

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Д.И. ЗАВЕРШИНСКИЙ

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ. КОЛЕБАНИЯ В ПЛАЗМЕ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебно-методического пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика, 03.03.02 Физика, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

УДК 534(075)+533.9(075)
ББК В236.35я7+В333я7
3-134

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. А. Ю. П р и в а л о в,
канд. физ.-мат. наук, снс. С. Ю. П и ч у г и н

Заверишинский, Дмитрий Игоревич
3-134 Теория колебаний. Колебания в плазме: учебно-методическое пособие / *Д.И. Заверишинский*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 148 с.

ISBN 978-5-7883-1945-2

В данном учебно-методическом пособии представлены основные разделы теории колебаний. Изложены базовые теоретические модели и разобран широкий спектр методик решения задач в данной области. В качестве примеров практического использования описанных методов и моделей приводятся задачи из различных разделов физики, химии, биологии, экологии и экономики, что дает возможность научиться решать практически важные задачи. Отдельное внимание уделяется проблемам, связанным с наблюдаемыми осцилляциями в солнечной плазме.

Предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика и 03.03.02 Физика, 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии.

Подготовлено на кафедре физики.

УДК 534(075)+533.9(075)
ББК В236.35я7+В333я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1 Колебания. Основные понятия и способы описания	9
1.1 Колебательные процессы. Основные понятия	9
1.2 Описание колебательных процессов	11
1.2.1 Прямое решение уравнений колебательного процесса..	16
1.2.2 Построение фазового портрета	22
ГЛАВА 2 Колебания в динамических системах с 1-й степенью свободы.....	30
2.1 Линейные динамические системы с 1-й степенью свободы	30
2.1.1 Математический маятник.	30
2.1.2 RLC-контур.	32
2.1.3 Брюсселятор.	33
2.1.4 Простейшая модель национальной экономики.	34
2.1.5 Модель Лотки-Вольтерра	35
2.1.6 Колебания в корональных петлях (плазменных трубках)	36
2.2 Гармонический осциллятор. Параметры колебаний	37
2.3 Нелинейные консервативные системы с 1-й степенью свободы. Примеры колебательных систем	42
2.3.1 Нелинейные колебания математического маятника	42
2.3.2 Нелинейные колебания Модели Лотки – Вольтерра.....	43
2.4 Спектр колебаний	45
2.5 Метод разложения по малому параметру	46
2.5.1 Метод разложения по малому параметру	47

2.5.2 Осциллятор Дуффинга. Метод Линшtedта – Пуанкаре.	50
2.6 Нелинейная динамика протуберанца на Солнце	54
ГЛАВА 3 Нелинейные диссипативные системы с 1-й степенью свободы.....	62
3.1 Метод многих масштабов	62
3.2 Автоколебания в сферической микроволновой плазме	66
3.3 Автоколебания. Метод Ван дер Поля. Генератор Ван дер Поля.....	71
3.4 Точечное отображение для генератора Ван дер Поля	76
3.5 Быстрые и медленные движения.....	78
ГЛАВА 4 Динамические системы с 1.5-а степенями свободы	83
4.1 Линейные динамические системы с 1.5-а степенями свободы.....	83
4.1.1 Вынужденные колебания гармонического осциллятора. Гармоническая внешняя сила.....	83
4.1.2 Негармоническая, но периодическая внешняя сила: $F(t) = F(t + T)$	87
4.1.3 Произвольная внешняя сила.....	89
4.1.4 Гармонический осциллятор под действием обобщенных внешних сил.	91
4.2 Линейные системы с 1.5-а степенями свободы с меняющимися под действием внешних факторов параметрами. Преобразование энергии в плазменных средах.	94
4.2.1 Сравнимые частоты. Уравнение Матье.....	94
4.2.2 Параметрическое взаимодействие МГД-волн в плазме, описываемое уравнение Матье	103
4.2.3 Стохастический параметрический резонанс	108

4.2.4 Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант.	110
4.2.5 Движения в быстроосциллирующих полях	112
4.3 Нелинейные динамические системы с 1.5-а степенями свободы.....	114
4.3.1 Осциллятор Дуффинга под импульсным воздействием.....	114
4.3.2 Осциллятор Дуффинга. Нелинейный резонанс	116
4.3.3 Параметрически возбуждаемый нелинейный осциллятор.....	118
4.3.4 Хаотические колебания. Система Лоренца.....	120
ГЛАВА 5 Динамические системы с 2-мя степенями свободы.....	123
5.1 Линейные колебания в системах с 2-мя степенями свободы.....	123
5.2 Нелинейные колебания в системах с 2-мя степенями свободы. Двухконтурный автогенератор	128
ГЛАВА 6 Колебания в динамических системах с 2.5 степенями свободы.....	133
6.1 Осцилляторы с индуктивной связью	133
6.2 Осцилляторы с емкостной связью под действием гармонической сил	136
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	139

ВВЕДЕНИЕ

Колебательные процессы являются неотъемлемой частью большинства динамических систем различной природы. Они встречаются как в физике, так и в химии, биологии, экономике и многих других областях. При этом зачастую колебательные паттерны имеют схожий вид и описываются близкими или одинаковыми системами уравнений. Вследствие этого теория колебаний выделилась в отдельную дисциплину, направленную на классификацию паттернов и наблюдательных данных, на создание математических моделей, методов анализа и постулирование законов, обобщающих поведение систем различной природы.

Современное развитие цифровых технологий существенно коснулось и теории колебаний. Многие из тех задач, что требовали кропотливого анализа или изящных математических решений, компенсирующих слабую вычислительную мощность ЭВМ предыдущих поколений, могут быть решены за считанные секунды. При этом такие результаты могут быть достигнуты как с помощью узкоспециализированных программ, так и с помощью математических программ широкого профиля таких, например, как Wolfram Mathematica или Maple. Однако широкое применение численных методов привело к парадоксальной ситуации, а именно: у современного исследователя, например студента, есть простой и быстрый способ получить результат, при этом он зачастую не может его адекватно описать или сформулировать причину реализации того или иного паттерна. Это связано с диспропорцией современных образовательных программ в сторону численных исследований в ущерб развитию аналитических навыков исследования.

По этой причине в данном учебно-методическом пособии уделяется существенное внимание не только краткому описанию базовых моделей, но и развернутому описанию выводов с целью

повысить уровень аналитических навыков читателя. Многие из аналитических результатов верифицируются путем демонстрации паттернов, рассчитанных в среде Wolfram Mathematica. Для более углубленного понимания студентам предлагается повторить результаты численного моделирования.

Отдельное внимание уделено колебательным процессам в плазме. Как упоминалось ранее, на данный момент существует достаточно широкий запас наблюдательных данных колебательных паттернов. Данная ситуация существует и в области физики Солнца и физики плазмы. Благодаря появлению простейших математических моделей колебательных процессов в таких магнитноструктурированных волноводах, как корональные петли, у исследователей появилась не только возможность наблюдать, но и анализировать колебательные паттерны и использовать их как инструмент анализа плазмы. Данное учебно-методическое пособие, вдохновленное пособием И.П. Завершинского и Е.Я. Когана «Теория колебаний и волн», ставит своей целью продемонстрировать читателю примеры колебательных процессов в различных системах, продемонстрировать аналитические и численные методики их анализа и вдохновить на создание более физически и математически корректных моделей.

Разбиение содержания по разделам в данной книге сделано в следующем виде. В первой главе представлены основные понятия теории и классификация колебательных систем. Во второй главе описывается поведение динамических систем с 1-й степенью свободы, к которым можно отнести свободные колебания в линейных и нелинейных динамических системах 2-го порядка. Приведены примеры из разделов физики плазмы, курсов механики, электричества и магнетизма, химии, экономики и т.д. Описаны принципы точного решения уравнений и приближенные методы, такие как метод фазовой плоскости, метод разложения по малому параметру,

метод Линшtedта – Пуанкаре, метод многих масштабов, метод точечных отображений. В третьей главе оговариваются осцилляции в нелинейных диссипативных с одной степенью свободы. Описана технология генерации акустических автоколебаний в микроволновой плазме. Четвертая глава посвящена анализу осцилляций в динамических системах с полутора степенями свободы. Рассматриваются такие процессы, как резонанс, параметрический резонанс и динамический хаос. На примере уравнения Матье, полученного для волн в солнечной плазме, показана возможность преобразования тепловой энергии в электромагнитную. Пятая глава направлена на описание колебаний в динамических системах с двумя степенями свободы. В заключительной главе описаны линейные колебания в системах из двух связанных осцилляторов под действием гармонических внешних сил.

Список литературы, дополняющий материалы, представленные в рамках данного учебно-методического пособия, состоит основной [1-21], дополнительной [22-85] и справочной литературы [86-115].

ГЛАВА 1 КОЛЕБАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ

1.1 Колебательные процессы. Основные понятия

Колебательный процесс – это процесс, характеризующийся хотя бы приблизительной повторяемостью параметров, определяющих состояние системы, число которых в данный момент времени, конечно.

Колебания

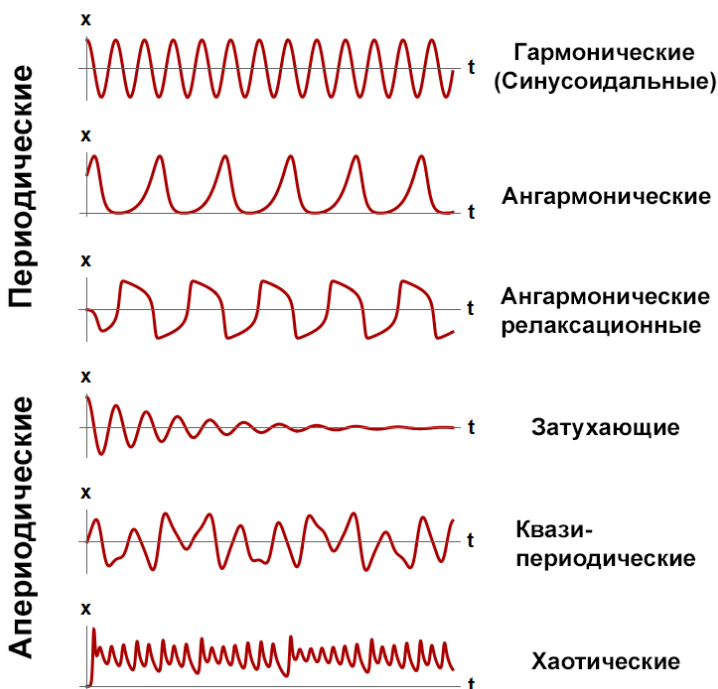


Рисунок 1. Зависимость амплитуды от времени для различных колебательных процессов

Под состоянием системы в некоторый момент времени понимается набор величин, количество которых достаточно для того, чтобы определить эти же величины в последующие моменты времени. Конечность числа параметров, характеризующих состояние системы, является основным критерием, разделяющим колебательные и волновые процессы.

Простейшим примером колебательной системы является гармонический осциллятор, описываемый 2-мя обыкновенными дифференциальными уравнениями 1-го порядка, дополненной 2-мя начальными условиями:

$$\begin{aligned} \dot{x} = v, \dot{v} = -2\gamma v - \omega_0^2 x &\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \\ x(t=0) = x_0, \dot{x}|_{t=0} = v_0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Решение (1.1.1) имеет вид повторяющихся функций:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + ((\gamma x_0 + v_0) / \omega) \sin \omega t), \\ v(t) &= e^{-\gamma t} \left\{ v_0 \cos \omega t - \left[\omega \left(1 + \gamma^2 / \omega^2 \right) x_0 + \gamma v_0 \right] \sin \omega t \right\}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

с периодом $T = 2\pi / \omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Приведенное определение колебаний очень широкое и подразумевает дальнейшую конкретизацию и детализацию. Например, говорят о колебаниях свободных и вынужденных, консервативных и диссипативных, линейных (гармонических) и нелинейных (ангармонических) и так далее.

Свободные колебания – колебания, происходящие в отсутствии внешних воздействий на систему. *Вынужденные колебания* – колебания, происходящие в присутствии внешних воздействий на систему.

Колебания называют *линейными* или *нелинейными*, если они описываются линейными или нелинейными уравнениями соответственно.

Необходимым условием возникновения колебаний является наличие у системы состояния устойчивого равновесия (хотя бы метастабильного). При этом, если квазилинейная система выведена из данного состояния, то в соответствии с принципом *ле Шателье* в ней возникают процессы, стремящиеся вернуть систему в исходное состояние. Динамический баланс обобщенных сил, выводящих и возвращающих систему в положение равновесия, и лежит в основе колебательного процесса. Такое утверждение в целом справедливо и для существенно нелинейных систем, однако при этом существует ограничение на амплитуду внешнего воздействия, поскольку метастабильную систему можно необратимо вывести из состояния равновесия. Кроме того, процесс установления равновесия не обязательно носит колебательный характер. Он может, например, носить характер экспоненциальной релаксации. Пример – RC – контур.

1.2 Описание колебательных процессов

Процесс, характеризующийся хотя бы приблизительной повторяемостью состояний системы, может быть описан различными способами, из которых базовыми являются два основных: формулировка дифференциальных или разностных уравнений, описывающих процессы в системе.

• Системы с непрерывным временем и их классификация

Если число параметров системы, позволяющих определить состояние системы, конечно ($N < \infty$), то ее называют *сосредоточенной*. Колебательные процессы в системах с непрерывным временем обычно описываются сосредоточенными системами дифференциальных уравнений. Сосредоточенной системой N -го порядка, в частности, является система N обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка вида:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t), i = \overline{1, \dots, N} \quad (1.2.1)$$

с N начальными условиями $x_i(0) = x_{i0}, i = \overline{1, \dots, N}$. Состояние системы характеризуется в данном случае N величинами. Если число параметров системы, позволяющих определить ее, бесконечно ($N \rightarrow \infty$), то ее называют *распределенной*. Таким образом, математическим аппаратом, адекватным этому способу описания колебаний, является аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. дополнительную [46-48] и справочную [86-88, 97, 99-101] литературу). Выделим два основных понятия теории дифференциальных уравнений, на базе которых будет структурировано дальнейшее изложение теории колебаний.

Степень свободы системы. Число степеней свободы динамической системы n равно числу величин, полностью характеризующих состояние системы N , деленному на два (для автономных систем – порядку системы дифференциального уравнения, деленному на два): $n = N/2$.

Это понятие возникло при развитии механики. Простейший тип механического движения – движение вдоль направления, задаваемого декартовой прямой, описывается вторым законом Ньютона для некоторой координаты, то есть обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка. В этом случае говорят, что система обладает 1-й степенью свободы.

Приведем методику расчета числа степеней свободы.

А) Автономные системы. Автономным системам отвечают дифференциальные или разностные уравнения, в которые время не входит явным образом – параметры системы не зависят от времени, и на нее не действуют обобщенные внешние силы.

В этом случае уравнению 2-го порядка (или системе 2-х обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка) соответствует система с 1-й степенью свободы, 3-го порядка – с 1.5-а

степенями, 4-го порядка – с 2-мя и т.д. Автономные системы описывают свободные колебания.

Пример: Уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ – уравнение 2-го порядка, параметры (γ, ω_0) которого не зависят от времени, и на нее не действуют обобщенные внешние силы (правая часть равна нулю) соответствует системе с 1-й степенью свободы.

Б) Неавтономные системы. Неавтономные системы – это системы, в которые время входит явно. Состояние автономной системы 2-го порядка в произвольный момент времени t характеризуется 2-мя величинами: x и \dot{x} (или x_1 и x_2), т.е. $N=2$. Если в нее явно входит время, то кроме указанных величин следует указать и момент времени, к которому они относятся: (x, \dot{x}, t) (или (x_1, x_2, t)). Всего этих величин $N=3 \Rightarrow n=N/2=1.5$. Поэтому наличие внешних сил или зависимости параметров системы от времени добавляет 0.5 степеней свободы. Неавтономные системы описывают вынужденные или параметрические колебания.

Пример: Уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \Omega t)x = f(t)$ – уравнение 2-го порядка, параметры которого зависят от времени и на нее действуют обобщенные внешние силы – 1.5-ы степени свободы.

Фазовое пространство. Множество всех возможных состояний системы называют фазовым пространством. *Размерность фазового пространства* для автономных сосредоточенных систем равно количеству величин, характеризующих состояние системы, т.е. для автономных систем равно порядку системы N , а для неавтономных – $N + 1$.

Характер эволюции системы по аналогии с механикой и статистической физикой удобно характеризовать *фазовым объемом*. Элементарный фазовый объем $d\Gamma$ системы (1.2.1) равен

$d\Gamma = dx_1 dx_2 \dots dx_N$. Относительное изменение фазового объема с течением времени равно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} &= \\ &= \frac{1}{dx_1 dx_2 \dots dx_N} \left(\frac{dx_1}{dt} dx_2 \dots dx_N + \frac{dx_2}{dt} dx_1 dx_3 \dots dx_N + \dots + \frac{dx_N}{dt} dx_1 \dots dx_{N-1} \right) = \\ &= \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} + \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} + \dots + \frac{d\dot{x}_N}{dx_N}. \end{aligned}$$

По отношению к тому, как меняется фазовый объем системы с течением времени, системы принято делить на *консервативные* и *диссипативные*.

Если фазовый объем $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = 0$ не меняется с течением времени, то систему называют *консервативной*. Если фазовый объем меняется с течением времени $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} \neq 0$, то систему называют *диссипативной*.

Пример: Определим относительное изменение фазового объема для системы уравнений (1.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -2\gamma v - \omega_0^2 x &\Rightarrow \\ \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{dx dv} \left(\frac{dx}{dt} dv + \frac{dv}{dt} dx \right) &= \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{v}}{dv} = 0 - 2\gamma = -2\gamma. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Из выражения для $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}$ легко видеть, что при $\gamma = 0$ система консервативная, а при $\gamma \neq 0$ диссипативная.

Выделим также еще одно весьма важное определение. Система уравнений называется *динамической*, если она имеет единственное решение при $t \rightarrow \infty$. Большинство задач теории колебаний описываются динамическими системами.

• *Системы с дискретным временем.*

Точечным отображением (отображением последования) N -го порядка называют систему N алгебраических уравнений вида $x_{i;n+k} = f_i(x_{1;n}, x_{2;n}, \dots, x_{N;n})$, $k \geq 1$ с N начальными условиями $x_{in=0} = x_{in}$, $i = \overline{1, \dots, N}$.

Системы с непрерывным временем всегда могут быть сведены к системам с дискретным временем [1, 11, 12, 34, 37]. Кроме того, отображения последования могут формулироваться и независимо от систем с непрерывным временем. Анализ подобных отображений обычно проще решения дифференциальных уравнений. Стандартным способом исполнения процедуры перехода от систем с непрерывным временем к системам с дискретным временем является *метод отображений Пуанкаре* [1, 11, 34].

Проиллюстрируем методику реализации этого метода для автономной динамической системы третьего порядка, фазовое пространство которой трехмерно. Выберем двумерную площадку S таким образом, чтобы фазовые траектории многократно ее пересекали не по касательной. Зададим на S систему отсчета (X, Y) , на площадке выберем начальную точку (x, y) , из нее выпускается фазовая кривая и отслеживается следующее пересечение (x', y') с площадкой S при проходе в том же направлении. Если поменять начальную точку, поменяется и образ. Так возникнет отображение $x' = f_1(x, y), y' = f_2(x, y)$ поверхности S в себя – отображение Пуанкаре, рис. 2.

Этот метод, как и метод фазовой плоскости, является частично урезанным, так как информация о поведении системы между пересечениями теряется.

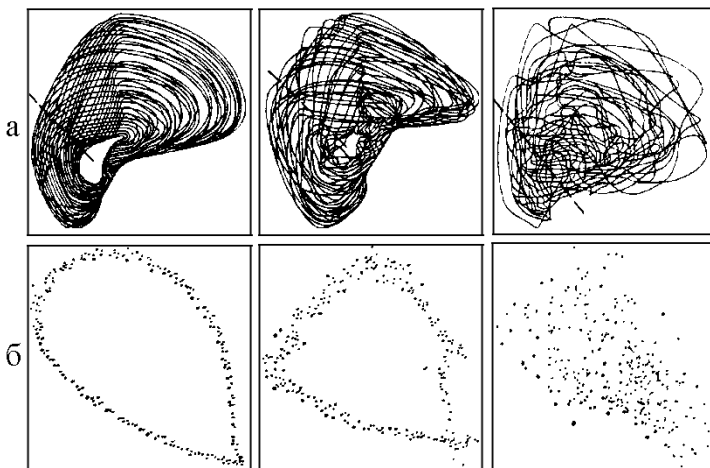


Рисунок 2. Сечения Пуанкаре (б), полученные пересечением фазовых траекторий с плоскостью, проходящей через штриховую линию (а)

1.2.1 Прямое решение уравнений колебательного процесса

Этот метод оптимален при анализе линейных автономных систем и линейных неавтономных систем с постоянными коэффициентами.

• **Общая методика поиска решения линейных динамических систем.**

Здесь мы кратко изложим методику анализа поведения линейных динамических систем, поскольку для них доказан ряд мощных утверждений, серьезно формализующих и упрощающих поиск их решений.

Поведение линейных динамических систем описывается векторным уравнением, записываемым в операторной форме $\widehat{L}\vec{x} = \vec{f}$, где \widehat{L} – линейный оператор, \vec{f} – набор известных функций. Оператор \widehat{L} называется *линейным*, если для двух любых $\vec{x}_1(t)$ и $\vec{x}_2(t)$ из области его определения выполняется условие

$\widehat{L}[C_1\bar{x}_1(t)+C_2\bar{x}_2(t)]=\bar{f}$, где C_1, C_2 – постоянные. Из линейности оператора \widehat{L} следуют два утверждения, составляющие содержание *принципа суперпозиции*:

- 1) Если $\bar{x}_1(t)$ и $\bar{x}_2(t)$ – два решения уравнения $\widehat{L}\bar{x}=0$, то их линейная комбинация $C_1\bar{x}_1(t)+C_2\bar{x}_2(t)$ также является решением.
- 2) Если $\bar{x}_1(t)$ и $\bar{x}_2(t)$ – два решения неоднородного уравнения $\widehat{L}\bar{x}=\bar{f}$, то их разность $\bar{x}(t)=\bar{x}_1(t)-\bar{x}_2(t)$ является решением однородного уравнения $\widehat{L}\bar{x}=0$.

В частности, эти утверждения полностью справедливы для нормальной системы дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{\bar{x}}=\widehat{F}(t)\bar{x}+\bar{g}(t) \Leftrightarrow \dot{x}_i=\sum_{j=1}^N f_{ij}(t)x_j+g_i(t), i=1,\dots,N \quad (1.2.3)$$

и лежат в основе методики нахождения её решений. В (1.2.3) $\widehat{L}=\widehat{I}d/dt-\widehat{F}$, \widehat{I} – единичная матрица.

В самом деле, в соответствии с принципом суперпозиции, *общее решение однородной* ($g_i=0, i=1,\dots,N$) *линейной системы* (1.2.3) *можно искать в виде суперпозиции частных решений*

$\bar{x}(t)=\sum_{i=1}^N c_i\bar{x}_i(t)$. Набор из N произвольных констант c_i , в силу

теоремы существования и единственности решения системы (1.2.3), должен быть определен из N начальных условий $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$.

Линейно независимые частные решения системы (1.2.3) $\bar{x}_i(t)$ также называют *фундаментальной системой* решений (1.2.3).

Рассмотрим частные случаи представления системы (1.2.3).

I. Однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами N -го порядка.

Поиск решения в этом случае производится по следующей схеме [1-9]:

1. Решение (1.2.3) ищется в виде $\bar{x}(t) = \bar{C}e^{\lambda t} \Leftrightarrow x_i(t) = C_i e^{\lambda t}, i=1..N$.

2. Разыскиваются N корней $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ получившегося характеристического уравнения
$$\begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & \dots & f_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1n} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

3. Записывается решение (1.2.3) для одной из переменных в виде $x_1(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j t}$, а остальные находятся с помощью оставшихся линейных связей.

II. Если однородная система N -го порядка может быть представлена в виде одного дифференциального уравнения N -го порядка

$$x^{(N)} + a_1 x^{(N-1)} + \dots + a_N x = 0, \quad (1.2.4)$$

то поиск решения производится по аналогичной схеме:

1. Решение (1.2.4) ищется в виде $x(t) = Ce^{\lambda t}$.
2. Ищутся корни характеристического уравнения $\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_N = 0$.
3. Записывается решение уравнения (1.2.4) в виде $x(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j t}$.

