5) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 E_z = 0. \quad (2.4.7)$$

Полагая  $E_z(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ , получим:

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \Phi \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 R \Phi &= 0 \xrightarrow{\cdot \Phi^{-1} R^{-1}} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 &= -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 &= m^2, \\ -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2 &\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Общее решение уравнения (2.4.8) имеет вид  $\Phi(\varphi) = \Phi_0 \sin(m\varphi + \psi_m)$ . Это решение в силу условия однозначности должно быть периодическим по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , откуда  $m$  – целое.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\kappa^2 r^2 - m^2) R = 0. \quad (2.4.9)$$

Общее решение уравнения (2.4.9) имеет вид:

$$R(r) = AJ_m(\kappa r) + BK_m(\kappa r). \quad (2.4.10)$$

Из условия конечности функции  $R(r)$  в (2.4.10) следует  $B = 0$ . Тогда частные решения уравнения (2.4.7), соответствующие числу  $m$ , имеют вид:

$$E_z(r, \varphi) = J_m(\kappa r) \sin(m\varphi + \psi_m). \quad (2.4.11)$$

Из полной системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} = 4\pi \vec{\rho} &\Rightarrow \frac{\rho=0}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)] &\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + ik_z E_z = 0. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla \vec{B} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)] &\Rightarrow_{H_z=0} \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi \vec{J}}{c} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &\Rightarrow_{\vec{J}=0} \\ \vec{i} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \vec{k} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) &= \\ = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} (\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z) & \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\Rightarrow \\ \vec{i} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \vec{k} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) &= \\ = \frac{i\omega}{c} (\vec{i} H_x + \vec{j} H_y + \vec{k} H_z) & \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Из второго уравнения этой системы (2.4.11) – (2.4.15), равенства коэффициентов при  $\vec{k}$  в третьем и выражения (2.4.11) следуют выражения для  $H_r$  и  $H_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
H_r(r, \varphi) &= -\frac{im\omega}{\kappa^2 cr} J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \psi_m), \\
H_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{i\omega}{\kappa c} \frac{dJ_m(\kappa r)}{dr} \sin(m\varphi + \psi_m).
\end{aligned}
\tag{2.4.16}$$

Из первого уравнения системы (2.4.11) – (2.4.15), равенства коэффициентов при  $k$  во втором и выражения (2.4.11) следуют выражения для  $E_r$  и  $E_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
E_r(r, \varphi) &= \frac{ik_z}{\kappa} \frac{dJ_m(\kappa r)}{dr} \sin(m\varphi + \psi_m), \\
E_\varphi(r, \varphi) &= \frac{imk_z}{\kappa^2 r} J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \psi_m).
\end{aligned}
\tag{2.4.17}$$

Значения параметра  $k$  определяются из граничных условий

$$E_r(a, \varphi) = 0, E_\varphi(a, \varphi) = 0. \tag{2.4.18}$$

Отсюда имеем  $\kappa_{mn}a = j_{mn}$ , где  $j_{mn}$  –  $n$ -й корень  $m$ -й функции Бесселя. Фазы  $\psi_m$  определяются условиями возбуждения волн. Видно, что распространение волн возможно, если  $k_z = \sqrt{\omega^2 c^{-2} - \kappa^2} \in \text{Re} \Rightarrow \omega^2 > c^2 j_{mn}^2 / a^2$ .

Отсюда, в частности, следует, что у волноводов существует граничная частота  $\omega_0 > \frac{cj_{mn}}{a}$ , ниже которой распространение волн в волноводе невозможно.

2. Применение обобщенного метода Фурье в задаче полого волновода треугольного сечения.

Наглядным примером реализации преимуществ обобщенного метода Фурье (ОМФ) перед классическим при решении прикладных задач электродинамики является задача полого волновода треугольного сечения (рис. 13), оболочка которого принимается за идеально проводящую, а внутренняя среда является однородной.

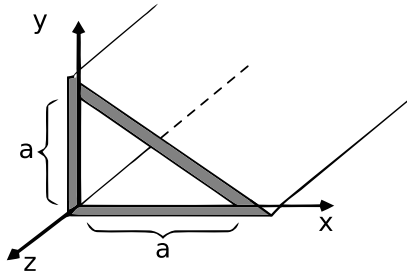


Рисунок 13. Полый волновод треугольного сечения

Такая модель в большинстве случаев оказывается удовлетворительной для практических расчетов. При необходимости она уточняется путем учета потерь в металле. Поиск векторов электромагнитного поля обычно замыкается на рассмотрение уравнения Гельмгольца, которому должны удовлетворять компоненты этих векторов:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + kF = 0. \quad (2.4.19)$$

Пространственная задача о распространении волн в подобной продольно-однородной структуре сводима к решению двумерного уравнения Гельмгольца путем классического отделения переменной  $z$ , т.е. представления искомой функции в виде:

$$F(x, y, z) = f(x, y)Z(z). \quad (2.4.20)$$

Уравнение для  $f(x, y)$  при этом принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda f = 0. \quad (2.4.21)$$

Здесь неизвестна не только функция  $f(x, y)$  но и параметр  $\lambda$ , имеющий смысл поперечного волнового числа. Само по себе уравнение (2.4.21) не имеет определенных решений с физической



точки зрения. Необходимо поставить краевую (граничную) задачу. Известно, например из [2], что для определения семейства  $E$ -волн той или иной направляющей структуры с однородной средой и при идеализации проводящих границ надо найти решения краевой задачи, содержащей, помимо уравнения (2.4.21), условие:

$$f(x, y) = 0 \text{ на } L, \quad (2.4.22)$$

где под  $L$  понимается идеально проводящий контур поперечного сечения полого волновода или совокупность контуров в более сложных случаях. В нашем примере, как видно из рисунка 13, в качестве  $L$  выступает прямоугольный равнобедренный треугольник. Применяя для решения этой задачи классический метод Фурье, представляя искомую функцию в виде:

$$f(x, y) = X(x)Y(y), \quad (2.4.23)$$

можем получить следующее общее решение для рассматриваемого уравнения:

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin \lambda_x x + C_2 \cos \lambda_x x, \\ Y(y) = C_3 \sin \lambda_y y + C_4 \cos \lambda_y y. \end{cases} \quad (2.4.24)$$

Неопределенные константы, содержащиеся в данном решении, должны быть определены из граничных условий, но получаемая при этом система уравнений не имеет нетривиальных решений. Следовательно, решение (2.4.24) не удовлетворяет поставленной краевой задаче. Можно пойти по пути расчленения замкнутого контура на отрезки, что, безусловно, вызовет увеличение количества краевых задач, требующих решения. Этого можно избежать, используя ОМФ. Представляя искомую функцию в виде:

$$f(x, y) = X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y), \quad (2.4.25)$$

уравнение (2.4.21) приводится к билинейному виду:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) Y_1(y) + \\
& + \left( \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) Y_2(y) + \\
& + X_1(x) \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + X_2(x) \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

На следующем этапе применения ОМФ необходимо построить матрицу функций билинейного уравнения, которая в нашем случае выглядит так:

$$[i, f_i, g_i] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) & Y_1(y) \\ 2 & \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) & Y_2(y) \\ 3 & X_1(x) & \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} \\ 4 & X_2(x) & \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \tag{2.4.27}$$

Следуя теории реализации ОМФ, используя эту матрицу, можно построить следующие системы разделенных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) - a_{21} \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) = 0, \\ X_1(x) - a_{31} \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) = 0, \\ X_2(x) - a_{41} \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) = 0, \\ Y_1(y) + a_{21} Y_2(y) + a_{31} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{41} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \tag{2.4.28}$$

$$\begin{cases}
X_1(x) - a_{31} \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) - a_{32} \left( \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) = 0, \\
X_2(x) - a_{41} \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) - a_{42} \left( \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) = 0, \\
Y_1(y) + a_{31} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{41} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0, \\
Y_2(y) + a_{32} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{42} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0.
\end{cases} \quad (2.4.29)$$

$$\begin{cases}
X_2(x) - a_{41} \left( \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) - \\
- a_{42} \left( \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) - a_{43} X_1(x) = 0, \\
Y_1(y) + a_{41} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0, \\
Y_2(y) + a_{42} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0, \\
\frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{43} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0.
\end{cases} \quad (2.4.30)$$

Приведенные системы отличаются функциями, входящими в их базис, и их количеством. Анализ этих систем указывает, что только система (2.4.26) может иметь решения, удовлетворяющие требованию линейной независимости искомых функций по каждой переменной. Решение системы (2.4.26) при условии  $a_{32} = 0$ ,  $a_{41} = 0$  имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}}x\right), \\ X_2(x) = C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}}x\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}}x\right), \\ Y_1(y) = C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) + C_6 \cos\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right), \\ Y_2(y) = C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) + C_8 \cos\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right). \end{array} \right. \quad (2.4.31)$$

Это решение содержит восемь неопределенных коэффициентов и постоянные разделения  $a_{32} = 0$ ,  $a_{41} = 0$ , которые определяются из граничных условий.

Условие по оси  $x$ , имеющее вид  $f(x, 0) = 0$ , приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} & C_1 C_6 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}}x\right) + C_2 C_6 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}}x\right) + \\ & + C_3 C_8 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}}x\right) + C_4 C_8 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}}x\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

из которого:  $C_6 = 0$ ,  $C_8 = 0$ . Условие по оси  $y$ , ( $f(0, y) = 0$ ), приводит к уравнению:

$$C_2 C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) + C_3 C_7 \cos\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) = 0, \quad (2.4.33)$$

из которого полагаем:  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 0$ . Условие по гипотенузе рассматриваемого треугольника, имеющее вид  $f(y, -ay) = 0$ , приводит к уравнению:

$$\begin{aligned}
& C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}(y-a)\right) C_5 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) + \\
& + C_4 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}(y-a)\right) C_7 \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

которое может быть преобразовано к виду:

$$\begin{aligned}
& C_1 C_5 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}a\right) - \\
& - C_1 C_5 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}a\right) + \\
& + C_4 C_7 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}a\right) - \\
& - C_4 C_7 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}a\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.35}$$

Решая данное тригонометрическое уравнение, можно обратить его в тождество при следующих ограничениях на неопределенные постоянные:

$$\begin{aligned}
a_{42} &= \frac{a^2}{\lambda a^2 - \pi^2 m^2}, & a_{31} &= \frac{a^2}{\lambda a^2 - \pi^2 n^2}, \\
\lambda &= \frac{\pi^2(m^2 + n^2)}{a^2}, & |m - n| &= 2k.
\end{aligned} \tag{2.4.36}$$

где  $k, n, m$  – целые ненулевые числа. При этих ограничениях искомая функция принимает следующий вид:

$$f(x, y) = C \left[ \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a} - \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right], \tag{2.4.37}$$

где  $C$  – неопределенная амплитудная константа, появившаяся вследствие следующих обозначений:  $C_1 C_5 = C$ ,  $C_4 C_7 = -C$ .

Возвращаясь к первоначально поставленной задаче об определении семейства  $E$ -волн рассматриваемой направляющей структуры, согласно [2], в качестве  $f(x, y)$  выступают собственные функции  $E_{z_{mn}}$ , имеющие смысл продольной компоненты напряженности электрического поля для волны, определяемой выбором чисел  $m$  и  $n$ . Этим собственным функциям соответствуют собственные значения  $\lambda_{mn}$  из выражения (8.3.32). Полное поле в этом волноводе может быть определено из зависимостей поперечных компонент от  $E_{z_{mn}}$  и  $\lambda_{mn}$ , вытекающих из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} E_X &= \frac{iC\Gamma}{\lambda a} \left[ m \cos \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - n \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi ny}{a} \right], \\ H_X &= \frac{iC\omega\epsilon_0}{\lambda a} \left[ m \sin \frac{\pi mx}{a} \cos \frac{\pi ny}{a} - n \sin \frac{\pi mx}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \right], \\ H_Y &= \frac{iC\omega\epsilon_0}{\lambda a} \left[ m \cos \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - n \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi ny}{a} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

где  $\Gamma = \sqrt{k - \lambda}$  – продольное волновое число, а  $\omega$  – круговая частота волнового процесса.

### 3. Стоячие акустические волны в прямоугольном резонаторе.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон стенками, называется резонатором. Распространение акустических волн в прямоугольном резонаторе с непроницаемыми стенками описывается уравнением [75]:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - u_{s\infty}^2 \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (2.4.39)$$

Будем снова решать задачу, методом Фурье, положив  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}) \exp[-i\omega t]$ .

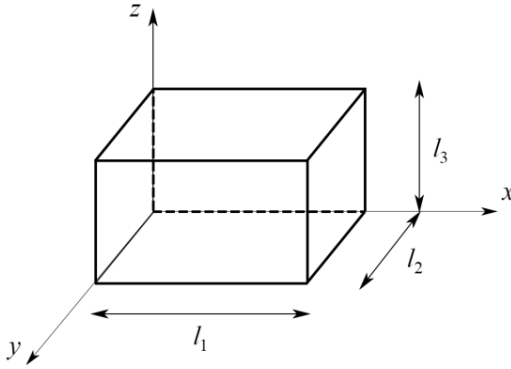


Рисунок 14. Прямоугольный резонатор

В результате уравнение (2.4.39) сводится граничной задаче (скорость частиц на стенке равна нулю):

$$\Delta \vec{v} + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \Delta v_x + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} v_x = 0, \quad (2.4.40)$$

$$\Delta v_y + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} v_y = 0, \quad \Delta v_z + \frac{\omega^2}{u_{S\infty}^2} v_z = 0.$$

$$v_x(0) = v_x(l_1) = 0, \quad v_y(0) = v_y(l_2) = 0, \quad v_z(0) = v_z(l_3) = 0. \quad (2.4.41)$$

Решение задачи (2.4.40) – (2.4.41) имеет вид:

$$v_x(x, y, z) = A \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \cos \frac{\pi n_2}{l_2} y \cos \frac{\pi n_3}{l_3} z,$$

$$v_y(x, y, z) = B \cos \frac{\pi n_1}{l_1} x \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y \cos \frac{\pi n_3}{l_3} z, \quad (2.4.42)$$

$$v_z(x, y, z) = B \cos \frac{\pi n_1}{l_1} x \cos \frac{\pi n_2}{l_2} y \sin \frac{\pi n_3}{l_3} z.$$

## 2.5 Объемные и поверхностные волны в магнитном плазменном слое

Рассмотрим однонаправленное магнитное поле  $\vec{B} = B_0(x)\hat{z}$ , содержащее покоящуюся плазму с равновесными свойствами  $p_0(x)$ ,  $\rho_0(x)$ ,  $T_0(x)$  такими, что  $p_0(x) + B_0(x)^2/(2\mu) = \text{const}$ . Можно показать, что малое возмущение скорости

$$v_{1x} = v_{1x}(x)e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (2.5.1)$$

с волновыми числами  $k_y$  и  $k_z$  в направлении осей  $y$  и  $z$  соответственно удовлетворяет выражению (см. [20])

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\epsilon(x)}{k_y^2 + m_0(x)^2} \frac{dv_{1x}}{dx} \right] = \epsilon(x)v_{1x}, \quad (2.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \rho_0(x)\omega^2 - k_z^2 B_0^2(x)/\mu \equiv \rho_0(x)[\omega^2 - k_z^2 v_a^2(x)], \\ m_0^2(x) &= \frac{(k_z^2 c_s^2 - \omega^2)(k_z^2 v_A^2 - \omega^2)}{(c_s^2 + v_A^2)(k_z^2 c_T^2 - \omega^2)}, \\ v_A^2(x) &= B_0^2(x)/\mu\rho_0(x), \\ c_{s0}^2(x) &= \gamma p_0(x)/\rho_0(x), \\ c_T^2(x) &= \frac{c_{s0}^2(x)v_A^2(x)}{c_{s0}^2(x) + v_A^2(x)}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.5.2) можно записать другим образом:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} (c_s^2 + v_A^2)\rho_0 \frac{dv_{1x}}{dx} \right] = -(\omega^2 - \omega_A^2)\rho_0 v_{1x}, \quad (2.5.3)$$

где  $\omega_A = k_z v_A$  – альфвеновская частота,  $\omega_T = k_z c_T$  – так называемая касповая (или трубочная) частота, соответствующая точке перегиба кривой групповой скорости медленной волны, а  $\omega_+$  и  $\omega_-$  – частоты быстрой и медленных волн, описываемые уравнением

$$\frac{\omega}{k} = \left[ \frac{1}{2}(c_s^2 + v_A^2) \pm (c_s^4 + v_A^4 - 2c_s^2 v_A^2 \cos \theta)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (2.5.4)$$

при  $k_x = 0$ . Таким образом, в присутствии неоднородного магнитного поля  $B_0$ , меняющегося вдоль  $x$ , возмущение скорости  $v_{1x}$  меняется не по синусоидальному закону вдоль  $x$ , а удовлетворяет



уравнению (2.5.4). Функция  $m_0^2$  может быть положительной или отрицательной, поскольку она меняет знак в тех местах, где фазовая скорость  $\omega/k_z$  (предполагаемая действительной величиной) равна скорости звука  $c_s$ , альфвеновской скорости  $v_A$  или касповой (трубочной) скорости  $c_T$ .

Отметим, что в двух случаях уравнение (2.5.2) или (2.5.3) при однородном начальном состоянии (постоянных  $\epsilon$  и  $m_0$ ) можно свести к более простой форме. В первом случае при  $\epsilon = 0$  получим дисперсионное соотношение для альфвеновских волн, а решение, при котором  $v_{1x}$  пропорционально  $e^{i k_x x}$  и  $k_x^2 + k_y^2 + m_0^2 = 0$ , соответствует дисперсионному соотношению для магнитоакустических волн.

Второй простой случай соответствует поперечному распространению (при условии, что  $\omega^2$  и  $\omega_T^2$  не близки друг к другу), при этом  $k_y^2 \gg m_0^2(x)$ . Тогда уравнение (2.5.2) принимает вид:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\epsilon(x)}{k_y^2} \frac{dv_{1x}}{dx} \right] = \epsilon(x) v_{1x}, \quad (2.5.5)$$

соответствующий только альфвеновским возмущениям.

Решения уравнения (2.5.2) в широком диапазоне значений  $x$ , зависящие от соответствующих граничных условий, весьма сложны, и в общем случае могут быть найдены численно. Если профиль составлен из отдельных частей, то решение может быть записано в виде суммы дискретных нормальных мод с различными значениями  $\omega$ , включая как поверхностные, так и объемные волны. Если же профиль непрерывный и в каком-то месте  $v_A(x)$  или  $c_T(x)$  равны  $\omega/k_z$ , то дифференциальное уравнение (2.5.3) имеет там сингулярность. Это приводит к появлению непрерывного частотного спектра, а общее решение состоит из интеграла по некоторому диапазону  $\omega$  в дополнение к возможной сумме дискретных мод.

Рассмотрим простой случай, когда граница между двумя магнитными полями  $x = 0$  разделяет две однородные среды, так что

$$B_0(x) = \begin{cases} B_-, & x < 0, \\ B_+, & x > 0, \end{cases} \quad (2.5.6)$$

где  $B_+$  и  $B_-$  – постоянные величины, а индексы “+” и “-” обозначают значения по обе стороны от границы. Предполагая далее, что  $k_y = 0$ , мы видим, что уравнение (2.5.2) сводится либо к  $\epsilon(x) \equiv 0$ , либо к уравнениям

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_{1x}}{dx^2} = m_-^2 v_{1x}, & x < 0, \\ \frac{d^2 v_{1x}}{dx^2} = m_+^2 v_{1x}, & x > 0, \end{cases} \quad (2.5.7)$$

где  $m_+$  и  $m_-$  – константы, которые определяются аналогично  $m_0$  в начале данного параграфа, только значения альфвеновской и звуковой скоростей соответствуют области  $x > 0$ . В области  $x < 0$  существуют два основных класса решений уравнения (2.5.7).