III. Интегрирование неоднородной ($g_i \neq 0, i=1, \dots, N$) системы типа (1.2.3) сводится к нахождению фундаментальной системы однородной. В самом деле, разыскивая решение (1.2.3), когда $g_i \neq 0$ хотя бы при одном значении i в виде

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i(t)x_i(t), \quad (1.2.5)$$

после подстановки в (1.2.3) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}}{dt} \bar{c}(t) + \frac{d\bar{c}}{dt} \hat{X} &= \hat{F} \cdot \hat{X} \cdot \bar{c}(t) + \bar{g}(t) \Rightarrow \\ \frac{d\hat{X} - \hat{F} \cdot \hat{X}}{dt} \bar{c} &= \bar{g}(t) \Rightarrow \frac{d\bar{c}}{dt} = \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

где $\hat{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$, $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$.

Отсюда $\bar{c}(t) = \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt + \bar{c}_0$. Подставляя это соотношение в уравнения, полученные выше, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \hat{X}(t) \bar{c}_0 + \hat{X}(t) \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt \Rightarrow \\ \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0) = \hat{X}(t_0) \bar{c}_0 &\Rightarrow \bar{x}(t) = \hat{X}(t) \hat{X}^{-1}(t_0) \bar{c}_0 + \hat{X}(t) \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Выражение (1.2.7), представляющее собой общее решение неоднородного уравнения (1.2.3), есть сумма общего решения однородной части уравнения (1.2.3) и любого частного решения этого уравнения: $\bar{x}_{O.H.}(t) = \bar{x}_{O.O.}(t) + \bar{x}_{Ч.Н.}(t)$.

Частное решение неоднородного уравнения иногда удается подобрать каким-либо другим способом (чаще всего это удается сделать для полиномов, тригонометрических и экспоненциальной функций). Для практических приложений важно отметить, что большинство практических методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и их точных или

приближенных решений собрано в справочниках по ОДУ [86, 88] и, если не стоит задача последовательного решения системы, то следует немедленно обратиться к справочнику.

• **Выделение нормальных колебаний**

Уравнение линейного гармонического осциллятора можно представить в форме, отличающейся от (1.2.2). Такой переход производится с помощью линейного преобразования от динамических переменных x и v к новым переменным [3], которые выбираются так, чтобы получающиеся для них уравнения описывали не взаимодействующие друг с другом системы.

Поэтому чаще всего выделение нормальных мод проводят для систем взаимодействующих осцилляторов, понижая тем самым порядок анализируемой системы. Проиллюстрируем принципы применения этого метода для гармонического осциллятора.

Рассмотрим снова систему (1.2.2). Умножим первое и второе уравнения на некоторые константы α и β и сложим их. Такая процедура приводит к выражению

$$\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta v) = -\frac{\beta}{\alpha} \omega_0^2 \left(\alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 2\gamma\beta)}{-\omega_0^2\beta} v \right). \quad (1.2.8)$$

Выберем коэффициенты α и β так, чтобы в этой формуле множители перед v , а, следовательно, и выражения в больших круглых скобках справа и слева были одинаковы. Это выполняется, если $\beta = -(\alpha^2 - 2\gamma\alpha\beta/\omega_0^2\beta)$ или $\omega_0^2(\beta/\alpha)^2 - 2\gamma(\beta/\alpha) + 1 = 0$, откуда при $\gamma < \omega_0$ имеем:

$$(\beta/\alpha)_{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{\omega_0^2} = \frac{\gamma \pm i\omega}{\omega_0^2}. \quad (1.2.9)$$

Здесь использовано обозначение из подписи к (1.1.1). Уравнение (1.2.9) определяет только отношение коэффициентов, а не каждый из них по отдельности. Это объясняется линейностью

уравнений (1.2.2). Один из коэффициентов, скажем α , следует находить из дополнительных соображений.

Введем функции $a(t)$ и $a^*(t)$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha \left(x + (\gamma + i\omega)v / \omega_0^2 \right), \\ a^*(t) &= \alpha \left(x + (\gamma - i\omega)v / \omega_0^2 \right). \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Эти величины называют *нормальными колебаниями*. Подставляя формулы (1.2.9) в уравнение (1.2.8), находим, что нормальные колебания удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= (-\gamma - i\omega)a(t), \\ \dot{a}^*(t) &= (-\gamma + i\omega)a^*(t). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Уравнения (1.2.11) называют уравнениями гармонического осциллятора в форме нормальных колебаний. Их решения можно записать так:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0) \exp(i(-\omega + i\gamma)t), \\ a^*(t) &= a^*(0) \exp(i(\omega + i\gamma)t). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Заметим, что если по физическому смыслу координата и скорость осциллятора – действительные величины, то начальные значения нормальных колебаний $a(0)$ и $a^*(0)$ комплексно сопряжены друг другу. Тогда из решений (1.2.12) следует, что нормальные колебания будут сопряжены друг другу и во все последующие моменты времени. В таком случае для описания динамики осциллятора достаточно одного из уравнений (1.2.11). Поскольку нормальные колебания – комплексные функции, то число степеней свободы сохраняется при переходе от уравнения (1.2.2) к уравнениям (1.2.11). Из (1.2.11) следует, что колебанию $a(t)$ соответствует комплексная собственная частота $-\omega + i\gamma$, а колебанию $a^*(t)$ – собственная частота $\omega + i\gamma$. Этим исчерпывается спектр собственных частот линейного осциллятора с затуханием.

До этого момента коэффициент α оставался неопределенным. Как уже говорилось, поскольку уравнения линейны, его выбор обусловлен только соображениями удобства. Часто просто считают $\alpha = 1$, при рассмотрении параметрических процессов принято выбирать α так, чтобы в пределе нулевого затухания $\gamma = 0$ энергия осциллятора определялась выражением $W = \omega_0 a^*(t)a(t)$. Тогда для каждого типа осциллятора коэффициент α получается свой. Например, для грузика на пружинке, подставляя в последнее соотношение выражение $W = mv^2/2 + kx^2/2$ и формулы (1.2.10), находим, что $\alpha = (k/2\omega_0)^{1/2}$. В такой нормировке нормальные колебания равны:

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{k/2\omega_0} \left(x + (\gamma + i\omega)v / \omega_0^2 \right), \\ a^*(t) &= \sqrt{k/2\omega_0} \left(x + (\gamma - i\omega)v / \omega_0^2 \right). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Из этих уравнений можно выразить величины x и v :

$$x = \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega} \right) a^* \right), \quad v = \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \frac{\omega_0^2}{i\omega} |a - a^*|. \quad (1.2.14)$$

Для осцилляторов других типов легко получить аналогичные выражения.

1.2.2 Построение фазового портрета

В ряде случаев, прежде всего для *нелинейных систем*, поведение системы можно качественно исследовать путем построения ее *фазового портрета* [2, 5, 7] – в простейшем случае динамической системы второго порядка вида

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \quad (1.2.15)$$

зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Иногда фазовый портрет может быть получен непосредственно из системы (1.2.15) путем деления одного из уравнения системы на другое и решения получен-

ного уравнения первого порядка. Однако это бывает редко. Эта зависимость несет меньшую информацию, чем решения $x = x(t), y = y(t)$, однако позволяет исследовать поведение системы в окрестности так называемых особых точек (x_j, y_j) , где $f_{1,2} = 0$ и, исходя из топологических соображений, качественно построить фазовые кривые на всей плоскости, давая представление о структуре решения при любых значениях x, y . Последовательность при построении фазового портрета состоит из 4-х шагов.

I. Поиск особых точек. Особые точки (x_j, y_j) динамической системы определяются из уравнений $f_1(x_j, y_j) = 0, f_2(x_j, y_j) = 0$.

II. Линеаризация системы (1.2.15) в окрестности особой точки. Решение (1.2.15) ищется в виде $x = x_j + x', y = y_j + y'$, где $x' \ll x_j, y' \ll y_j$, а функции $f_j = 0$ раскладывают в ряд Тейлора с точностью до слагаемых первого порядка по x', y' . В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} x' + \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} y', \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} x' + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} y' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx'}{dt} = ax' + by', \\ \frac{dy'}{dt} = cx' + dy' \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (1.2.16)$$

$$\text{Матрицу } \hat{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} & \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} \\ \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} & \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} \end{pmatrix} \text{ назы-}$$

вают *матрицей Якоби*.

При этом необходимо выполнение условий $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$. Если это не так, то линейного приближения недостаточно для исследования устойчивости.

III. Получение характеристического уравнения. Решение системы (1.2.16) ищется в виде $x' = A \exp(\lambda t)$, $y' = B \exp(\lambda t)$. Эти соотношения подставляются в систему (1.2.16). В результате получается система линейных однородных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \left(\left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda \right) A + \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} B = 0, \\ \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} A + \left(\left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda \right) B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda)A + bB = 0, \\ cA + dB = 0. \end{cases} \quad (1.2.17)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, только когда равен нулю определитель из коэффициентов при A и B :

$$\begin{vmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda & \left. \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} \\ \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_j, y_j)} & \left. \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_j, y_j)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2.18)$$

Раскрывая его, получаем характеристическое уравнение для определения λ_i :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \Rightarrow \lambda^2 - Sp[\widehat{L}]\lambda + Det[\widehat{L}] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - S\lambda + D = 0, \quad (1.2.19)$$

где S – след матрицы \widehat{L} , D – ее определитель.

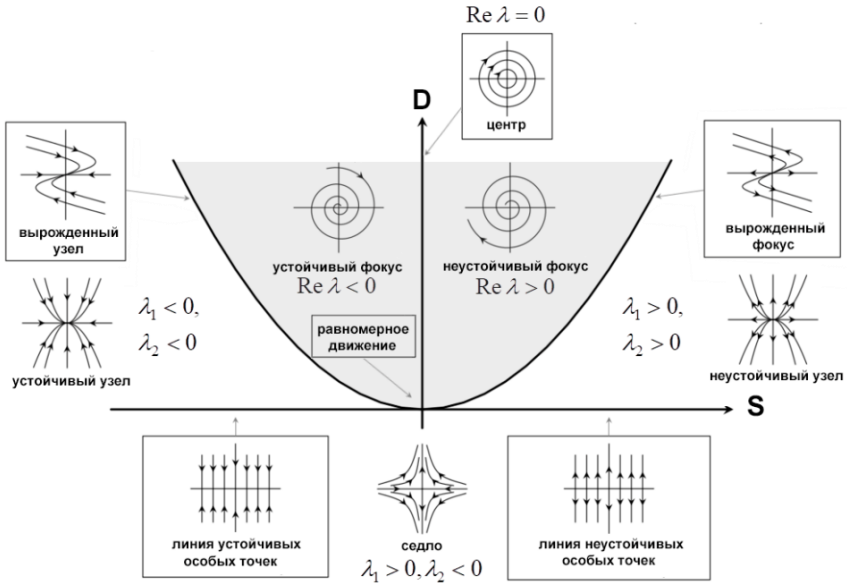


Рисунок 3. Фазовый портрет системы (1.2.16) при различных параметрах следа S и детерминанта D матрицы Якоби. Закрашенная область соответствует $S^2 < 4D$, незакрашенная область соответствует $S^2 > 4D$.

Черная линия – $S^2 = 4D$

IV. Решение характеристического уравнения и анализ его корней. Корни характеристического уравнения (1.2.18) равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4D}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \quad (1.2.20)$$

и могут быть:

а) Мнимыми $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{D} = i\sqrt{ad-bc}$ при $S=0$, $D>0$.

В этом случае особую точку называют центром. Пример – гармонический осциллятор при $\gamma=0$. При этом система (1.2.15) имеет вид $\dot{x}' = y'$, $\dot{y}' = -\omega_0^2 x'$. Она может быть переписана в форме $dy'/dx' = -\omega_0^2 x'/y'$. Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение в виде уравнения эллипса $x'^2/\omega_0^2 + y'^2 = C = const$.

б) Комплексно сопряженными $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\eta$ при $S^2 \ll 4D$.

В этом случае особую точку называют фокусом. Пример – гармонический осциллятор при $\gamma \neq 0$. При этом система (1.2.15) имеет вид $\dot{x}' = y'$, $\dot{y}' = -\omega_0^2 x' - 2\gamma x'$. Она может быть переписана в форме $dy'/dx' = -(2\gamma y' + \omega_0^2 x')/y'$, а после замены $y' = x'z$ в виде $\frac{zdz}{z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2} = -\frac{dx'}{x'}$. Это уравнение с разделяющимися

переменными при $\gamma^2 < \omega_0^2$ имеет решение, которое после возвращения к исходным переменным имеет вид

$$\sqrt{y'^2 + 2\gamma x' y' + \omega_0^2 x'^2} = C \exp\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \arctg \frac{y' + \gamma x'}{\omega_0^2 - \gamma^2 x'^2}\right).$$

Делая упрощающую замену $u = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x' = \omega x'$, $v = y' + \gamma x'$, последнее соотношение мы можем представить в форме

$u^2 + v^2 = C^2 \exp\left(\frac{2\gamma}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{v}{u}\right)$. Наконец, после перехода к полярным координатам $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$ имеем уравнение *спирали* $\rho = C \exp(\gamma \varphi / \omega)$.

При этом, если $\eta = \operatorname{Im}[\lambda_{1,2}] < 0, (S < 0, D > 0)$, то особую точку называют *устойчивым фокусом*. Устойчивый фокус при этом является простейшим примером *аттрактора* размерности $d=1$ – множеством, к которому асимптотически притягиваются фазовые траектории, см. рис. 3.

Если $\mu = \operatorname{Im}[\lambda_{1,2}] > 0, (S > 0, D > 0)$, то особую точку называют *неустойчивым фокусом*.

в) Действительными и иметь один знак $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0, S^2 \gg 4D$. В этом случае особую точку называют *узлом*.

Повторяя те же действия, что и в предыдущем разделе, при $\gamma^2 > \omega_0^2$ приходим к уравнению фазовой траектории вида $v = C u^{q_2/q_1}$, где $v = y' + q_1 x'$, $u = y' + q_2 x'$, а $q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$, $q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$.

При этом, если $(S < 0, D > 0)$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то особую точку называют *устойчивым узлом*. Это простейший пример аттрактора размерности $d=1$, то есть множества, к которому притягиваются фазовые траектории.

Если $(S > 0, D > 0)$, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, то особую точку называют *неустойчивым узлом*.

г) Действительные и иметь разные знаки $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0, (D < 0)$. В этом случае особую точку называют

седлом. Этот случай реализуется при $\omega_0^2 < 0$. При этом $q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$, $q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$.

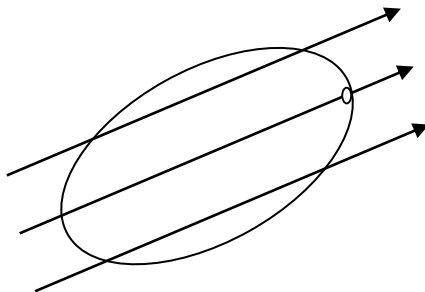


Рисунок 4. Замкнутый контур

У нелинейных систем может быть несколько особых точек различного типа [1, 2]. Рассмотрим законы совместного существования различных типов состояний равновесия и замкнутых траекторий. Пусть есть векторное поле на плоскости. Нарисуем замкнутый контур, рис. 4, не проходящий через состояние равновесия. Если взять на этом контуре точку S и двигать ее вдоль контура, то вектор поля, проходящий через эту точку, будет непрерывно вращаться. Когда точка сделает полный оборот, то вектор повернется на угол $2\pi j$, где j – целое число. Направление вращения вектора будем считать положительным, если оно совпадает с направлением движения S . Целое число j носит название *индекса Пуанкаре*. Для контура, изображенного на рисунке 4, $j = 0$.

Если состояние равновесия окружить замкнутым контуром, то нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла, фокуса равны $j = +1$, а для седла $j = -1$. Для предельного цикла $j = +1$. Предельным циклом называется замкнутая (периодическая) фазовая траектория, в окрестности которой нет других периодических траекторий.

Индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек. Отсюда сразу ясно, например, что предельного цикла, внутри которого находятся два седла или два седла и фокус, существовать не может, так как для него $j = +1$, а для трех таких состояний равновесия вообще $j = -1$. А вот в случае седла и двух фокусов предельный цикл может существовать, так как в этом случае сумма j равна $-1 + 1 + 1 = +1$. Два состояния равновесия (седло и узел), могут слиться и исчезнуть, так как их совместный индекс $j = 0$ и т.д. Итак, опираясь на теорию индексов Пуанкаре, можно утверждать следующее.

1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится по крайней мере одна особая точка, так как индекс такой траектории равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен нулю.

2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седло, а обязательно точка с индексом $+1$.

3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся несколько простых особых точек, то число их всегда нечетно, а число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.

4. Если на фазовой плоскости есть узел или фокус, а также седло, то они могут быть соединены фазовой кривой.

ГЛАВА 2 КОЛЕБАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С 1-Й СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Колебания в системах с 1-й степенью свободы в соответствии с классификацией – это свободные колебания в системах 2-го порядка.

2.1 Линейные динамические системы с 1-й степенью свободы

Колебательные процессы, соответствующие данным системам, относятся, с одной стороны, к простейшим, а с другой стороны, к наиболее известным процессам, изученным наиболее подробно.

Изложение в этом разделе идет от частного к общему: приводятся примеры хорошо известных колебательных процессов из самых разных областей знания и показывается, что их малые колебания описываются единым образом – на основе модели гармонического осциллятора.

2.1.1 Математический маятник

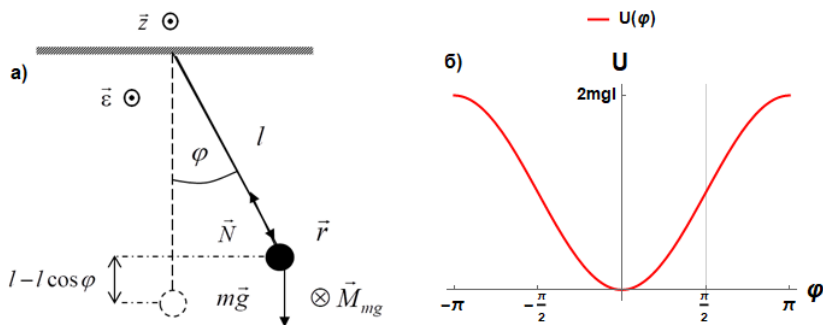


Рисунок 5. а) Модель математического маятника;

б) Потенциальная энергия маятника

Свободные колебания математического маятника, рис. 5, могут быть описаны с помощью основного уравнения вращательного движения

$$I\vec{\varepsilon} = \sum_j \vec{M}_j = \sum_j [\vec{r}_j, \vec{F}_j] \quad (2.1.1)$$

где I – момент инерции тела, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, $\sum_j \vec{M}_j$ – сумма моментов внешних сил, действующих на тело. Потенциальная энергия маятника равна $U(\varphi) = mgl(1 - \cos\varphi) = 2mgl \sin^2(\varphi/2)$, рис. 5. Положение равновесия определяется условием $dU/d\varphi = 0 \Rightarrow mgl \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_n = \pi n, n \in Z$.

Число n может принимать два значения для разных положений равновесия:

- Нижнее $n = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Т.к.
$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow -\varepsilon} = mgl \cos(-\varepsilon) = mgl \cos\varepsilon \approx mgl > 0,$$

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow +\varepsilon} = mgl \cos(+\varepsilon) = mgl \cos\varepsilon \approx mgl > 0, \text{ то это – минимум, т.е.}$$

устойчивое положение равновесия.

- Верхнее $n = 1 \Rightarrow \varphi = \pi$.

Т.к.

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi - \varepsilon} = mgl \cos(\pi - \varepsilon) = mgl(\cos\pi \cos\varepsilon + \sin\pi \sin\varepsilon) \approx -mgl < 0,$$

$$\left. \frac{d^2U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi + \varepsilon} = mgl \cos(\pi + \varepsilon) = mgl(\cos\pi \cos\varepsilon - \sin\pi \sin\varepsilon) \approx -mgl < 0,$$

то это положение равновесия – максимум, т.е. неустойчивое положение равновесия. Любое сколь угодно малое воздействие выво-

дит маятник из него и возвращает в нижнее положение. Перебор остальных значений n не дает новых положений равновесия. Из нижнего положения равновесия маятник выводится тем или иным внешним воздействием, возвращающая сила – сила тяжести. Заметим, что момент силы натяжения нити равен нулю, поскольку $\vec{N} \parallel \vec{r}$. В проекции на ось z в пренебрежении трением в точке подвеса имеем $\ddot{\varphi} + (mgl/I)\sin\varphi = 0$, где $I = I_0 + ml^2$ – момент инерции тела.

Для математического маятника $I_0 = 0$. После подстановки имеем

$$\ddot{\varphi} + (g/I)\sin\varphi = 0. \quad (2.1.2)$$

Если $\varphi \ll 1$, то $\sin\varphi \approx \varphi$. В этом случае уравнение (2.1.2) становится линейным

$$\ddot{\varphi} + (g/I)\varphi = 0, \quad (2.1.3)$$

а колебания называют малыми.

2.1.2 RLC-контур

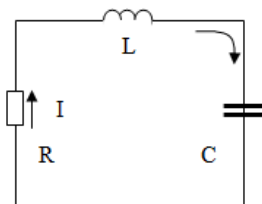


Рисунок 6. Модель RLC – контура

Свободные колебания в RLC-контуре (см. рис. 6) могут быть описаны с помощью второго *правила Кирхгофа*

$$\sum_j U_j = \sum_n \varepsilon_n, \quad (2.1.4)$$

где U_j – падение напряжения на j – м элементе, $\sum_n \varepsilon_n$ – сумма э.д.с., действующих в контуре.

Для случая, представленного на рис. 6, $U_1 = U_R = IR$ – падение напряжения на активном сопротивлении, $U_2 = U_C = q/C$ – падение напряжения на конденсаторе, $\varepsilon_1 = \varepsilon_L = -L\dot{I}$ – э.д.с. индукции. В результате получим уравнение $IR + q/C = -L\dot{I}$. Дифференцируя последнее уравнение по времени и пользуясь определением силы тока $I = \dot{q}$, после деления уравнения на L получаем окончательно уравнение того же вида, что и (2.1.3):

$$\ddot{I} + R\dot{I}/L + I/LC = 0. \quad (2.1.5)$$

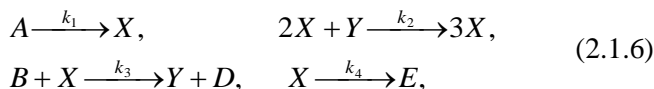
Полная энергия рассматриваемой системы имеет вид $E = q^2/2C + LI^2/2 = q^2/2C + L\dot{q}^2/2$, поэтому роль потенциальной энергии здесь играет энергия конденсатора $U = q^2/2C$. Положение равновесия определяется условием $dU/dq = 0 \Rightarrow q/C = 0 \Rightarrow q = 0$. Это минимум, т.к.

$$d^2U/dq^2 \Big|_{q \rightarrow \pm \varepsilon} = 1/C > 0.$$

Принцип Ле Шателье в этом случае имеет вид *правила Ленца*: изменение магнитного потока, пронизывающего контур, приводит к появлению в цепи тока, направленного таким образом, чтобы восстановить равновесие в контуре.

2.1.3 Брюсселятор

Реакция, являющаяся моделью реакции Белоусова-Жаботинского [54]:



с учетом диффузии (процесс «5») и конвективного переноса реагентов X и Y (процесс «6») описывается системой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= -\underbrace{\bar{v}\nabla X}_{(6_1)} + \underbrace{k_1 A}_{(1)} + \underbrace{k_2 X^2 Y}_{(2)} - \underbrace{k_3 BX}_{(3)} - \underbrace{k_4 X}_{(4)} + \underbrace{D_1 \Delta X}_{(5)}, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= -\underbrace{\bar{v}\nabla Y}_{(6_2)} + \underbrace{k_3 BX}_{(3)} - \underbrace{k_2 X^2 Y}_{(2)} + \underbrace{D_2 \Delta Y}_{(5_2)}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

здесь Δ – оператор Лапласа. Концентрация вещества X увеличивается в процессах «1» и «2» (знаки «+») и уменьшается в процессах «3» и «4» (знаки «-»). Концентрация вещества Y увеличивается в процессе «3» (знак «+») и уменьшается в процессе «2» (знак «-»). Поскольку появление данной молекулы в сфере взаимодействия не зависит от появления в этой сфере других частиц, то по теореме об умножении вероятностей результат взаимодействия представляется в виде произведения концентраций веществ, принимающих участие в акте взаимодействия.