1) *Несвязанные состояния* соответствуют волнам, распространяющимся из бесконечности, либо в бесконечность. Эти волны могут отражаться, либо проходить через границу. Частоты этих волн таковы, что  $m_-^2 < 0$ , а возмущения имеют вид  $v_{1x} \sim \exp\{i(-m_-^2)^{1/2}x\}$ . Примером такой волны может быть волна утечки (leaky mode), которая распространяется от границы. При отсутствии границы эти волны превращаются в нормальные (объемные) волны в однородной среде.

2) *Связанные состояния* соответствуют волнам, затухающим до нуля на  $-\infty$  по закону  $e^{m_-x}$ . Следовательно, они существуют при  $m_-^2 > 0$ . Эти поверхностные волны обязаны своим существованием наличию границы раздела и не могут образовываться при ее отсутствии (то есть при  $B_- = B_+$  и  $\rho_- = \rho_+$ ).

При  $m_-^2 > 0$  и  $m_+^2 > 0$  существуют решения в виде дискретных магнитоакустических поверхностных волн:

$$v_{1x} \sim \begin{cases} e^{m-x}, & x < 0, \\ e^{-m+x}, & x > 0. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Граничные условия на границе раздела (непрерывность  $v_{1x}$  и полного давления) приводят к тому, что дисперсионное соотношение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v_{A-}^2 - \frac{\rho_+ m_-}{\rho_+ m_- + \rho_- m_+} (v_{A-}^2 - v_{A+}^2). \quad (2.5.9)$$

Можно заметить, что их фазовые скорости лежат между альфвеновскими скоростями  $v_{A-}$  и  $v_{A+}$  в двух средах, но тот факт, что  $m_-$  и  $m_+$  являются функциями частоты  $\omega$ , означает, что возможно несколько таких решений.

В частном случае, когда вторая среда имеет пренебрежимо малое магнитное поле ( $B_+ = 0$ ), уравнение (2.5.9) можно привести к виду:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\rho_- m_+}{\rho_- m_+ + \rho_+ m_-} v_{A-}^2, \quad (2.5.10)$$

где  $m_+^2$  превращается в  $m_+^2 = k^2 - \omega^2/c_{se}^2$ . Следовательно, у уравнения (2.5.10) всегда есть решение в виде медленной поверхностной волны с  $\omega/k$  меньше как  $c_{T-}$ , так и  $c_{S+}$ . Однако при  $c_{S+} > c_{S-}$  и  $v_{A-} > c_{S-}$  существует также быстрая поверхностная волна, у которой  $\omega/k$  больше  $c_{S-}$ , но меньше, чем  $c_{S+}$  и  $v_{A-}$ .

## ГЛАВА 3 ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Анализ распространения волн в неоднородных средах можно провести аналитически для значительно более узкого класса задач, чем в однородных.

### 3.1 Распространение монохроматической электромагнитной волны в плазме

Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в плазме, концентрация которой меняется линейно  $n = n_0 z$  при отсутствии поглощения. Процесс описывается системой волна – электрон атома:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0, m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \eta \frac{d\vec{r}}{dt} = e\vec{E}. \quad (3.1.1)$$

В соответствии со сказанным будем искать решение системы (3.1.1) в виде  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ . При этом задачу можно решать последовательно, вначале находя вынужденное решение второго уравнения этой системы (амплитуда собственных колебаний при условии  $\eta \ll \omega$  практически несущественна). Оно имеет вид:

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (3.1.2)$$

Дипольный момент единицы объема равен

$$\vec{P} = \sum e\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0 n}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}, \text{ а электрическая индукция } \vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$$

Тогда проницаемости имеют вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \frac{4\pi e^2 n}{m} \stackrel{\gamma \ll \omega}{\approx} 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \mu = 1. \quad (3.1.3)$$

В результате первое уравнение системы (3.1.1) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{E}}{dz^2} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \bar{E} = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 \bar{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} \right) \bar{E} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2 \bar{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{4\pi e^2 n_0 z}{m\omega^2} \right) \bar{E} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Будем считать волну плоской и введем обозначение  $z_1 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) E = 0 &\Rightarrow \\ \frac{d^2 E}{d(z_1 - z)^2} + \frac{\omega^2}{c^2 z_1} (z_1 - z) E = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 E}{d(z_1 - z)^2 \left( \frac{\omega^2}{c^2 z_1} \right)^{2/3}} + \left( \frac{\omega^2}{c^2 z_1} \right)^{1/3} (z_1 - z) E = 0 &\Rightarrow \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} \xi = \left( \frac{\omega^2}{c^2 z_1} \right)^{1/3} (z_1 - z) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0. \end{aligned}$$

Будем решать уравнение (3.1.5), используя преобразование Фурье, представляя напряженность электрического поля в виде:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk, \quad E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (3.1.6)$$

Подставляя первое соотношение в (3.1.5), используя правила дифференцирования преобразования Фурье [114], получим:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk, \quad E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk, + \xi \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk = 0 \quad \begin{matrix} E(k)=u \\ \xrightarrow{\xi e^{ik\xi} dk=dv} \end{matrix} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} E(k) (ik)^2 e^{ik\xi} dk + E(k) \frac{\xi}{i\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} e^{ik\xi} \frac{dE(k)}{dk} dk = 0. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Окончательно имеем:

$$\frac{dE(k)}{dk} + ik^2 E(k) = 0. \quad (3.1.9)$$

Решение этого уравнения имеет вид  $E(k) = C \exp(-ik^3/3)$ . Возвращаясь к исходным переменным, получаем с учетом нечетности синуса:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= A' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right)} dk = \\ &= A \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk \right] = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk = A \cdot Ai(-\xi). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Асимптотики функции  $Ai(z)$  (функции Эйри) имеют вид [104, 110]:

$$E(\xi) = \begin{cases} \frac{A}{\xi^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & \xi \rightarrow \infty, \\ \frac{A}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} |\xi|^{3/4}\right) & \xi \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Поле экспоненциально затухает внутрь среды.

## 3.2 Приближенные методы анализа волновых процессов

Решение даже линейных уравнений, описывающих тот или иной волновой процесс, далеко не всегда может быть получено точно, что связано со свойствами сред. В таких случаях для описания волновых процессов надо применять приближенные методы, часть из которых приведена ниже.

### 3.2.1 Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для распределенных систем аналогичен методу итераций для систем с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим этот метод в применении к задаче о формировании стоячих волн в консервативных системах с коэффициентами, зависящими от пространственных координат.

Уравнения, описывающие волны данного типа (их часто называют колебаниями в распределенных системах, более того, и последнее словосочетание часто опускают), можно представить в форме:

$$A(x) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \hat{L} \vec{u} = 0, \quad (3.2.1)$$

где  $A(x)$  – квадратная матрица с коэффициентами  $a_{ik}(x)$ ,  $\hat{L}$  – операторная матрица, элементы которой являются линейными дифференциальными операторами вида:

$$L_{ik} = \frac{\partial^{m_{ik}}}{\partial x^{m_{ik}}} + b_{ik}^{m_{ik}-1}(x) \frac{\partial^{m_{ik}-1}}{\partial x^{m_{ik}-1}} + \dots + b_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + b_{ik}^{(0)}(x). \quad (3.2.2)$$

Полагая  $\vec{u}(x, t) = \vec{y}(x) \exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – действительное число, для  $n$ -й собственной формы  $y_n(x)$  получим уравнение:

$$\hat{L} \vec{y}_n - A(x) \omega_n^2 y_n = 0 \quad (3.2.3)$$

с граничными условиями:

$$U(\bar{y}_n; \omega_n) = \sum_{j=0}^{m_k} \left( A_j \frac{\partial^{(j)} \bar{y}_n}{\partial x^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{\partial^{(j)} \bar{y}_n}{\partial x^j} \Big|_{x=l} = 0 \right). \quad (3.2.4)$$

Наименьшую по величине собственную частоту  $\omega_1$  и соответствующую ей собственную форму  $\bar{y}_1(x)$  можно найти следующим образом.

Выберем произвольно некоторую вектор-функцию  $\bar{f}(x)$ . Чтобы метод быстрее сходился, желательно, чтобы вектор-функция  $\bar{f}(x)$  удовлетворяла граничным условиям (3.2.4) и была близка к искомой функции  $\bar{y}_1(x)$ . Вектор-функция следующего приближения  $\bar{f}_1(x)$  находится как решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$\hat{L}\bar{f}_1 = A(x)\bar{f}. \quad (3.2.5)$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (3.2.4) можно выразить через матричную функцию Грина  $G(x, \xi)$ :

$$\bar{f}_1(x) = \int_0^l G(x, \xi) A(\xi) \bar{f}(\xi) d\xi. \quad (3.2.6)$$

В ряде задач функцию  $G(x, \xi)$  удается найти аналитически. Повторяя ту же операцию над функцией  $\bar{f}_1(x)$  и т.д. получим функцию  $m$ -го приближения:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(x) &= \int_0^l G(x, \xi) A(\xi) \bar{f}_1(\xi) d\xi \stackrel{um.o.}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \bar{f}_m(x) = \int_0^l G(x, \xi) A(\xi) \bar{f}_{m-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Покажем, что для достаточно больших  $m$ :

$$\bar{f}_m(x) = C_m \bar{y}_1(x), \quad C_m = const; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_{m-1}}{C_m} = \omega_1^2. \quad (3.2.8)$$



Пронумеруем все собственные частоты системы в порядке возрастания их величины и разложим функцию  $\vec{f}(x)$  в ряд по собственным функциям  $\vec{y}_n(x)$ :

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \vec{y}_j(x). \quad (3.2.9)$$

Подставляя (3.2.9) в выражение (3.2.6) для  $\vec{f}_1(x)$  и учитывая, что

$$\int_0^l G(x, \xi) A(\xi) \vec{y}_j(\xi) d\xi = \frac{\vec{y}_j(\xi)}{\omega_j^2}, \text{ получаем:}$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^2} \vec{y}_j(x) \Rightarrow \vec{f}_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^4} \vec{y}_j(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{f}_m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^{2m}} \vec{y}_j(x). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Выражение (3.2.10) можно переписать иначе:

$$\vec{f}_m(x) = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left[ \alpha_1 \vec{y}_1(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j \left( \frac{\omega_1}{\omega_j} \right)^{2m} \vec{y}_j(x) \right]. \quad (3.2.11)$$

Из этого выражения следует, что при достаточно большом  $m$  и  $\alpha_1$  второй член в квадратных скобках будет мал по сравнению с первым членом, т.е. утверждение (3.2.8) справедливо.

Для определения второй собственной частоты  $\omega_2$  и соответствующей ей собственной формы  $\vec{y}_2(x)$  необходимо вектор-функцию нулевого приближения  $\vec{f}(x)$  и всех последующих приближений ортогонализировать к вектор-функции  $\vec{z}_1(x)$ , представляющей собой первую собственную форму сопряженной краевой задачи. В каждом конкретном случае функция  $\vec{z}_1(x)$  может быть легко выражена через функцию  $\vec{y}_1(x)$ .

Вследствие ортогональности вектор-функций  $\vec{f}_0(x)$  и  $\vec{z}_1(x)$  постоянная  $\alpha_1$  в выражении (3.2.11) будет равна нулю, и вектор-функция  $\vec{f}_m(x)$  будет стремиться к  $C_m \vec{y}_2(x)$ . Операцию ортогонализации можно проделать следующим образом.

Добавим к некоторой выбранной функции  $\vec{f}(x)$  функцию  $\vec{y}_1(x)$ , умноженную на такой скалярный множитель  $\beta$ , чтобы

$$\int_0^l (\vec{z}_1(x) [\vec{f}(x) + \beta \vec{y}_1(x)]) dx = 0. \quad (3.2.12)$$

Вектор-функция первого приближения  $\vec{f}_1(x)$  определяется как решение неоднородного уравнения (3.2.5), в правую часть которого вместо функции  $\vec{f}(x)$  ставится функция  $\vec{f}_0(x) = \vec{f}(x) + \beta \vec{y}_1(x)$ . Хотя можно убедиться, что вектор-функция  $\vec{f}_1(x)$  должна быть ортогональна к вектор-функции  $\vec{z}_1(x)$ , при практических расчетах, вследствие различного рода погрешностей, ее следует снова ортогонализировать к функции  $\vec{z}_1(x)$ . Продолжая процесс итераций, можно приближенно найти собственную функцию и частоту  $\vec{y}_2(x)$  и  $\omega_2$ .

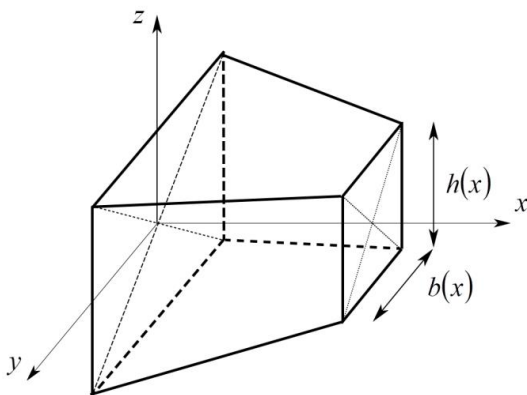


Рисунок 15. Неоднородный волновод прямоугольного сечения

Аналогичным путем в принципе можно искать и более высокие собственные частоты и соответствующие им собственные функции. Однако приемлемая точность вычисления обеспечивается лишь для низших частот. Основная трудность при использовании метода последовательных приближений заключается в вычислении функции Грина.

Найдем функцию Грина для поперечных изгибных колебаний неоднородной балки прямоугольного сечения, см. рис. 15. Такие колебания описываются уравнением:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (3.2.13)$$

где  $u(x, t)$  – смещение каждой точки поперечного сечения с координатой  $x$  от положения равновесия,  $\rho(x)$  – погонная масса балки (масса балки на единицу длины),  $E$  – модуль Юнга материала

балки,  $I(x) = b(x) \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} \eta^2 d\eta$  – момент инерции поперечного сечения

с координатой  $x$  относительно оси проходящей через центр масс и параллельной оси  $z$ . Граничными условиями для консольной балки длины  $l$  будут:

$$u(0, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0; \quad \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0 \quad (3.2.14)$$

Подставляя в (3.2.13) выражение  $u(x, t) = y(x) \exp(i\omega t)$ , получим следующее уравнение для  $y(x)$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI(x)}{EI(0)} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{\rho(x)}{EI(0)} \omega^2 y. \quad (3.2.15)$$

Функция Грина должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI(x)}{EI(0)} \frac{d^2 G}{dx^2} \right) = \delta(x - \xi) \quad (3.2.16)$$

с граничными условиями

$$G(0, \xi) = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 G}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=l} = 0. \quad (3.2.17)$$

Обозначив  $EI(x)/EI(0) = \varepsilon(x)$  и интегрируя уравнение (3.2.16) с учетом этих условий, последовательно находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \varepsilon(x) \frac{d^2 G}{dx^2} \right) &= \theta(x - \xi) \Rightarrow \varepsilon(x) \frac{d^2 G}{dx^2} = \begin{cases} x - \xi, & x < \xi, \\ 0, & x > \xi, \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{\int dx dG}{dx} &= \begin{cases} \int_0^x \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta, & x < \xi \\ \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta, & x > \xi \end{cases} \Rightarrow \\ G(x, \xi) &= \begin{cases} \int_0^x \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta d\xi, & x < \xi, \\ \int_0^\xi \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta d\xi + (x - \xi) \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta d\xi, & x > \xi. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

### 3.2.2 Асимптотический метод

Этот метод используется для получения оценки больших по модулю собственных значений той или иной краевой или смешанной задачи. Этот метод идейно близок методу ВКБ. Рассмотрим линейную автономную задачу:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \hat{L} \vec{u} \quad (3.2.19)$$

с граничными условиями

$$U(\bar{u}) = \sum_{j=0}^m \left( A_j \frac{\partial^{(j)} \bar{u}}{\partial x^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{\partial^{(j)} \bar{u}}{\partial x^j} \Big|_{x=l} = 0 \right), \quad (3.2.20)$$

где  $L_{ik} = a_{ik}^{(m)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} + a_{ik}^{(m-1)} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} + \dots + a_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + a_{ik}^{(0)}(x)$ .

Применим к системе (3.2.19) – (3.2.20) преобразование Лапласа по времени, умножим получившееся уравнение на  $(\hat{A}^{(m)})^{-1}$  и получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \hat{L} \bar{u} & \quad \Rightarrow \quad s \bar{y}(x, s) = \hat{L} \bar{y} \Rightarrow \\ \bar{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{st} \bar{y}(x, s) ds & \quad (\hat{A}^{(m)})^{-1} \\ \frac{d^m \bar{y}}{dx^m} + \hat{A}_1(x) \frac{d^{m-1} \bar{y}}{dx^{m-1}} + \dots + \hat{A}_m(x) \bar{y} = s \hat{B}(x) \bar{y}, & \quad (3.2.21) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$U(\bar{y}, s) = \sum_{j=0}^m \left( A_j \frac{d^{(j)} \bar{u}}{dx^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{d^{(j)} \bar{u}}{dx^j} \Big|_{x=l} = 0 \right). \quad (3.2.22)$$

Решение системы (3.2.21), (3.2.22) следует искать в виде суперпозиции частных решений уравнения (3.2.22):

$$\bar{y}_{ij}(x) = \exp \left[ \int_0^x \rho_{ij}(\xi) d\xi \right] \sum_{r=0}^{\infty} s^{-r/m} \bar{u}_{ij}^{(r)}(x), \quad (3.2.23)$$

где  $\rho_{ij}(x)$  –  $j$ -ое значение функции  $(sb_i(x))^{1/m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Подставим эти соотношения в уравнения (3.2.21) и приравняем друг другу слагаемые при одинаковых степенях  $s$ :

$$\begin{aligned}
& \circ s^1 : b_i(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} = \hat{B}(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} \Rightarrow \bar{u}_{iji}^{(0)} \neq 0, \bar{u}_{ijk}^{(0)} = 0, k \neq i \Rightarrow \\
& \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \frac{d\bar{u}_{iji}^{(0)}}{dx} + \left[ \frac{m-1}{2m} \frac{d \ln b_i(x)}{dx} + \frac{a_{ii}(x)}{m} \right] \bar{u}_{iji}^{(0)} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bar{u}_{iji}^{(0)} = C(b_i(x))^{\frac{m-1}{2m}} \exp \left( - \int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi / m \right) \tag{3.2.24} \\
& \stackrel{(6),(7)}{\Rightarrow} \bar{u}_{ijk}^{(1)} = -C \frac{a_{ki}(x)(b_i(x))^{(m-1)/2m}}{b_i(x) - b_k(x)} \exp \left( - \frac{1}{m} \int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $a_{ij}(x)$  – компоненты матрицы  $\hat{A}_1(x)$ . Чтобы получить  $\bar{u}_{iji}^{(1)}$ , надо приравнять слагаемые при  $p^{1-2m}$ . При этом также находятся функции  $\bar{u}_{ijk}^{(2)}$ . Продолжая рассуждения, можно получить решение с любой степенью точности.