В пренебрежении процессами диффузии и конвективного переноса при малых отклонениях от положения равновесия $X' = X - A$, $X' \ll A$, $Y' = Y - B$, $Y' \ll B$ при $k_j = 1$, $\forall j$ система (2.1.7) сводится к виду:

$$\dot{X}' = A^2 Y' + (B - 1) X', \quad \dot{Y}' = -A^2 Y' - B X', \quad (2.1.8)$$

которое может быть записано в форме одного уравнения:

$$\ddot{Y}' + (B - 1 - A^2) \dot{Y}' + (1 - 2B) A^2 Y' = 0. \quad (2.1.9)$$

2.1.4 Простейшая модель национальной экономики

Динамика национальных доходов и расходов описывается уравнениями [50]

$$\dot{I} = I - aC, \quad \dot{C} = b(I - C - G), \quad (2.1.10)$$

где $I > 0$ – национальный доход, $C > 0$ – потребительские расходы, $G = G_0 = const \geq 0$ – правительственные расходы. При малых отклонениях от положения равновесия $I' = I - aG_0/(a-1)$, $C' = C - aG_0/(a-1)$, $I', C' \ll aG_0/(a-1)$ система (2.1.10) сводится к системе $\dot{I}' = I' - aC'$, $\dot{C}' = b(I' - C')$, которая может быть записана в форме одного уравнения:

$$\ddot{C}' + (b-1)\dot{C}' + b((a-1)C' = 0. \quad (2.1.11)$$

2.1.5 Модель Лотки-Вольтерра

Будем полагать, что на замкнутом ареале живут хищники с концентрацией на единицу площади n и их жертвы – вегетарианцы с концентрацией на единицу площади N . Жертвы питаются растительной пищей, которая имеется в избытке, а хищники только жертвами. Будем считать, что скорость изменения числа особей каждого вида в отсутствие другого пропорциональна общему их числу на данный момент. Учитывая то, что изменение численности вида из-за наличия другого будет пропорциональна количеству встреч, то есть произведению численностей обоих видов, можно записать для скорости изменения числа жертв и хищников [2, 53]:

$$\dot{N} = aN - bnN, \quad \dot{n} = -An + BnN, \quad (2.1.12)$$

где $a > 0$ – мальтузианский параметр, $A > 0$ – коэффициент естественной смертности хищников, $b > 0$, $B > 0$. Отсюда можно получить уравнение для отклонений численности видов от положения равновесия ($A/B, a/b$), пренебрегая членами второго порядка малости:

$$\dot{N}' = -AN'/b, \quad \dot{n}' = abN'/b. \quad (2.1.13)$$

Отсюда следует уравнение, описывающее изменение численности каждого вида: дифференцируя первое уравнение (2.1.13) после учета второго получим:

$$\ddot{N}' + AaN' = 0. \quad (2.1.14)$$

2.1.6 Колебания в корональных петлях (плазменных трубках)

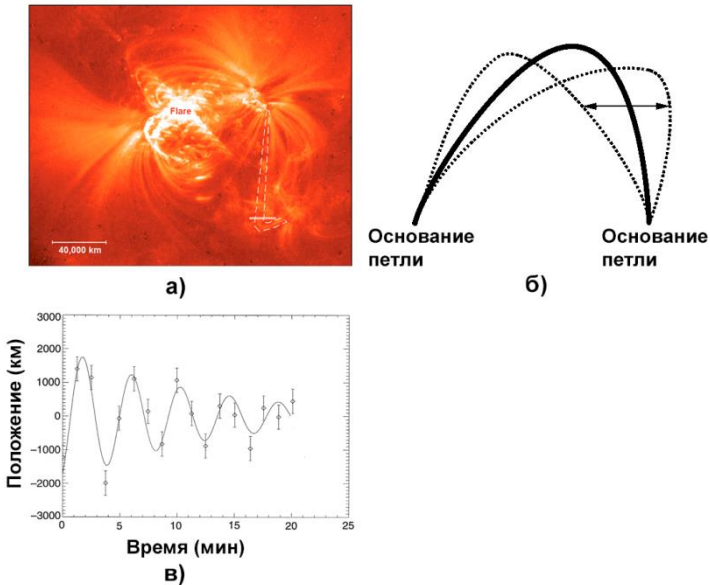


Рисунок 7: а) Система корональных петель, наблюдаемая с помощью TRACE; б) Эскиз корональной петли; в) Эволюция смещения петли со временем. Рисунки взяты из статьи [80]

Система корональных петель, наблюдаемая с помощью TRACE (англ. transition region and coronal explorer – исследователь переходной зоны и солнечной короны) представлена на рис. 7а. Красным текстом отмечен участок солнечной вспышки (flare), очерчена анализируемая корональная петля. В рамке отмечено положение четырех разрезов. Центр изображения расположен на расстоянии (2284 угл. сек., 2363 угл. сек.) от центра Солнца. Размер изображения – 768 x 768 пикселей, размер пикселя – 0,5 угловой секунды (360 км). Далее на рис. 7б. представлен модельный эскиз корональной петли, в которой происходят колебания фундаментальной гармонике. Доминирующая

компонента магнитного поля направлена вдоль оси петли. Колебания происходят в поперечном направлении по отношению к двум направлениям магнитного поля. Основания петли закреплены в плотной фотосфере-хромосфере. Эволюция смещения петли со временем, рассчитанная как средняя координата положения петли для четырех соседних перпендикулярных разрезов через вершину петли (ромбы), с полосами ошибок (60,5 пикселя), начиная с 13:13:51 UT 14 июля 1998 года, показана на рис. 7в. Сплошная кривая представляет собой наилучшую аппроксимацию функцией вида

$$A(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.1.15)$$

Данное решение соответствует стоячим изгибным колебаниям, получившимися как результат интерференции двух быстрых магнитоакустических колебаний. На данный момент наблюдения подобных колебаний активно используются для сейсмологического определения магнитного поля в корональной плазме.

2.2 Гармонический осциллятор. Параметры колебаний

Уравнения (2.1.3), (2.1.5), (2.1.9), (2.1.11), (2.1.14) могут быть записаны в единой!!! форме. Таким образом, малое колебание любой природы описывается единым образом – моделью гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.2.1)$$

Различными в каждом конкретном случае будут лишь выражения для 2-х параметров, значения которых определяют характер движения в системе – *коэффициента диссипации* 2γ , определяющего скорость уменьшения (или увеличения при $\gamma < 0$) амплитуды, и ω_0 – *собственной частоты* колебаний.

Смысл этих параметров заключается в следующем.

Если промежуток времени $\Delta t = 1/\gamma$, то $A_0/A = e$. Отсюда вытекает физический смысл коэффициента затухания: величина $1/\gamma$ равна промежутку времени, по истечении которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Частота колебаний связана с *периодом* колебаний – минимальным промежутком времени T , в течение которого фаза колебаний принимает то же значение, что и в момент времени $t = 0$: $\omega_0 = 2\pi/T$.

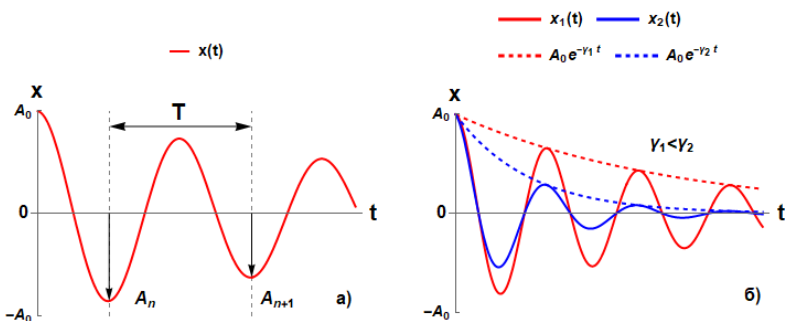


Рисунок 8. а) Общее решение уравнения гармонического осциллятора;
 б) Вид решения при различных значениях коэффициента диссипации

Уточним использованные термины. Для этого заметим, что общее решение уравнения (2.2.1) может быть переписано в виде [46-48, 86, 88] (см. рис. 8):

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.2.2)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Уравнение (2.2.1) дополняется начальными условиями:

$$x(t=0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0. \quad (2.2.3)$$

Удовлетворяя решение (2.2.1) начальным условиям (2.2.3), получаем следующие выражения для амплитуды A и начальной фазы φ :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\gamma}{\omega} - \frac{v_0}{x_0 \omega}. \quad (2.2.4)$$

Для характеристики интенсивности затухания вводят также понятие *логарифмического декремента затухания*. Пусть T – период затухающего колебания, A_n и A_{n+1} – амплитудные значения функции $x(t)$ для двух ее последовательных экстремумов. Величина d , равная $d = \ln(A_n / A_{n+1})$, называется логарифмическим декрементом затухания. Выясним связь между γ и d :

$$d = \ln(A_n / A_{n+1}) = \ln(A_0 e^{-\gamma n} / A_{n+1} e^{-\gamma(t+T)}) = \ln(e^{\gamma T}) = \gamma T. \quad (2.2.5)$$

Используя уравнение (2.2.4), можно преобразовать закон изменения амплитуды: $A_n = A_0 e^{-\gamma n} = A_0 e^{-\gamma T n / T} = A_0 e^{-dn}$, где $n = t/T$ – число колебаний за время t . Если $n = 1/d$, то $A_0 / A = e = 2,7183$. Если значение d невелико ($d \ll 1$), то можно показать, что $(A_n - A_{n+1}) / A_n = d$. Логарифмический декремент связан с другой важной характеристикой колебаний – *добротностью* Q следующим соотношением: $Q = \pi / d = \pi / \gamma T$.

Полная энергия колебаний W складывается из кинетической W_K и потенциальной W_{II} энергий: $W = W_K + W_{II} = m\dot{x}^2 / 2 + m\omega^2 x^2 / 2$.

Подсчитаем полную механическую энергию E гармонического осциллятора, совершающего колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, $W_K = m\dot{x}^2 / 2 = (mA^2 \omega_0^2 / 2) \sin^2(\omega t + \varphi)$, $W_{II} = m\omega_0^2 x^2 / 2 = (mA^2 \omega_0^2 / 2) \cos^2(\omega t + \varphi)$. Следовательно,

$W = mA^2\omega_0^2/2$. Из закона сохранения энергии следует, что по мере совершения колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий равняются максимальному значению полной механической энергии. При наличии трения в системе полная механическая энергия системы с течением времени уменьшается, но ее мгновенное значение по-прежнему равняется максимальной потенциальной энергии, относящейся к данному моменту времени. Следовательно, для затухающих колебаний, подчиняющихся закону $x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$, будет справедливо выражение: $W = mA^2(t)/2 = mA_0^2\omega_0^2 e^{-2\gamma t} / 2$.

•Точечное отображение для гармонического осциллятора.

Рассмотрим гармонический осциллятор $\dot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, упомянутый выше с более простыми начальными условиями $x(0) = x_0, v(0) = v_0 = 0$. Решение этого уравнения имеет вид: $x = e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + \gamma x_0 \omega^{-1} \sin \omega t), v = -e^{-\gamma t} (\omega + \gamma^2 \omega^{-1}) x_0 \sin \omega t$. Будем следить, для определенности, за последовательными пересечениями фазовой траекторией оси абсцисс. В момент пересечения $\sin \omega t = 0$, т.е. пересечения происходят в моменты времени $t_n = \pi n / \omega$. В эти моменты координата точки пересечения оси абсцисс фазовой траекторией равна $x_n = x(t_n) = (-1)^n x_0 \exp(-\pi n \gamma / \omega)$ или в рекуррентной форме

$$x_{n+1} = -\exp(-\pi \gamma / \omega) x_n = \rho x_n. \quad (2.2.6)$$

Построим данную последовательность на плоскости (x_{n+1}, x_n) .

Методика построения следующая.

1. Выберем на оси x_n начальную точку x_1 при $n = 1$. Соответствующую ей точку x_2 найдем, используя (2.2.6).

2. Для нахождения следующей точки превратим ординату x_2 в абсциссу x_2 , переходя на биссектрису $x_{n+1} = x_n$. Такому переходу соответствует придание точке x_2 статуса начального условия для второго шага. Новой абсциссе соответствует ордината x_3 , определяемая прямой (2.2.6).

3. Многократно повторяя это построение, получаем ломаную, называемую *лестницей Ламерея*, рис. 9.

Эта последовательность в силу условия $|dx_{n+1} / dx_n| < 1$ сходится к предельной точке $x^* = 0$, определяемой из условия $x^* = f(x^*)$. Ее называют неподвижной точкой отображения. Видно, что данная последовательность соответствует периодически повторяющемуся процессу.

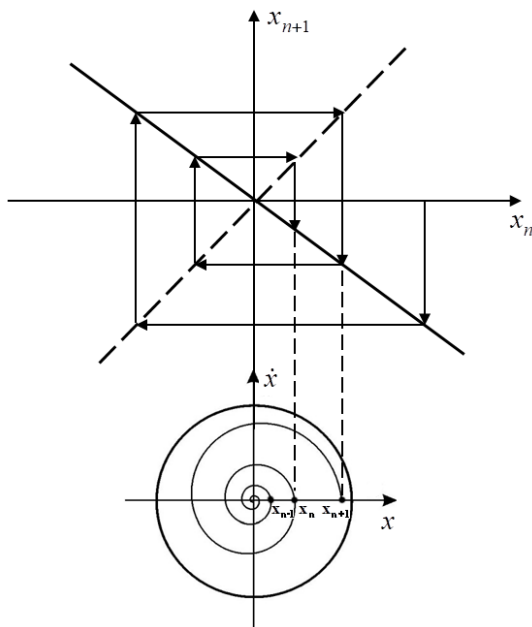


Рисунок 9. Диаграмма Ламерея для гармонического осциллятора

2.3 Нелинейные консервативные системы с 1-й степенью свободы. Примеры колебательных систем

В этом разделе рассмотрены нелинейные колебания в некоторых консервативных системах второго порядка. В отличие от линейных систем, для нелинейных не существует общих методов решения уравнений, в силу чего консервативные системы 2-го порядка представляют собой исключение, когда задача может быть решена до конца без использования приближенных методов.

Приведем примеры процессов, приводящих к уравнениям нелинейных консервативных колебаний.

2.3.1 Нелинейные колебания математического маятника

Рассмотрим уравнение (2.1.2):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \Omega, \dot{\Omega} = -\omega_0^2 \sin \varphi.$$

Относительное изменение фазового объема системы равно нулю $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = (d\dot{\varphi}/d\varphi + d\dot{\Omega}/d\Omega)/d\varphi d\Omega = 0 + 0 = 0$, поэтому система консервативна. Приведенное уравнение решается точно. Методика решения такова. Умножим уравнение на $\dot{\varphi}$: $\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow ((\dot{\varphi})^2)' / 2 - \omega_0^2 (\cos \varphi)' = 0$. Интегрируя последнее уравнение, получаем уравнение фазовых траекторий:

$$(\dot{\varphi})^2 / 2 = \omega_0^2 \cos \varphi - \omega_0^2 \cos \varphi_0. \quad (2.3.1)$$

На рис. 10 представлен фазовый портрет уравнения математического маятника.

В уравнении (2.3.1) константа интегрирования в правой части выбрана в удобной для дальнейшего анализа форме. Константа φ_0 имеет смысл максимального отклонения маятника от положения равновесия, где $\dot{\varphi} = 0$. Перепишем последнее уравнение в виде

$(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{-1/2} d\varphi = 2^{1/2} \omega_0 dt$ и проинтегрируем его еще раз.

В результате имеем:

$$2^{-1/2} \int_0^{\varphi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{-1/2} d\varphi = \omega_0 (t - t_0) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\varphi} (\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2))^{-1/2} d\varphi = 2\omega_0 (t - t_0).$$

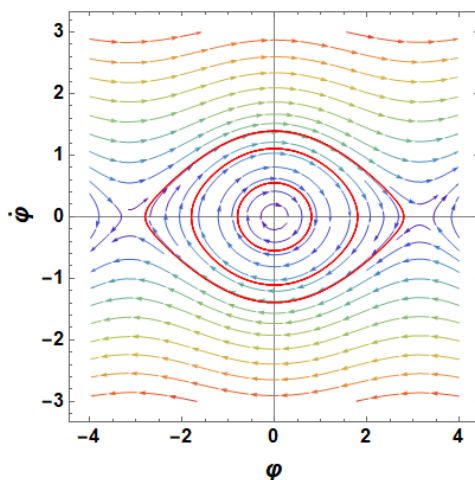


Рисунок 10. Фазовый портрет уравнения (2.1.2)

Обращение последнего интеграла приводит к решению, которое может быть выражено через эллиптический синус [108, 109]:

$$\sin \varphi / \sin \varphi_0 = \operatorname{sn}[\omega_0 (t - t_0), \sin(\varphi_0 / 2)]. \quad (2.3.2)$$

2.3.2 Нелинейные колебания Модели Лотки – Вольтерра

Снова рассмотрим модель Лотки-Вольтерра (2.1.12). Эта система, очевидно, путем замены переменной также может быть сведена к одному уравнению $\ddot{n} - n^{-1}(\dot{n})^2 = (a - bn)(\dot{n} + An)$, однако поиск его аналитического решения, в отличие от предыдущей задачи,

несравнимо сложнее. Удобнее исследовать структуру его решения на фазовой плоскости.

Анализ дает следующее:

I. У системы существует единственная особая точка $(b/a, B/A)$.

II. Уравнение для отклонений численности видов от положений равновесия получается путем линеаризации исходной системы $\dot{N}' = -ABn'/b, \dot{n}' = abN'/b$.

III. Отсюда нетрудно получить характеристическое уравнение, разыскивая решение данной системы в виде $N' = C \exp(\lambda t), n' = D \exp(\lambda t)$. В результате получим $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, где $\omega^2 = Aa$.

IV. Корни этого уравнения имеют вид: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, т.е. эта точка – центр.

Следовательно, численность каждого вида описывается уравнениями гармонических колебаний вида $\{n; N\} = \{n_0; N_0\} + \{n'; N'\} \sin(\omega t + \delta)$, которые описывают устойчивый колебательный процесс, существующий бесконечно долго. Это означает, что исчезновение одного из видов невозможно, об этом же говорит и фазовый портрет системы (см. рис. 11), уравнение которого можно получить, вводя обозначения, например, $x = n, y = dx/dt$. Тогда учитывая, что $dy/dt = \omega^2 x$, можно получить $dy/dx = -y\omega^2 x$. Проводя интегрирование и вводя обозначение $k^2 = 2c$, где c – постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями, получим уравнение эллипса $y^2/k^2 + x^2/(k^2/\omega^2) = 1$ с полуосями k и k/ω . Таким образом, особая точка системы также центр. Замкнутыми являются и фазовые траектории вдали от особой точки (рис. 11).

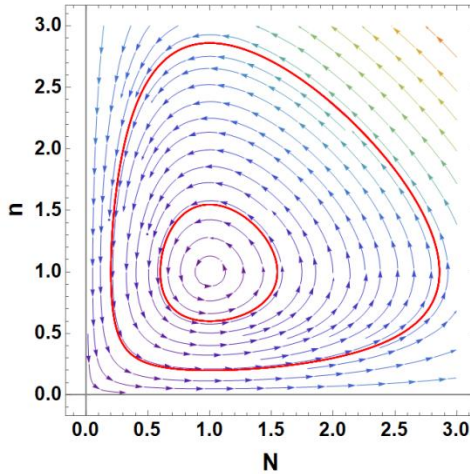


Рисунок 11. Фазовый портрет уравнения (2.1.12)

2.4 Спектр колебаний

Нелинейные колебания имеют еще одну важную характеристику – *спектр колебаний*. Известно, что периодическую функцию $F(t)$ можно разложить в ряд по гармоническим компонентам – синусам, косинусам или экспонентам, *ряд Фурье* [103-105], который имеет вид

$$\begin{aligned}
 F(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t / T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n t / T) = \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n t / T + \chi_n),
 \end{aligned}
 \tag{2.4.1}$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt,$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \langle F(t) \rangle, \quad \sin \chi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \chi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

В ситуации, когда колебательный процесс представляет собой суперпозицию отдельных гармонических сигналов, для характеристики такого процесса удобно использовать такую его характеристику, как *спектр колебаний*.

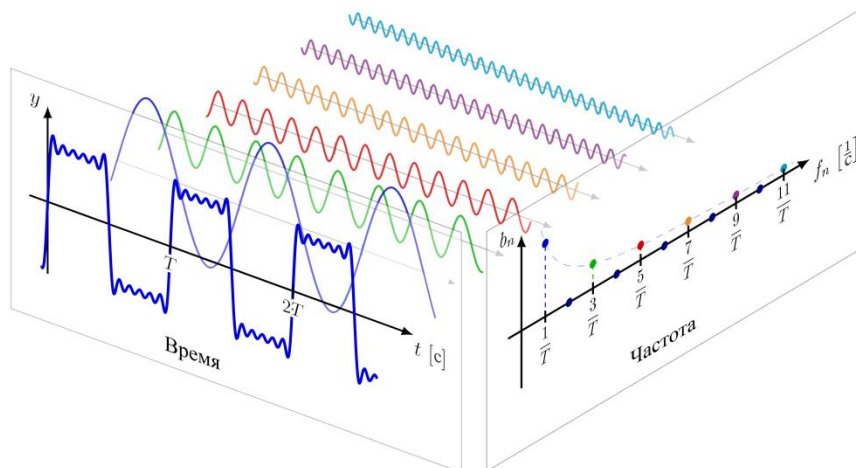


Рисунок 12. Пример разложения сигнала по его гармоникам

При графическом отображении спектра колебаний по оси абсцисс указывают частоты колебаний ω_n или их номера n , а по оси ординат указывают амплитуды a_n или квадраты a_n^2 . На рис. 12 представлен пример разложения сигнала в виде ряда (2.4.1). Спектр позволяет видеть, какая часть энергии a_n^2 сосредоточена в какой гармонике.

2.5 Метод разложения по малому параметру

Здесь демонстрируются основные принципы и детали применения приближенных методов анализа нелинейных колебательных систем – разложения по малому параметру. Необходимость их развития обусловлена двумя факторами – точное решение уравне-

ний колебательного процесса часто записывается в сложном виде, а метод фазовой плоскости дает лишь основные представления об основных чертах процесса, но не дает решения.

2.5.1 Метод разложения по малому параметру

Как мы видели выше, анализ даже консервативных систем часто сопряжен с существенными техническими сложностями, уже там решение записывается только в неявном виде с использованием специальных функций. Поэтому часто для анализа нелинейных колебательных процессов приходится применять или *качественные методы* или (и) *методы теории возмущений*.

Рассмотрим осциллятор вида [1, 14, 24]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0. \quad (2.5.1)$$

Введем безразмерные время и координату $t = \omega_0 t_0$, $x = x/A$. Уравнение (2.5.1) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad (2.5.2)$$

где $\varepsilon = \alpha A/\omega_0^2$. Рассмотрим случай *слабой нелинейности*, когда $\varepsilon \ll 1$, т.е. уравнение (2.5.2) содержит *малый параметр*. Уравнение (2.5.2) близко к уравнению линейного консервативного осциллятора, оно отличается от него малым слагаемым порядка ε . Поэтому ясно, что при $\varepsilon \ll 1$ решение будет иметь вид квазигармонических колебаний (близких к гармоническим).

Построим приближенное решение (2.5.2). Наиболее простой способ состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда по степеням $\varepsilon \ll 1$:

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots, \quad (2.5.3)$$

считая $x_i(t)$ величинами порядка единицы. Подобный прием называют методом разложения по малому параметру. Подставив (2.5.3) в (2.5.2), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots \\ \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Приравнявая в (2.5.4) к нулю члены при одинаковых степенях ε , приходим к системе «зацепляющихся» уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 &= 0; \\ \varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 &= 0; \\ \varepsilon^2 : \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 &= 0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Первое уравнение есть уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид $x = a \cos(t + \varphi)$, где амплитуда a и начальная фаза φ – постоянные, определяемые из начальных условий. Подставим это решение во второе уравнение, чтобы найти x_2 : $\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -a^2/2 - (a^2/2)\cos 2(t + \varphi)$. Это уравнение формально совпадает с уравнением линейного консервативного осциллятора под внешним воздействием. Его решение следует искать в виде $x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) + x_{2\text{ЧН}}$, где a_1 и φ_1 по-прежнему определяются из начальных условий. Как известно из теории линейных колебаний, в спектре вынужденных колебаний будут содержаться те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая и вторая гармоники. Нетрудно найти, что $x_{2\text{ЧН}} = -a^2/2 + (a^2/6)\cos 2(t + \varphi)$. Итак, получаем $x_2 = a_1 \cos(t + \varphi) - a^2/2 + (a^2/6)\cos 2(t + \varphi)$. Полученное решение содержит 4 независимых постоянных, для определения которых имеются только 2 начальных условия. Поэтому можно две из этих постоянных выбрать произвольным образом. Наиболее удобно положить $a_1 = 0$ (константы произвольные, и будет множитель при $\cos(t + \varphi)$ иметь вид a или $a + a_1$, безразлично). В дальнейшем условимся во всех высших порядках малости занулять составляю-

щие, соответствующие собственным колебаниям. Таким образом, окончательный вид решения с точностью до членов порядка ε^2 таков:

$$x_2 \approx a \cos(t + \varphi) + \left(-a^2/2 + (a^2/6)\cos 2(t + \varphi)\right) + \dots \quad (2.5.6)$$

Как видно из выражения (2.5.6), в спектре колебаний появляются высшие гармоники: нулевая и вторая, амплитуды которых имеют порядок εa^2 , т.е. много меньше амплитуды основной составляющей. Можно продолжить описанную процедуру, продвигаясь во все более высокие порядки малости. В решении появятся высшие гармоники. Однако их амплитуды будут еще меньше (порядка $\varepsilon^{n-1}a^n$, где n – номер гармоники), поскольку нелинейность является слабой, и амплитуды высших гармоник должны быстро уменьшаться с ростом их номера.

Остается вычислить константы a и φ . Пусть начальные условия имеют вид $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$. Тогда, используя выражение (2.5.6), легко найти, что

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos \varphi - \varepsilon \left(a^2/2 - (a^2/6)\cos 2\varphi \right), \\ -y_0 &= a \sin \varphi - (\varepsilon a^2/3)\sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Это система трансцендентных уравнений, получить точное решение которой в общем случае не удастся. Однако, учитывая, что в (2.5.7) содержится малый параметр, можно представить решение в виде рядов:

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \quad (2.5.8)$$

В разложениях (2.5.8) нужно учитывать то же число членов, что и в решении (2.5.6). Подставим (2.5.8) в систему (2.5.7) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке по ε будем иметь: $a_0 \cos \varphi_0 = x_0, a_0 \sin \varphi_0 = y_0$, откуда нетрудно найти амплитуду и начальную фазу нулевого порядка:

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \varphi_0 = -2 \arctg \left(y_0 / \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right) \right). \quad (2.5.9)$$

Члены порядка ε^1 в (2.5.7) дают систему линейных уравнений относительно a_1 , φ_1 , найти решение которой не представляет труда:

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - a_0^2 / 2 + (a_0^2 / 6) \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + (a_0^2 / 3) \sin 2\varphi_0 &= 0. \end{aligned}$$

2.5.2 Осциллятор Дуффинга. Метод Линштедта – Пуанкаре

Прямое разложение по степеням малого параметра не всегда приводит к успеху. Дело в том, что на каждом шаге слагаемые предыдущего порядка малости переходят в правую часть и начинают играть роль внешней силы. При этом может возникнуть ситуация, при которой внешнее воздействие будет иметь частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Решение полученного уравнения будет нарастать, и их амплитуда может стать большей, чем допустимо соответствующим порядком теории возмущений. В силу сказанного, в данном случае надо модифицировать метод разложения по малому параметру так, чтобы исключить соответствующие слагаемые. Чтобы показать, как это делается, рассмотрим осциллятор Дуффинга [1, 14, 24]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (2.5.10)$$

Используем замену переменных из раздела 2.5.1. Тогда (2.5.10) примет вид:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.5.11)$$

где теперь $\varepsilon = \beta A / \omega^2$. Будем снова рассматривать случай слабой нелинейности, т.е. положим $\varepsilon \ll 1$. Отыскивая решение в виде

разложения по малому параметру $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$, будем иметь:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : \ddot{x}_1 + x_1 &= 0, \\ \varepsilon^1 : \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 &= 0.\end{aligned}\tag{2.5.12}$$

В нулевом порядке по ε по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид $x_1 = a \cos(t + \varphi)$.

Найдем x_2 . После подстановки выражения для x_1 второе уравнение приводится к виду:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 &= a^3 \cos^3(t + \varphi) = \\ &= -a^3 [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)] / 4.\end{aligned}\tag{2.5.13}$$

Найдем решение (2.4.10). Т.к. нелинейность кубическая, то в спектре воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение будем искать в виде суммы откликов на них: $x_2 = x_{21} + x_{23}$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{21} + x_{21} &= (3a^3/4) \cos(t + \varphi), \\ \ddot{x}_{23} + x_{23} &= (a^3/4) \cos 3(t + \varphi).\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

Решение второго уравнения системы (2.5.14) находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте вынуждающей силы: $x_{23} = (a^3/32) \cos 3(t + \varphi)$.

Что же касается первого уравнения системы (2.5.14), то в нем внешнее воздействие имеет частоту, равную!!! частоте собственных колебаний осциллятора. Как известно из теории линейных колебаний, в этом случае возникает резонанс, выражающийся в неограниченном нарастании амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид:

$$x_{21} = -(3a^3 t / 8) \cos(t + \varphi).\tag{2.5.15}$$

Это так называемый *секулярный* или *вековой член*.

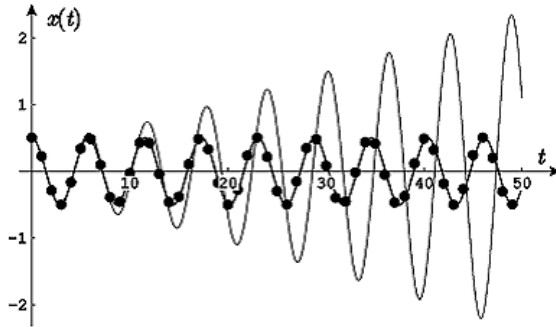


Рисунок 13. Решения уравнения (2.5.11).

Жирная линия – точное решение, тонкие линии – метод итераций,
 кружки – метод Линштедта – Пуанкаре

Окончательный вид решения с точностью до членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned}
 x_{21} &= a \cos(t + \varphi) + \\
 &+ \varepsilon \left[-\left(3a^3 t / 8\right) \cos(t + \varphi) + \left(a^3 / 32\right) \cos 3(t + \varphi) \right] + \dots, \quad (2.5.16) \\
 x &= \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi).
 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что, как бы ни был мал параметр ε , с течением времени второй член в решении (2.5.16), неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения по степеням ε на больших временах нарушается. В чем причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются *неизохронными*, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение по степеням ε принципиально не учитывает неизохронность: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники (отметим, что для осциллятора с квадратичной нелинейностью, рассмотренного в разделе 2.4.1, мы пришли

бы к сходному результату, если бы продвинулись в вычислениях ещё на порядок).

Итак, необходимо модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Введем в уравнении (2.5.10) новую переменную $\tau = \omega t$. Поскольку $d/dt = \omega d/d\tau$, получим:

$$\omega^2 \ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (2.5.17)$$

Схема действий такова – мы будем искать решение уравнения (2.5.17) в виде разложений в степенной ряд как для переменной x , так и для частоты $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$, $\omega(t) = \omega_1(t) + \varepsilon \omega_2(t) + \varepsilon^2 \omega_3(t) + \dots$. Первый член в разложении для ω при этом представляет собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. А следующие поправки ω_1, ω_2 будут играть двойную роль – описывать эффекты неизохронности и выбираться так, чтобы обнулить секулярные члены, позволяя избавиться от растущих слагаемых.

Подставим эти разложения в уравнение (2.5.17). Получим

$$\begin{aligned} & (1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots)(\ddot{x}_1 + \varepsilon\ddot{x}_2 + \dots) + \\ & + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon x_1^2 x_2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

После несложных вычислений (2.5.18) приводится к виду:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon(\ddot{x}_2 + x_2 + 2\omega_1\ddot{x}_1 + x_1^3) + \dots = 0. \quad (2.5.19)$$

Приравнявая к нулю члены нулевого и первого порядков малости, будем иметь:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1\ddot{x}_1 - x_1^3. \quad (2.5.20)$$

Решение первого уравнения системы (2.5.20) запишем в виде $x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$. Подставив это соотношение в правую часть второго уравнения системы (2.5.20), найдем, что

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 = & \\ = -2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - a^3(3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)) / 4. & \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Теперь необходимо выбрать ω_1 таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные $\cos(\tau + \varphi)$, которые приводят к секулярному росту решения для x_2 . Для этого, очевидно, следует положить $\omega_1 = 3a^3/8$. Теперь уравнение (2.5.21) принимает вид $\ddot{x}_2 + x_2 = -(a^3/4)\cos 3(\tau + \varphi)$. Его решение $x_2 = (a^3/32)\cos 3(\tau + \varphi)$ не содержит секулярных составляющих, и разложение остается равномерно пригодным при всех t . Окончательный вид найденного решения с точностью до членов $\sim \varepsilon^1$:

$$\begin{aligned} x &\approx a \cos(\omega t + \varphi) + (\varepsilon a^3 / 32) \cos 3(\omega t + \varphi), \\ \omega &\approx 1 + 3\varepsilon a^2 / 8. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Если параметр ε считается положительным, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при $\varepsilon < 0$ частота, наоборот, уменьшается.

2.6 Нелинейная динамика протуберанца на Солнце

В данном разделе мы продемонстрируем приложение линейного анализа и анализа нелинейной динамики на фазовом пространстве к описанию динамики колебательной системы естественного происхождения. А именно, в качестве примера возьмем модель описания эволюции протуберанца на Солнце.

Протуберанцами называют крупные образования магнитно-структурированной плазмы, отличающие от окружающей их плазмы своей повышенной плотностью и пониженной температурой. На рис. 14а представлено изображение интенсивности, полученное с помощью ЕИТ (телескопа для формирования изображений в экстремальном ультрафиолетовом диапазоне) на длине волны

195 Å, показывающее протуберанец (prominence) и активную область AR 10792. А справа на рис. 14б показаны соответствующий протуберанец и AR 10792 на диске Солнца в изображении интенсивности H α , полученное с BBSO (Солнечная обсерватория «Большой Медведь»).

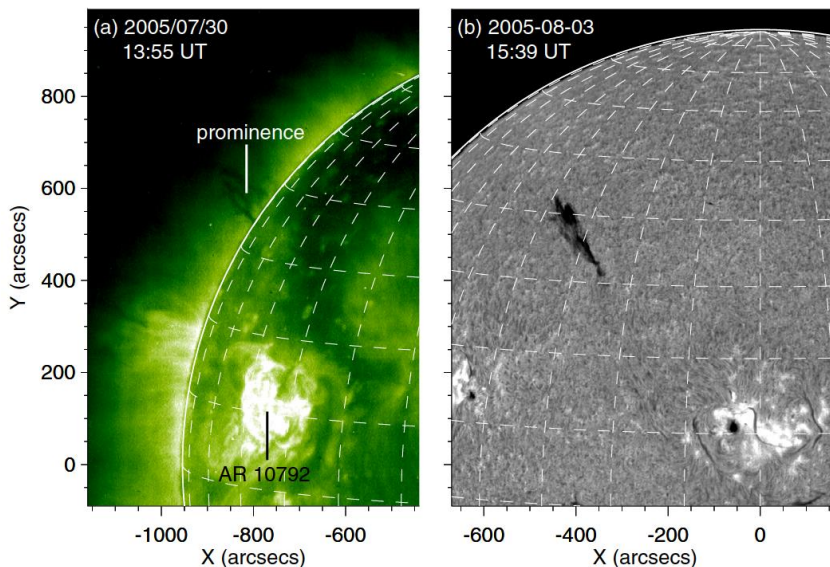


Рисунок 14. а) Изображение интенсивности EIT 195 Å, показывающее протуберанец (prominence) и активную область AR 10792;
 б) Изображение аналогичных структур в H α , полученное BBSO.
 Изображение взято из [81]

На данный момент наиболее известными моделями протуберанцев являются модели Куперасу-Рааду и Киппенхана-Шлютера. Рассмотрим далее последнюю.

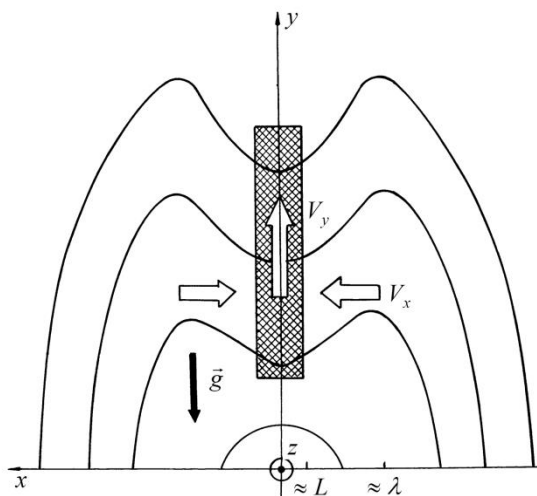


Рисунок 15. Протуберанец в виде токового слоя, который удерживается натяжением магнитных силовых линий

На рис. 15 показан протуберанец, моделируемый вертикальным токовым слоем. Закрашенная область соответствует токовому слою. Сплошные линии соответствуют линиям магнитного поля. Направление действия силы тяжести показано вектором \vec{g} , V_x, V_y – компоненты скорости плазмы, λ – характерный масштаб магнитной структуры, L – характерная ширина протуберанца.

Поток плазмы считается восходящим, т.е.

$$V_z = V_z(t), V_y = V_y(t), V_x = \frac{\dot{X}}{X} x. \quad (2.6.1)$$

В рамках данной модели из основной системы уравнений МГД может быть получено следующее уравнение для степени сжатия токового слоя X (методику вывода эволюционного уравнения см. в [20]):

$$\ddot{X} = \frac{c_S^2}{\lambda^2} X^{-\gamma} - \frac{c_A^2}{\lambda^2} X^{-2} \exp(-DX), \quad (2.6.2)$$

где c_S – скорость звуковых волн в плазме, c_A – скорость альфвеновских волн, D – коэффициент, определяемый сечением ионно-атомных столкновений, средней тепловой энергией и наличием нейтральных частиц.

Представим далее данное уравнение в виде системы, введя замену:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= \frac{c_S^2}{\lambda^2} X^{-\gamma} - \frac{c_A^2}{\lambda^2} X^{-2} \exp(-DY). \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Положение равновесия можно легко найти из условия $\dot{X} = 0, \dot{Y} = 0$. Мы заинтересованы только в тех положениях, которые имеют физический смысл, т.е. должно выполняться $X_0 > 0$. На фазовой плоскости (X, \dot{X}) этим условиям соответствует точка:

$$\dot{X}_0 = Y_0; X_0 = \left(\frac{c_S^2}{c_A^2} \right)^{2/(\gamma-2)}. \quad (2.6.4)$$

Проанализируем далее зависимость типа данной особой точки. Для этого линеаризуем систему (2.6.3) вблизи особой точки (2.6.4). Другими словами, представим функции X, Y в виде $X = X_0 + \varepsilon X_1, Y = Y_0 + \varepsilon Y_1$, где $\varepsilon \ll 1$. Тогда система (2.6.3) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= Y_1, \\ \dot{Y}_1 &= BX_1 + AY_1, \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

где

$$A = c_A^2 \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{c_S^2}{c_A^2} \right)^{\frac{4}{(2-\gamma)}}, \quad B = c_A^2 \frac{2-\gamma}{\lambda^2} \left(\frac{c_S^2}{c_A^2} \right)^{\frac{6}{(2-\gamma)}}. \quad (2.6.6)$$

Легко видеть, что коэффициент A всегда положительный. Это соответствует тому, что точка $(X_0, 0)$ является неустойчивой. Сам же тип определяется величиной показателя адиабаты γ и величин A, B (см. рис. 16):

- а) $\gamma > 2, (B < 0), A^2 < 4|B|$ – неустойчивое равновесие «фокус»;
- б) $\gamma > 2, (B < 0), A^2 > 4|B|$ – неустойчивое равновесие «узел»;
- в) $\gamma < 2, B > 0$ – неустойчивое равновесие «седло».

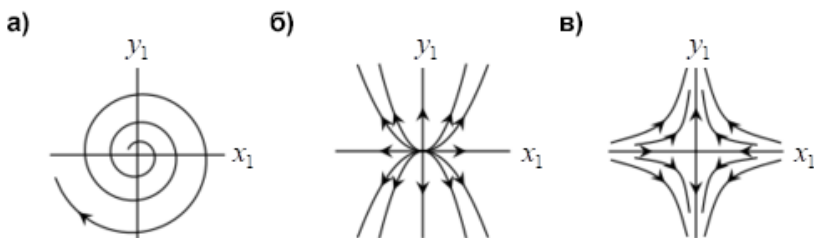


Рисунок 16. Возможные типы неустойчивого состояния равновесия протуберанца: а – фокус, б – узел, в – седло

Равновесному состоянию типа «фокус» соответствует раскачка в протуберанце колебаний плотности плазмы. Фазовый портрет системы (2.6.3) для данного случая представлен на рис. 17. В данном случае можно выделить два типа решений. Первый (см., например, синюю кривую на рис. 17) описывает процесс увеличения плотности вещества («схлопывания»), сменяющийся затем её уменьшением с постепенно убывающей скоростью. Второе решение соответствует процессу квазипериодического расширения до некоторого конечного значения, а затем также происходит постепенное уменьшение плотности.

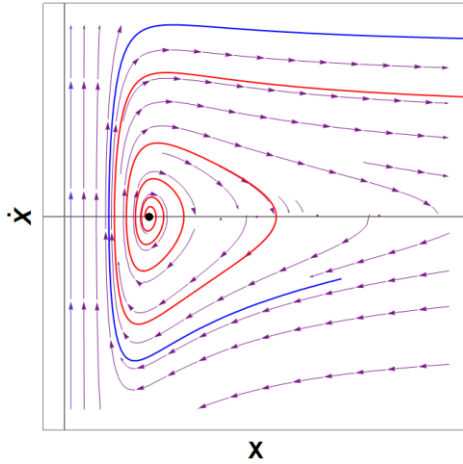


Рисунок 17. Фазовые траектории при $\gamma > 2, (B < 0), A^2 < 4|B|$ – неустойчивое равновесие типа «фокус»

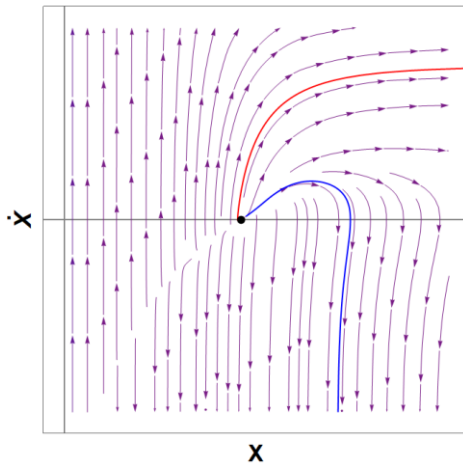


Рисунок 18. Фазовые траектории при $\gamma > 2, (B < 0), A^2 > 4|B|$ – неустойчивое равновесие типа «узел»

В случае, когда система имеет равновесное состояние типа «узел», фазовый портрет имеет схожие основные особенности с

состоянием равновесия типа фокус. Однако вместо квазипериодической раскачки колебаний происходит аperiodическое уменьшение плотности плазмы.

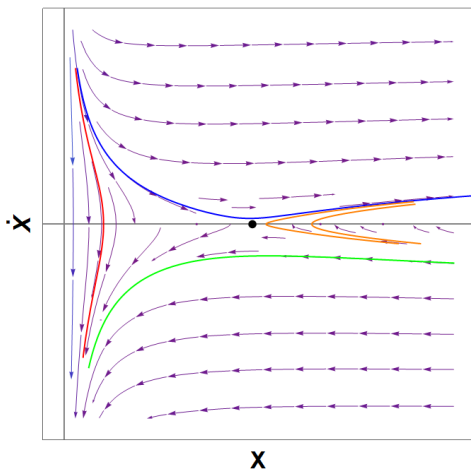


Рисунок 19. Фазовые траектории при $\gamma < 2, B > 0$ – неустойчивое равновесие типа «седло»

В том случае, когда показатель адиабаты $\gamma < 2$, в плазме реализуется состояние равновесия типа «седло». Фазовый портрет системы (2.6.3) для данного случая представлен на рис. 19. При таких параметрах может наблюдаться монотонное сжатие плазмы протуберанца (см., например, зеленую кривую на рис. 19). Кроме того, может наблюдаться сжатие с последующим расширением (см., например, оранжевые кривые на рис. 19). Также может наблюдаться процесс монотонного расширения протуберанца (см., например, синюю кривую на рис. 19). Можно также выделить тип решения соответствующий уменьшению плотности до некоторого значения, большего равновесного, с последующим сжатием к равновесному (см., например, красную кривую на рис. 19).

Рассмотренное модельное поведение колебательной системы в виде одномерного протуберанца, безусловно, является упрощенным. Однако она позволяет установить, что согласно модели Киппенханна-Шлютера нестационарность плазмы и ее частичная ионизация (см. параметры системы (2.6.2)) обуславливают неустойчивость внутренних ($x < \lambda$) областей протуберанца. Кроме того, модель позволяет качественно описать возможные пути поведения колебательной системы.

ГЛАВА 3 НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С 1-Й СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Здесь рассмотрены нелинейные колебания в некоторых диссипативных системах второго порядка [1, 2, 14]. Эффективными способами анализа данных систем также являются метод фазовой плоскости и методы теории возмущений.

3.1 Метод многих масштабов

В реальных системах часто существует целый набор характерных времен задачи, связанных со скоростями протекания тех или иных процессов, часто сильно отличающихся друг от друга. В таких случаях кажется естественным выделить соответствующие временные масштабы задачи и проводить анализ поведения системы на соответствующем масштабе отдельно, таким образом, определяя вклад отдельного процесса в динамику системы.

Продemonстрируем данную методику на примере модели Дуффинга с учетом диссипативных процессов. Приближенное решение (2.5.20), полученное при помощи метода Линштедта – Пуанкаре, можно представить в виде:

$$x = a \cos(t + 3a^2 \varepsilon t / 8 + \varphi) + (\varepsilon a^3 / 32) \cos(3t + 9a^2 \varepsilon t / 8 + 3\varphi). \quad (3.1.1)$$

Зависимость от времени входит в это выражение двояким образом: $x = x(t, \varepsilon t)$. Поскольку ε является малым параметром, зависимость от εt можно интерпретировать как медленное изменение параметров колебания. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, мы приходим к представлению решения в виде $x = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t)$. Введем обозначения $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t \dots$

Зависимость от очередного аргумента T_n характеризует изменения, которые проявляются на последовательно возрастающих масштабах времени.

Идея перехода от единственного времени t к набору переменных T_n лежит в основе метода многих масштабов, позволяющего получать решения широкого класса задач теории колебаний. Это связано с тем, что в конкретных системах часто существует целый набор характерных времен, связанных со скоростями протекания тех или иных процессов.