Общее решение уравнения (3.2.21) имеет вид:

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} \bar{y}_{ij}(x). \tag{3.2.25}$$

Зная  $\bar{y}_{ij}(x)$ , можно в соответствии с граничными условиями (3.2.20) составить характеристическое уравнение и вычислить собственные значения. Далее определяются константы  $C_{ij}$  и соответствующие собственные функции.

• **Случай  $m = 2$ .**

Система (3.2.21), (3.2.22) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 = sb_1(x)y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 = sb_2(x)y_2, \end{cases} \tag{3.2.26}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) &= 0, \\ \beta_1 y_1(l) + \beta_2 y_2(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

При этом  $k$ -е частное решение системы (3.2.26) имеет вид:

$$y_{ij}(x) = \exp \left[ s \int_0^x b_k(\xi) d\xi \right] \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} u_{ik}^{(m)}(x), \quad i = 1; 2. \quad (3.2.28)$$

Подставим это решение в (3.2.26) и сократим получившиеся урав-

нения на  $\exp \left[ s \int_0^x b_k(\xi) d\xi \right]$ :

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \left[ \frac{du_{1k}^{(m)}}{dx} + (s(b_k(x) - b_1(x)) + a_{11}(x))u_{1k}^{(m)} + a_{12}(x)u_{2k}^{(m)} \right] \right] &= 0, \\ \left[ \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \left[ \frac{du_{2k}^{(m)}}{dx} + (s(b_k(x) - b_2(x)) + a_{22}(x))u_{2k}^{(m)} + a_{21}(x)u_{1k}^{(m)} \right] \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Приравнивая друг другу слагаемые при одинаковых степенях  $s$ , получим цепочку уравнений, из которых последовательно определяются функции  $u_{ik}^{(m)}(x)$ :

$$\begin{aligned} u_{ik}^{(0)} &= \delta_{ik} \exp \left( - \int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi \right), \\ u_{kk}^{(1)} &= \Xi_k(x) \exp \left( - \int_0^x a_{kk}(\xi) d\xi \right), \\ u_{ik}^{(1)} &= \frac{a_{ik}(x)}{b_i(x) - b_k(x)} \exp \left( - \int_0^x a_{kk}(\xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

где

$$\Xi_1(x) = \int_0^x \frac{a_{12}(\xi)a_{21}(\xi)d\xi}{b_1(\xi) - b_2(\xi)}, \quad \Xi_2(x) = -\Xi_1(x). \quad (3.2.31)$$

С точностью до слагаемых первого приближения получаем:

$$y_i(x) = C_i \left( 1 + \frac{\Xi_i(x)}{s} \right) \exp \left[ \int_0^x (sb_i(\xi) - a_{ii}(\xi)) d\xi \right] + \frac{C_j}{s} \frac{a_{ij}(x)}{b_i(x) - b_j(x)} \exp \left[ \int_0^x (sb_j(\xi) - a_{jj}(\xi)) d\xi \right]. \quad (3.2.32)$$

Здесь  $i, j = 1; 2$ . Решения нулевого приближения  $y_{11}$  и  $y_{22}$  имеют смысл двух невзаимодействующих волн, распространяющихся друг напротив друга. В первом приближении возникают встречные отраженные волны  $y_{12}$  и  $y_{21}$ .

Подставляя (3.2.32) в граничные условия к уравнению (3.2.26), получаем линейную однородную систему для коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\alpha_1 \left( C_1 + \frac{C_2}{s} \frac{a_{12}(0)}{b_1(0) - b_2(0)} \right) + \alpha_2 \left( C_2 + \frac{C_1}{s} \frac{a_{21}(0)}{b_2(0) - b_1(0)} \right) = 0, \quad (3.2.33)$$

$$\beta_1 \left\{ \begin{aligned} & C_1 \left( 1 + \frac{\Xi_1(l)}{s} \right) \exp \left[ \int_0^l (sb_1(\xi) - a_{11}(\xi)) d\xi \right] \\ & + \frac{C_2}{s} \frac{a_{12}(l)}{b_1(l) - b_2(l)} \exp \left[ \int_0^l (sb_2(\xi) - a_{22}(\xi)) d\xi \right] \end{aligned} \right\} + \beta_2 \left\{ \begin{aligned} & C_2 \left( 1 + \frac{\Xi_2(l)}{s} \right) \exp \left[ \int_0^l (sb_2(\xi) - a_{22}(\xi)) d\xi \right] \\ & + \frac{C_1}{s} \frac{a_{21}(l)}{b_2(l) - b_1(l)} \exp \left[ \int_0^l (sb_1(\xi) - a_{11}(\xi)) d\xi \right] \end{aligned} \right\} = 0. \quad (3.2.34)$$

Условие наличия нетривиального решения этой системы принимает вид:



$$\begin{aligned}
& \left\{ \alpha_1 \beta_2 + \frac{\alpha_1}{s} \left[ \frac{\beta_1 a_{12}(l)}{b_1(l) - b_2(l)} + \beta_2 \Xi_2(l) \right] + \frac{\alpha_2}{s} \frac{\beta_2 a_{21}(0)}{b_2(0) - b_1(0)} \right\} \times \\
& \times \exp \left( s \int_0^l b_2(\xi) d\xi - \int_0^l a_{22}(\xi) d\xi \right) - \\
& - \left\{ \alpha_2 \beta_1 + \frac{\alpha_2}{s} \left[ \frac{\beta_2 a_{21}(l)}{b_2(l) - b_1(l)} + \beta_1 \Xi_1(l) \right] + \frac{\alpha_1}{s} \frac{\beta_1 a_{12}(0)}{b_1(0) - b_2(0)} \right\} \times \\
& \times \exp \left( s \int_0^l b_1(\xi) d\xi - \int_0^l a_{11}(\xi) d\xi \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Это условие позволяет вычислить значения  $s$ , а решение (3.2.32) при этих значениях  $s$  и  $C_2 = \frac{s\alpha_1[b_2(0) - b_1(0)] + \alpha_2 a_{21}(0)}{s\alpha_2[b_1(0) - b_2(0)] + \alpha_1 a_{12}(0)}$  определяет собственные функции.

**Пример 1. Собственные колебания неоднородной балки.**

Продольные колебания неоднородной балки описываются уравнением

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \tag{3.2.36}$$

где  $u(x, t)$  – смещение частиц балки от положения равновесия,

$\rho(x)$  и  $g(x) = b(x) \int_0^{s(x)} E ds$  – погонные масса и упругость балки,  $E$  –

модуль Юнга. Граничными условиями для балки длины  $l$ , где один конец свободный, другой – закреплен будут  $u(0, t) = 0$ ,

$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ . Пусть  $u(x, t) = y(x) \exp(i\omega t)$ , тогда:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d \ln g}{dx} \frac{dy}{dx} + k^2(x) = 0, \tag{3.2.37}$$

где  $k(x) = \omega \sqrt{\rho(x)/g(x)}$ . Частные решения уравнения (3.2.37) ищутся в виде:

$$y_{1;2}(x) = \exp \left[ \pm i \int_0^x k(\xi) d\xi \right] \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega)^{-m} u_{1;2}^{(m)}(x). \quad (3.2.38)$$

Подставим

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d \ln g}{dx} \frac{dy}{dx} + k^2(x) = 0 \quad \xRightarrow{\substack{y_{1;2}(x) = \exp \left[ \pm i \int_0^x k(\xi) d\xi \right] \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega)^{-m} u_{1;2}^{(m)}(x) \\ \text{собирая члены с одинаковыми степенями } \omega,}} \quad (3.2.39)$$

$$\begin{cases} u_{1;2}^{(0)}(x) = [\rho(x)g(x)]^{1/4} \\ u_{1;2}^{(1)}(x) = \pm \Xi(x) u_{1;2}^{(0)}(x) \end{cases}$$

где

$$\Xi(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{\omega}{k(\xi)} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{k(\xi)} \frac{d^2 k}{d\xi^2} + \frac{1}{g(\xi)} \frac{d^2 g}{d\xi^2} - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g(\xi)} \frac{dg}{d\xi} \right)^2 - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{k(\xi)} \frac{dk}{d\xi} \right)^2 \end{aligned} \right] d\xi \text{ и т.д.}$$

Положим  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  и подставим  $y(x)$  в граничные условия, тогда получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\left[ i \int_0^x k(\xi) d\xi \right]} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{u_1^{(m)}(l)}{(i\omega)^m} + \frac{1}{k(l)(i\omega)^m} \frac{du_1^{(m)}}{dx} \Big|_{x=l} \right] - \\ - C_2 e^{\left[ -i \int_0^x k(\xi) d\xi \right]} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{u_2^{(m)}(l)}{(i\omega)^m} - \frac{1}{k(l)(i\omega)^m} \frac{du_2^{(m)}}{dx} \Big|_{x=l} \right] = 0. \end{cases} \quad (3.2.40)$$

Ограничиваясь здесь слагаемыми первого приближения, получаем характеристическое уравнение вида:

$$\exp \left[ 2i \int_0^l k(x) dx \right] = -1 - \frac{1}{k(l)} \frac{d \ln(kg)}{dx} \Big|_{x=l} - 2\Xi(l) \xrightarrow[\partial \omega / i \omega]{\text{сточностью}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_m = \frac{(2m+1)\pi}{2} \frac{1}{\int_0^l \sqrt{\frac{\rho(x)}{g(x)}} dx} - \frac{1}{k(l)} \frac{d \ln(kg)}{dx} \Big|_{x=l} - 2\Xi(l) \quad (3.2.41)$$

где  $m = 1, 2, \dots$ .

Первое слагаемое в выражении для собственной частоты совпадает с соответствующей собственной частотой однородного стержня, в котором фазовая скорость распространения волны равна

$$v = l \left[ \int_0^l \sqrt{\rho(x)/g(x)} dx \right]^{-1},$$

а второе слагаемое определяет поправку к ней за счет неоднородности сечения. Собственные функции в данном приближении принимают вид:

$$y_m(x) = \left( \frac{\rho(x)}{g(x)} \right)^{1/4} \left[ \sin \left( \int_0^l k_m(\xi) d\xi \right) - \frac{\Xi(x)}{2\omega_m} \cos \left( \int_0^l k_m(\xi) d\xi \right) \right], \quad (3.2.42)$$

где  $k_m(x) = \omega_m \sqrt{\rho(x)/g(x)}$ .

**Пример 2. Электромагнитная волна в среде с плавно меняющейся диэлектрической проницаемостью.**

Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью, плавно меняющейся вдоль оси  $x$ , и магнитной проницаемостью, равной единице. В результате получим уравнение [2]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon(x)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.43)$$

с условием  $\partial \ln \varepsilon / \partial \ln x \ll 1$ . Будем полагать волну монохроматической и интересоваться ее стационарным распространением:

$$E(x, t) = E(x)e^{i\omega t} + \text{к.с.} :$$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E(x) = 0. \quad (3.2.44)$$

Сделаем замену  $E(x) = \exp\left(\int_0^x u dx\right)$ . В результате из (3.2.44)

получим уравнение Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( u \exp\left(\int_0^x u dx\right) \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \exp\left(\int_0^x u dx\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} \exp\left(\int_0^x u dx\right) + u^2 \exp\left(\int_0^x u dx\right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \exp\left(\int_0^x u dx\right) &= 0 \Rightarrow \quad (3.2.45) \\ \Rightarrow \Rightarrow \frac{du}{dx} + u^2 + k^2 \varepsilon(x) &= 0. \end{aligned}$$

В плавно неоднородной среде имеет место условие  $\frac{\lambda}{\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{k\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll k$ , то есть волновое число  $k$  – большой параметр. В соответствии с этим будем искать решение уравнения (4) в виде ряда по  $k$  [2] (аналог ВКБ – приближения в квантовой механике [61]:

$$u(x) = ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} + \dots \quad (3.2.46)$$

Подставляя (3.2.46) в (3.2.45), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} \right) + \\ + \left( ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} \right)^2 + k^2 \varepsilon(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Тогда имеем

- в порядке  $k^2$ :  $k^2 u_0^2(x)^2 + k^2 \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow u_0(x) = \pm i \sqrt{\varepsilon(x)}$ ;
- в порядке  $k^1$ :

$$\frac{k du_0(x)}{dx} + 2ku_0(x)u_1(x) = 0 \Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2u_0(x)} \frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \ln \sqrt{\varepsilon(x)} \right).$$

Знаки в решении  $u_0$  соответствуют прямой и встречной волнам. Возвращаясь к исходным переменным, имеем окончательно:

$$E(x) = \frac{A}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} \exp\left(-ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx\right) + \frac{B}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} \exp\left(ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx\right). \quad (3.2.48)$$

Отметим, что т.к. в этом приближении  $A; B = const$ , то рассеяния волн на неоднородностях и преобразования энергии волн друг в друга не происходит.

### 3.3 Периодически неоднородные среды

Снова рассмотрим цепочку RLC – контуров с емкостной связью (см. рис. 16). Применим *первое правило Кирхгофа* к  $n$ -му узлу, а второе – к  $n$ -му контуру.

Вновь положим характерный размер отдельной ячейки равным  $l$  и будем считать пространственный масштаб движений в цепочке много большим  $l$ . Считая емкость меняющейся вдоль цепочки, мы можем записать:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{dq_n}{dt} + I_{n+1} \quad \begin{array}{l} I_{n+1}(t) \leftrightarrow I(x+l, t) \approx I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} l \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t); q_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{array} \Rightarrow \\ \Rightarrow I(x, t) &= \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} l \Rightarrow \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{l} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad \begin{array}{l} q(x, t) = C(x)U(x, t) \\ \Rightarrow \end{array} \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\frac{C(x)}{l} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$I_n R - L \frac{dI_n}{dt} - \frac{q_n}{C_n} + \frac{q_{n-1}}{C_{n-1}} = 0 \quad \begin{array}{l} q_{n-1}(t) \leftrightarrow q(x-l, t) \approx q(x, t) - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} l \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t); q_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{array} \Rightarrow$$

$$I(x, t) R - L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - \frac{q(x, t)}{C(x, t)} + \frac{q(x, t)}{C(x, t)} - \frac{\partial \left( \frac{q(x, t)}{C(x, t)} \right)}{\partial x} l = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\begin{array}{l} U(x, t) = \frac{q(x, t)}{C(x)} \\ \Rightarrow \end{array} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = I(x, t) \frac{R}{l} - \frac{L}{l} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}.$$

Вводя емкость, индуктивность и сопротивление единицы длины  $c(x) = \frac{C(x)}{l}$ ,  $\ell = \frac{L}{l}$ ,  $r = \frac{R}{l}$ , приходим окончательно к *телеграфным уравнениям*:

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -c(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = I(x, t) r - \ell \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}. \quad (3.3.3)$$

Дифференцируя второе уравнение системы (3.3.3) по координате и воспользовавшись первым, получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - \ell c(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + r c(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.3.4)$$

Пренебрежем потерями в линии и введем обозначение  $v_0^2 = 1/\ell c_0$ . Разложим выражение для емкости в  $\cos$  – ряд Фурье

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nKx). \text{ Будем искать решение уравнения (3.3.4)}$$

в виде  $U(x, t) = u(x, t) e^{i\omega t}$ . В результате приходим к *уравнению Хилла*:

$$\frac{d^2 U(x, t)}{dx^2} + \frac{\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nKx)}{v_0^2} U(x, t) = 0. \quad (3.3.5)$$

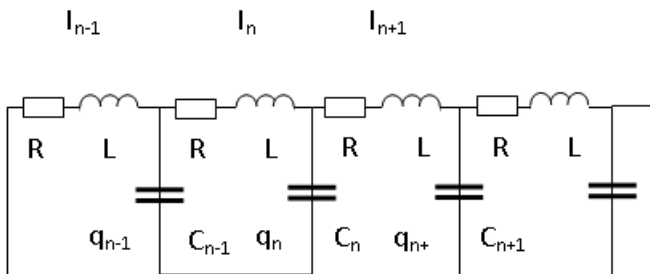


Рисунок 16. Цепочка RLC – контуров

Если в разложении для  $c(x)$  отличны от нуля только коэффициенты  $c_0$  и  $c_1$ , причем  $c_1 \ll c_0$ , приходим к *уравнению Матье*. Однако в этом случае зонам параметрической неустойчивости соответствуют так называемые *зоны непронуждения* – волн с такими параметрами *не существует* [2, 8, 68, 76].

## ГЛАВА 4 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. ТИПЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Нелинейные волны удобнее всего классифицировать по характеру взаимодействия друг с другом. Можно выделить три класса: *простые волны* (интерферируют), *солитоны* (взаимодействие сводится к асимптотическому сдвигу фаз волн), *автоволны* (полностью или частично аннигилируют).

### 4.1 Простые волны. Уравнение Римана. Уравнение Бюргерса

#### 4.1.1 Уравнение Римана

Будем полагать, что в линии передачи, рассмотренной в разделе 3.3, емкость конденсаторов является нелинейной функцией напряжения  $c = c(U)$ , а потери отсутствуют ( $r \rightarrow 0$ ):

$$\frac{\partial I|x,t|}{\partial x} = -c(U) \frac{\partial U|x,t|}{\partial t}, \quad \frac{\partial U|x,t|}{\partial x} = -\ell \frac{\partial I|x,t|}{\partial t}. \quad (4.1.1)$$

Будем искать решение системы (4.1.1) в виде так называемой простой волны [1, 2, 17, 18, 75, 77], в которой различные переменные изменяются пропорционально друг другу  $I = I(U)$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + c(U) \frac{\partial U}{\partial t} &= 0, \\ \ell \frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} \pm u(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

где  $u(U) = 1/\sqrt{\ell c(U)}$ . Это квазилинейное уравнение называют *уравнением Римана* [2]. Знаки «+» и «-» соответствуют волнам, бегущим вправо и влево.

Аналогично, уравнения, описывающие одномерные нелинейные волны на несжимаемой мелкой воде без учета трения, также могут быть сведены к уравнению Римана:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0,_{h=h(v)} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{dh}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dh}{dv} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\begin{array}{l} v + g dh/dv = v + h/(dh/dv) \\ \Rightarrow \end{array} \frac{\partial v}{\partial t} + \left( v \pm \sqrt{gh} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

m.e.  $dh/dv = \pm \sqrt{h/g}$

Переходя здесь к переменной  $\xi = x \mp \sqrt{gh}t$ , имеем окончательно  $\frac{\partial v}{\partial t} + u(v) \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$ , где  $u(v) = v$ .

В качестве третьего примера опишем однорядное движение автомобильного потока в отсутствие светофоров [16]. Пусть число автомобилей, проходящих через данную точку шоссе в единицу времени (поток), равно  $q$ , а линейную концентрацию автомобилей (число автомобилей на единицу длины) обозначим как  $n$ . Если число автомобилей на трассе сохраняется, то концентрация потока должна удовлетворять уравнению непрерывности, в приближении простых волн вновь сводящееся к уравнению Римана:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \xrightarrow[u(n)=dq/dn]{q=q(n)} \frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (4.1.4)$$

То же уравнение будет получено в следующем разделе при описании слабых ударных волн в газе без учета процессов вязкости и теплопроводности.

Уравнение (4.1.4) удобнее всего решать методом характеристик [2, 116].