Продemonстрируем его применение на примере уравнения Дуффинга. Для большей общности включим в него слабое затухание:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (3.1.2)$$

Здесь γ считается величиной порядка единицы. Отметим, что метод Линшtedта – Пуанкаре неприменим в случае, когда учитывается затухание, так как в нем изначально предполагается, что амплитуда и частота колебаний являются постоянными, и эффекты уменьшения амплитуды описать не удастся. При переходе к новым переменным T_n операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = \hat{D}_0 + \varepsilon \hat{D}_1 + \varepsilon^2 \hat{D}_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \hat{D}_0^2 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 + \varepsilon^2 (\hat{D}_1^2 + 2\hat{D}_0 \hat{D}_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Решение для переменной x по-прежнему будем искать в виде степенного ряда $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$. Подставляя это разложение и разложение (3.1.3) в уравнение (3.1.2), получим:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_1 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \dots + \varepsilon \hat{D}_0^2 x_2 + \dots + 2\varepsilon \gamma \hat{D}_0 x_1 + \dots \\ \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Приравняв к нулю члены порядка ε^0 и ε^1 , приходим к следующим уравнениям:

$$\hat{D}_0^2 x_1 + x_1 = 0, \quad \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -2\hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 - 2\gamma \hat{D}_0 x_1 - x_1^3. \quad (3.1.5)$$

Решение первого уравнения системы (3.1.5) по-прежнему запишем в виде $x_1 = \cos(T_0 + \varphi)$, но теперь будем считать a и φ не постоянными, а функциями, зависящими от медленных переменных: $a = a(T_1, T_2, \dots)$, $\varphi = \varphi(T_1, T_2, \dots)$. Действительно, уравнение (3.1.2) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение гармонического осциллятора, потому что решение в порядке ε^0 – квазигармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Подставим решение $x_1 = \cos(T_0 + \varphi)$ в правую часть второго уравнения системы (3.1.5). Учтем, что оператор \hat{D}_0 действует только на аргумент T_0 , а оператор \hat{D}_1 на медленно меняющиеся переменные a , φ . Получим:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= 2(\hat{D}_1 a \sin(T_0 + \varphi) + a \hat{D}_1 \varphi \cos(T_0 + \varphi)) + \\ &+ 2\gamma a \sin(T_0 + \varphi) - a^3 \cos^3(T_0 + \varphi) = \\ &= 2(\hat{D}_1 a + \gamma a) \sin(T_0 + \varphi) + \\ &+ (2a \hat{D}_1 \varphi - 3a^3 / 4) \cos(T_0 + \varphi) - (a^3 / 4) \cos 3(T_0 + \varphi). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

В правой части уравнения (3.1.6) следует приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные $\cos(T_0 + \varphi)$, $\sin(T_0 + \varphi)$. Это приводит к уравнениям:

$$\hat{D}_1 a + \gamma a = 0, \quad \hat{D}_1 \varphi - 3a^2 / 8 = 0. \quad (3.1.7)$$

Таким образом, мы получили *укороченные* дифференциальные уравнения, которые описывают динамику медленно меняющихся переменных $a(T_1)$ и $\varphi(T_1)$.

В случае консервативного осциллятора ($\gamma = 0$) уравнения (3.1.7) приводят к результату, в точности совпадающему с методом Линштедта – Пуанкаре: $a = a_0$, $\varphi = 3a_0^2 T_1 / 8 + \varphi_0$, где a_0 , φ_0 – по-

стоянные, определяемые из начальных условий. Величина $\hat{D}_1\varphi$ – поправка к частоте, появляющаяся из-за нелинейных эффектов. Для нее мы получаем значение $3a^3 T_1/8$.

При $\gamma > 0$ найти решение укороченных уравнений не составляет труда:

$$a = a_0 e^{-\gamma T_1}, \quad \varphi = \varphi_0 + 3a_0^2(1 - e^{-2\gamma T_1})/16\gamma. \quad (3.1.8)$$

Эти соотношения описывают экспоненциальное затухание амплитуды; при этом поправка к частоте также уменьшается. После исключения секулярных членов уравнение (3.1.6) принимает вид $\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -(a^3/4)\cos 3(T_0 + \varphi)$. Оно, очевидно, совпадает с уравнением, которое анализировалось в предыдущем разделе. Поэтому сразу запишем окончательный вид решения:

$$x \approx a(T_1)\cos(T_0 + \varphi(T_1)) + (\varepsilon a^3(T_1)/32)\cos 3(T_0 + \varphi(T_1)). \quad (3.1.9)$$

Зависимость амплитуды и фазы от медленного времени дается соотношениями (3.1.8). При использовании метода многих масштабов более удобно оперировать комплексной формой записи. Представим решение для x_1 в виде $x = A(T_1)e^{iT_0}$, тогда уравнение (3.1.6) примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= -\left((2i\hat{D}_1 A + 2i\gamma A)e^{iT_0} + \text{к.с.}\right) - \left(Ae^{iT_0} + \text{к.с.}\right)^3 = \\ &= -\left((2i\hat{D}_1 A + 2i\gamma A)e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0} 3A^2 A^* + \text{к.с.}\right) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

В правой части (3.1.10) следует потребовать уничтожения секулярных членов, пропорциональных e^{iT_0} . Это приводит к комплексному уравнению:

$$\hat{D}_1 A + \gamma A - 3i|A|^2 A/2 = 0. \quad (3.1.11)$$

Вводя вещественные амплитуду и фазу $A = 0.5ae^{i\varphi}$ и разделяя вещественную и мнимую части, снова приходим к уравнениям (3.1.9).

3.2 Автоколебания в сферической микроволновой плазме

Автоколебательные процессы могут реализовываться в различных естественных средах и в частности в плазме. Ниже приведен пример того как акустические автоколебания могут быть возбуждены в микроволновой плазме.

На рис. 20 представлен сферический акустический резонатор, расположенный внутри микроволнового резонатора. Низкий уровень ионизации горячего газа внутри резонатора позволяет возбуждать звук амплитудно-модулированными микроволнами. При соответствующих условиях звук будет самопроизвольно возникать в присутствии непрерывного (т.е. без модуляции) микроволнового поля.

Акустическая волна в данном случае может быть описана с помощью волнового уравнения с нагревом, зависящим от времени:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 P_1 = (\gamma - 1) \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.2.1)$$

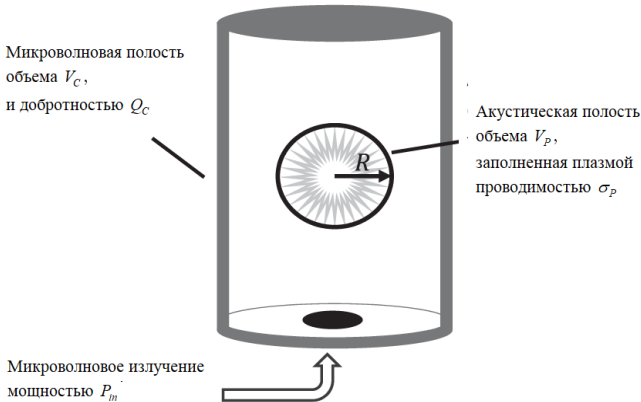


Рисунок 20. Схема акустического резонатора

При температурах больше нескольких тысяч градусов газ ионизируется, и электромагнитное излучение может быть использовано для добавления энергии в газ. При нормальных условиях свободный электрон, который поглотил электромагнитное излучение, будет взаимодействовать с нейтральными частицами на временах столкновений τ меньших чем период микроволнового излучения $(2.44 \text{ ГГц})^{-1} \approx 0.4 \text{ нс}$. В этом случае нагрев за счет поглощения электромагнитного излучения может быть описан как Джоулев нагрев

$$H = \sigma_p E_p^2. \quad (3.2.2)$$

Если τ^{-1} ко всему прочему меньше, чем плазменная частота, тогда проводимость хорошо описывается формулой Друде.

$$\sigma_p = \frac{N_e e^2}{m_e} \tau, \quad (3.2.3)$$

где N_e – концентрация электронов, m_e – масса электрона, e – заряд электрона.

Рассчитав время столкновения как отношение среднего свободного пробега и средней тепловой скорости, проводимость Друде можно непосредственно переписать в терминах доли ионизации, температуры, площади сечения столкновения a , и фундаментальных констант:

$$\sigma_p = \frac{N_e e^2}{N_0 m_e a} \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 k_B T}}. \quad (3.2.4)$$

Используя (3.2.2), объемный нагрев частично ионизированного газа с относительно высокой нейтральной плотностью может быть рассчитан для заданного E_p .

Равновесная доля ионизированного газа $x = N_e / N$ определяется температурой, концентрацией N и энергией ионизации газа χ с помощью уравнения ионизации Саха:

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{2g}{N\lambda^3} \exp\left(-\frac{\chi}{k_B T}\right), \quad (3.2.5)$$

где g – статистический вес, принятый нами за 1, $\lambda = h / \sqrt{2\pi m_e k_B T}$ – длина волны де Бройля. При низкой ионизации ($x \ll 1$) уравнение Саха часто упрощается до

$$x = \sqrt{\frac{2}{N\lambda^3}} \exp\left(-\frac{\chi}{2k_B T}\right). \quad (3.2.6)$$

Именно этот вид будет использоваться в следующем анализе устойчивости.

Связь проводимости с температурой и концентрацией нейтральных частиц можно найти, используя уравнение Саха для предсказания доли ионизированного газа. Полагая, что ионизация изменяется в фазе с температурой и давлением, можно ожидать, что звуковая волна, проходящая через газ, также будет вызывать нагрев в фазе с акустическим давлением.

Для демонстрации этого процесса температура и плотностью нейтральных частиц разложим в первом порядке по акустическому давлению P :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_1}{P_0}\right), \quad (3.2.7)$$

$$N_0 = N_{00} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_1}{P_0}\right). \quad (3.2.8)$$

Здесь P_0 , T_0 и N_{00} – давление, температура и концентрация нейтральных частиц в отсутствие звука. Используя линеаризован-

ные уравнения (3.2.7) и (3.2.8), уравнение Саха (3.2.6) и уравнение проводимости Друде (3.2.4), Джоулев нагрев в присутствии постоянного электрического поля можно записать в первом порядке в виде:

$$H = H_0 \left(1 + \left(\frac{1}{4} \frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\chi}{2k_B T_0} \right) \frac{P_1}{P_0} \right), \quad (3.2.9)$$

где

$$H_0 = \frac{e^2}{a} \sqrt{\frac{2}{N_{00} \lambda^3}} \sqrt{\frac{1}{2k_B T m_e}} \exp\left(-\frac{\chi}{2k_B T}\right) E_P^2. \quad (3.2.10)$$

Когда $2k_B T < \chi$ в (3.2.9) доминирует последний член, обусловленный изменением доли ионизации. Отметим, что в общем случае T и H_0 будут также являться функциями координат. Однако для простоты мы принимаем их однородными.

Если оставить в уравнении (3.2.9) только наибольший зависящий от времени член, то уравнение акустической волны при наличии постоянной подводимой мощности может быть записано в явном виде в терминах акустического давления как

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 P_1 = \frac{(\gamma-1)^2}{c^2 \rho_0} H_0 \frac{\chi}{2k_B T_0} \frac{\partial P_1}{\partial t}. \quad (3.2.11)$$

Обратим внимание, что знак члена в правой части противоположен знаку члена затухания. Отрицательное демпфирование (т.е. усиление) является характерной чертой автоколебаний и часто приводит к отклонению систем от линейного режима.

Автоколебания будут возникать, когда приток энергии превысит потери. Для того чтобы оценить, может ли рассмотренный механизм усиления генерировать акустическую энергию, достаточную для превышения акустических потерь, решим уравнение (3.2.11) для простейшего случая – сферической полости с жесткими стенками и равномерной температурой. Далее мы предполагаем

ем, что стенки имеют идеальную жесткость, и рассматриваем только первую моду. В этом случае акустическое давление принимает вид:

$$P_1(t, r) = P_1 j_0 \left(\frac{\pi \alpha_1 r}{R} \right) e^{i \omega_1 t}, \quad (3.2.12)$$

где j_0 – сферическая функция Бесселя, а α_1 удовлетворяет требованиям $j_0(\pi \alpha_1) = 0$. Используя эту форму, получим характеристическое (дисперсионное) уравнение:

$$\omega_1^2 + i \frac{(\gamma - 1)^2}{c^2 \rho_0} H_0 \frac{\chi}{2k_B T_0} \omega_1 - \frac{c^2 \pi^2 \alpha_1^2}{R^2} = 0. \quad (3.2.13)$$

Действительный член определяет резонансную частоту и зависит от геометрии полости. Мнимый член определяет инкремент на этой частоте и соответствует экспоненциальному росту со временем:

$$\tau_{amp} = \frac{2\rho_0 c^2 k_B T_0}{(\gamma - 1)^2 H_0 \chi}. \quad (3.2.14)$$

Как мы упомянули ранее, для реализации автоколебаний необходимо, чтобы приток энергии преобладал над потерями. Основным источником потерь в сферической полости являются тепловые потери на стенке с фиксированной температурой. Временной масштаб этого затухания приводится в [83] как:

$$\tau_\kappa = \sqrt{\frac{2R^2}{(\gamma - 1)^2 \omega_1 D_T}}. \quad (3.2.15)$$

На рис. 21 представлены оценки времени акустического затухания τ_κ и времени усиления τ_{amp} для трех мощностей падающего излучения, концентрации нейтральных частиц и коэффициента добротности СВЧ $Q_c = 1000$, рассчитанные в работе [84].

При $\tau_{amp} < \tau_{\kappa}$, энергия, добавляемая к акустическому полю внутри полости поглощенным СВЧ-излучением, превышает акустические потери. Увеличение времени усиления при низких температурах связано с тем, что низкотемпературная плазма не способна поглощать микроволны. Для иллюстрации влияния коэффициента добротности на время усиления показан случай 2 кВт при $Q_c = 1000$ (сплошная линия) и $Q_c = 2000$ (пунктирная линия).

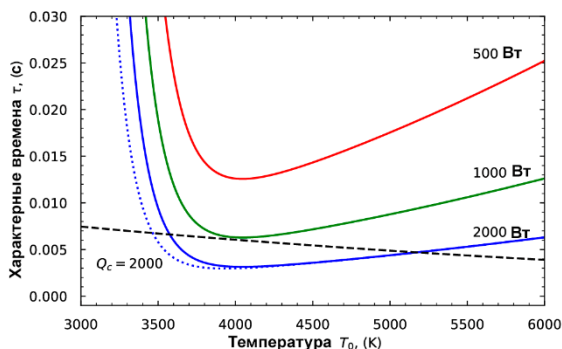


Рисунок 21. Характерное время усиления τ_{amp} (сплошные линии) и время затухания τ_{κ} (пунктирная линия)

Таким образом, в данном разделе мы продемонстрировали теоретическую схему того, как акустические автоколебания могут появиться в результате нагрева, вызванным акустическим сжатием в плазме. Далее же мы рассмотрим, как автоколебания могут быть исследованы на примере генератора Ван дер Поля.

3.3 Автоколебания. Метод Ван дер Поля. Генератор Ван дер Поля

Здесь изложен еще один метод анализа нелинейных колебаний, применяемый в ситуациях, когда наибольшими слагаемыми в модели являются слагаемые линейного консервативного осцилля-

тора, а все остальные члены много меньше их. При этом, как известно из теории ОДУ, можно считать, что наличие этих слагаемых приводит к наличию медленной зависимости амплитуды колебаний от времени – *метод вариации произвольных постоянных*. Адаптацию метода вариации произвольных постоянных к решению задач теории колебаний обычно называют *методом Ван дер Поля*.

Для формулировки математической модели, описывающей процессы в схеме, показанной на рис. 22, составим уравнения, описывающие изменение напряжения на конденсаторе C в RLC – контуре в сети сетки лампы. Аналогичное устройство может быть устроено на базе транзистора [1, 2].

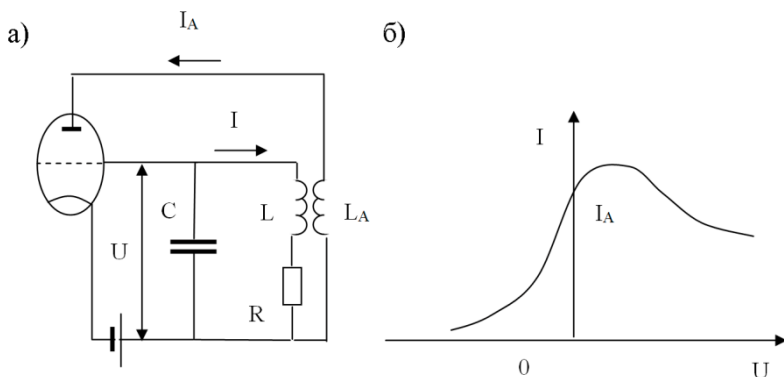


Рисунок 22. а) Модель генератора Ван дер Поля;
б) Зависимость анодного тока от напряжения на сетке

При увеличении анодного тока I_A и соответствующем росте магнитного потока через катушку L_A возникает явление взаимной индукции катушек L и L_A , в силу чего в катушке L индуцируется ток I , направленный по правилу Ленца так, что конденсатор C заряжается, и напряжение на сетке U возрастает. Тогда для RLC – контура в силу закона Ома для замкнутой цепи получаем

равенство суммы падений напряжения на резисторе и конденсаторе (левая часть) сумме ЭДС самоиндукции и взаимной индукции (правая часть), действующих в контуре:

$$RI + U = -L\dot{I} + M\dot{I}_A, \quad (3.3.1)$$

где M – коэффициент взаимной индукции, причем знак при соответствующем слагаемом соответствует положительности ЭДС взаимной индукции при росте анодного тока I_A . Оно должно быть дополнено выражениями для тока и напряжения на конденсаторе

$$I = \dot{q}, \quad U = \frac{q}{C} \Rightarrow I = C \frac{dU}{dt} \quad \text{и выражением для сеточной}$$

характеристики лампы $I_A = I_A(U)$. Подставляя эти выражения в (3.3.1), приходим к уравнению [1, 2, 5, 9] $LC\ddot{U} + RC\dot{U} + U = M\dot{I}_A \Leftrightarrow LC\ddot{U} + (RC - MdI_A/dU)\dot{U} + U = 0$. В соответствии с определением сеточной характеристики $S(U) = dI_A/dU$ последнее уравнение переписывается в виде:

$$LC\ddot{U} + [RC - MS(U)]\dot{U} + U = 0. \quad (3.3.2)$$

Очевидно, триод наиболее чувствителен к изменениям потенциала сетки в области максимальной крутизны сеточной характеристики. Для упрощения без потери общности будем считать, что соответствующее рабочее напряжение $U_0 = 0$, чему соответствует анодный ток I_{A0} (точка перегиба на сеточной характеристике). Тогда в окрестности рабочей точки функция $S(U)$ может быть разложена в ряд Тейлора

$$S = S_0 + \left. \frac{dS}{dU} \right|_{U=U_0} U + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2S}{dU^2} \right|_{U=U_0} U^2 = S_0 - S_2 U^2. \quad (3.3.3)$$

Отметим важный факт – в силу условий $M > 0$, $S > 0$ при малых отклонениях от U_0 имеет место следующая цепочка связей:

$\uparrow U \Rightarrow \uparrow I_A \Rightarrow \uparrow M\dot{I}_A \Rightarrow \uparrow I \Rightarrow \uparrow U$ и т. д., т.е. наблюдается *положи-*

тельная обратная связь между возмущениями параметров лампы и контура – малые возмущения нарастают. После подстановки выражения для сеточной характеристики в (3.3.2) получим $LC\ddot{U} + [RC - MS_0 + MS_2U^2]\dot{U} + U = 0$. Вводя переменные $\alpha = (MS_0 - RC)/LC$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $\beta = 2MS_2/(RC - MS_0)$, получим уравнение:

$$\ddot{U} - \alpha[1 - \beta U^2]\dot{U} + \omega_0^2 U = 0. \quad (3.3.4)$$

Вводя далее безразмерные переменные $x = \sqrt{\beta}U$, $2\gamma = \alpha/\omega_0$, $t = \omega_0 t$, получаем уравнение Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - 2\gamma[1 - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.3.5)$$

Фазовый портрет уравнения (3.3.5) при $\gamma = -0,4$, $\omega_0^2 = 8$ и $\gamma = 0,4$, $\omega_0^2 = 8$ соответственно приведен на рис. 23.

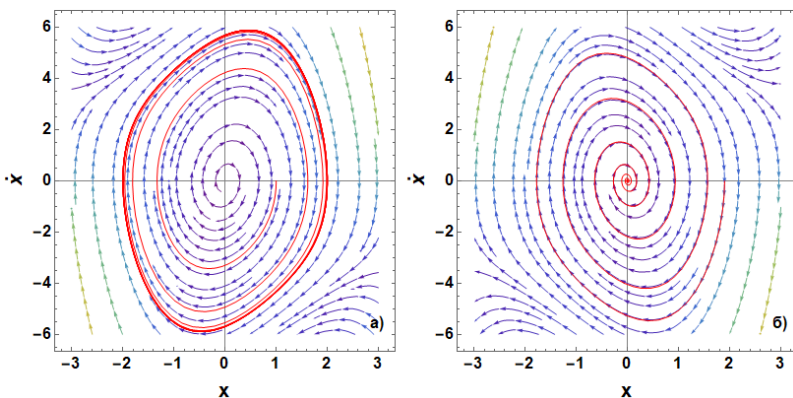


Рисунок 23. Фазовый портрет уравнения (3.3.5) при $\omega_0^2 = 8$ и $\gamma = 0,4$ (слева), $\gamma = -0,4$ (справа)

Здесь наблюдается явление *бифуркации* – качественное изменение характера поведения нелинейной системы при изменении внешних параметров. В данном случае при $\gamma < 0$ начальное возмущение затухает, а при $\gamma \geq 0$ ($MS_0 > RC$) любое возмущение асимптотически стремится к аттрактору размерности $d = 2$, d – предельному циклу, описывающему периодическое решение.

Аналитическое описание явления автоколебаний может быть проведено только при условии $\gamma \ll 1$, когда можно воспользоваться методом Ван дер Поля. Для этого перепишем уравнение (3.3.5) в виде $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\gamma [1 - x^2] \dot{x}$, выделив, как всегда, малые слагаемые в правую часть. Будем искать решения этого уравнения, как и ранее, в виде $x = A(\varepsilon) \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon))$, пренебрегая в дальнейшем слагаемыми $\sim \varepsilon^2$ и выше. В результате получим соотношение:

$$\begin{aligned} & \underline{\ddot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - 2 \underline{\dot{A} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)} - 2 \underline{\dot{A} \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \\ & - \underline{A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} - 2 A \omega_0 \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - \underline{A \ddot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A \dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} + \underline{A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \quad (3.3.6) \\ & = 2\gamma [1 - A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] \times \\ & \times [\underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)}] \end{aligned}$$

Слагаемые, подчеркнутые двумя чертами, являются слагаемыми основного приближения и всегда взаимно сокращаются в силу решения исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости амплитуды и фазы от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 0$, имеют порядок ε^2 , и ими пренебрегают.

Для получения уравнения для медленно меняющейся амплитуды \dot{A} умножим приведенное выше равенство на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$. Для

получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\omega_0 A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\omega_0 A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = A$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\omega_0 A \dot{\varphi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\omega_0 A \dot{\varphi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = A \dot{\varphi}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\gamma \omega_0 A^3 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt =$$

$$= \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\gamma \omega_0 A^3 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = \frac{\gamma A^3}{4},$$

а все остальные интегралы равны нулю [109], получаем

$$\dot{A} = \gamma(A - A^3/4), \quad A \dot{\varphi} = 0. \quad (3.3.7)$$

Первое уравнение системы (3.3.7) имеет стационарные состояния $A = 0$ и $A = 2$. Первое неустойчиво и соответствует неустойчивому фокусу, второе устойчиво и соответствует предельному циклу, показанных на рис. 23.

3.4 Точечное отображение для генератора Ван дер Поля

Рассмотрим осциллятор Ван дер Поля в режиме квазигармонических автоколебаний. Поскольку мы имеем дело с системой второго порядка, фазовое пространство которой двумерно, можно получить одномерное отображение вида $x_{n+1} = f(x_n)$, причем в качестве x_n удобно выбрать точки пересечения траектории с положительной полуосью ОХ (см., например, рис. 9 нижний).

Вновь рассмотрим уравнение Ван дер Поля $LC\ddot{U} + [RC - MS_0 + MS_2U^2]\dot{U} + U = 0$, но введем безразмерные переменные: $\tau = \omega_0 t$, $x = U(\omega_0 MS_2)^{1/2}$, тогда получим:

$$\ddot{x} + [\lambda - x^2]\dot{x} + x = 0, \quad (3.4.1)$$

где $m = (MS_0 - RC)(LC)^{1/2}$. Соответствующее укороченное уравнение имеет вид $\dot{A} = A(\lambda - A^2)/2$. Домножим это уравнение на A и обозначим $\rho = A^2$. Тогда получим $\dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho^2)$. Дополним последнее уравнение начальным условием $\rho(0) = \rho_0$, в результате получим $\rho = \lambda \left[1 + (\lambda - \rho_0)e^{-\lambda t} / \rho_0 \right]^{-1} \Rightarrow x(t) \approx 2A(t) \cos(t + \varphi_0)$, где $A(t) = \lambda^{1/2} e^{\lambda t/2} (\lambda + A_0^2 (e^{\lambda t} - 1))^{-1/2}$. Без ограничения общности можно выбрать $\varphi_0 = 0$. В точках пересечения с осью можно приближенно положить $\cos t \approx 1 \cos t$, $t \approx 2\pi m$, (соответствие будет лучшим при меньших λ) и получить выражения:

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{-1/2} \lambda^{1/2} x_0 e^{\pi n \lambda} (\lambda + x_0^2 (e^{2\pi n \lambda} - 1))^{-1/2}, \\ x_{n+1} &= 2^{-1/2} \lambda^{1/2} x_0 e^{\pi(n+1)\lambda} (\lambda + x_0^2 (e^{2\pi(n+1)\lambda} - 1))^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где введено обозначение $x_0 = 2A_0$.

После несложных вычислений находим явное выражение для функции последования:

$$x_{n+1} = x_n e^{\pi \lambda} \left(1 + x_n^2 (e^{2\pi \lambda} - 1) / 4\lambda \right)^{-1/2}. \quad (3.4.3)$$

Отображение (3.4.3) имеет две неподвижные точки: $x_1 = 0$, что отвечает отсутствию колебаний, и $x_2 = 2\lambda^{1/2}$, что отвечает режиму установившихся автоколебаний. При этом значение амплитуды в точности соответствует найденному при помощи метода медленно меняющихся амплитуд. Проведем анализ неподвижных точек на устойчивость. Дифференцируя (3.4.3), получаем:

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 8e^{\pi\lambda} \left(4 + \frac{x_n^2}{\lambda} (e^{2\pi\lambda} - 1) \right)^{-3/2} = \begin{cases} e^{\pi\lambda}, & x = x_1, \\ e^{-2\pi\lambda} & x = x_2. \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Таким образом, нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при $\lambda = 0$. При $\lambda > 0$ появляется вторая неподвижная точка, которая является устойчивой. Таким образом, при помощи этого метода можно исследовать основные особенности динамики автоколебательных систем, определять положения аттракторов, выяснять вопрос об их устойчивости и т.д.

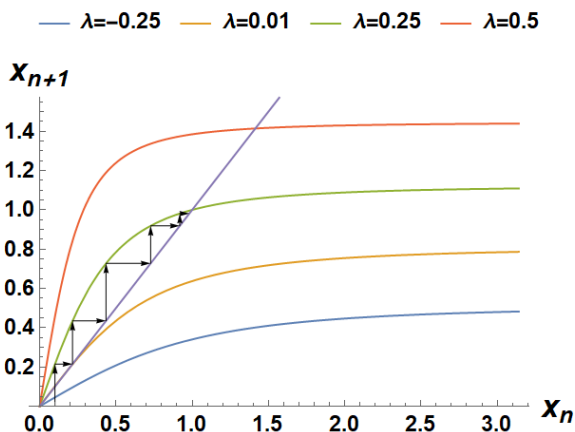


Рисунок 24. Вид функции последования для отображения (3.4.3) при различных значениях λ и пример построения лестницы Ламерея

3.5 Быстрые и медленные движения

Затронем еще один важный класс задач – сильно нелинейные колебания в сильно неконсервативных системах, для которых можно выделить временные интервалы с различным характером изменения переменных – участки быстрых и медленных движений (и снова метод многих масштабов). Типичный пример – релаксационные автоко-

лебания. Здесь мы демонстрируем метод приближенного анализа, основанного на разделении быстрых и медленных движений для осциллятора Дуффинга с сильной диссипацией [14]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (3.5.1)$$

где γ – большой параметр. Для определенности будем считать $\beta > 0$. Введем новое время $\tau = t/2\gamma$. Уравнение (3.5.1) примет вид:

$$\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (3.5.2)$$

где $\varepsilon = 1/4\gamma^2 \ll 1$. Таким образом, мы получили уравнение, содержащее малый параметр при старшей производной. Такие системы удобно анализировать при помощи метода разделения быстрых и медленных движений.

Перепишем уравнение (3.5.2) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon\dot{y} = -y - x - \beta x^3 = f(x, y). \quad (3.5.3)$$

Из уравнений (3.5.3) видно, что $dy/d\tau = f(x, y)/\varepsilon \gg 1$ везде, за исключением области, где функция $f(x, y)$ близка к нулю. Условие $f(x, y) = 0$ определяет на плоскости (x, y) кубическую параболу $y = -x - \beta x^3$. Это подпространство медленных движений нашей системы. Фактически движение изображающей точки будет медленным не только на этой кривой, но и в ее окрестности ширины ε , так что можно говорить и об области медленных движений (см. рис. 25).

Вне области медленных движений, разделив второе уравнение на первое, найдем уравнение фазовых траекторий $dy/dx = f(x, y)/\varepsilon y \gg 1$. Видно, что в области быстрых движений фазовые траектории близки к вертикальным прямым. Так, можно построить фазовый портрет системы. Единственное состояние равновесия – устойчивый узел, расположенный в начале координат.

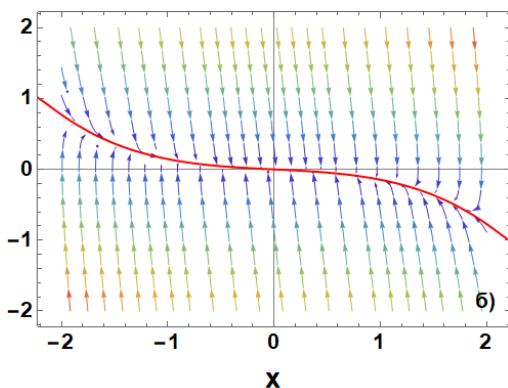
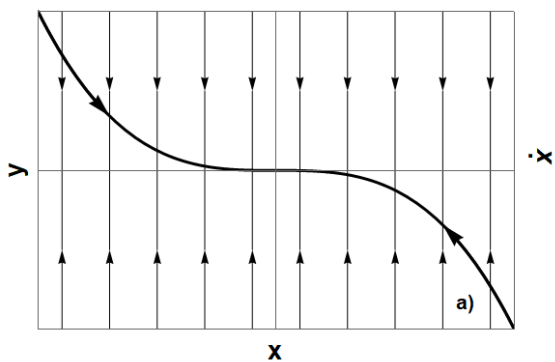


Рисунок 25. а) Качественный фазовый портрет осциллятора Дуффинга, жирной линия показана область медленных движений;
 б) Фазовый портрет уравнения (3.5.1) при $\beta = 1, \gamma = 7$

Изображающая точка вначале быстро выходит в подпространство медленных движений, а затем медленно стремится к положению равновесия.

Получим приближенное решение уравнения (3.5.1), анализируя быстрые и медленные движения по отдельности, а затем «сшивая» полученные решения. В области быстрых движений можно пренебречь двумя последними слагаемыми в правой части

второго уравнения системы (3.5.3) и записать $\varepsilon \dot{y} \approx -y$. Решение этого уравнения есть $y = C_1 \exp(-\tau/\varepsilon)$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (3.5.3), найдем $x = C_2 - \varepsilon C_1 e^{-\tau/\varepsilon}$. Постоянные $C_{1;2}$ определим из начальных условий. Если положить $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то нетрудно найти, что $C_1 = y_0$, $C_2 = x_0 + \varepsilon y_0$. Итак, решение для быстрых движений имеет вид:

$$x_B = x_0 + \varepsilon y_0 (1 - e^{-\tau/\varepsilon}). \quad (3.5.4)$$

Для медленных движений имеем уравнение первого порядка $y = -x - \beta x^3$. Разделив его на x^3 , получим $x^{-3} \dot{x} = -\beta - x^{-2} \stackrel{u=x^2}{\Rightarrow} \dot{u} = 2(u + \beta) \Rightarrow u = -\beta + C_3 e^{2\tau}$, тогда в исходной переменной x $x_M = (C_3 e^{2\tau} - \beta)^{-1/2}$. Теперь необходимо сшить решения x_M и x_B . Для этого потребуем, чтобы $x_M(0) = x_B(\infty) = x_0 + \varepsilon y_0$. Это позволит определить постоянную C_3 : $C_3 = \beta + (x_0 + \varepsilon y_0)^{-2}$. Таким образом, выражение для x_M принимает вид:

$$x_M = (x_0 + \varepsilon y_0) e^{-\tau} \left[1 + \beta (x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - e^{-2\tau}) \right]^{-1/2}. \quad (3.5.5)$$

Окончательный вид решения: $x = x_B + x_M - x_M(0)$. Складывая выражения, имеем:

$$x = -\varepsilon y_0 e^{-\tau/\varepsilon} + (x_0 + \varepsilon y_0) e^{-\tau} \left[1 + \beta (x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - e^{-2\tau}) \right]^{-1/2}. \quad (3.5.6)$$

Возвращаясь к исходному времени $t = 2\gamma\tau$, запишем (3.5.6) в виде:

$$x = -\frac{y_0 e^{-2\gamma t}}{4\gamma^2} + \frac{(x_0 + y_0/4\gamma^2) e^{-t/2\gamma}}{\sqrt{1 + \beta (x_0 + y_0/4\gamma^2)^2 (1 - e^{-t/\gamma})}}. \quad (3.5.7)$$

Характерные зависимости $x(t)$ для различных знаков y_0 , построенные по формуле (3.5.7) приведены на рис. 26 (для определенности $x_0 > 0$).

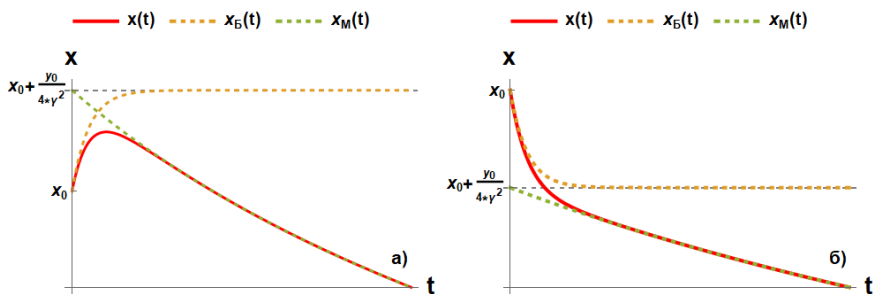


Рисунок 26. Вид функции $x(t)$ (3.5.7) для осциллятора Дуффинга в случае сильного затухания при $y_0 > 0$ (а), $y_0 < 0$ (б). Штриховые линии соответствуют $x_M(t)$ (3.5.5) и $x_B(t)$ (3.5.4)

ГЛАВА 4 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С 1.5-А СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Данный раздел охватывает широкий класс колебательных процессов в неавтономных системах 2-го порядка и автономных систем 3-го порядка и таких явлений, как резонанс, параметрический резонанс и динамический хаос.

4.1 Линейные динамические системы с 1.5-а степенями свободы

Невероятно, но факт: какой-либо линейной автономной системы 3-го порядка колебательного типа, естественным образом следующей из исходных уравнений какого-либо процесса, нет. Поэтому в данной главе изложение начинается с изучения свойств неавтономных систем 2-го порядка.

4.1.1 Вынужденные колебания гармонического осциллятора. *Гармоническая внешняя сила*

Уравнение линейных вынужденных колебаний в общем случае для систем 2-го порядка имеет вид [1-4]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (4.1.1)$$

Будем считать, что внешняя сила действует на линейный гармонический осциллятор по гармоническому закону: $F(t) = f_0 \cos \alpha t$, $f_0 = F_0/m$. Уравнение (4.1.1) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. *Решение неоднородного уравнения $x(t)$ представляет сумму общего решения однородного уравнения $x_1(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $x_2(t)$, т.е. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.* Функция $x_1(t)$ известна – это решение уравнения собственных затухающих колебаний

(2.2.2), а второе решение будем искать в виде: $x_2(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, где A и ϕ – амплитуда и сдвиг фаз между смещением и внешней силой. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид (см. рис. 27):

$$\begin{aligned} x &= A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) + A \cos(\omega t + \phi), \\ \omega' &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

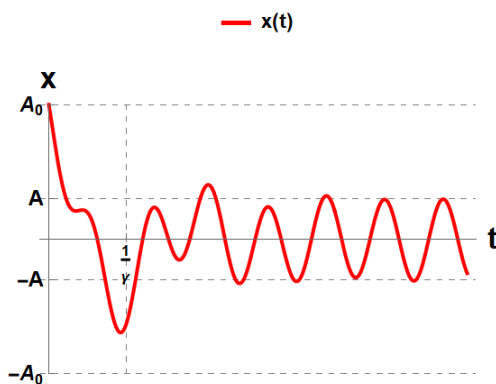


Рисунок 27. Пример решения неоднородного уравнения (4.1.2)

Первое слагаемое правой части (4.1.2) описывает собственные затухающие колебания, зависящие от начальных условий. Из уравнения (4.1.2) следует, что в течение определенного промежутка времени осциллятор будет совершать сложное негармоническое движение, т.к. оно является результатом сложения двух асинхронных колебаний. Однако через промежуток времени $t \sim \frac{1}{\gamma}$ амплитуда и энергия собственных колебаний уменьшатся до нуля, и они прекратятся. При этом второе слагаемое останется неизменным, и результирующее колебание будет гармоническим. Найдем вели-

чины A и γ . При этом воспользуемся *методом комплексификации*, запишем внешнюю силу в виде $F(t) = f_0 \exp(i\omega t)$ и будем искать частное решение уравнения (4.1.1) в виде $x = A \exp(i\omega t + \phi)$. Замечая, что $\cos(\omega t + \phi) = \Re[\exp(i\omega t + \phi)]$, а уравнение (4.1.1) – линейное, вначале найдем это решение в комплексной форме, а затем выделим в нем действительную часть. Такой способ действий сильно упрощает вычисления в силу того, что и интегрирование и дифференцирование экспоненты дает снова экспоненту. В результате имеем $A[-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2] = f_0 \exp(i\phi) \Rightarrow A[-\omega^2 + \omega_0^2] = f_0 \cos\phi, A2\gamma\omega = f_0 \sin\phi$. Решая полученную систему уравнений, находим:

$$tg\phi = 2\gamma\omega / [\omega_0^2 - \omega^2]; \quad A^2 = f_0^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]. \quad (4.1.3)$$

Зависимость $A(\omega)$ называют резонансной кривой. Вид этой кривой зависит от величины коэффициента затухания γ . Амплитуда, соответствующая значению $\omega = 0$, называется статическим смещением.

Из рис. 28 видно, что при определенном значении частоты вынуждающей силы амплитуда осциллятора становится максимальной. Явление, при котором амплитуда колебаний системы достигает максимального значения, характерного для некоторого значения частоты вынуждающей силы называется резонансом. Частота вынуждающей силы, при которой наступает данное явление, называется резонансной. Приравнивая к нулю производную от A по частоте, получим значения резонансной частоты и амплитуды:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad A_{рез} = f_0 / 2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

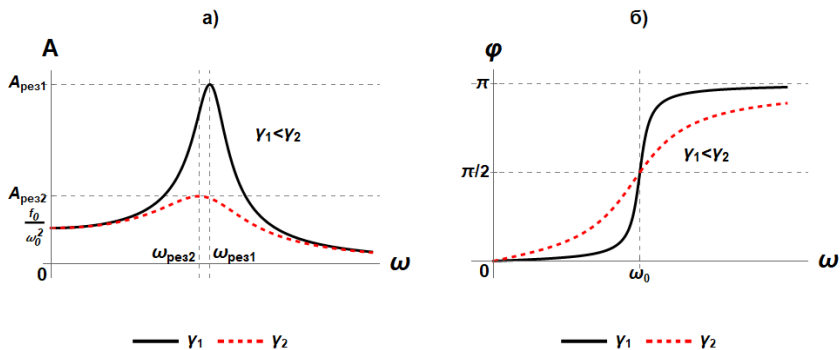


Рисунок 28. Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) при вынужденных колебаниях гармонического осциллятора

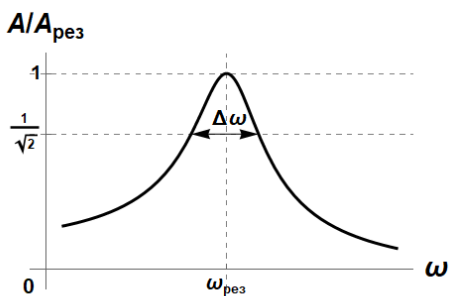


Рисунок 29. Качественное представление ширины резонанса

При значении $\gamma = 0 \Rightarrow A_{рез} \rightarrow \infty$, как следует из соотношения (4.1.3), сдвиг по фазе между силой и смещением зависит от соотношения частот собственной и вынуждающей силы, а также от значения коэффициента затухания γ . При значении $\omega = \omega_0$ смещение отстает от силы на $\pi/2$. Это означает, что в момент, когда сила достигает своего максимального значения, смещение равно нулю, а когда сила равна нулю, смещение максимально. С возрастанием частоты отставание смещения от силы растет и при очень

больших частотах приближается к π , т.е. сила и смещение колеблются в противофазе. Фазовые соотношения между смещением и силой позволяют более глубоко понять сущность явления резонанса с точки зрения энергетических соображений. Пусть при $\omega = \omega_0$ сила и смещение равны законам: $F = F_0 \cos \omega_0 t$; $x = A \sin \omega_0 t$. Тогда скорость колеблющейся частицы равна: $\dot{x} = v = -A \cos \omega_0 t$. Видно, что скорость и сила колеблются в фазе. Мощность, сообщаемая осциллятору, равна $N = F \bullet v$. $N > 0 \quad \forall t$, значит, работа внешней силы достигает максимального значения. Самые неблагоприятные условия передачи энергии при $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$. В этих случаях фазы силы и скорости отличаются почти на π . Значит, сила примерно половину времени направлена противоположно скорости и половину времени совпадает с ней.

Амплитуда вынужденных колебаний падает в $\sqrt{2}$ раз при значениях $\omega_{\pm} = \omega_{рез} \sqrt{1 \pm (2\gamma / \omega_{рез}) \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2) / (\omega_0^2 - 2\gamma^2)}}$. Величину $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ называют *шириной резонанса* (см. рис. 29). При $\gamma \ll 1 \Rightarrow \Delta\omega = 2\gamma$. Добротность $Q = \omega_0 / \Delta\omega$.

4.1.2 Негармоническая, но периодическая внешняя сила:

$$F(t) = F(t+T)$$

Известно, что периодическую функцию можно разложить в ряд по гармоническим компонентам – синусам, косинусам или экспонентам, это разложение называется рядом Фурье [103-105]. Ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} F(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \chi_n\right), \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \langle F(t) \rangle, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\sin \chi_n = -b_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \chi_n = a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Благодаря принципу суперпозиции отклик осциллятора на периодическую силу можно рассчитать как сумму откликов на действие каждой временной гармоники. Поэтому можно записать вынужденное решение в виде:

$$x(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \chi_n + \phi_n), \quad (4.1.4)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота n -й Фурье гармоники, а фазовые сдвиги ϕ_n определяются из формул, подобных (4.1.3), где вместо ω следует подставить ω_0 .

Если добротность $Q \gg 1$, характер решения зависит от того, попадает частота хотя бы одной из гармоник в полосу резонанса, или нет. Если существует такое n , что выполняется условие $|\omega_0 - 2\pi n/T| \ll \gamma$, то гармоника с этим номером оказывает значительно большее воздействие на осциллятор, чем все остальные, благодаря резонансу. В таком случае

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \chi_n + \phi_n). \quad (4.1.5)$$

Если же все гармоники находятся вне резонанса, то их результирующее воздействие определяется в основном скоростью спада амплитуд a_n и b_n с ростом n . Таким образом, резонанс возможен не только под действием гармонической внешней силы, и

данное выше определение резонанса требует обобщения. Резонанс под действием произвольной периодической внешней силы будет возникать, если собственная частота системы близка к частоте одной из Фурье-гармоник ω_n , и амплитуда этой гармоники $(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ не равна нулю.

4.1.3 Произвольная внешняя сила

Уравнение гармонического осциллятора (4.1.1) допускает точное решение для вынужденных колебаний и в случае произвольной внешней силы. Для его получения воспользуемся переходом к нормальным колебаниям (см. раздел 1.2.1) [3]. Для этого перепишем уравнение (4.1.1) в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\gamma y + F(t). \quad (4.1.6)$$

Умножим второе уравнение на β и сложим с первым, тогда имеем:

$$(x + \beta y)^\bullet = -\beta \omega_0^2 \left(x + (1 - 2\gamma\beta)y / (-\omega_0^2\beta) \right) + \beta F(t). \quad (4.1.7)$$

Потребуем, чтобы выражения в круглых скобках справа и слева совпали. Это выполняется, если $\beta = -(1 - 2\gamma\beta) / (\omega_0^2\beta)$ или $\omega_0^2\beta^2 - 2\gamma\beta + 1 = 0$.

Отсюда находим $\beta_{1,2} = (\gamma \pm i\omega) / \omega_0^2$. Подстановка $\beta = \beta_{1,2}$ в уравнение (4.1.7) приводит к системе:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -(\gamma + i\omega)a(t) + (\gamma + i\omega)F(t) / \omega_0^2, \\ \dot{a}^* &= -(\gamma - i\omega)a^*(t) + (\gamma - i\omega)F(t) / \omega_0^2, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

где $a(t) = x + (\gamma + i\omega)y / \omega_0^2$, а $a^*(t) = x + (\gamma - i\omega)y / \omega_0^2$ – нормальные координаты,

$$x = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega} \right) a^* \right), \quad y = \frac{\omega_0^2}{2i\omega} |a - a^*| \quad (4.1.9)$$

исходные переменные. Решение первого уравнения системы (4.1.8) ищем в виде $a(t) = A(t) \exp[(-\gamma - i\omega)t]$. Для $A(t)$ получается уравнение $A = (\gamma + i\omega) \exp[(\gamma + i\omega)t] F(t) / \omega_0^2$, проинтегрировав которое и подставив результат в формулу для комплексной амплитуды, получаем:

$$a(t) = (\gamma + i\omega) \omega_0^{-2} \int_0^t \exp(-(\gamma + i\omega)(t - t')) F(t') dt'. \quad (4.1.10)$$

Используя это соотношение в первом из уравнений (4.1.9), получаем:

$$x(t) = \omega^{-1} \int_0^t \exp(-\gamma(t - t')) \sin(t - t') F(t') dt'. \quad (4.1.11)$$

При выводе (4.1.11) предполагалось, что сила начинает действовать на неподвижный осциллятор в момент времени $t = 0$. Если начальные координата и (или) скорость осциллятора ненулевые, то к (4.1.11) следует добавить слагаемые, соответствующие собственным затухающим колебаниям. Другой вариант начальных условий состоит в том, что к моменту времени t сила действует достаточно долго. В этом случае в уравнении (4.1.11) нижний предел интегрирования следует заменить на $-\infty$. Если $\gamma = 0$, то формулу (4.1.11) можно преобразовать к виду

$$x = A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t, \quad (4.1.12)$$

где $A(t) = -\omega_0^{-1} \int \sin \omega_0 t' F(t') dt'$, $B(t) = \omega_0^{-1} \int \cos \omega_0 t' F(t') dt'$.

Если, например, $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$, то $A(t) = (F_0 / 2\omega_0) [t - \sin(2\omega_0 t) / 2\omega_0]$ и при $t \rightarrow \infty$ решение неограниченно – получаем *секулярный* рост. Очевидно, что если с ростом t коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ остаются малыми, то резонанса в системе нет. Таким образом, условие отсутствия резонанса записывается в виде

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\sin \omega_0 t'; \cos \omega_0 t'\} F(t') dt' = 0. \quad (4.1.13)$$

Математически это соотношение означает, что функция $F(t)$ не должна содержать собственных функций задачи. В общем случае, когда затухание не равно нулю, математически строгое определение резонанса заменяется физическим условием “значительного возрастания амплитуды колебаний”.

4.1.4 Гармонический осциллятор под действием обобщенных внешних сил

а. Часы с балансиром.