Введем понятие *характеристики дифференциального уравнения* [116]. Для этого рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\sum_{i=1}^N a_i(\bar{x}, n) \frac{\partial n}{\partial x_i} = b(\bar{x}, n), \quad (4.1.5)$$

и пусть функции  $a_i(\bar{x}, n), b(\bar{x}, n)$  принадлежат к классу  $C^1$  на некотором открытом множестве  $G$  пространства переменных  $\bar{x}, n$ , причем на этом множестве  $\sum_{i=1}^N a_i^2(\bar{x}, n) \neq 0$ . Пусть  $n = n(\bar{x})$  – решение уравнения (4), определенное в некоторой области  $D$  пространства переменных  $\bar{x}$ ,  $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$  – кривая, лежащая в  $D$ . Тогда, рассматривая решение  $n = n(\bar{x})$  на этой кривой, получим функцию  $\Xi(\tau) = n(\bar{x}(\tau))$ . Подберем кривую  $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$  так, чтобы ее касательный вектор  $\frac{d\bar{x}}{d\tau}$  в каждой точке был равен  $\bar{a}(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau))$ . Для этого

должны выполняться уравнения  $\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau)), i = \overline{1..N}$ . Дифференцируя функцию  $\Xi(\tau)$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Xi}{d\tau} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial n}{\partial x_i}(\bar{x}(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} = \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial n}{\partial x_i}(\bar{x}(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} a_i(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau)) &= b(\bar{x}(\tau), \Xi(\tau)). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Следовательно, искомая кривая  $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$  в пространстве  $\bar{x}$  должна быть такой, чтобы уравнения  $\bar{x} = \bar{x}(\tau), n = \Xi(\tau)$  определяли траекторию системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}, n), i = \overline{1..N}; \frac{dn}{d\tau} = b(\bar{x}, n). \quad (4.1.7)$$

Система уравнений (4.1.7) называется *характеристической системой* уравнения (4.1.5), а ее траектории в пространстве переменных  $\bar{x}, n$  – характеристиками уравнения (4.1.5). Подчеркнем, что параметр  $\tau$  на характеристике уравнения (4.1.5) определен лишь с точностью до постоянного слагаемого. Кроме того, согласно нашим предположениям, функции  $a_i(\bar{x}, n), b(\bar{x}, n)$  принадлежат

классу  $C^1$  на множестве  $G$ , поэтому для системы уравнений (4.1.7) выполнены условия *теорем существования и единственности*. Обоснованием корректности метода характеристик служат две теоремы [116]:

**Теорема 1.** Если поверхность  $S: n = n(\vec{x})$  класса  $C^1$  в пространстве переменных  $\vec{x}$ ,  $n$  такова, что, какова бы ни была точка  $(\vec{x}_0, n_0)$ , характеристика уравнения (4.1.5), проходящая через  $(\vec{x}_0, n_0)$ , касается  $S$  в этой точке, то  $S$  является интегральной поверхностью уравнения (4.1.5).

**Теорема 2.** Пусть  $n = n(\vec{x})$  – решение уравнения (4.1.5), определенное в некоторой области  $D$ ,  $x = x(\tau)$ ,  $n = \Xi(\tau)$ , ( $\alpha < \tau < \beta$ ) – решение системы (4.1.7). Если при этом кривая  $x = x(\tau)$  ( $\alpha < \tau < \beta$ ) лежит в  $D$  и  $\Xi(\tau_0) = n(\vec{x}(\tau_0))$ , то  $n(\vec{x}(\tau)) = \Xi(\tau)$ . Теорема 2, таким образом, утверждает, что любая интегральная поверхность уравнения (4.1.5) образована некоторым семейством характеристик.

Рассмотрим далее уравнение (4.1.5), и пусть  $S: \vec{x} = \vec{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$  – регулярная  $(N-1)$ -мерная поверхность класса  $C^1$  без самопересечений, параметры  $(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$  изменяются в некоторой области  $T$ ,  $n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$  – функция класса  $C^1$  на  $T$ . Будем решать задачу Коши для уравнения (4.1.5) с начальным условием:

$$n(\vec{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})) = n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}). \quad (4.1.8)$$

Геометрический смысл задачи Коши (4.1.5), (4.1.8) состоит в том, чтобы в пространстве переменных  $\vec{x}$ ,  $n$  через  $(N-1)$ -мерную поверхность  $\Omega: \vec{x} = \vec{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ ,  $n = n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$  провести интегральную поверхность  $n = n(\vec{x})$  уравнения (4.1.5). В силу теоремы 2, всякая характеристика уравнения (4.1.5), проходящая

через любую точку поверхности  $\Omega$ , лежит на искомой интегральной поверхности  $n = n(\bar{x})$ . Проведем через каждую точку поверхности  $\Omega$  характеристику уравнения (4.1.5). Параметр  $\tau$  на ней выберем так, чтобы при  $\tau = 0$  она проходила через точку поверхности  $\Omega$ . Уравнения этих характеристик можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(\tau, \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}), n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})) \\ n &= \Xi(\tau, \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}), n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Здесь  $x_i = \varphi_i(\tau, \bar{x}_0, n_0)$ ,  $i = \overline{1..N}$ ;  $n = \Xi(\tau, \bar{x}_0, n_0)$  – непродолжаемые решения характеристической системы  $\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}, n)$ ,  $i = \overline{1..N}$ ,  $\frac{dn}{d\tau} = b(\bar{x}, n)$ . Завершением формальной части является следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть при  $\alpha < \tau < \beta$  ( $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ) и при всех  $(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}) \in T$  первые из уравнений системы (4.1.9) однозначно разрешимы относительно  $\tau, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ , причем полученные функции  $\tau = \tau(\bar{x})$ ,  $\tau_i = \tau_i(\bar{x})$ ,  $i = \overline{1..N-1}$  принадлежат классу  $C^1$ . Тогда функция

$$n = n(\bar{x}) \equiv \Xi(\tau(\bar{x}), \bar{\xi}(\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_{N-1}(\bar{x})), n_0(\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_{N-1}(\bar{x}))) \quad (4.1.10)$$

является решением задачи Коши для уравнения (4.1.5) с начальным условием (4.1.8).

В приложениях часто встречается задача Коши для уравнения вида:

$$\ddot{\varphi} + (g/I) \sin \varphi = 0 \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N a_i(t, \bar{x}, n) \frac{\partial n}{\partial x_i} = b(t, \bar{x}, n) \quad (4.1.11)$$

со следующим начальным условием:  $n(0, \bar{x}) = n_0(\bar{x})$  (т.е. начальная функция задается на гиперплоскости  $t = 0$  пространства переменных  $t, \bar{x}, n$ ). Нам известно, что интегральная поверхность  $n = n(\bar{x}, t)$ , дающая решение задачи Коши (4.1.11), образована характери-

ками, проходящими при  $\tau = 0$  через поверхность  $t = 0, x_i = \tau_i, n = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1..N}$  в пространстве переменных  $t, \bar{x}, n$  (в качестве параметров на поверхности выбраны сами  $x_i$ ).

Уравнению (10.1.8) в соответствии с вышесказанным соответствует характеристическая система:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \frac{dx_i}{d\tau} = a_i(t, \bar{x}, n), \frac{dn}{d\tau} = b(t, \bar{x}, n), i = \overline{1..N}, \quad (4.1.12)$$

которую можно дополнить начальными условиями:

$$t|_{\tau=0} = 0, x_i|_{\tau=0} = \tau_i, n|_{\tau=0} = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1..N}. \quad (4.1.13)$$

Из первого уравнения системы (4.1.12) и первого начального условия (4.1.13) находим  $t = \tau$ . Оставшиеся уравнения системы (4.1.12) и начальные условия (4.1.13) можно теперь записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= a_i(t, \bar{x}, n), \frac{dn}{dt} = b(t, \bar{x}, n), i = \overline{1..N}, \\ x_i|_{t=0} &= \tau_i, n|_{t=0} = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1..N}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Решив задачу Коши (4.1.14), получим:

$$x_i = x_i(t, \tau_1, \dots, \tau_N), n = \Xi(t, \tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1..N}. \quad (4.1.15)$$

Если первые  $N$  уравнений (4.1.15) однозначно разрешимы относительно  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , то, в силу теоремы 3, формулы (4.1.15) определяют решение задачи Коши (4.1.11). Возвращаясь к решаемой задаче, рассмотрим для уравнения (4.1.4):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

$$\text{задачу Коши со следующим начальным условием: } \frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

. Здесь  $N = 1, a_1 = u(n), b = 0$ . Тогда соотношения (4.1.14) имеют в данном случае вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(t, \bar{x}, n) = u(n), \quad \frac{dn}{dt} = b(t, \bar{x}, n) = 0, \quad (4.1.16)$$

$$x_1|_{t=0} = \xi, \quad n|_{t=0} = n_0(\xi).$$

Решая задачу Коши (4.1.16), получим:

$$\frac{dn}{dt} = 0 \Rightarrow n = c_1 \xRightarrow{n|_{t=0} = n_0(\xi)} c_1 = n_0(\xi); \quad \frac{dx_1}{dt} = u(n) \Rightarrow \quad (4.1.17)$$

$$\Rightarrow x_1 = \int u(n) dt \stackrel{n=n_0(\xi)}{=} u(n_0(\xi))t + c_2 \xRightarrow{x_1|_{t=0} = \xi} c_2 = \xi.$$

Соотношения  $n = n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi$  определяют решение рассматриваемой задачи не для всех значений переменного  $t$ . В самом деле, если при некотором  $t = t_1$  выражение для  $x_1$  разрешимо относительно  $\xi$  не единственным образом, т.е. найдутся такие  $\xi_1 \neq \xi_2$ , что  $u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1 = u(n_0(\xi_2))t_2 + \xi_2$ , то эти соотношения не определяют при  $t = t_1$  никакой однозначной функции  $n = n(\bar{x}, t)$ , и при  $t = t_1$  решение задачи Коши не определено. Геометрический смысл равенства  $u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1 = u(n_0(\xi_2))t_2 + \xi_2$ : при  $t = t_1$  проекции на плоскость  $t, x$  характеристик, соответствующих значениям  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , пересекаются в точке  $t = t_1, x = u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1$ .

1. Пусть  $u(n) = n, n_0(x) = \alpha x, (\alpha > 0)$ .

Тогда имеем

$$n = n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi \Rightarrow \quad (4.1.18)$$

$$\Rightarrow n = \alpha \xi; x = \alpha t \xi + \xi \Rightarrow n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}.$$

Видно, что возможно такое условие, при которых  $\partial n / \partial x \rightarrow \infty$ , т.е. решение становится разрывным:

$$n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty \text{ при } t = -\frac{1}{\alpha} \quad (4.1.19)$$

причем разрыв образуется на переднем фронте волны.

2. Пусть  $u(n) = b - an$ ,  $n_0(x) = \alpha x$ , ( $\alpha > 0$ ).

Тогда имеем

$$\begin{aligned} n &= n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi \Rightarrow n = \alpha \xi; \\ x &= \alpha t \xi + \xi \Rightarrow n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Видно, что возможно такое условие, при которых  $\partial n / \partial x \rightarrow \infty$ , т.е. решение становится разрывным:

$$n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty \text{ при } t = -\frac{1}{\alpha}, \quad (4.1.21)$$

причем разрыв образуется на заднем фронте волны.

Решение уравнения (4.1.4) по аналогии с линейными задачами можно также искать в виде [2]  $n(x, t) = n[x - u(n)t]$  или, обращая решение, в виде:

$$x - u(n)t = \Psi(n). \quad (4.1.22)$$

Т.к. функция  $\Psi$  от времени не зависит, то очевидно  $\Psi(n) = n^{-1}(x, 0)$ . Будем считать, что нам задано начальное условие для уравнения (4.1.4) в виде  $n(x, 0) = \rho(x)$ . Продифференцируем уравнение (4.1.22) по координате, тогда:

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} t = \frac{d\Psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \xrightarrow{t=0} \frac{d\Psi}{dn} = \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0}, \quad (4.1.23)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} &= \left( \frac{d\Psi}{dn} + \frac{du}{dn} t \right)^{-1} = \left( \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0} + \frac{du}{dn} t \right)^{-1} = \\ &= \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right) \Bigg|_{t=0} \left( 1 + \left( \frac{\partial n}{\partial x} \right) \Bigg|_{t=0} \frac{du}{dn} t \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Из соотношения (4.1.24) видно, что возможны такие условия, при которых  $\partial n / \partial x \rightarrow \infty$ , т.е. решение становится разрывным (при

этом, очевидно, еще и  $\partial n / \partial t \rightarrow \infty$ ,  $\partial^2 n / \partial x^2 \rightarrow \infty$ ,  $\partial^2 n / \partial t^2 \rightarrow \infty$  – образуется и перегиб).

Рассмотрим два возможных случая. Пусть  $t > 0$ ,  $(\partial n / \partial x)|_{t=t_0} > 0$ , тогда, т.к. на разрыве, образующемся в момент времени  $t = t_0$  при концентрации  $n = n_0$  имеют место соотношения  $\partial x / \partial n = 0$ ,  $\partial^2 x / \partial n^2 = 0$ , то, дифференцируя соотношение (4.1.22) по  $x$  при  $t = t_0$ , получим, рис. 17:

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} t = \frac{d\Psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{du}{dn} t = \frac{d\Psi}{dn} \xrightarrow[t_0]{t=t_0; n=n_0} - \frac{du}{dn} \Big|_{n=n_0} t_0 = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{n=n_0} . \quad (4.1.25)$$

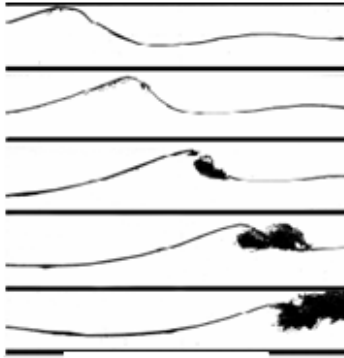


Рисунок 17

Дифференцируя это соотношение по  $n$  при тех же условиях, получим:

$$- \frac{d^2 u}{dn^2} \Big|_{n=n_0} t_0 = \frac{d^2 \Psi}{dn^2} \Big|_{n=n_0} . \quad (4.1.26)$$



Наконец, добавив сюда соотношение (4.1.22) в точке разрыва:

$$x_0 - u(n_0)t_0 = \Psi(n_0), \quad (4.1.27)$$

получаем три уравнения с тремя неизвестными для определения  $t_0, x_0, n_0$ . Такая ситуация имеет место, например, для волн на мелкой воде [28, 42], когда (в сопровождающей системе координат)  $u(n) = n$ . Предположим, что  $n(x, 0) = \sin \omega x$ . Тогда из (4.1.25) – (4.1.27) получим:

$$\begin{aligned} -\frac{du}{dn}\Big|_{n=n_0} t_0 &= \frac{d\Psi}{dn}\Big|_{n=n_0} \xrightarrow{du/dn=1, \Psi=\omega^{-1}\arcsin n} -1 \cdot t_0 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-n_0^2}}, \\ \frac{d^2\Psi}{dn^2}\Big|_{n=n_0} &= 0, \quad x_0 - u(n_0)t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin n_0. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Легко видеть, что в этом случае разрыв образуется на переднем фронте волны. Пусть  $t > 0$ ,  $(\partial n / \partial t)|_{t=0} < 0$ , (такой случай имеет место для автомобильных потоков [16]), тогда разрыв образуется на заднем фронте.

В случае задачи с граничными условиями, параметры разрыва надо находить из условий  $\partial t / \partial n = 0$ ,  $\partial^2 t / \partial n^2 = 0$ .

#### 4.1.2 Слабые ударные волны. Уравнение Бюргера

Будем вновь исходить из системы уравнений Навье-Стокса, которую рассмотрим в одномерном приближении:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (4.1.29)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (4.1.30)$$

$$C_{V\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (4.1.31)$$

$$P = \rho T / M. \quad (4.1.32)$$

Будем полагать коэффициенты вязкости и теплопроводности величинами первого порядка малости и разыскивать решение этой системы в виде ряда теории возмущений  $\rho = \rho_0 + \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$ ,  $T = T_0 + T^{(1)} + T^{(2)}$ ,  $P = P_0 + P^{(1)} + P^{(2)}$ ,  $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$ , где  $\forall A: A^{(1)} \sim \varepsilon^1 \ll 1$ ,  $A^{(2)} \sim \varepsilon^2$ .

Оставляя слагаемые первого порядка малости, получим уравнения [75]:

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad (4.1.33)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = - \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x}, \quad (4.1.34)$$

$$P^{(1)} = \frac{\rho_0 T^{(1)} + T_0 \rho^{(1)}}{M}, \quad (4.1.35)$$

$$C_{V\infty} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} = 0. \quad (4.1.36)$$

Интегрируя последнее уравнение, получим связь между  $T^{(1)}$  и  $\rho^{(1)}$ :

$$\frac{T^{(1)}}{T_0} = \frac{1}{C_{V\infty}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = \frac{C_{P\infty} - C_{V\infty}}{C_{V\infty}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0}. \quad (4.1.37)$$

Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим связь  $P^{(1)}$  и  $\rho^{(1)}$ :

$$P^{(1)} = \frac{T_0(\gamma_\infty - 1)\rho^{(1)} + T_0\rho^{(1)}}{M} = u_{S\infty}^2 \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0}. \quad (4.1.38)$$

Подставляя это соотношение во второе уравнение, получим уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -u_{S\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \right). \quad (4.1.39)$$

Продифференцируем это уравнение по времени, а первое уравнение по координате и вычитая одно из другого, получим:

$$\frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial t^2} + u_{S\infty}^2 \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} + u_{S\infty}^2 \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = 0. \quad (4.1.40)$$

Таким образом, для возмущений первого порядка справедливы связи  $\frac{P^{(1)}}{P_0} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = \frac{T^{(1)}}{T_0} = \frac{v^{(1)}}{u_{S\infty}}$ . Будем искать решение системы

(4.1.40) с использованием метода медленно меняющихся амплитуд, полагая, что в системе отсчета, движущейся со скоростью звуковой волны бесконечно малой амплитуды, зависимость амплитуды от времени является медленной:  $\rho^{(1);(2)} = \rho^{(1);(2)}(\tau, \xi) = \rho^{(1);(2)}(\varepsilon t, x - u_{S\infty} t)$  и т.д. Производные при этом преобразуются в соответствии с соотношениями

$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ . В результате получим:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad (4.1.41)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \varepsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} \right) - u_{S\infty} \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = \\ = - \frac{\partial P^{(2)}}{\partial \xi} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

$$\begin{aligned} C_{V\infty} \left( \varepsilon \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \\ - \frac{T_0}{\rho_0} \left( \varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \\ + (\gamma_\infty - 2) u_{S\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \chi \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2} \delta \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

$$P^{(2)} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + T^{(1)} \rho^{(1)}}{M}. \quad (4.1.44)$$

В слагаемых второго порядка малости можно воспользоваться линейными связями. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + (\gamma_\infty - 1) T_0 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0}}{M} = \\ &= \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + T^{(1)} \rho^{(1)}}{M} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{S_\infty}^2 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S_\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2u_{S_\infty} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad (4.1.46)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \varepsilon \frac{u_{S_\infty}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S_\infty} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{u_{S_\infty}^2}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{u_{S_\infty}^2}{\rho_0} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \\ = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{S_\infty}^2 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0} \right] + \frac{u_{S_\infty}}{\rho_0} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

$$\begin{aligned} C_{V_\infty} \left( \frac{\varepsilon (\gamma_\infty - 1) T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S_\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{(\gamma_\infty - 1) T_0 u_{S_\infty}}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \\ - \frac{T_0}{\rho_0} \left( \varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S_\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{u_{S_\infty}}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \\ + (\gamma_\infty - 2) u_{S_\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \chi (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta u_{S_\infty}}{3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