Рассмотрим колебания часов с балансиром. Будем полагать, что через равные промежутки времени балансиру передается постоянный импульс $\dot{x}(t_n) = y(t_n) > 0$ в точках полуоси $x(t_n) = 0$. Тогда для описания колебательного процесса можно использовать уравнение вида [7]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = p \sum_n \delta(t - t_n). \quad (4.1.14)$$

Решение уравнения (4.1.14) при $x(0) = 0$, $y(0) = y_1$ имеет вид: $x = y_1 \Omega^{-1} \exp(-\gamma t) \sin \Omega t$; $y = y_1 \exp(-\gamma t) (\cos \Omega t - \gamma \Omega^{-1} \sin \Omega t)$. Через время $t = 2\pi/\Omega$ изображающая точка придет на полупрямую $x(0) = 0$, $y > 0$ с ординатой $y' = y_1 \exp(-\delta)$, $\delta = 2\pi\gamma\Omega^{-1/2}$, $\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$. Затем она совершает скачок в точку $y_2 = y' + p$, т.е. y_1 преобразуется в y_2 по закону $y_2 = y_1 \exp(-\delta) + p$. Продолжая рассуждения, приходим к точечному отображению вида $y_{n+1} = e^{-\delta} y_n + p = q y_n + p$. Таким образом, фазовое пространство задачи есть плоскость (x, y) с разрезом по полупрямой $x(0) = 0$,

$y > 0$. Неподвижная точка отображения $y^* = f(y^*)$ находится на пересечении этой функции последования с биссектрисой

$$y_{n+1} = y_n : y^* = p / (1 - \exp(-\delta)) > 0. \quad (4.1.15)$$

Ей соответствуют стационарные колебания

$$y = y^* (\cos \Omega t - \Gamma \Omega^{-1} \sin \Omega t). \quad (4.1.16)$$

Рассматривая последовательность точек $y_2 = f(y_1)$, $y_3 = f(y_2)$, $y_4 = f(y_3)$, ... и соединяя их отрезками прямых, получаем диаграмму Ламерея, рис. 30. В силу условия $\partial f / \partial y^* < 0$ точка y^* – устойчивая.

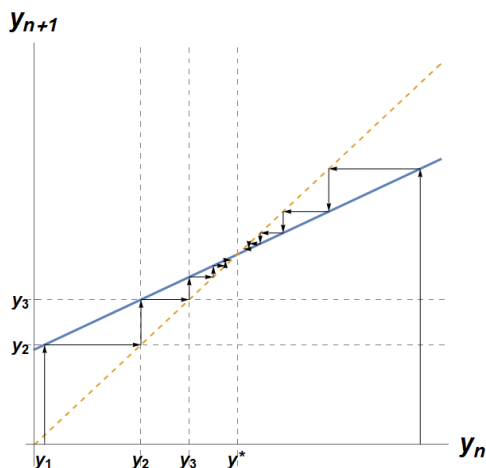


Рисунок 30. Диаграмма Ламерея часов с балансиром

б. Гармонический осциллятор с отрицательным трением и δ – образной внешней демпфирующей силой.

Пусть демпфирующая сила (отрицательный импульс) действует при $x(0) = 0$, когда скорость $y \geq a > 0$, тогда в соответствии с [7] имеем:

$$\ddot{x} - 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -p \sum_n \delta(t - t_n). \quad (4.1.17)$$

По аналогии с предыдущей задачей при тех же начальных условиях получим:

$$y_{n+1} = \begin{cases} qy_n, & qy_n < p \\ qy_n - p, & qy_n \geq p \end{cases}, \quad (4.1.18)$$

где $q = \exp(\delta)$, $\delta = 2\pi\gamma\Omega^{-1/2}$, $\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$.

Функция последования для этого случая, представлена на рис. 31. Видно, что последующая точка отображения никогда не совпадает с предыдущим, хотя и есть область притяжения, которую точки отображения не покидают. Таким образом, в данной системе возникает новый режим колебаний – хаотические колебания или режим динамического хаоса.

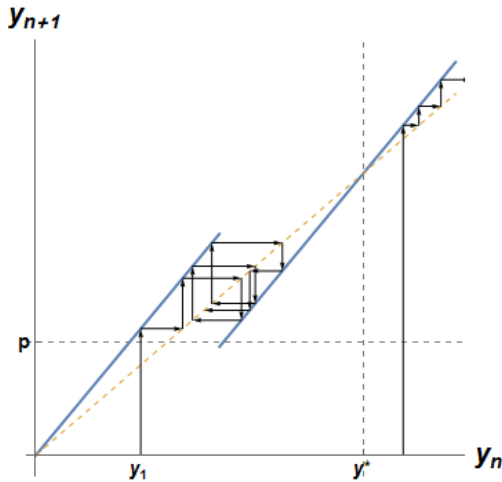


Рисунок 31. Диаграмма Ламерея осциллятора с отрицательным трением и демпфирующей силой

4.2 Линейные системы с 1.5-а степенями свободы с меняющимися под действием внешних факторов параметрами. Преобразование энергии в плазменных средах

В некоторых случаях внешние воздействия сводятся к изменениям со временем параметров колебательной системы, рис. 32. В общем случае эти движения описываются уравнением:

$$x^{(2n)} + g_1(t)x^{(2n-1)} + \dots + [g_{2n}(t) - p]x = 0. \quad (4.2.1)$$

Аналитически найти решение этого уравнения крайне затруднительно, и его решение следует производить численно. Существует, однако, ряд предельных случаев, когда анализ решений уравнения (4.2.1) можно проводить аналитически. Прежде всего, это возможно при малых амплитудах изменения параметра, когда можно применить один из методов теории возмущений.

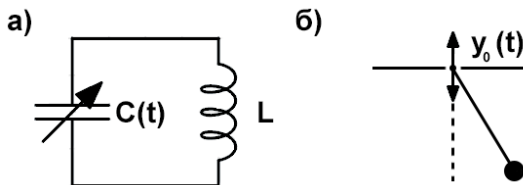


Рисунок 32. Примеры линейных систем с 1.5-а степенями свободы:

- а) LC-контур с переменной по времени емкостью;
- б) маятник с подвижным крепежом

Введем характерное время T изменения функций $g_k(t)$ и рассмотрим три различных частотных предела: сравнимые частоты ($\omega_0 T \sim 1$), медленное изменение параметров ($\omega_0 T \gg 1$), быстроосциллирующие поля ($\omega_0 T \ll 1$).

4.2.1 Сравнимые частоты. Уравнение Матвея

Положим $n=1$ и рассмотрим уравнение вида:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + 4\varepsilon \cos \Omega t] x = 0, \quad (4.2.2)$$

называемое *уравнением Матье*, где $0 < \varepsilon \ll 1$,
 $g_k(t) = g_k(1+T) = g_k(1 + 2\pi/\Omega)$.

В соответствии с последним условием решения уравнения (4.2.1) можно искать методом теории возмущений, где нулевое приближение ищется как решение уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Рассмотрим методы анализа решений уравнения (4.2.2).

а. Метод Флоке. Структура общего решения уравнения (4.2.1) определяется теоремой Флоке-Ляпунова [1-3, 31, 78, 85]:

Система с n степенями свободы, описываемая дифференциальным уравнением порядка $2n$ с периодическими коэффициентами n -го порядка периода T , имеет $2n$ линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2n} C_k \exp(iq_k t) P_k(t), \quad (4.2.3)$$

где $P_k(t) = P_k(1+T)$.

В соответствии с теоремой Флоке-Ляпунова будем искать частные решения уравнения (4.2.2) в виде:

$$x(t) = \exp(iqt) P(t), \quad P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(ik\Omega t), \quad (4.2.4)$$

где функция P является периодической с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Этот подход является аналогом процедуры поиска частного решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами в виде $x(t) = P \exp(iqt) = P \exp(i\omega_0 t)$ с целью получения характеристического уравнения. При этом, в силу условия $\varepsilon \ll 1$, решение уравнения Матье (4.2.2) должно быть близко к решению невозмущенного уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, то есть к функции $x = x_0 e^{i\omega_0 t}$.

Найдем с учетом (4.2.4) выражение для 1-й и 2-й производных:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(e^{iqt} P(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} \right) = \\ &= iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} \right) = \\ &= -q^2 e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} + \\ &+ iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \left(-k^2 \Omega^2 \right) e^{ik\Omega t} = \\ &= -e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \left(q^2 + 2qk\Omega + k^2 \Omega^2 \right) e^{ik\Omega t} = \\ &= -e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \left(k\Omega + q \right)^2 e^{ik\Omega t} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Также с учетом (4.2.4) найдем выражение для $x \cos \Omega t$:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \Omega t &= e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} \frac{e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{2} = \\ &= e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x_k e^{i(k-1)\Omega t} + x_k e^{i(k+1)\Omega t}}{2} = e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{k-1} e^{ik\Omega t} + x_{k+1} e^{ik\Omega t}}{2}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Последнее действие можно произвести, так как суммирование в последнем выражении производится по всем целым k . В результате имеем:

$$x \cdot \cos \Omega t = \frac{1}{2} \exp(iqt) \sum_{-\infty}^{\infty} (x_{k-1} + x_{k+1}) \exp(ik\Omega t). \quad (4.2.8)$$

Подставляя полученные выражения в решаемое уравнение (4.2.2), получаем равенство, которое должно быть выполнено $\forall t$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 \right\} x_k + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_{k-1} + x_{k+1}) \exp(ik\Omega t) = 0, \quad (4.2.9)$$

откуда следует рекуррентное соотношение вида:

$$\left[\omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 \right] x_k + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_{k-1} + x_{k+1}) = 0, \quad (4.2.10)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

или, в развернутом виде [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0: \quad \left[\omega_0^2 - q^2 \right] x_0 + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_{-1} + x_1) = 0, \\ k = +1: \quad \left[\omega_0^2 - (\Omega + q)^2 \right] x_1 + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_0 + x_2) = 0 \\ k = -1: \quad \left[\omega_0^2 - (\Omega - q)^2 \right] x_{-1} + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_{-2} + x_0) = 0 \\ k = +2: \quad \left[\omega_0^2 - (2\Omega + q)^2 \right] x_2 + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_1 + x_3) = 0 \\ k = -2: \quad \left[\omega_0^2 - (2\Omega - q)^2 \right] x_k + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_{-3} + x_{-1}) = 0 \\ k = +3: \quad \left[\omega_0^2 - (3\Omega + q)^2 \right] x_k + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_2 + x_4) = 0 \\ k = -3: \quad \left[\omega_0^2 - (3\Omega - q)^2 \right] x_k + 2\varepsilon\omega_0^2 (x_{-4} + x_{-2}) = 0 \\ \dots \quad \dots \end{array} \right. \quad (4.2.11)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение уравнения (4.2.10) должно совпадать с решением уравнения гармонических колебаний:

$$\left[\omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 \right] x_k = 0 \Rightarrow \omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 = 0 \xrightarrow{uz(4): q=\omega_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 - (k\Omega + \omega_0)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 - k^2\Omega^2 - 2k\Omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \quad (4.2.12)$$

$$\Rightarrow -k^2\Omega^2 - 2k\Omega\omega_0 = 0 \Rightarrow -k\Omega - 2\omega_0 = 0 \Rightarrow \Omega = -\frac{2}{k}\omega_0.$$

Из (4.2.5) видно, что существует бесконечное количество частот

$$\Omega = -2\omega_0 / k, \quad k = -1, -2, -3, \dots, \quad (4.2.13)$$

удовлетворяющих данному условию.

Вначале рассмотрим случай $k = -1$, т.е. когда $\Omega = 2\omega_0$. При малых, но конечных $\varepsilon \ll 1$, решение (4.2.10) уже не должно совпадать с решением уравнения гармонических колебаний, но должно быть близко к нему. В низшем приближении можно ограничи-

ваться теми членами, коэффициенты перед которыми минимальны. Считая главным коэффициентом x_0 , положим $q = \omega_0 + \delta$, $\delta \ll \omega_0$, $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$ ($k = -1$). Кроме x_0 , в силу (4.2.13), следует учесть еще только коэффициент x_{-1} . Остальные коэффициенты много меньше [1]. В результате имеем:

$$\begin{aligned} & [\omega_0^2 - q^2]x_0 + 2\varepsilon\omega_0^2x_{-1} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \delta = \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \varepsilon^2\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Тогда решение (4.2.3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i(\omega_0+\delta)t} \left(x_{-1}e^{-i(2\omega_0+\Delta)t} + x_0 \right) = \\ &= e^{\delta t} \left(x_{-1}e^{-i\Delta t} e^{-i\omega_0 t} + x_0 e^{i\omega_0 t} \right). \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Из выражения (4.2.15) видно, что при условии существования комплексных корней у уравнения (4.2.14) $\varepsilon^2\omega_0^2 < \Delta^2/4 \Leftrightarrow -2\varepsilon\omega_0 < \Delta < 2\varepsilon\omega_0$ решение (4.2.15) может экспоненциально расти, и этот рост – *параметрический резонанс* – имеет место в полосе частот $2\omega_0 - 2\varepsilon\omega_0 < \Omega < 2\omega_0 + 2\varepsilon\omega_0$. Эта полоса не является единственной, их существует бесконечное количество резонансных частот (4.2.13), в окрестности которых имеется полоса $\Delta\Omega$, где наблюдается резонансная раскачка колебаний. Например, для следующего резонанса, т.е. при $k = -2$ ($\Omega = \omega_0 + \Delta$), наибольшими в разложении (4.2.10) являются слагаемые с $k = -3, -2, -1, 0, +1$. В результате для резонансной полосы имеем соотношение $-10\varepsilon^2\omega_0/3 < \Delta < 10\varepsilon^2\omega_0/3$. Видно, что она существенно уже первой.

На рис. 33 представлен вид областей параметрического резонанса, соответствующих уравнению Матье с учетом диссипации, при различных значениях диссипативного коэффициента.

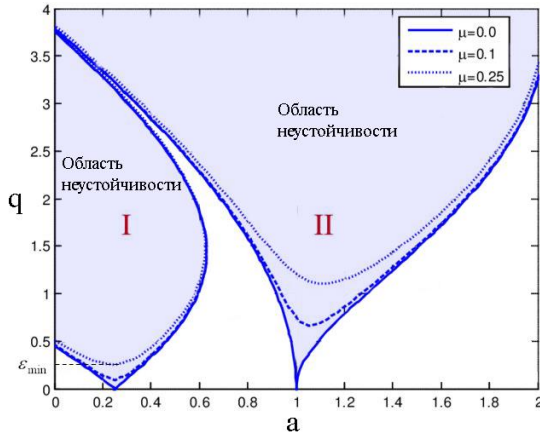


Рисунок 33. Области неустойчивости для уравнения Матве с учетом затухания $\ddot{x} + \mu\dot{x} + (a + 2q \cos 2\tau)x = 0$, где $a = \omega_0^2 / \Omega^2$, $q = 8\omega_0^2 \varepsilon / \Omega^2$, $\mu = 2\gamma / \Omega^2$

б. Метод Ван дер Поля.

Перепишем уравнение (4.2.2) вблизи первой резонансной полосы $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$, $\Delta \ll 1$ в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon \omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma \dot{x}, \quad (4.2.16)$$

где учтены и диссипативные слагаемые. Для решения этого уравнения в силу условия $\varepsilon \ll 1$ будем искать его решение в виде [1, 2] $x = A(\varepsilon) \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon))$, пренебрегая в слагаемых $\sim \varepsilon^2$ и выше. В результате

$$\begin{aligned} & \underline{\ddot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\dot{A} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - 2\dot{A} \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} \\ & - \underline{A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2A \omega_0 \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) -} \\ & - \underline{A \ddot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) - A \dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \\ & = 4\varepsilon \omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - 2\gamma (\underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - A \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)}). \end{aligned}$$

Слагаемые, подчеркнутые двумя чертами – это слагаемые основного приближения и всегда взаимно сокращаются в силу исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости амплитуды и фазы от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 1$, имеют порядок ε^2 , и ими можно пренебречь. Далее следует действовать так:

1. Для получения уравнения для \dot{A} умножим приведенное выше равенство на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем значении в порядке $\sim \varepsilon^1$, A , φ и их производные могут быть вынесены за знак интеграла. Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = \\ & = \frac{4\varepsilon\omega_0^2 A}{4\Delta} \left(\cos 2\varphi \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} + \sin 2\varphi \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - \cos 2\varphi \right) - \\ & - \frac{4\varepsilon\omega_0^2 A \cos 2\varphi}{4(4\omega_0 + \Delta)} \left\{ \cos 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - \sin 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - 1 \right\} + \\ & + \frac{4\varepsilon\omega_0^2 A \sin 2\varphi}{4(4\omega_0 + \Delta)} \left(\sin 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} + \cos 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} \right), \end{aligned}$$

раскладывая это выражение в ряд Тейлора по малому отношению $2\pi\Delta/\omega_0$ и пренебрегая всеми слагаемыми порядка $\sim \varepsilon^2$ и выше, имеем окончательно:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt \approx \\ & \approx 2\pi\varepsilon\omega_0 A \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Замечая также, что

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt \equiv 0, \quad (4.2.18)$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = A \frac{\pi}{\omega_0},$$

получаем, деля на -2π :

$$\dot{A} = -\varepsilon \omega_0 A \sin 2\varphi - \gamma A. \quad (4.2.19)$$

2. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$.

Проводя аналогичные выкладки, получим:

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \omega_0 \cos 2\varphi. \quad (4.2.20)$$

Решение уравнений (4.2.19) и (4.2.20) при $\gamma = 0$ приводит к полученным результатам.

Заметим, что здесь было удобнее использовать метод Ван дер Поля в эквивалентной форме, разыскивая решение исходного уравнения (4.2.16) в виде: $x = A(\varepsilon) \sin \omega_0 t + B(\varepsilon) \cos \omega_0 t$.

В результате подстановки получим:

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \sin \omega_0 t + \ddot{B} \cos \omega_0 t + 2\dot{A} \omega_0 \cos \omega_0 t - 2\dot{B} \omega_0 \sin \omega_0 t \\ & - \underline{A \omega_0^2 \sin \omega_0 t} - \underline{B \omega_0^2 \cos \omega_0 t} + \underline{\omega_0^2 (A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t)} = \\ & = 4\varepsilon \omega_0^2 (A \cos 2\omega_0 t \sin \omega_0 t + B \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t) - \\ & - 2\gamma (\underline{\dot{A} \sin \omega_0 t} + \underline{\dot{B} \cos \omega_0 t} + A \omega_0 \cos \omega_0 t - B \omega_0 \sin \omega_0 t) \end{aligned}$$

Как и выше, слагаемые, подчеркнутые двумя чертами, являются слагаемыми основного приближения и взаимно сокращаются в силу решения исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости ампли-

туды и фаза от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 1$, имеют порядок ε^2 , и ими следует пренебречь.

Для получения уравнений для \dot{A} и \dot{B} умножим приведенное выше равенство последовательно на $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ и проинтегрируем полученные уравнения от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем значении в порядке $\sim \varepsilon^1$, A и их производные могут быть вынесены за знак интеграла. Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} \{A; B\} \{\sin^2 \omega_0 t; \cos^2 \omega_0 t\} dt \approx \\ & \approx \{A; B\} \int_0^{2\pi/\omega_0} \{\sin^2 \omega_0 t; \cos^2 \omega_0 t\} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\{A; B\}}{2}. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \{A; B\} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt \approx \{A; B\} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt \equiv 0, \quad (4.2.22)$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 A \cos 2\omega_0 t \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt \equiv 0, \quad (4.2.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 A \cos 2\omega_0 t \sin^2 \omega_0 t dt \approx \\ & \approx 4\varepsilon\omega_0^2 A \int_0^{2\pi/\omega_0} (\cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t) \sin^2 \omega_0 t dt = \\ & = \frac{\omega_0 A}{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \right) = -\frac{\omega_0}{2\pi} \frac{A}{4}, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t dt \approx \\ & \approx 2\varepsilon\omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos 2\omega_0 t \sin 2\omega_0 t dt = \varepsilon\omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin 4\omega_0 t dt \equiv 0, \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t \cos^2 \omega_0 t dt \approx \\
& \approx 2\varepsilon\omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} (\cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t) \cos^2 \omega_0 t dt = \quad (4.2.26) \\
& = \frac{\omega_0 B}{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\omega_0 B}{2\pi} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

в результате мы получим пару уравнений вида:

$$\dot{A} = \varepsilon\omega_0 B - \gamma A, \quad \dot{B} = \varepsilon\omega_0 A - \gamma B. \quad (4.2.27)$$

Будем искать решение системы (4.2.27) в виде $A = A_0 \exp(\lambda t)$, $B = B_0 \exp(\lambda t)$, тогда получим пару линейных однородных алгебраических уравнений $(\gamma + \lambda)A - \varepsilon\omega_0 B = 0$, $(\gamma + \lambda)B - \varepsilon\omega_0 A = 0$, имеющих нетривиальные решения при условии

$$\begin{vmatrix} \gamma + \lambda & -\varepsilon\omega_0 \\ -\varepsilon\omega_0 & \gamma + \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\gamma + \lambda)^2 = \varepsilon^2 \omega_0^2 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \varepsilon\omega_0. \text{ Отсюда следу-}$$

ет величина порога параметрического резонанса вблизи первой резонансной частоты: $\varepsilon_{\min} = \gamma / \omega_0$. При меньших амплитудах изменения параметров возбуждение параметрического резонанса невозможно.

4.2.2 Параметрическое взаимодействие МГД-волн в плазме, описываемое уравнение Матье

Как было показано в работе Закарашвили [82], колебания, описываемые уравнением Матье, естественным образом возникают в идеальной полностью ионизованной плазме, описываемой следующим набором уравнений, являющимся комбинацией уравнений Максвелла и Навье-Стокса [21]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{V}], \quad (4.2.28)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad (4.2.29)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0, \quad (4.2.30)$$

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\nabla P-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}, \quad (4.2.31)$$

$$C_{V\infty}\frac{dT}{dt}-\frac{k_B\cdot T}{m\rho}\cdot\frac{d\rho}{dt}=0, \quad (4.2.32)$$

$$P=\frac{k_B\cdot T\cdot\rho}{m}. \quad (4.2.33)$$

Система уравнений (4.2.28) – (4.2.33) записана в абсолютной системе единиц СГС. В уравнениях ρ, T, P – это, соответственно, плотность, температура и давление в плазменной среде, а \mathbf{V}, \mathbf{B} – это, соответственно, вектора скорости и магнитного поля. Здесь также используются стандартные обозначения: k_B – для постоянной Больцмана и $C_{V\infty}$ – для высокочастотной теплоемкости при постоянном объеме. Величина m – эффективная масса частицы плазмы.

Уравнение Матье возникает при описании возможного параметрического взаимодействия между альфвеновскими и быстрыми магнитоакустическими волнами. Эти волны являются собственными модами системы уравнений (4.2.28) – (4.2.33) и легко могут быть выделены с помощью линейного анализа системы. Полагая, что магнитное поле направлено вдоль одной из осей, например, вдоль оси z , т.е. $\mathbf{B}_0=(0,0,B_0)$ и что медленные магнитоакустические волны в среде не были возбуждены, можно записать линейные уравнения для быстрых волн, бегущих вдоль оси x , как:

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t}=-B_0\frac{\partial V_{1x}}{\partial x}, \quad (4.2.34)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V_{1x}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(c_S^2 \rho_1 + \frac{B_0 B_{1z}}{4\pi} \right), \quad (4.2.35)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial V_{1x}}{\partial x}. \quad (4.2.36)$$

Исключая все переменные кроме возмущения скорости, волновое уравнение для линейных быстрых магнитоакустических волн запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 V_{1x}}{\partial t^2} - c_F^2 \frac{\partial^2 V_{1x}}{\partial x^2} = 0, \quad (4.2.37)$$

где $c_F = \sqrt{c_S^2 + c_A^2}$ – фазовая скорость быстрых волн,
 $c_A = \sqrt{B_0^2 / 4\pi\rho_0}$ – фазовая скорость альфвеновских волн.

В дальнейшем мы будем искать решение данного уравнения в виде стоячих волн:

$$V_x = \varepsilon c_F \sin(\omega_n t) \sin(k_n x), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (4.2.38)$$

$$\rho_1 = \varepsilon \rho_0 \cos(\omega_n t) \cos(k_n x), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (4.2.39)$$

$$B_{1z} = \varepsilon B_0 \cos(\omega_n t) \cos(k_n x), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (4.2.40)$$

где $k_n = (n\pi/l)$, ($n = 1, 2, \dots$) – это волновые числа (собственные числа системы) среды длины l (например, длина корональной петли) в направлении x , $\omega_n = c_F k_n$ – соответствующие частоты.

Аналогичным образом в линейном пределе из следующих уравнений

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = -B_0 \frac{\partial V_{1y}}{\partial z}, \quad (4.2.41)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V_{1y}}{\partial t} = -\frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial B_{1y}}{\partial z}, \quad (4.2.42)$$

получается уравнение для альфвеновских волн:

$$\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial t^2} - c_a^2 \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial z^2} = 0. \quad (4.2.43)$$

Однако, если в уравнениях (4.2.41), (4.2.42) учесть нелинейные слагаемые, то у быстрых волн появляется возможность оказать влияние на быстрые магнитоакустические волны:

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = -(B_0 + B_{1z}) \frac{\partial V_{1y}}{\partial x} - B_{1y} \frac{\partial V_{1x}}{\partial x}, \quad (4.2.44)$$

$$(\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial V_{1y}}{\partial t} = -\frac{(B_0 + B_{1z}) \partial B_{1y}}{4\pi \partial x}. \quad (4.2.45)$$

Здесь мы не учли слагаемые $V_{1x} \partial B_{1y} / \partial x$ и $(\rho_0 + \rho_1) V_{1x} \partial V_{1x} / \partial x$ по следующим причинам. Во-первых, мы полагаем, что на начальной стадии B_{1y} и V_{1y} , описывающие возмущение альфвеновской волны распространяющейся вдоль оси z , не зависят от координаты x . Каждый магнитный слой эволюционирует вдоль оси x независимо. Зависимость от x возникает из-за влияния быстрых волн и может быть отброшена как величина более высокого порядка малости.