Упрощая полученную систему (подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются), имеем:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{S_\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2u_{S_\infty} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad (4.1.49)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M u_{S\infty}} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{S\infty} \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0} \right] = \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad (4.1.50)$$

$$C_{V\infty} \left( -u_{S\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left( -u_{S\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} \right) + (\gamma_\infty - 2) u_{S\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \chi (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta u_{S\infty}}{3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}. \quad (4.1.51)$$

Последнее уравнение может быть один раз проинтегрировано, и дает связь  $T^{(2)}$  и  $\rho^{(2)}$ :

$$T^{(2)} \stackrel{c_{V\infty}^{-1} = (c_{P\infty} - c_{V\infty}) c_{V\infty}^{-1} = \gamma_\infty - 1}{=} = (\gamma_\infty - 1) \left[ \frac{T_0 \rho^{(2)}}{\rho_0} - (\gamma_\infty - 2) \frac{T_0 \rho^{(1)2}}{2 \rho_0^2} + \left( \chi + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right]. \quad (4.1.52)$$

Подставим это соотношение во второе уравнение, сложим его с первым, чтобы уничтожились слагаемые  $\rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi}$ , тогда для безразмерного возмущения плотности  $\rho' = (\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) / \rho_0$  получим уравнение Бюргера [62, 75]:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \Psi_\infty \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} = \mu_\infty \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi^2}, \quad (4.1.53)$$

где  $\Psi_\infty = \frac{\gamma_\infty + 1}{2}$  – коэффициент квадратичной нелинейности,

$$\mu_\infty = \frac{1}{2} \left[ \zeta + \frac{4\eta}{3} + \left( \frac{1}{c_{V\infty}} - \frac{1}{c_{P\infty}} \right) \right].$$

Добавим к уравнению (4.1.53) начальное условие  $\rho'(x, 0) = \rho_0(x)$  и решим для него задачу Коши. Для этого вначале

умножим уравнение (4.1.53) на  $\Psi_\infty$  и сделаем замену  $\tilde{\rho} = \Psi_\infty \rho'$ , тогда получим уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} = \mu_\infty \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \xi^2}. \quad (4.1.54)$$

Сделаем далее замену Коула-Хопфа [75]:

$$\tilde{\rho} = -2\mu_\infty \frac{\partial \ln \mathfrak{R}}{\partial \xi} = -\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi}, \quad (4.1.55)$$

и преобразуем уравнение (4.1.54):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) = \\ & = \mu_\infty \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( -\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \\ & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) = \mu_\infty \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \\ & \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^3 \right) = \\ & = \mu_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \right) \\ & - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^3 \right) = \\ & = \mu_\infty \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^3 \mathfrak{R}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\mathfrak{R}^3} \left( \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^3 - \frac{2}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} \right). \quad (4.1.56) \end{aligned}$$

Подчеркнутые одинаковым образом слагаемые взаимно сокращаются, в результате имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \right) &= \mu_{\infty} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^3 \mathfrak{R}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \right) = \mu_{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.57)$$

Интегрируя последнее уравнение по  $\xi$  и умножая на  $\mathfrak{R}$ , имеем линейное параболическое уравнение теплопроводности [112-117]:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} = \mu_{\infty} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2}. \quad (4.1.58)$$

При этом начальное условие преобразуется к виду:

$$\mathfrak{R}(x,0) = \exp \left[ -\frac{1}{2\mu_{\infty}} \int_0^{\xi} \tilde{\rho}_0(\zeta) d\zeta \right]. \quad (4.1.59)$$

Решение задачи Коши имеет вид, определяемый формулой Пуассона:

$$\mathfrak{R}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_{\infty}\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(\zeta, 0) \exp \left[ -\frac{|\xi - \zeta|}{4\mu_{\infty}\tau} \right]. \quad (4.1.60)$$

Другие типы решения уравнения Бюргерса приведены в [75].

## 4.2 Автоволны

### 4.2.1 Волна эпидемии.

#### *Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова.*

#### *Фазовая автоволна переключения*

Рассмотрим динамику эпидемии, которая распространяется по принципу диффузии и передается при контактах с учетом того, что скорость выздоровления пропорциональна числу больных.

Пусть  $n$  – плотность больных,  $N = const$  – плотность населения. Тогда для изменения числа больных в одномерном случае при условии того, что радиус индивидуальной активности субъекта  $R$

много меньше характерного размера системы  $L$ , имеем уравнение [64, 74]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + pn(N - n) - \frac{n}{\tau}, \quad (4.2.1)$$

где  $p$  – константа скорости передачи инфекции при контакте больной – здоровый,  $\tau$  – время выздоровления,  $D \sim R^2/\tau$  – коэффициент подвижности субъектов при случайном перемещении. Здесь  $\tau$  – продолжительность шага при случайном перемещении. Введем безразмерную переменную  $\eta = n/N$ :

$$\frac{N\partial \frac{n}{N}}{\partial t} = D \frac{N\partial^2 \frac{n}{N}}{\partial x^2} + pN \frac{n}{N} \left( N - N \frac{n}{N} \right) - \frac{N \frac{n}{N}}{\tau}. \quad (4.2.2)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + pN\eta(1 - \eta) - \frac{\eta}{\tau}. \quad (4.2.3)$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta(\eta_0 - \eta), \quad (4.2.4)$$

где  $\eta_0 = pN - \tau^{-1}$ . Довольно часто нелинейные волновые процессы являются автомодельными. Условия существования автомодельных решений обсуждаются, например, в [95]. Частным случаем автомодельного решения является решение вида бегущей волны  $f = f(x - ut)$ . Будем разыскивать решение (4.2.4) в виде  $\eta = \eta(\xi) = \eta(x - ut)$ . При этом производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (4.2.5)$$



Тогда получаем в переменной  $\xi$  **обыкновенное!** дифференциальное уравнение:

$$D \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + u \frac{d\eta}{d\xi} + \eta(\eta_0 - \eta) = 0. \quad (4.2.6)$$

Это уравнение легко может быть проанализировано на фазовой плоскости. Для этого представим его в виде пары уравнений первого порядка:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mathcal{G}, \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\xi} = -\frac{u}{D} \mathcal{G} - \frac{\eta(\eta_0 - \eta)}{D}. \quad (4.2.7)$$

Затем находим стационарные решения системы (4.2.7):  $\mathcal{G}_{10} = 0$ ,  $\eta_{10} = 0$  и  $\mathcal{G}_{20} = 0$ ,  $\eta_{20} = 0$ . Линеаризуем эту систему относительно найденных стационарных решений, разыскивая ее решение в виде  $\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}_0$ ,  $\eta = \eta_0 + \eta'$  и оставляя в уравнениях слагаемые только первой степени по  $\mathcal{G}'$ ,  $\eta'$ .

Линеаризация системы (4.2.7) относительно первого стационарного состояния дает:

$$\begin{cases} \frac{d(\eta_{10} + \eta')}{d\xi} = \mathcal{G}_{10} + \mathcal{G}' \Rightarrow \frac{d\eta'}{d\xi} = \mathcal{G}' \\ \frac{d(\mathcal{G}_{10} + \mathcal{G}')}{d\xi} = -\frac{u}{D} (\mathcal{G}_{10} + \mathcal{G}') - \frac{(\eta_{10} + \eta')(\eta_0 - (\eta_{10} + \eta'))}{D} \Rightarrow \end{cases} \quad (4.2.8)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{G}'}{d\xi} = -\frac{u}{D} \mathcal{G}' - \frac{\eta_0 \eta'}{D}.$$

Далее найдем характеристическое уравнение полученной системы. Для этого его решение будем искать в виде  $\mathcal{G}' = A \exp(\lambda \xi)$ ,  $\eta' = B \exp(\lambda \xi)$ .

$$\begin{cases} \frac{d\eta'}{d\xi} = \mathcal{G}' \\ \frac{d\mathcal{G}'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\mathcal{G}' - \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ae^{\lambda\xi} + \lambda Be^{\lambda\xi} = 0 \\ \lambda Ae^{\lambda\xi} + \frac{u}{D}Ae^{\lambda\xi} + \frac{\eta_0 B}{D}e^{\lambda\xi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (4.2.9)$$

$$\begin{array}{l} \text{усл. разрешимости} \\ \Rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda + \frac{u}{D} & \frac{\eta_0}{D} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\lambda^2 + 2\frac{u}{D}\lambda + \frac{\eta_0}{D} = 0. \quad (4.2.10)$$

Корни этого уравнения  $\lambda_{1,2} = \frac{u}{D} \pm \sqrt{\frac{u^2}{D^2} - \frac{\eta_0}{D}}$  при условии  $u^2 \geq \eta_0 D$  всегда действительны и положительны – особая точка (0,0) является неустойчивым узлом. Обратное условие приводит к бессмысленным решениям, соответствующим отрицательному числу больных.

Линеаризация системы (4.2.7) относительно второго стационарного состояния дает:

$$\begin{cases} \frac{d(\eta_{20} + \eta')}{d\xi} = \mathcal{G}_{20} + \mathcal{G}' \Rightarrow \frac{d\eta'}{d\xi} = \mathcal{G}' \\ \frac{d(\mathcal{G}_{20} + \mathcal{G}')}{d\xi} = -\frac{u}{D}(\mathcal{G}_{20} + \mathcal{G}') - \frac{(\eta_{20} + \eta')(\eta_0 - (\eta_{20} + \eta'))}{D} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.2.11)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{G}'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\mathcal{G}' + \frac{\eta_0\eta'}{D}.$$

Снова найдем характеристическое уравнение полученной системы. Решение будем искать в виде  $\mathcal{G}' = A \exp(\lambda\xi)$ ,  $\eta' = B \exp(\lambda\xi)$ . Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{d\eta'}{d\xi} = \mathcal{G}' \\ \frac{d\mathcal{G}'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\mathcal{G}' + \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ae^{\lambda\xi} + \lambda Be^{\lambda\xi} = 0 \\ \lambda Ae^{\lambda\xi} + \frac{u}{D}Ae^{\lambda\xi} - \frac{\eta_0 B}{D}e^{\lambda\xi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (4.2.12)$$

$$\text{усл. разрешимости} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda + \frac{u}{D} & -\frac{\eta_0}{D} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\lambda^2 + 2\frac{u}{D}\lambda - \frac{\eta_0}{D} = 0. \quad (4.2.13)$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{u}{D} \pm \sqrt{\frac{u^2}{D^2} + \frac{\eta_0}{D}} \quad (4.2.14)$$

всегда действительны и имеют разные знаки – особая точка  $(0, \eta_0)$  является седлом. Фазовый портрет системы приведен на рис. 18.

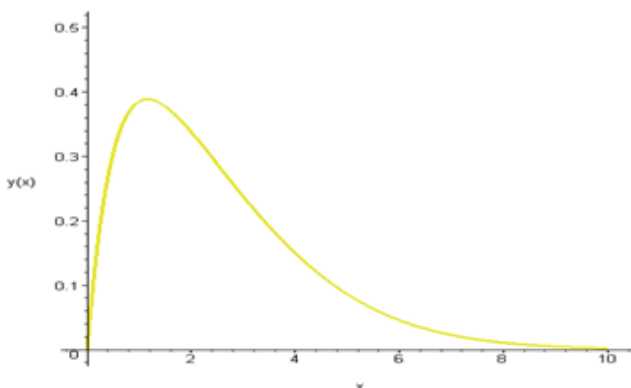


Рисунок 18. Фазовый портрет (4.2.7)

### 4.2.2 Триггерная автоволна переключения

Покажем, что в неравновесной (температура электронов  $T_e$  много больше температуры ионов  $T_i$ ) полностью ионизованной плазме, находящейся во внешнем ВЧ-электрическом поле с учетом джоулева тепловыделения, потерь энергии электронами при соударениях с ионами и электронной теплопроводности, существует автоволна перехода из одного стационарного состояния в другое. Уравнение движения электрона во внешнем поле имеет вид:

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - m\nu_{ei}(\vec{v}_e - \vec{v}_i) \underset{\Rightarrow \nu_e \gg \nu_i}{\overset{m \ll M}{\approx}} -e\vec{E} - m\nu_{ei}\vec{v}_e. \quad (4.2.15)$$

Его решение в поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$  после выделения вещественной части дается выражением

$\vec{v}_e = -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}(v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$ . Баланс энергии в плазме с учетом джоулева тепловыделения, потерь энергии электронами при соударениях с ионами и электронной теплопроводности можно записать в виде:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3}e\vec{v}_e\vec{E} - \delta\nu_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e. \quad (4.2.16)$$

Подставим в (4.2.16) выражение для скорости:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3}e \left[ -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}(v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] \vec{E}_0 \cos \omega t - \delta\nu_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e \quad (4.2.17)$$

и усредним полученное уравнение по периоду колебаний:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3}e \left[ -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}(v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] \vec{E}_0 \cos \omega t - \delta\nu_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e \right\} dt.$$

Т.к.  $2\omega > \delta v_{ei}$ , то температура за это время не может существенно измениться, тогда получаем окончательно:

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 \bar{E}_0^2}{3m(\omega^2 + v_{ei}^2)} - \delta v_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e. \quad (4.2.18)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \theta &= T_e/T_i, b = \omega/v_{ei}, \\ E &= E_0/E_p, r = (\delta v_{ei}/\chi_e)x, \tau = \delta v_e t. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

где  $E_p^2 = (3T_i m/e^2) \cdot \delta(\omega^2 + v_{ei}^2)$  – плазменное поле, тогда получим:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \theta^{-3/2} \frac{E_0^2 \theta^3}{b^2 \theta^3 + 1} - (\theta - 1) + \Delta \theta. \quad (4.2.20)$$

Будем разыскивать решение этого уравнения в виде бегущей волны:  $\theta = \theta(r - ct)$ , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$-c \frac{d\theta}{dt} = \theta^{-3/2} \frac{E_0^2 \theta^3}{b^2 \theta^3 + 1} - (\theta - 1) + \frac{d^2 \theta}{dx^2} = f(\theta) + \frac{d^2 \theta}{dx^2}, \quad (4.2.21)$$

у которого на фазовой плоскости есть три особых точки:  $(\theta_1, 0)$  и  $(\theta_3, 0)$  – седла, а  $(\theta_2, 0)$  – неустойчивый узел или фокус:  $p^2 - cp + f(\theta_i) = 0$ ,  $i = 1; 2; 3$ ,  $f(\theta_1) < 0$ ,  $f(\theta_2) > 0$ ,  $f(\theta_3) < 0$ . Ясно, что при определенных условиях существует фазовая траектория, идущая из седла в седло, которой соответствует волна перехода из одного стационарного состояния в другое. Пренебрегая в зоне интенсивного тепловыделения нестационарными слагаемыми,

получим:  $\frac{d^2 \theta}{dx^2} + f(\theta) = 0$ , откуда после интегрирования имеем:

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_d + \left( 2 \int f(\theta) d\theta \right)^{1/2} = \frac{d\theta}{dx} \Big|_u, \quad (4.2.22)$$

где  $(\theta) = (\theta_d, \theta_u)$  индексы  $u$  и  $d$  обозначают нижнюю и верхнюю границы зоны интенсивного тепловыделения. Основной поток тепла идет на нагрев плазмы перед этой зоной, поэтому

$$(\theta_r)_d > (\theta_r)_u. \text{ В области перед фронтом } f(\theta) \text{ мало, и } \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dx^2},$$

откуда в СО, движущейся со скоростью  $c$ , получаем  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dx^2}$ .

Таким образом,  $c = \left( 2 \int f(\theta) d\theta \right)^{1/2} / (\theta_d - \theta_1)$ . Нетрудно видеть, что

структура фазовой плоскости зависит от величины электрического поля: при  $E = E^*$ , где  $E^*$  следует из условия  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta = 0$ ,

скорость автоволны равна нулю (в силу того, что вне зоны тепловыделения  $f(\theta) \sim \theta$ ,  $\theta_d$  и  $\theta_u$  заменены на  $\theta_1$  и  $\theta_3$ ). При меньших полях автоволна является волной гашения, при больших – зажигания. Состояние  $\theta_1$  при  $E > E^*$ , очевидно, метастабильно и неустойчиво по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри нее возник достаточно крупный зародыш фазы  $\theta_3$ , то он начнет расти, и в результате вся плазма перейдет в наиболее устойчивое состояние благодаря распространению триггерной автоволны перехода [17]. Заметим, что уравнение, описывающее тепловую динамику плазмы, может быть переписано в виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\delta F[\Phi(\theta_1)]}{\delta \theta(r, t)}, \quad (4.2.23)$$

где  $F[\Phi(\theta)] = \int_V \left( \Phi(\theta(r)) + \frac{(\nabla \theta)^2}{2} \right) dr$ ,  $\Phi(\theta) = - \int_1^\theta f(z) dz$ . Поэтому

критический зародыш – абсолютно неустойчивое образование,

сколь угодно малое возмущение формы которого приводит к его росту или гибели, описывается уравнением  $\frac{\partial \Phi[\theta]}{\partial \theta(r,t)} = 0$  или в явном виде:  $f(\theta(r)) + \Delta \theta = 0$ .

Полагая, с учетом симметрии задачи, его сферическим, получаем уравнение  $\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} + f(\theta) = 0$  с граничными условиями  $\frac{d\theta}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \theta(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \theta_1$ .

В большом критическом зародыше падение температуры происходит в узком слое, ширина которого много меньше критического радиуса, поэтому он удовлетворяет уравнению  $\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{2}{r_c} \frac{d\theta}{dr} + f(\theta) = 0, \theta(0) = \theta_3, \theta(r) \rightarrow \theta_1, \text{ при } r \rightarrow \infty$ . Из сравнения этой системы с уравнением автоволны перехода получаем:

$r_c = 2/c$ . Оценка интеграла  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta$  с учетом определения  $E^*$  и явного вида функции  $f$  дает  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta = (E^2 + E^{*2}) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\theta^{3/2} d\theta}{b^2 \theta^3 + 1}$ , от-

куда скорость  $c$  и радиус критического зародыша равны  $c \sim \frac{(E^2 - E^{*2})^{1/2}}{b^{1/6}}, r_c \sim 2b^{1/6} (E^2 - E^{*2})^{1/2}$ .

### 4.3 Солитоны

#### • Уравнение Кортевега – де Вриза

Рассмотрим уравнения, описывающие так называемую ионно-звуковую волну, бегущую в плазме по тяжелой (ионной) компоненте, полагая, что концентрация ионов равна концентрации элек-

тронов  $n_e = n_i$ . Они включают в себя уравнения непрерывности и движения для ионов и уравнение Пуассона для потенциала электрического поля [77].

Мы полагаем, что электроны движутся настолько быстро, что успевают отслеживать движение ионов, находясь с ними в равновесии, так что концентрацию электронов можно описать распределением Больцмана в электрическом поле с потенциальной энергией  $U = -e\varphi$ . Тогда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = eE - \frac{\partial P_i}{\partial x} \stackrel{E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{=} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k_B T_i \frac{\partial n_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e (n_e - n_i) \stackrel{E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left[ n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - n_i \right]. \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Стационарные решения системы (4.3.1) имеют вид:  $\varphi = \varphi_0$ ,  $n_e = n_i$ ,  $v_i = 0$ . Линеаризуем систему (4.3.1) относительно этих значений, разыскивая решения в виде  $n_i = n_0 + n_i'$ ,  $v_i = v_i'$ ,  $\varphi = \varphi'$ , где штрихованные величины первого порядка малости. Тогда получим дисперсионное соотношение:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - k_B T_i \frac{\partial n_i'}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_i'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_i'}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = 4\pi e \left[ n_0 \frac{e\varphi'}{k_B T_e} - n_i' \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k_B (T_e + T_i)}{M}}. \quad (4.3.2)$$



Так как обычно температура ионов много меньше температуры электронов  $T_e \ll T_i$ , то последним слагаемым в первом уравнении системы (4.3.1) можно пренебречь. Введем безразмерные переменные:

$$x = \frac{x}{r_D} = x \sqrt{\frac{4\pi en_0}{k_B T_e}}, \quad t = \omega_p t = t \sqrt{\frac{4\pi en_0}{M}}, \quad \phi = \frac{e\varphi}{k_B T_e},$$

$$n_i = \frac{n_i}{n_0}, \quad v_i = \frac{v_i}{v_{Si}} = v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}},$$
(4.3.3)

тогда получаем:

$$\frac{\sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \partial v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}}}{\sqrt{\frac{M}{4\pi en_0}} \partial \left( \sqrt{\frac{4\pi en_0}{M}} t \right)} + \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}} \frac{\sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \partial v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}}}{\sqrt{\frac{M}{4\pi en_0}} \partial \left( \sqrt{\frac{4\pi en_0}{k_B T_e}} x \right)} =$$

$$= - \frac{e}{M} \frac{\frac{k_B T_e}{e} \partial \frac{e\varphi}{k_B T_e}}{\sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi en_0}} \partial \left( \sqrt{\frac{4\pi en_0}{k_B T_e}} x \right)},$$
(4.3.4)

$$\frac{n_0 \partial \frac{n_i}{n_0}}{\sqrt{\frac{M}{4\pi en_0}} \partial \left( \sqrt{\frac{4\pi en_0}{M}} t \right)} + \frac{n_0 \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \partial \left( \frac{n_i}{n_0} v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}} \right)}{\sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi en_0}} \partial \left( \sqrt{\frac{4\pi en_0}{k_B T_e}} x \right)} = 0,$$
(4.3.5)

$$\frac{\frac{k_B T_e}{e} \partial^2 \frac{e\varphi}{k_B T_e}}{\frac{k_B T_e}{4\pi en_0} \partial \left( \sqrt{\frac{4\pi en_0}{k_B T_e}} x \right)^2} = 4\pi e \left[ n_0 \exp \left( \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right) - n_0 \frac{n_i}{n_0} \right].$$
(4.3.6)

Откуда после приведения имеем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i v_i)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^\phi - n. \quad (4.3.7)$$

Будем искать решение системы (4.3.7), разыскивая его в виде разложения по малому параметру:

$$x = \frac{x}{r_D} = x \sqrt{\frac{4\pi e n_0}{k_B T_e}}, \quad t = \omega_P t = t \sqrt{\frac{4\pi e n_0}{M}}, \quad \phi = \frac{e\varphi}{k_B T_e}, \quad (4.3.8)$$

$$n_i = \frac{n_i}{n_0}, \quad v_i = \frac{v_i}{v_{Si}} = v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}},$$

$$v_i = \varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)} + \dots,$$

$$n_i = 1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)} + \dots, \quad (4.3.9)$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots,$$

Введем новые переменные:

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (4.3.10)$$

Подставляя эти разложения в (4.3.7), получаем:

$$\left( \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)})$$

$$+ (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) = -\varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}), \quad (4.3.11)$$

$$\left( \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)})$$

$$+ (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) = -\varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}), \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}) &= 1 + (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}) \\ &+ \varepsilon^2 \frac{\phi^{(1)2}}{2} - (1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Собирая слагаемые разных порядков, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/2} \left[ -\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} \right] \\ + \varepsilon^{5/2} \left[ \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{e}{M} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

$$\varepsilon^{3/2} \left[ -\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \varepsilon^{5/2} \left[ \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_i^{(2)} + n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (4.3.15)$$

$$\varepsilon^1 (n_i^{(1)} - \phi^{(1)}) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + n_i^{(2)} - \phi^{(2)} \right) = 0. \quad (4.3.16)$$

Выражения в каждой из этих скобок по отдельности должны обращаться в ноль, поскольку представляют собой различные функции переменных  $\xi$  и  $\tau$ . Поэтому получаем:  $\varepsilon^1 : n_i^{(1)} = \phi^{(1)}$ ,

$\varepsilon^{3/2}$ :

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} \Rightarrow \quad (4.3.17)$$

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} \xrightarrow{\int_{\xi}^{\infty} d\xi} n_i^{(1)}; v_i^{(1)}; \phi_i^{(1)} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad v_i^{(1)} = n_i^{(1)} = \phi_i^{(1)}.$$

$\varepsilon^{5/2}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_i^{(2)} + n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} \\
 & \quad n_i^{(2)} = \phi^{(2)} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} \\
 \Rightarrow \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi^{(1)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} &+ \\
 + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} &= 0 \quad \Rightarrow \\
 \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 v_i^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^{(1)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (v_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Собирая слагаемые, приходим к уравнению Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 v_i^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0, \tag{4.3.19}$$

где  $\beta = 1/2$ . Уравнение (4.3.19) имеет решения различного типа: стационарные и нестационарные.

• **Решение вида бегущей волны  $z=x-wt$ .** Обоснование предположения о том, что уравнение (4.3.7) имеет решение подобного вида, достаточно прозрачно. С одной стороны, нелинейное слагаемое в (4.3.19) отвечает за опрокидывание волны. Однако этот процесс сопровождается накоплением на фронте высоких гармоник. С другой стороны, дисперсионное соотношение для уравнения (4.3.7) (в исходной системе координат) имеет вид  $\omega = u_S k - \beta k^3$ , откуда видно, что фазовая и групповая скорости высших гармоник, начиная с некоторых критических значений, уменьшаются с ростом  $k$ . В силу этого нелинейное укрупнение фронта может компенсироваться дисперсионным расплыванием волны. В результате имеем уравнение, которое может быть проинтегрировано [2, 42, 44]:

$$\beta \frac{d^3 v_i'}{dz^3} + v_i' \frac{dv_i'}{dz} - w \frac{dv_i'}{dz} = 0 \implies \beta \frac{d^2 v_i'}{dz^2} + \frac{v_i'^2}{2} - w v_i' = C_1. \quad (4.3.20)$$

Умножим это уравнение на  $\frac{dv_i'}{dz}$  и проинтегрируем это уравнение еще раз:

$$\begin{aligned} & \beta \frac{dv_i'}{dz} \frac{d^2 v_i'}{dz^2} + \frac{dv_i'}{dz} \frac{v_i'^2}{2} - w \frac{dv_i'}{dz} v_i' = C_1 \frac{dv_i'}{dz} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{dv_i'}{dz} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{dv_i'^3}{dz} - \frac{w}{2} \frac{dv_i'^2}{dz} - C_1 \frac{dv_i'}{dz} = 0 \implies \int^{dz} \\ & \frac{\beta}{2} \left( \frac{dv_i'}{dz} \right)^2 + \frac{v_i'^3}{6} - \frac{w v_i'^2}{2} - C_1 v_i' = C_2 \Rightarrow \quad (4.3.21) \\ & \Rightarrow 3\beta \left( \frac{dv_i'}{dz} \right)^2 = -v_i'^3 + 3w v_i'^2 + 6C_1 v_i' + 3C_2 \stackrel{[1], \text{смр.138}}{\implies} \stackrel{1 \text{ способ}}{} \\ & \Rightarrow 3\beta \left( \frac{dv_i'}{dz} \right)^2 = (m_1 - v_i')(m_2 - v_i')(m_3 - v_i') = \varphi(v_i'). \end{aligned}$$

Правая часть последнего уравнения очевидно положительна, а, следовательно, положительна и левая. Таким образом, из условия ограниченности решения при  $\beta > 0$  для колебаний конечной амплитуды  $v_i'$  должна быть ограничена область  $m_2 \leq v_i' \leq m_3$ , т.е. должно быть по крайней мере два действительных корня, и, значит, три корня, так как все коэффициенты функции  $\varphi(v_i')$  действительны ([105] (график  $\varphi(v_i')$  приведен на рис. 19). Связь  $\omega$  и констант  $m_i$  имеет вид ([105], стр. 146):  $w = (m_1 + m_2 + m_3)/3$ . Пусть  $m_1 > m_2 \geq m_3$ , причем  $m_1 \geq w \geq m_2$ .

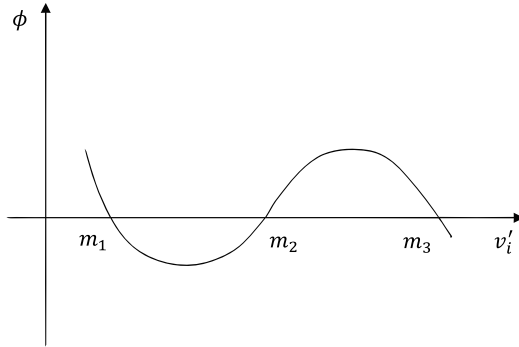


Рисунок 19

1. Если  $m_2 = m_3$ , тогда получаем:

$$\begin{aligned}
 3\beta \left( \frac{dv_i'}{dz} \right)^2 &= (m_1 - v_i')(m_2 - v_i')^2 \quad v_i' = v_i' - m_2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dv_i'}{v_i' \sqrt{m_1 - m_2 - v_i'}} &= \frac{dz}{\sqrt{3\beta}} \quad [2], 192, 11 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{m_1 - m_2}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{m_1 - m_2 - v_i'}}{\sqrt{m_1 - m_2}} &= \frac{z}{\sqrt{3\beta}} \Rightarrow \quad (4.3.22) \\
 \Rightarrow v_i' &= \frac{m_1 - m_2}{ch^2 \left( \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{12\beta}} z \right)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow v_i' &= m_2 + (m_1 - m_2) ch^{-2} \left( \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{12\beta}} z \right).
 \end{aligned}$$

Скорость этого возмущения, называемого солитоном [1, 2, 38, 42] (solitary – уединенный), равна  $w = \frac{m_1 - m_2}{3} + m_2$ .

2. Если  $m_2 > m_3$ , тогда получаем решение в виде так называемых *кноидальных волн*. Процедура его получения выглядит так:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dv_i'}{dz}\right)^2 &= -\frac{1}{3\beta}(v_i'-m_1)(v_i'-m_2)(v_i'-m_3) \xrightarrow{-w_i'=v_i'-m_3} \\
&\xrightarrow{\zeta=\frac{z}{\sqrt{3\beta}}} \left(\frac{dw_i'}{d\zeta}\right)^2 = w_i'(m_3-m_2-w_i')(m_3-m_1-w_i') \xrightarrow{w_i'=(m_3-m_2)v^2} \\
&\xrightarrow{k^2=\frac{m_3-m_2}{m_3-m_1}} \left(\frac{dv}{d\zeta}\right)^2 = (m_3-m_1)(1-v^2)(1-k^2v^2).
\end{aligned}$$

Последнее уравнение – это уравнение для эллиптических функций Якоби [104, 110]. Поэтому:

$$\begin{aligned}
v &= \operatorname{sn}^2 \left[ \sqrt{m_3-m_1} \zeta, \sqrt{\frac{m_3-m_2}{m_3-m_1}} \right] \Rightarrow \\
v_i' &= m_3 - (m_3-m_2) \operatorname{sn}^2 \left[ \sqrt{m_3-m_1} \frac{z}{\sqrt{3\beta}}, \sqrt{\frac{m_3-m_2}{m_3-m_1}} \right].
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

Период и скорость этой волны определяются соотношениями [42]:

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{12\beta}{m_1-m_2}} \sigma K(\sigma), \quad w = m_3 + \frac{2(m_1-m_2)}{3} \frac{2-\sigma^2}{\sigma^2},$$

а  $K(\sigma)$  – полный эллиптический интеграл первого рода [104, 110].

### • Уравнение *sin-Гордон*

Атом твердого тела для большого числа эффектов можно считать классическим объектом, находящемся в периодическом потенциале. Набор атомов при этом можно моделировать цепочкой частиц массы  $m$ , соединенных друг с другом пружинами жесткости  $k$ , причем частицы скользят по синусоидально гофрированной поверхности [23, 44].

Пусть промежуток между частицами цепочки при недеформированном состоянии соединяющих пружин равен  $b$ , период

субсрата  $a$ , положение  $n$ -й частицы  $X_n$ , положение  $n$ -й впадины

$\tilde{x}_n = a\left(n + \frac{3}{4}\right)$ ,  $x_n = X_n - \tilde{x}_n$  – смещение  $n$ -й частицы относительно

но  $n$ -й впадины. Потенциальная энергия частиц в поле тяжести

равна  $U_g = mgh \sum \left(1 + \sin \frac{2\pi X_n}{a}\right) = mgh \sum \left(1 + \cos \frac{2\pi x_n}{a}\right)$ , а потен-

циальная энергия деформации пружины равна:

$U_k = \frac{k}{2} \sum [X_n + 1 - (X_n + b)]^2 = \frac{k}{2} \sum [X_n + 1 - X_n - a + b]^2$ . Введем

обозначения  $\zeta_n = \frac{x_n}{a}$ ,  $P_0 = \frac{a}{b-a}$ ,  $W = 2mgh$ ,  $l_0^2 = ka^2 2W$ , тогда

полная потенциальная энергия системы

$U = U_k + U_g = Wl_0^2 \sum \left(\zeta_{n+1} - \zeta_n - \frac{1}{P_0}\right)^2 + \frac{W}{2} \sum (1 - \cos 2\pi\zeta_n)$ , а

полная кинетическая энергия системы равна

$T = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 = \frac{ma^2}{2} \sum \left(\frac{d\zeta_n}{dt}\right)^2$ .

Для получения уравнения движения  $p$ -й массы воспользуемся Лагранжевым подходом. Используя выражение для функции Лагранжа  $L = T - U$  и уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial \zeta_p}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_p} = 0, \quad (4.3.24)$$

получаем уравнение:

$$ma^2 \frac{\partial^2 \zeta_p}{\partial t^2} + 2l_0^2 (-\zeta_{p+1} + 2\zeta_p - \zeta_{p-1}) + \pi W \sin 2\pi\zeta_p = 0. \quad (4.3.25)$$



Перейдем в уравнении (4.3.25) к непрерывному пределу:

$$\zeta_{n+1}(t) - \zeta_n(t) \approx \zeta(x, t) + \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} + \dots \text{ и, вводя обозна-}$$

чение  $c^2 = \frac{ka^2}{m}$ , получим уравнение

$$\frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\pi}{2l_0^2} \sin 2\pi\zeta = 0. \text{ Вводя новые переменные } \sigma = 2\pi\zeta$$

,  $u = \frac{\pi x}{l_0}$ ,  $v = \frac{\pi ct}{l_0 a}$ , получаем уравнение sin-Гордон:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2} + \sin \sigma = 0, \quad (4.3.26)$$

встречающееся также в теории излучения, квантовой теории поля, других задачах и имеющее солитонные решения. Например, одно-солитонное решение уравнения (4.3.26) имеет вид ([92], раздел 3.3.3]):

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[ \pm \frac{kv + \mu u + \theta}{\sqrt{\mu^2 - k^2}} \right] \right\}, \quad (4.3.27)$$

где  $k$ ,  $\mu$ ,  $\theta$  – произвольные константы.

Кроме уравнения КдВ и sin-Гордон, солитонные решения имеют и некоторые другие уравнения [92, 105, 111], среди которых можно выделить нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u |u|^2 = 0 \quad (4.3.28)$$

и другие.

#### 4.4 Автономные решения нелинейного эволюционного МГД уравнения в плазме с неадиабатическим нагревом и охлаждением

Для описания стационарной структуры одномерных быстрых и медленных магнитогазодинамических волн в плазме с неадиабатическим нагревом и охлаждением необходимо учесть влияние нелинейных слагаемых в исходной системе МГД уравнений. В одномерной геометрии она имеет следующий вид:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \left( B_z \frac{\partial V_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_x \frac{\partial B_z}{\partial z} - V_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}, \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \left( B_z \frac{\partial V_y}{\partial z} - B_y \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_y \frac{\partial B_z}{\partial z} - V_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}, \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad (4.4.3)$$

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \rho V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} B_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad (4.4.4)$$

$$\rho \frac{\partial V_y}{\partial t} + \rho V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} B_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad (4.4.5)$$

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} + \rho V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{4\pi} \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial z} \right), \quad (4.4.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} \rho C_{V\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{k_B T}{m} \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \\ = -\rho \mathfrak{Z}(\rho, T) + \rho \frac{c}{4\pi\sigma} \left( \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$$P = \frac{k_B \cdot T \cdot \rho}{m}. \quad (4.4.9)$$

Процессы нагрева и охлаждения учитываются с помощью обобщенной функции тепловых потерь  $\mathfrak{I}(\rho, T)$  аналогично параграфу 1.4.4. Кроме того, в уравнениях (4.4.1) – (4.4.9) учитывается электрическая проводимость плазмы  $\sigma$ .

Согласно стандартной методике теории возмущения представим возмущения стационарного состояния магнитного поля и плазмы в виде:

$$a(z, t) = a_0 + a_1(z, t) + a_2(z, t), \quad (4.4.10)$$

где  $a_1/a \sim \varepsilon$ ,  $a_2/a \sim \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon \ll 1$  – параметр первого порядка малости.

Здесь под величиной  $a$  понимается какая-либо переменная среды (плотность, давление, температура и т.д.). Нижним нулевым индексом обозначено невозмущенное состояние газа, нижний цифровой индекс обозначает порядок малости возмущения, нижний буквенный индекс обозначает соответствующую ему компоненту векторной величины. Нижний буквенный индекс после запятой означает производную по соответствующей переменной.

После громоздких преобразований с учетом условия слабой дисперсии мы получаем следующее нелинейное уравнения для возмущения плотности  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{\Psi_\infty}{2} \frac{\partial \tilde{\rho}^2}{\partial \tilde{\xi}} - \mu_\infty \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\xi}^2} \right) - \sigma \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{m}{2} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\Psi_0}{2} \frac{\partial \tilde{\rho}^2}{\partial \tilde{\xi}} - \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\xi}^2} \right) = 0. \quad (4.4.11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Psi_\infty = \left( \frac{\gamma_\infty + 1}{2} \right) \frac{\gamma_\infty}{\gamma_{\infty f, s}} \frac{(\gamma_{\infty f, s} - \gamma_a \cos^2 \theta)}{(2\gamma_{\infty f, s} - \gamma_a - \gamma_\infty)} + \frac{3}{2} \frac{(\gamma_{\infty f, s} - \gamma_\infty)}{(2\gamma_{\infty f, s} - \gamma_a - \gamma_\infty)}, \quad (4.4.12)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & \frac{(2\gamma_0 - 1)(\gamma_{0f, s} - \gamma_a \cos^2 \theta)}{\gamma_{0f, s} (2\gamma_{0f, s} - \gamma_a - \gamma_0)} + \frac{3}{2} \frac{(\gamma_{0f, s} - \gamma_0)}{(2\gamma_{0f, s} - \gamma_a - \gamma_0)} - \\ & - \frac{1}{2\mathfrak{I}_{L0T}} \frac{(\gamma_{0f, s} - \gamma_a \cos^2 \theta)}{\gamma_{0f, s} (2\gamma_{0f, s} - \gamma_a - \gamma_0)} \left( \mathfrak{I}_{L0\rho\rho} + \mathfrak{I}_{L0TT} (\gamma_0 - 1)^2 + 2\mathfrak{I}_{L0\rho T} (\gamma_0 - 1) \right), \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

$$m = \frac{(\gamma_0 - \gamma_\infty)}{\gamma_\infty} \frac{(\gamma_{0f,s} - \gamma_a)}{(2\gamma_{0f,s} - \gamma_a - \gamma_0)}, \quad (4.4.14)$$

$$\sigma = \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}}, \quad (4.4.15)$$

$$\mu_\infty = \frac{1}{\tau_0} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{(c_{\infty f,s}^2 - c_\infty^2)}{2c_{\infty f,s}^2 (2c_{\infty f,s}^2 - c_a^2 - c_\infty^2)}, \quad (4.4.16)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\tau_0} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{(c_{0f,s}^2 - c_0^2)}{2c_{0f,s}^2 (2c_{0f,s}^2 - c_a^2 - c_0^2)}, \quad (4.4.17)$$

$$\gamma_a = \frac{c_a^2}{c_T^2} = \frac{2}{\beta_P}, \quad (4.4.18)$$

$$\gamma_{0f,s} = \frac{c_{0f,s}^2}{c_T^2} = \frac{(\gamma_a + \gamma_0) \pm \sqrt{(\gamma_a + \gamma_0)^2 - 4\gamma_0\gamma_a \cos^2 \theta}}{2}, \quad (4.4.19)$$

$$\gamma_{\infty f,s} = \frac{c_{\infty f,s}^2}{c_T^2} = \frac{(\gamma_a + \gamma_\infty) \pm \sqrt{(\gamma_a + \gamma_\infty)^2 - 4\gamma_\infty\gamma_a \cos^2 \theta}}{2}, \quad (4.4.20)$$

В уравнении (4.4.11) используются безразмерные переменные  $\tilde{\xi} = \xi/c_{\infty f,s}\tau_0$ ;  $\tilde{\tau} = \tau/\tau_0$ .

Аналитическое решение и полная классификация всех возможных структур, которые могут быть описаны обобщенным нелинейным акустическим уравнением, представлена в работе [85], а также диссертации Макаряна [86]. Поскольку по форме полученное нелинейное МГД уравнение совпадает с этим акустическим уравнением, то возможна также реализация этих структур в МГД среде. Ниже рассмотрим наиболее важные типы нелинейных стационарных волновых структур, получающихся в результате решения нелинейного эволюционного МГД уравнения, записанного в автомодельной форме.

Для определенности будем проводить описание стационарных волновых структур с помощью уравнения для плотности (4.4.11). Приведем уравнение (4.4.11) к виду, позволяющему описывать стационарные волны, распространяющиеся со скоростью  $D = c_{\infty f, s} + w$ . Для этого воспользуемся следующей автомодельной заменой переменных  $\tilde{\zeta} = \xi - w\tilde{\tau}$ :

$$\begin{aligned} \mu_{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\zeta}^2} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{\zeta}} \left( (w - \sigma \mu_0) - \Psi_{\infty} \tilde{\rho} \right) + \\ + \sigma \left( - \left( w - \frac{m}{2} \right) \tilde{\rho} + \frac{\Psi_0}{2} \tilde{\rho}^2 \right) = const. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Здесь  $const$  – это константа интегрирования по  $\tilde{\zeta}$ . Как указано в [85], уравнение (4.4.21) не имеет аналитических решений при  $\mu_{\infty} \neq 0$ . Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать аналитическое решение, считая коэффициент  $\mu_{\infty} = 0$ .

Для возмущений и их производных, стремящихся к нулю при  $\tilde{\zeta} \rightarrow \infty$ , можно принять константу равной нулю  $const = 0$ . Для подобных возмущений решение может быть записано в неявной форме:

$$\tilde{\zeta} = \zeta_0 + \frac{\sigma \rho_{cr1}}{\rho_i} \ln |\tilde{\rho}| + \frac{\tilde{\sigma} (\rho_i - \rho_{cr1})}{\rho_i} \ln |\tilde{\rho} - \rho_i|. \quad (4.4.22)$$

Величина  $\zeta_0$  – это произвольная постоянная. Кроме этого, введены следующие обозначения:

$$\tilde{\sigma} = 2 \frac{\Psi_{\infty}}{\Psi_0 \sigma}; \quad \rho_i = \frac{2w - m}{\Psi_0}; \quad \rho_{cr1} = \frac{w}{\Psi_{\infty}}; \quad \rho_{cr2} = \frac{m}{\Psi_{\infty} - \Psi_0}. \quad (4.4.23)$$

Как можно видеть из (4.4.22) и (4.4.23), форма решения будет определяться величиной и знаком низкочастотных коэффициентов теплоемкости и низкочастотным коэффициентом нелинейности.

В рамках данного параграфа будем исследовать влияние в первую очередь изоэнтропической (акустической) неустойчивости на динамику бегущих волн. Условия неустойчивости энтропийной моды (изобарической и изохорической неустойчивости) не выполняются, т.е.  $C_{p0} > 0$ ,  $C_{v0} > 0$ .

На рисунке 20 описаны интегральные кривые уравнения (4.4.21), соответствующие трем возможным областям параметров  $\rho_i > \rho_{cr1}$ ,  $\rho_i = \rho_{cr1}$  и  $\rho_i < \rho_{cr1}$ .

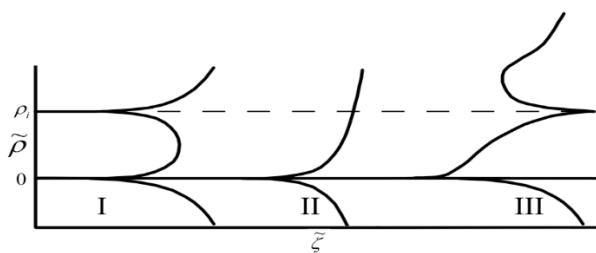


Рисунок 20. Интегральные кривые при различных значениях  $\rho_i$  [86]

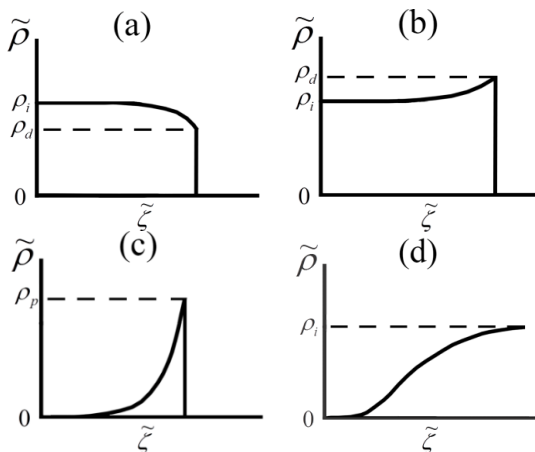


Рисунок 21. Возможные формы решений в отсутствии диссипативных членов [86]: (а) Волна с плавным повышением плотности за фронтом, (б)

Волна с плавным уменьшением плотности за фронтом, (с) Ударный автоволновой импульс, (д) Волна разрежения

Представленные интегральные кривые, позволяют описать четыре типа возможных решения:

1. Волна с плавным повышением плотности за фронтом (рисунок 21a) с разрывом на средней ветви интегральной кривой I (рисунок 20). Согласно [87], данный тип решения существует в среде, где  $\Psi_0 < \Psi_\infty$ , если одновременно выполнены условия  $\rho_i > \rho_{cr2}$  и  $\rho_i > \rho_{cr1}$  (4.4.23), и в среде, где  $\Psi_0 > \Psi_\infty$ , если выполнены условия  $\rho_{cr1} < \rho_i < \rho_{cr2}$ . В связи с тем, что в среде, где  $\Psi_0 > \Psi_\infty$ , для критических значений выполнены неравенства  $\rho_{cr1} > 0$  и  $\rho_{cr2} < 0$ , то волна с плавным повышением плотности за фронтом в данной среде не реализуется. В противоположном случае, когда  $\Psi_0 < \Psi_\infty$ , решение существует, и величина газодинамического скачка определяется величиной  $\rho_d$ , а скорость распространения фронта волны определяется величиной  $w$ :

$$\rho_d = \frac{\Psi_0 \cdot \rho_i + m}{\Psi_\infty}, \quad w = \frac{\Psi_0 \cdot \rho_i + m}{2}. \quad (4.4.24)$$

2. Волна с плавным уменьшением плотности за фронтом (рисунок 21b) с разрывом на верхней ветви, интегральной кривой I (рисунок 20). Данный тип решения существует в среде, где  $\Psi_0 < \Psi_\infty$ , если одновременно выполнены условия  $\rho_{cr1} < \rho_i < \rho_{cr2}$ , и в среде, где  $\Psi_0 > \Psi_\infty$ , если выполнены условия  $\rho_i > \rho_{cr2}$  и  $\rho_i > \rho_{cr1}$ . В отличие от волны с плавным повышением плотности за фронтом, данный тип решения существует при любых отношениях коэффициентов нелинейности друг к другу. Величина газодинамического скачка  $\rho_d$  и скорость фронта определяются аналогично предыдущему решению с помощью выражения (4.4.24). Стоит отметить, что в случае  $\rho_i = \rho_{cr2}$  решение представляет собой ступеньку.

3. Волна разрежения, представленная на рисунке 21d. Данный тип решения соответствует интегральной кривой III, представленной на рисунке 20. Условием реализации данного решения в среде, где  $\sigma > 0$ , является область значений параметров  $\rho_i < \rho_{cr1}$ . Данное решение является эволюционно неустойчивым, и оно не реализуется в среде.

4. Аналитическое решение для случая  $\rho_i = \rho_{cr1} = m/(2\Psi_\infty - \Psi_0)$  описывается интегральной кривой II (рисунок 20). Данной интегральной соответствует решение в виде ударного импульса, представленного на рисунке 21с. Численное моделирование показывает, что условием реализации решения в виде ударного импульса для начальных возмущений в виде слабых ударных волн является  $0 < \rho_i \leq \rho_{cr1}$ . Это решение может существовать только в среде с отрицательной дисперсией. Оно имеет форму сильно асимметричного импульса с амплитудой  $\rho_p$  за передним разрывным фронтом и экспоненциальным спаданием к невозмущенному значению сзади («хвостом»):

$$\tilde{\rho}(\tilde{\zeta}) = \begin{cases} \rho_p \exp\left[\frac{(\tilde{\zeta} - \zeta_0)\sigma\Psi_0}{2\Psi_\infty}\right], & \tilde{\zeta} \leq \zeta_0, \\ 0, & \tilde{\zeta} > \zeta_0, \end{cases} \quad (4.4.25)$$

$$\rho_p = \frac{2w_p}{\Psi_\infty} = \frac{2m}{(2\Psi_\infty - \Psi_0)}; \quad w_p = \frac{m\Psi_\infty}{(2\Psi_\infty - \Psi_0)}. \quad (4.4.26)$$

Данный импульс распространяется в среде со скоростью  $w_p$ .

Важно подчеркнуть, что решение в виде импульса не зависит от начального условия и представляет собой, в отличие от уединённых импульсов консервативных систем (солитонов), автоволну. Тем не менее данные быстрые и медленные МГД структуры также обладают свойством восстанавливать форму после взаимодействия («столкновения») подобно солитонам.



# ГЛАВА 5 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

## 5.1 Трехволновое взаимодействие волн

Пусть в среде с дисперсией и нелинейностью распространяются волны с  $\omega = \omega_j$  и  $k_j = k(\omega_j)$ . В результате взаимодействия из-за нелинейности в среде возникает волна с частотой  $\omega_l = \sum_{j=1} n_j \omega_j$  и волновым вектором  $\vec{k}_l = \sum_{j=1} n_j \vec{k}_j$ . Амплитуда этой волны останется малой, если  $\omega_l$  и  $\vec{k}_l$  не удовлетворяют дисперсионному соотношению  $\omega_l \neq \omega(k_l)$  и нарастает, если  $\omega_l = \omega(k_l)$  (взаимодействие – резонансное). Для наиболее важного случая трех волн условие резонансного взаимодействия (*условие синхронизма*) [2], рис. 22 приобретает вид:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3. \quad (5.1.1)$$

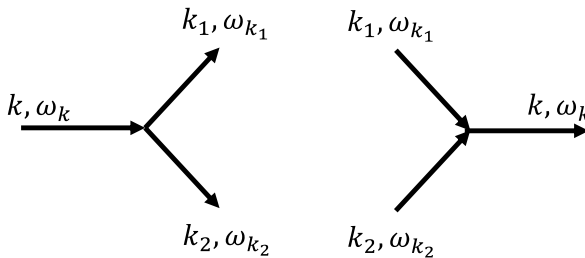


Рисунок 22. Условия фазового синхронизма

Рассмотрим общую схему анализа взаимодействия волн, считая волны одномерными. Пусть некоторое поле в слабонелинейной среде описывается системой уравнений вида:

$$\hat{A} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \hat{C} \bar{u} = \mathcal{E} f \left( \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right), \quad (5.1.2)$$

где  $\vec{u}$  – мерный вектор,  $\varepsilon \ll 1$ . При  $\varepsilon = 0$  поле в среде является суперпозицией гармонических волн:

$$\vec{u} = a \vec{\psi} e^{i\alpha t - ik(\omega)x} + \text{к.с.}, \quad (5.1.3)$$

где  $\alpha$  – комплексная амплитуда, зависящая от начальных и граничных условий,  $\vec{\psi}$  – поляризационный вектор, определяемый системой:

$$\left( i\omega \hat{A} - ik \hat{B} + \hat{C} \right) \vec{\psi} = 0, \quad (5.1.4)$$

а  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным уравнением:

$$D(\omega, k) = \det \left[ \omega \hat{A} - k \hat{B} - i \hat{C} \right] = 0. \quad (5.1.5)$$

Одну из компонент вектора  $\vec{\psi}$  всегда можно положить равной единице, тогда остальные находятся из системы (5.1.5). Будем рассматривать взаимодействие конечного числа волн вида (5.1.3), для которых выполнены условия синхронизма. (То, что условия синхронизма выполнены лишь для конечного числа волн, означает, что система обладает дисперсией).

При  $\varepsilon \ll 1$  решение (5.1.2) будем искать в виде:

$$\vec{u}(x, t) = \sum_j a_j (\varepsilon x, \varepsilon t) \vec{\psi}(\omega_j, k_j) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с.} + \varepsilon \vec{w}(x, t), \quad (5.1.6)$$

заранее предполагая, что амплитуда медленно меняется в пространстве и во времени. Для того, чтобы решение (5.1.6) было справедливым, надо, чтобы поправка  $\vec{w}(x, t)$  не нарастала со временем. Подставляя решение в (5.1.2), получим уравнение для  $w$  в виде:

$$\hat{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \hat{C} \vec{w} = \vec{g}(x, t), \quad (5.1.7)$$

где

$$\bar{g}(x, t) = \sum_j e^{i\omega_j t - ik_j x} \left[ \hat{A} \bar{\psi}(\omega_j, k_k) \frac{\partial a_j}{\partial t} + \hat{B} \bar{\psi}(\omega_j, k_k) \frac{\partial a_j}{\partial x} \right] + \kappa.c. \\ + f \left( \sum_j a_j \bar{\psi}(\omega_j, k_k) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \kappa.c. \right),$$

Чтобы функция  $\bar{w}(x, t)$  при любых  $x, t$  оставалась ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы в правой части системы (5.1.7) отсутствовали резонансные члены, т.е. правая часть должна быть ортогональна собственным функциям линейной задачи. Так как нелинейность полиномиальна, правые части (5.1.7) являются периодическими функциями по  $x, t$ , и их можно представить в виде ряда Фурье:

$$\bar{g}(x, t) = \sum_{r=1}^N \bar{F}_r e^{i\omega_r t - ik_r x} + \kappa.c. \quad (5.1.8) \\ \bar{F}_r = \frac{\omega k}{4\pi^2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \bar{g}(x, t) e^{-i\omega_r t + ik_r x} dx dt.$$

Функции  $\bar{w}(x, t)$  также представляются в виде:

$$\bar{w}(x, t) = \sum_{r=1}^N \bar{W}_r e^{i\omega_r t - ik_r x} + \kappa.c. \quad (5.1.9)$$

После подстановки (5.1.8) и (5.1.9) в (5.1.7) получим, приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, неоднородную систему алгебраических уравнений для определения  $\bar{W} : (i\omega_r \hat{A} - ik_r \hat{B} + \hat{C}) \bar{W}_r = \bar{F}_r$ , откуда  $l$  – компонента вектора

$$\bar{W} \text{ записывается в виде } W_l(\omega_r, k_r) = -\frac{i}{D(\omega_r, k_r)} \sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r),$$

где  $D_{jl}$  – алгебраические дополнения матрицы  $D$ . Если конец

вектора  $(\omega_r, k_r)$  не лежит на дисперсионной кривой, т.е. это не собственная волна системы, то  $\hat{D}(\omega_r, k_r) \neq 0$  и добавок ограничен.

В противном случае  $\vec{W}$  будет секулярно нарастать. Чтобы этого не было, надо изъять из уравнения для добавка резонансный член.

Математически это сводится к выполнению равенства

$$\sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r) = 0. \text{ Так как } D_{jl} = \gamma \zeta_j^* \bar{\psi}_l \text{ } D_{jl}, \text{ где } \zeta_j^* \text{ – собствен-}$$

ные функции сопряженной с системой (5.1.7), последнее условие

можно записать в виде  $\sum_{j=1}^N \zeta_j^* F_j(\omega_r, k_r) = 0$ . Это и есть условие ор-

тогональности. Отсюда с учетом (5.1.8), (5.1.9) для комплексных амплитуд  $a_j$  получим уравнения:

$$\left( \vec{\zeta}, \hat{A} \vec{\psi} \right) \frac{\partial a_j}{\partial t} + \left( \vec{\zeta}, \hat{B} \vec{\psi} \right) \frac{\partial a_j}{\partial x} = \left( \vec{\zeta}, \langle \vec{f}(\omega_j, k_j) \rangle \right), \quad (5.1.10)$$

где

$$\langle \vec{f}(\omega_j, k_j) \rangle = \frac{\omega k}{4\pi^2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \vec{f}(\omega_j, k_j) e^{-i\omega_r t + ik_r x} dx dt.$$

Используя соотношения

$$\frac{\left( \vec{\zeta}, \hat{B} \vec{\psi} \right)}{\left( \vec{\zeta}, \hat{A} \vec{\psi} \right)} = - \frac{\frac{\partial D}{\partial k}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} = \frac{d\omega}{dk} = v_G; \quad \frac{\zeta_l}{\left( \vec{\zeta}, \hat{A} \vec{\psi} \right)} = \frac{D_{lk}}{\psi_k \frac{\partial D}{\partial \omega}}, \quad (5.1.11)$$

запишем последнее выражение в виде:

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_G(\omega_r, k_r) \frac{\partial a_j}{\partial x} = \frac{1}{\psi_j} \frac{\partial D}{\partial \omega} \sum_l D_{lj} \langle f_l \rangle. \quad (5.1.12)$$

Это и есть искомые уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих квазигармонических волн.

**Взаимодействие электромагнитных волн в среде с нелинейной намагниченностью.**

Уравнения Максвелла с учетом связи  $D = E + 4\pi P$  могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial x} &= -\mu j(E), \quad \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \frac{\partial B(H)}{\partial t}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} - R = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \chi E = 0. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Дисперсионное соотношение для электромагнитных волн получаемое путем отбрасывания нелинейных слагаемых и поиска решения в виде  $\sim e^{i\omega t - ikx}$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} D(\omega, k) &= \begin{vmatrix} \omega & -ck & 4\pi\omega & 0 \\ -ck & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2\chi & 0 & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} = \\ &= \omega^2(\omega^2 - \varepsilon\omega_0^2) - c^2k^2(\omega^2 - \omega_0^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Положим, в соответствии с приведенной выше теорией,  $\Psi_E = 1$ .

Тогда:

$$\begin{aligned} \Psi_H &= \frac{1}{D_{11}} \begin{vmatrix} ck & 0 & \omega \\ 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2\chi & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} \Big|_{D_{11} = \omega(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{ck}{\omega}, \\ \Psi_P &= \frac{\omega_0^2\chi}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ \Psi_R &= \frac{i\omega\omega_0^2\chi}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Будем искать решение в виде суммы трех волн:

$$E, H, P, R = \sum_j a_j(\varepsilon x, \varepsilon t) \psi_{E;H;P;R}(\omega_j, k_k) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \kappa.c + \varepsilon \bar{w}(x, t),$$

где частоты взаимодействующих волн и волновые числа удовлетворяют условию (5.1.1), рис. 23. Уравнения для комплексных амплитуд имеют вид:

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial a_j}{\partial x} = \left( \psi_E \frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \sum_l D_{lj} \langle f_l \rangle = f_j, \quad (5.1.16)$$

$$f_j = -D_{11} \left( \frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega_j; k_j} \left\langle \left( \sum_{j=1}^3 a_j e^{i\omega_j t - ik_j x} + \kappa.c \right) e^{-i\omega_j t + ik_j x} \right\rangle - D_{21} \left( \frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \Big|_{\omega_j; k_j}$$

$$\left\langle \frac{\partial B}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^3 \psi(\omega_k, k_k) a_k e^{i\omega_k t - ik_k x} + \kappa.c \right) e^{-i\omega_j t + ik_j x} \right\rangle,$$

$$D_{21} = -ck(\omega^2 - \omega_0^2), \quad \frac{\partial D}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\pi\chi\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Отметим, что если условие (5.1.1) не выполняется, то правая часть уравнения (5.1.16) является быстроосциллирующей и в среднем за достаточно большой промежуток времени дает вклад в уравнение следующего порядка малости.

С учетом конкретного вида нелинейных зависимостей  $j(E) = -(gE + GE^3)$  и  $B(H) = \kappa H^2$  и наличия расстройк частоты и волнового числа  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega$ ,  $k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k$  из (5.1.13) следуют уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = g_1 a_1 + \sigma_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = g_2 a_2 + \sigma_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = g_3 a_3 + \sigma_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} + i\zeta_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t}, \end{cases} \quad (5.1.17)$$

$$\text{где } g_j = \left. \frac{D_{11}}{\partial D} \right|_{\omega_j; k_j} \quad g, \sigma_j = \left. \frac{D_{11}}{\partial D} \right|_{\omega_j; k_j} \quad G, \zeta_j = \left. \frac{D_{21}}{\partial D} \right|_{\omega_j; k_j} \quad \kappa.$$

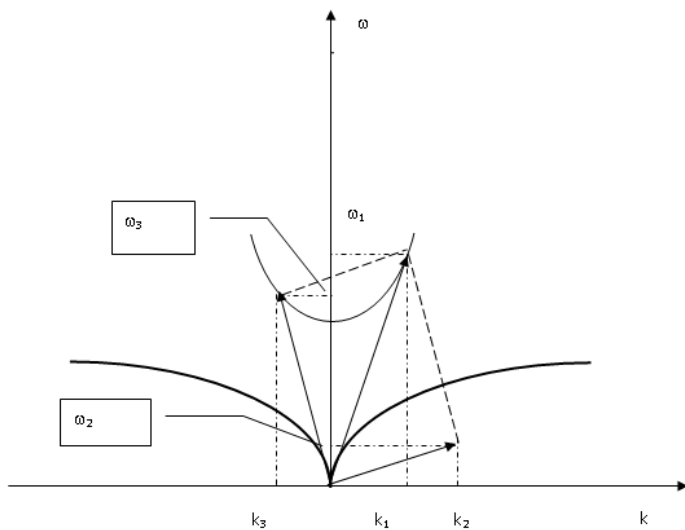


Рисунок 23

## ГЛАВА 6 АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

### 6.1 Бегущие и автомодельные волны

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто встречаются в различных приложениях. Существование этих решений обычно связано с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и растяжения сжатия.

• **Бегущие волны.**

Решениями типа бегущей волны называются решения вида [95]

$$u(x, t) = u(z) = u(kx - \omega t). \quad (6.1.1)$$

Поиск решения типа (6.1.1) проводится прямой подстановкой выражения (6.1.1) в исходное уравнение:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) \stackrel{u=u(kx-\omega t)}{=} 0 \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega \frac{du}{dz}; \frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{du}{dz}; \dots \end{matrix} \quad (6.1.2)$$

$$\Rightarrow F\left(u, -\omega \frac{du}{dz}, k \frac{du}{dz}, \omega^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, k^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, -k\omega \frac{d^2 u}{dz^2}, \dots\right) = 0.$$

Мы, в частности, видели, что к рассмотренному здесь типу относятся уравнения, анализировавшиеся выше.

• **Автомодельные волны.**

1. *Автомодельные решения.* Автомодельными называют решения вида:

$$u(x, t) = t^\alpha U(\zeta) = t^\alpha U(xt^\beta). \quad (6.1.3)$$

Существование этих решений связано с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований растяжения сжатия (подобия) [95].

Автомодельные решения существуют, если растяжение переменных по правилу  $t = C\tau$ ,  $x = C^k \xi$ ,  $u = C^m w$ , где  $C > 0$  – произвольная константа, при соответствующем выборе  $k$  и  $m$  эквивалентно тождественному преобразованию, т.е. исходное уравнение



в результате совершения над ним преобразований (6.1.1) переходит в такое же уравнение:

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) = 0 \Leftrightarrow \quad (6.1.4)$$

$$F\left(\xi, \tau, w, \frac{\partial w}{\partial \tau}, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi}, \dots\right) = 0.$$

В этом случае, если функция  $u = \Phi(x, t)$  является решением первого из уравнений (6.1.4), то функция  $w = \Psi(\xi, \tau)$  является решением второго из уравнений (6.1.4). Свяжем  $\alpha$  и  $\beta$  с  $k$  и  $m$ :

$$w = \Psi(\xi, \tau) \stackrel{u(x,t)=t^\alpha U(xt^\beta)}{=} \tau^\alpha U(\xi \tau^\beta) \stackrel{t=C\tau, x=C^k \xi, u=C^m w}{\Rightarrow} \quad (6.1.5)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = C^{m-\alpha} t^\alpha U(C^{-k-\beta} x t^\beta).$$

Последнее выражение удовлетворяет первому из уравнений (6.1.3). Требуя, чтобы (6.1.5) совпадало с (6.1.1)  $\forall C$ , получаем  $\alpha = m, \beta = -k$ . После этого подстановка автомодельного решения (6.1.1) в первое из уравнений (6.1.4) приводит нас к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $U(\xi)$ .

В качестве примера рассмотрим уравнение теплопроводности с нелинейным источником и нелинейным коэффициентом теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left( u^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu u^\sigma. \quad (6.1.6)$$

Преобразование (12.1.2) приводит нас к уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left( u^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu u^\sigma \stackrel{t=C\tau, x=C^k \xi, u=C^m w}{\Rightarrow} C^{m-1} \frac{\partial (C^{-m} u)}{\partial (t C^{-1})} = \quad (6.1.7)$$

$$= \kappa C^{m-2k+m\gamma} \frac{\partial}{\partial (x C^{-k})} \left( (C^{-m} u)^\gamma \frac{\partial (C^{-m} u)}{\partial (x C^{-k})} \right) + \mu C^{m\sigma} (C^{-m} u).$$

Приравнивание степеней  $C$  (чтобы получившееся уравнение совпало с исходным, дает уравнения  $m-1 = m(\gamma+1) - 2k = m\sigma$ , имеющие единственное решение  $k = \frac{1}{1-\sigma}$ ;  $m = \frac{\sigma-\gamma-1}{2(1-\sigma)}$ . Далее находим вид автомодельного решения  $u = t^{\frac{\sigma-\gamma-1}{2(1-\sigma)}} U \left( xt^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)$ . Под-

ставляя его в уравнение для  $U$ , получаем:

$$\kappa \frac{d}{d\zeta} \left( w^\gamma \frac{dw}{d\zeta} \right) + \mu w \frac{dw}{d\zeta} + \frac{\zeta}{2} \frac{dw}{d\zeta} + \frac{w}{2} = 0. \quad (6.1.8)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### І. Основная Литература

1. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва: Физматлит, 2008. 497 с.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
3. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. *Линейные колебания и волны*. Москва: Физматлит, 2001. 416 с.
4. Кузнецов А.П., Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. *Линейные колебания и волны. Сборник задач*. Москва: Физматлит, 2001. 128 с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. 2-е изд. Москва: Наука, 1981. 914 с.
6. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. *Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики)*. Москва: Физический факультет МГУ, 2001. 144 с.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. Москва: Наука, 1987. 384 с.
8. Ланда П.С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. 2-е изд. Москва: URSS, 2010. 359 с.
9. Ланда П.С. *Нелинейные колебания волны : [динамические модели, собственные и вынужденные колебания и волны, колебания и волны в активных системах. Автоколебания и автоволны, автоколебания в жидкостях и газах и переходы к турбулентности]*. Изд. 2-е, испр. и доп. Синергетика: от прошлого к будущему. Москва: ЛИБРОКОМ, 2010. 551 с.
10. Люисселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике*. Москва: Иностранной литературы, 1963. 352 с.

11. Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. Москва: Наука, 1972. 472 с.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания*. 2-е изд. Москва: УРСС, 2009. 424 с.
13. Ланда П.С. *Автоколебания в распределённых системах*. 2-е изд. Москва: URSS, 2010. 320 с.
14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания*. 3-е изд. Синергетика: от прошлого к будущему. URSS, 2020. 352 с.
15. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. 2-е изд. Москва: Радио и связь, 1988. 440 с.
16. Уизем Д. *Линейные и нелинейные волны*. Москва: Мир, 1977. 638 с.
17. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн*. Москва: Наука, 1979. 378 с.
18. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы*. Москва: Наука, 1987. 240 с.
19. Исакович М.А. *Общая акустика*. Москва: Наука, 1973. 496 с.
20. Priest E. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. 2014.

## **II. Дополнительная Литература**

21. Стрелков С.П. *Введение в теорию колебаний*. 3-е изд., стер. Изд-во "Лань", 2005. 440 с.
22. Ден-Гартог Д.П. *Механические колебания*. Москва: Физматгиз, 1960. 580 с.
23. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва: Наука, 1974. 504 с.
24. Заславский, Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*. Москва: Наука, 1988. 368 с.

25. Горелик Г.С. *Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику*. Физматлит, 2008. 656 с.
26. Конторович М.И. *Нелинейные колебания в радиотехнике*. Москва: Советское радио, 1973. 320 с.
27. Мандельштам Л.И. *Лекции по колебаниям*. Москва: АН СССР, 1955. 124 с.
28. Баутин Н.Н. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. 2-е изд. Москва: Наука, 1990. 496 с.
29. Блэкьер О. *Анализ нелинейных систем*. Москва: Наука, 1969. 400 с.
30. Блехман И.И. *Синхронизация в природе и технике*. Москва: Ленанд, 2021.
31. Заславский Г.М. *Стохастичность динамических систем*. Москва: Наука, 1984. 271 с.
32. Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А. *Параметрические генераторы и делители частоты*. Москва: Сов. Радио, 1966. 334 с.
33. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и хаотическая динамика*. Москва: Мир, 1984. 324 с.
34. Найфэ А. *Введение в методы возмущений*. Москва: Мир, 1984. 535 с.
35. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. *Прикладные методы в теории колебаний*. Москва: Наука, 1988. 328 с.
36. Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах*. Москва: Наука, 1990. 315 с.
37. Владимиров С.Н., Майдановский А.С., Новиков С.С. *Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем*. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1993. 312 с.
38. Мун Ф. *Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров*. Москва: Мир, 1990. 312 с.

39. Кузнецов С.П. *Динамический хаос*. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
40. Бетчов Р., Криминале В. *Вопросы гидродинамической устойчивости*. Москва: Мир, 1971. 547 с.
41. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. *Динамические модели теории управления*. Москва: Наука, 1985. 378 с.
42. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. *Разделение частот в теории колебаний и волн*. Москва: Наука, 1983. 288 с.
43. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. 6-е изд. Москва: Ленанд, 2017. 416 с.
44. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: Физматлит, 2009. 208 с.
45. Хединг Д. *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*. Москва: Мир, 1965. 291 с.
46. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: МЦНМО, 2018. 344 с.
47. Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: Наука, 1980. 347 с.
48. Постников Л.В., Королев В.И. *Сборник задач по теории колебаний*. Москва: Наука, 1978. 198 с.
49. Пиппард А. *Физика колебаний*. Москва: Высшая школа, 1985. 367 с.
50. Эрроусмит Д., Плейс К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: Мир, 1986. 234 с.
51. Арнольд В.И. *Теория катастроф*. Москва: URSS, 2022. 136 с.
52. Андронов А.А. и др. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. Москва: Наука, 1966. 568 с.
53. Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах*. Москва: Мир, 1968. 432 с.
54. Смит Д.М. *Модели в экологии*. Москва: Мир, 1976. 336 с.

55. Бломберген Н. *Нелинейная оптика*. Москва: Мир, 1966. 501 с.
56. Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*. Москва: Наука, 2000. 437 с.
57. Гаузе Г.Ф. *Борьба за существование*. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 240 с.
58. Тода М. *Теория нелинейных решеток*. Москва: Мир, 1986. 247 с.
59. Вольтера В. *Математическая теория борьбы за существование*. Москва: Мир, 1976. 288 с.
60. Пригожин И.Р. *От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках*. Синергетика: от прошлого к будущему. Москва: Едиториал УРСС, 2016. 304 с.
61. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. Москва: Наука, 2001. 649 с.
62. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Москва: Наука, 2001. 732 с.
63. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. Москва: Наука, 2001. 243 с.
64. Скотт Э. *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*. Москва: Советское радио, 1977. 324 с.
65. Крауфорд Ф. *Волны*. Москва: Наука, 1974. 411 с.
66. Бхатнагар П. *Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах*. Москва: Мир, 1983. 136 с.
67. Лайтхилл Д. *Волны в жидкостях*. Москва: Мир, 1981. 403 с.
68. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. Москва: Наука, 1981. 197 с.
69. Блохинцев Д.И. *Акустика неоднородной движущейся среды*. Москва: URSS, 2021. 208 с.
70. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов*. Москва: Мир, 1984. 335 с.

71. Гинзбург В.Л. *Распространение электромагнитных волн в плазме*. Москва: URSS, 2015, 688 с.
72. Кринский В.И., Михайлов А.С. *Автоволны*. Москва: Наука, 1984. 375 с.
73. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. Москва: Мир, 1987. 347 с.
74. Свирежев Ю.М. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы*. Москва: Наука, 1987. 359 с.
75. Руденко О.В., Солуян С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики*. Москва, 1975. 234 с.
76. Бриллюэн Л., Пародии М. *Распространение волн в периодических структурах*. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1959. 409 с.
77. Карпман В.И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. Москва: Наука, 1973. 241 с.
78. Лэм Д.Л. *Введение в теорию солитонов*. Москва: Мир, 1984. 295 с.
79. Nakariakov V.M., Mendoza-Briceño C.A., Miguel H., Ibanez S. *Magnetoacoustic waves of small amplitude in optically thin quasi-isentropic plasmas*. The Astrophysical Journal, 2000. V. 528(2): p. 767-775.
80. Goossens M. *An introduction to plasma astrophysics and magnetohydrodynamics*. Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 294.
81. Lyu L.H. *Elementary Space Plasma Physics*. National Central University Press & Airiti Press, Chung-li, Taiwan, R.O.C. 2010.
82. Alfvén H. *Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves*. Nature, 1942. 150: p. 405-406.
83. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. *Космическая электродинамика. Основные принципы*. Под ред. Л.А. Арцимовича. Москва: Мир, 1967.



84. Satya Narayanan A. *An Introduction to Waves and Oscillations in the Sun*. New York Springer, 2013. 222 p.
85. Makaryan V.G., Molevich N.E. *Structure of a gasdynamic disturbance in a thermodynamically nonequilibrium medium with a power-law relaxation model*. Fluid Dynamics, 2004. 39(5): p. 836-845.
86. Макарян В.Г. *Структура газодинамических возмущений в стационарно неравновесной среде с экспоненциальной моделью релаксации*: дис. на соиск. уч. степ. к. ф.-м. н. Самарский государственный университет. Самара, 2006.
87. Макарян В.Г., Молевич Н.Е., Д.П. Порфирьев. *Классификация газодинамических структур, описываемых нелинейным уравнением акустики релаксирующей среды*. Вестник Самарского государственного университета, 2009(72): p. 13.

### **III. Справочная Литература**

88. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Наука, 1976. 576 с.
89. Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка*. Москва: Наука, 1966. 278 с.
90. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.
91. Полянин А.Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики*. Физматлит, 2001. 505 с.
92. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики*. Москва: Физматлит, 2002. 457 с.
93. Полянин А.Д., Манжиров А.В. *Справочник по интегральным уравнениям*. Москва: Физматлит, 2003.

94. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*. Москва: Физматлит, 2001. 416 с.
95. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. Москва: Физматлит. 2005, 256 с.
96. Бабич В.М. и др. *Линейные уравнения математической физики*. Москва: Наука, 1964. 368 с.
97. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. Москва: Наука, 1977. 136 с.
98. Матвеев Н.М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. СПб. и др.: Лань. 2003, 832 с.
99. Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Лань, 2002. 432 с.
100. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. Москва: Наука, 1970. 512 с.
101. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука, 1978. 400 с.
102. Олвер Ф. *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*. Москва: Наука, 1989. 639 с.
103. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: URSS, 2009, 352 с.
104. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. Москва: Наука, 1979. 832 с.
105. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. Москва: Лань, 2010. 608 с.
106. Градштейн И.С., Рыжик И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва: Наука, 1975. 1108 с.

107. Корн Т., Корн Г. *Справочник по математике для научных работников и инженеров и учащихся вузов*. Москва: Наука, 1984. 832 с.
108. Прудников А.П., Маричев О.И., Брычков Ю.А. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. Москва: Физматлит, 2003. 632 с.
109. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. Москва: Наука, 1989. 767 с.
110. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*. Москва: Наука, 1968. 344 с.
111. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. Москва: Наука, 1973. 228 с.
112. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва: URSS, 2004. 800 с.
113. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике*. Москва: Лань, 2004. 688 с.
114. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Москва: Физматлит, 2003. 400 с.
115. Владимиров В.С. и др. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. Москва: Физматлит, 2016. 520 с.
116. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления*. Москва: Наука, 1980. 288 с.
117. Арсенин В.Я. *Методы математической физики и специальные функции*. Москва: Наука, 1974. 299 с.

*Учебное издание*

*Завершинский Дмитрий Игоревич,  
Рящиков Дмитрий Сергеевич*

**ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ.  
ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ**

*Учебно-методическое пособие*

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 06.09.2023. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 9,25.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.