Уравнения (4.2.41) и (4.2.42) могут быть сведены к дифференциальному уравнению второго порядка типа уравнения Хилла:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial t^2} - \frac{(2B_0 + B_{1z})}{B_0(B_0 + B_{1z})} \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} - \\ & - \left((B_0 + B_{1z}) \frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{1}{B_0(B_0 + B_{1z})} B_{1y} - \\ & - \frac{(B_0 + B_{1z})^2}{4\pi(\rho_0 + \rho_1)} \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Подставим далее решение в виде стоячей быстрой магнитоакустической волны (4.2.38) – (4.2.40) и сделаем замену переменных:

$$B_{1y} = h_y(z, t) \exp \int \frac{(2B_0 + B_{1z})}{2B_0(B_0 + B_{1z})} \frac{\partial B_{1z}}{\partial t} dt. \quad (4.2.47)$$

Исключив члены порядка ε^2 , мы получим:

$$\frac{\partial^2 h_{1y}}{\partial t^2} - c_A^2 (1 + \varepsilon \cos(\omega_n t) \cos(k_n x)) \frac{\partial^2 h_{1y}}{\partial z^2} = 0. \quad (4.2.48)$$

Сравнивая уравнения (4.2.48) и (4.2.43), можно видеть, что быстрая магнитоакустическая оказывает влияние на альфвеновскую волну путем периодического изменения альфвеновской скорости c_a .

Применяя далее преобразование Фурье к h_{1y} как $h_{1y} = \int \tilde{h}_{1y}(k_z, t) e^{ik_z z} dk_z$, мы получим уравнения типа Матье:

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}_{1y}}{\partial t^2} + (c_A^2 k_z^2 + \delta \cos \omega_n t) \tilde{h}_{1y} = 0, \quad (4.2.49)$$

где

$$\delta = \varepsilon c_A^2 k_z^2 \cos k_n x. \quad (4.2.50)$$

Из уравнения (4.2.49) напрямую вытекает, что основное резонансное решение будет реализовываться, если

$$\omega_A = \frac{B_0 k_z}{\sqrt{4\pi\varphi_0}} = \frac{\omega_n}{2}, \quad (4.2.51)$$

и оно принимает вид:

$$\tilde{h}_{1y} = h(0) \exp(|\delta|t / 2\omega_b) \left(\cos\left(\frac{\omega_n}{2} t\right) - \sin\left(\frac{\omega_n}{2} t\right) \right). \quad (4.2.52)$$

Решение имеет резонансный характер на интервале частот

$$\left| \omega_A - \frac{\omega_n}{2} \right| < \left| \frac{\delta}{\omega_n} \right|. \quad (4.2.53)$$

Из уравнения (4.2.52) напрямую следует, что гармоники альфвеновских волн с половиной частоты быстрых волн растут экспоненциально со временем.

Представленное уравнение демонстрирует, как энергия неэлектромагнитного происхождения (быстрая магнитоакустическая волна) может быть передана в чисто электромагнитную (альфвеновская волна).

4.2.3 Стохастический параметрический резонанс

Рассмотрим явление стохастического параметрического резонанса на примере гармонического осциллятора [57]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + z(t)]x = 0 \quad (4.2.54)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (4.2.55)$$

где $y = \partial x / \partial t$, $z(t)$ – гауссовская случайная функция с плотностью вероятностей $p(z) = \pi^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\{-z^2/\sigma^2\}$, $\langle z \rangle = 0, \langle z^2 \rangle = 2\sigma^2$ при $x_0 = 0, y_0 = 1$. И найдем порог стохастического параметрического резонанса для вторых и четвертых моментов с учетом линейных потерь энергии.

Перепишем (4.2.54) в виде двух уравнений первого порядка и усредним по ансамблю реализаций, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \dot{x} \rangle &= \langle y \rangle, \quad \langle \dot{y} \rangle = -\omega_0^2 (\langle x \rangle + \langle zx \rangle), \\ \langle x(0) \rangle &= 0, \quad \langle y(0) \rangle = 1. \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

Эта система не замкнута относительно переменных $\langle x \rangle, \langle y \rangle$. По формуле Фуруиу-Новикова [57]:

$$\langle z(t)R[z(\zeta)] \rangle = \int d\tau B(t, \tau) \langle \delta R[z(\zeta)] / \delta z(\tau) \rangle, \quad (4.2.57)$$

где $B(t, t') = \langle z(t)z(t') \rangle$ при $R = x$ имеем с учетом определения вариационной производной $\delta F[f]/\delta f(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta F[f]/\delta \int dT \delta f(T)$,

$$\frac{\delta x}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta z} = -(1-z)\omega_0^2 \frac{\delta x}{\delta z} - \omega_0^2 x = -\omega_0^2 x \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle = \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t,$$

$$\langle y \rangle = \cos \omega_0 t.$$

Получим уравнения для вторых моментов, для чего умножим уравнения на x и y и усредним полученные уравнения. В результате получим:

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle xy \rangle, \quad \langle x\dot{y} \rangle = \langle y^2 \rangle, \quad \langle y\dot{x} \rangle = -\omega_0^2 (\langle x^2 \rangle + \langle zx^2 \rangle), \quad (4.2.58)$$

$$\langle \dot{y}^2 \rangle = -\omega_0^2 (\langle xy \rangle + \langle zxy \rangle), \quad \langle x^2(0) \rangle = \langle x(0)y(0) \rangle = \langle y^2(0) \rangle = 0.$$

Сложим 2-е и 3-е уравнения и используем формулу Фуруцу-Новикова:

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}^2 \rangle &= \langle xy \rangle, \\ \langle x\dot{y} \rangle &= \langle y^2 \rangle - \omega_0^2 \langle x^2 \rangle, \\ \langle y\dot{x} \rangle &= -2\omega_0^2 (\langle xy \rangle + \sigma^2 \omega_0^2 \langle x^2 \rangle). \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

Если интенсивность флуктуаций мала, задача имеет решение вида:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= 2\omega_0^{-2} \left[\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\cos 2\omega_0 t + (3\sigma^2 \omega_0 / 4) \sin 2\omega_0 t) \right], \\ \langle xy \rangle &= (4\omega_0)^{-1} \left[2 \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \sin 2\omega_0 t + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2 \omega_0 (\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \cos 2\omega_0 t) \right], \end{aligned}$$

$$\langle y^2 \rangle = 2^{-1} \left[\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \times \right. \\ \left. \times (\cos 2\omega_0 t - (\sigma^2 \omega_0 / 4) \sin 2\omega_0 t) \right].$$

Видно, что здесь имеет место стохастическая параметрическая раскачка колебаний за счет флуктуаций параметров с инкрементом $\Gamma = \sigma^2 \omega_0^2$. Для вторых моментов область устойчивости имеет вид $\sigma^2 > 2\gamma \omega_0^2$, для четвертых: $\sigma^2 > (2\gamma/3\omega_0^2)(\omega_0^2 + 3\gamma^2)/(\omega_0^2 + 6\gamma^2)$.

4.2.4 Медленное изменение параметров.

Адиабатический инвариант

Пусть частота – медленно меняющаяся функция: $\omega(t) = \omega_0 f(t/\tau)$, т.е. $\omega_0 \tau \gg 1$. Перейдем в уравнении гармонического осциллятора без трения к переменной $\zeta = t/\tau$ и введем малый параметр $\varepsilon = (\omega_0 \tau)^{-1}$. Тогда имеем уравнение Хилла

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + f(\zeta)x = 0. \quad (4.2.60)$$

Решение (4.2.60) ищем методом, в квантовой механике называемым методом ВКБ, а в оптике – приближением геометрической оптики [2, 3, 56].

Сделаем замену переменной:

$$x(\zeta) = \exp\left(\int_0^\zeta y(\zeta') d\zeta'\right) = \exp[\theta(\xi)]. \quad (4.2.61)$$

В оптике функцию θ называют *эйконалом*. Имея в виду следующие соотношения $\dot{x} = y \exp[\theta(\xi)]$, $\ddot{x} + [\dot{y} + y^2] \exp[\theta(\xi)] = 0$, подставим их в (4.2.60), тогда получим уравнение Риккати

$$\varepsilon^2 \dot{y} + \varepsilon^2 y^2 + f(\zeta) = 0, \quad (4.2.62)$$

решение которого ищется в виде ряда $y = \frac{y_{-1}}{\varepsilon} + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$. Подставляя его в (4.2.62), имеем $\varepsilon^0 (y_{-1}^2 + f) + \varepsilon^1 (\dot{y}_{-1} + 2y_{-1}y_0) + \dots = 0$.

Приравнивая последовательно нулю выражения в круглых скобках, получаем:

- из первого уравнения $y_{-1} = \pm\sqrt{f}$, используя это соотношение далее;

- из второго уравнения $y_0 = y_{-1}^{-1}\dot{y}_{-1}/2 = \ln|y_{-1}|^{-1/2} = \ln|f|^{-1/4}$
и т.д.

Таким образом, решение уравнения (4.2.60) с указанной точностью имеет вид:

$$\begin{aligned} x(\zeta) &= \exp\left[\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\zeta} \sqrt{f(\zeta')} d\zeta' + \ln|f(\zeta)|^{-1/4}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{f(\zeta)}} \exp\left[\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\zeta} \sqrt{f(\zeta')} d\zeta'\right]. \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

При заданных начальных условиях в размерных переменных (4.2.63) сводится к виду:

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \cos\left[\int_0^{\zeta} \omega(t') dt'\right] + \varphi_0 = A(t) \cos[\Phi(t)]. \quad (4.2.64)$$

Например, для пружины с переменной жесткостью $k(t) = m\omega^2(t)$, энергия

$$W = m \frac{\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2}{2},$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \right) \cos[\Phi(t)] - \omega^2(t) \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \sin[\Phi(t)],$$

причем в последнем выражении первое слагаемое можно отбросить в силу малости. В результате

$$W(t) = \frac{mA_0^2}{2} \left[\frac{\omega^2(t) \sin^2 \Phi(t) + \omega^2(t) \cos^2 \Phi(t)}{\omega(t)} \right] = \frac{mA_0^2}{2} \omega(t)$$

$$\Rightarrow \frac{W(t)}{\omega(t)} = \frac{mA_0^2}{2} = const .$$

Такие комбинации динамических переменных системы, которые остаются постоянными при медленном изменении ее параметров, называются *адиабатическими инвариантами* [2, 3, 56]. Их существование, как и существование законов сохранения, может облегчить изучение системы.

4.2.5 Движения в быстроосциллирующих полях

Перепишем (4.2.2) в виде [3]:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + 4\varepsilon \cos \Omega t] x = -4\varepsilon \omega_0^2 x \cos \Omega t \Leftrightarrow \quad (4.2.65)$$

$$\ddot{x} + f(x) = F(x) \cos \Omega t.$$

В задаче (4.2.65) есть два характерных времени изменения величины x : медленное время $\tau_1 \sim \omega_0^{-1}$ и быстрое время $\tau_2 \sim \Omega^{-1} \ll \tau_1$.

В соответствии с этим в согласии с принципом суперпозиции будем искать ее решение в виде суммы двух функций, одна из которых (x_1) меняется медленно (с характерным временем τ_1), а другая (x_2) – быстро (с характерным временем τ_2):

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \mu x'(t) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} x(t) dt + \frac{\omega_0}{\Omega} x'(t). \quad (4.2.66)$$

Из рис. 34 видно, что усреднение по быстрому времени в соответствии с теоремой о среднем значении практически не меняет медленных функций.

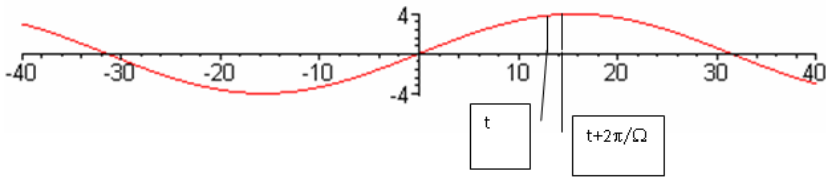


Рисунок 34. Вид функции (4.2.66)

Подставим решение (4.2.66) в уравнение (4.2.65) и разложим функции f и F в ряд Тейлора с точностью до слагаемых $\sim \mu^1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + \mu \frac{d^2 x'}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) = \\ = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t + \mu \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

Для быстроменяющихся величин с учетом того, что $F \sim \varepsilon$, получаем для величин первого порядка малости ($\mu \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) \cos \Omega t$ – величина второго порядка малости), уравнение:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t. \quad (4.2.68)$$

С учетом того, что $\frac{d^2 x'}{dt^2} \sim \Omega^2 x'$, $\mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x' = \omega_0^2 x' \ll \Omega^2 x'$,

вторым слагаемым в правой части можно пренебречь по сравнению с первым, откуда получаем частное решение, которое позволяет выразить быстроосциллирующую величину через амплитуду медленных движений осциллятора $\langle x \rangle$: $\mu \ddot{x}' = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t \Rightarrow x' = -\left(F(\langle x(t) \rangle) / \mu \Omega^2 \right) \cos \Omega t$. Подставим это соотношение в (4.2.67)

и усредним его по $2\pi/\Omega$. Тогда получим замкнутое уравнение для медленных движений:

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) = -\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} \frac{F(\langle x(t) \rangle)}{\Omega^2} \langle \cos^2 \Omega t \rangle \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) = -\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} \frac{F(\langle x(t) \rangle)}{2\Omega^2}. \quad (4.2.69)$$

Откуда

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) = -\left. \frac{1}{2\Omega^2} \frac{\partial}{\partial x} (F^2(x)) \right|_{x=\langle x \rangle}. \quad (4.2.70)$$

Таким образом, быстрые пульсации оказывают влияние на медленные движения в следующем порядке теории возмущений.

4.3 Нелинейные динамические системы с 1.5-а степенями свободы

К данному классу относятся свободные колебания в системах 3-го порядка и вынужденные колебания в системах 2-го порядка.

4.3.1 Осциллятор Дуффинга под импульсным воздействием

Важный класс задач, в которых возникают дискретные отображения, связан с изучением систем, находящихся под импульсным периодическим воздействием. В качестве примера получим дискретное отображение для осциллятора с кубической нелинейностью и затуханием, совершающего колебания под действием последовательности δ -образных импульсов [14]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_n \delta(t - nT). \quad (4.3.1)$$

Будем считать, что в промежутке между импульсами применим метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае решение представим в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой

$$x = Ae^{i\varphi t} + A^* e^{-i\varphi t}, \quad (4.3.2)$$

где A , A^* – медленно меняющиеся функции времени.

В промежутке между импульсами для комплексной амплитуды справедливо укороченное уравнение, которое в исходных обозначениях имеет вид:

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A - \frac{3i\beta|A|^2 A}{2\omega_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = -\gamma A, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3\beta}{8\omega_0} A^2. \quad (4.3.3)$$

Решая уравнения (4.3.3), найдем следующие зависимости амплитуды и фазы от времени в промежутке между n -ым и $n+1$ -ым импульсами:

$$a(t) = a_n e^{-\gamma t}, \quad \varphi(t) = \frac{3\beta a_n^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n, \quad (4.3.4)$$

где a_n и φ_n – начальная амплитуда и фаза сразу после n -го импульса. Если подставить выражения (4.3.4) в соотношения $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, $v(t) = a(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$, следующие из связи x и A , то мы найдем зависимости координаты и скорости осциллятора во времени на рассматриваемом промежутке времени. К моменту начала $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду T . Поэтому координата осциллятора и скорость равны $x(T)$ и $v(T)$. В силу δ -образного характера воздействия сразу после этого импульса координата не изменится, а скорость получит добавку в виде константы C . Поэтому для координаты и скорости после $(n+1)$ -го импульса получаем выражения

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= a_n e^{-\gamma T} \cos \left(\omega_0 T + \frac{3\beta |a_n|^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n \right), \\
 v_{n+1} &= -\omega_0 a_n e^{-\gamma T} \sin \left(\omega_0 T + \frac{3\beta |a_n|^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n \right) + C.
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Удобно записать их в комплексной форме, введя переменную

$$z = \left(ix + \frac{v}{\omega_0} \right) \left(\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} \right)^{1/2}. \tag{4.3.6}$$

Тогда относительно этой переменной из (4.3.5) получаем искомое отображение:

$$z_{n+1} = A + B z_n \exp \left[i \left(|z_n|^2 \right) + \omega_0 T \right], \tag{4.3.7}$$

где $A = \frac{C}{\omega_0} \left(\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} \right)^{1/2}$, $B = e^{-\gamma T}$.

4.3.2 Осциллятор Дуффинга. Нелинейный резонанс

Рассмотрим уравнение Дуффинга:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x} \tag{4.3.8}$$

и проанализируем его методом Ван дер Поля.

Полагая $\omega_0 = \Omega - \xi$, где $\xi \ll 1$ – расстройка частоты, перепишем уравнение в виде [14]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x}{dt^2} + \Omega^2 x &= \varepsilon_0 \cos \Omega t + (\Omega^2 - \omega_0^2) x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \frac{dx}{dt} \\
 &= \varepsilon_0 \cos \Omega t + (\Omega - \omega_0)(\Omega + \omega_0) x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \frac{dx}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Или окончательно:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \xi(2\Omega - \xi)x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x}, \tag{4.3.10}$$

имея в виду исследование резонансных явлений, характеризующихся не собственной частотой, а частотой внешней силы.

Решение уравнения (4.3.10) также будем в виде $x = A(t)\cos(\Omega t + \varphi(t))$. В результате подстановки получим

$$\begin{aligned} & \underline{\ddot{A}\cos(\Omega t + \varphi) - 2\dot{A}\Omega\sin(\Omega t + \varphi) - 2\dot{A}\dot{\varphi}\sin(\Omega t + \varphi)} - \\ & - \underline{A\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi) - 2A\Omega\dot{\varphi}\cos(\Omega t + \varphi)} - \\ & - \underline{A\ddot{\varphi}\sin(\Omega t + \varphi) - A\dot{\varphi}^2\cos(\Omega t + \varphi) + A\Omega^2\cos(\Omega t + \varphi)} = \quad (4.3.11) \\ & = \varepsilon_0\cos\Omega t + \xi(2\Omega - \underline{\xi})A\cos(\Omega t + \varphi) - \\ & - 2\gamma[\underline{\dot{A}\cos(\Omega t + \varphi) - A\Omega\sin(\Omega t + \varphi) - A\dot{\varphi}\sin(\Omega t + \varphi)}] - \\ & - \alpha A^2\cos^2(\Omega t + \varphi) - \beta A^3\cos^3(\Omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Для получения уравнения для \dot{A} умножим приведенное выше равенство на $\sin(\Omega t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\Omega$. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\Omega t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\Omega$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \cos\Omega t \sin(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin\varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t + \varphi) dt = \frac{\pi}{\Omega} \sin\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \cos\Omega t \cos(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \cos\varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \cos(2\Omega t + \varphi) dt = \frac{\pi}{\Omega} \cos\varphi,$$

получаем:

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A - \frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \sin\varphi, \quad A \frac{d\varphi}{dt} = -\xi A - \frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \cos\varphi + \frac{3\beta}{8\Omega} A^3. \quad (4.3.12)$$

Резонансная кривая, т.е. зависимость $A = A(\xi)$, получается как состояние равновесия этой системы:

$$\gamma A_0 = -\frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \sin\varphi_0, \quad \xi A_0 - \frac{3\beta}{8\Omega} A_0^3 = -\frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \cos\varphi_0. \quad (4.3.13)$$

Откуда, возводя в квадрат оба уравнения и складывая их, получим:

$$\left(\xi A_0 - \frac{3\beta}{8\Omega} A_0^3\right)^2 + \gamma^2 A_0^2 = \left(\frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0\right)^2. \quad (4.3.14)$$

Окончательно вид резонанной кривой может быть записан как

$$\xi = \frac{3\beta}{8\Omega} A_0^2 \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{\Omega^2 A_0^2} \varepsilon_0^2 - \gamma^2}. \quad (4.3.15)$$

В диапазоне $0 \leq A_0 < \sqrt{8\Omega\gamma/3\beta}$ резонансная кривая, как и в линейном случае, однозначна, вне этого диапазона – неоднозначна, рис. 35.

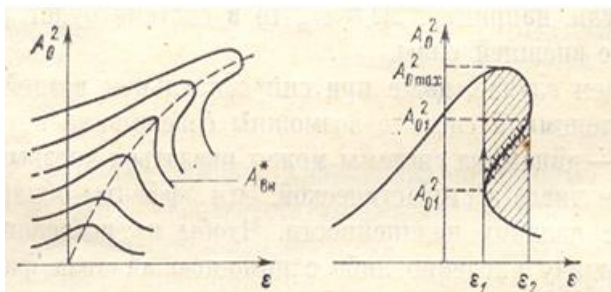


Рисунок 35. Резонансная кривая

4.3.3 Параметрически возбуждаемый нелинейный осциллятор

Рассмотрим уравнение параметрически возбуждаемого нелинейного осциллятора без трения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - 4\varepsilon \cos \Omega t)x + \beta x^3 + 2\gamma \dot{x} = 0. \quad (4.3.16)$$

Перепишем уравнение (4.3.16) вблизи первой резонансной полосы $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$, $\Delta \ll 1$ в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon \omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma \dot{x} - \beta x^3, \quad (4.3.17)$$

где учтены и диссипативные слагаемые.

Для решения уравнения (4.3.17), в силу условия $\varepsilon \ll 1$, можно воспользоваться методом Ван дер Поля. Будем, как и в параграфе 4.3.2, искать его решение в виде $x = A(\varepsilon t) \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon t))$. В результате получим соотношение, отличающееся от полученного выше последним слагаемым:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\dot{A} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{2\dot{A} \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \\
 & - \underline{A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} - 2A \omega_0 \dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\
 & - \underline{A \ddot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A \dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} + \underline{A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \\
 & = 4\varepsilon \omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\
 & - 2\gamma \left(\underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} \right) - \\
 & - \beta A^3 \cos(\omega_0 t + \varphi) \left(\frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Далее снова умножим приведенное выше равенство сначала на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$, а потом на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем значении в порядке $\sim \varepsilon^1$, A , φ и их производные могут быть вынесены за знак интеграла. Учитывая интегральные соотношения, приведенные ранее, и возвращаясь к исходным обозначениям, получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= -\gamma A - (\varepsilon \Omega A / 8) \sin 2\varphi, \\
 \dot{\varphi} &= -\Delta + 3\beta A^2 / 8\Omega - (\varepsilon \Omega / 8) \cos 2\varphi.
 \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Даже при отсутствии линейной расстройки $\Delta = 0$, есть расстройка $\sim A^2$, приводящая к сдвигу фазы, компенсирующему параметрический инкремент.

4.3.4 Хаотические колебания. Система Лоренца

Наиболее известной автономной системой с 1.5-а степенями свободы, описывающей хаотические колебания, является модель Лоренца:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \dot{y} = rx - y - xz; \dot{z} = xy - bz, \quad (4.3.20)$$

где $r > 0$. Относительное изменение фазового объема системы отрицательно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{1}{dxdydz} \left(\frac{dx}{dt} dydz + \frac{dy}{dt} dx dz + \frac{dz}{dt} dx dy \right) = \\ &= \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} + \frac{d\dot{z}}{dz} = -\sigma - 1 - b < 0, \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

то есть система (4.3.20) диссипативна. Особые точки системы (4.3.20) определяются уравнениями, которые могут быть преобразованы к виду показанному ниже:

$$\begin{cases} -\sigma x_{i0} + \sigma y_{i0} = 0, \\ rx_{i0} - y_{i0} - x_{i0}z_{i0} = 0, \\ x_{i0}y_{i0} - bz_{i0} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0}(r - 1 - x_{i0}^2/b) = 0, \\ y_{i0} = x_{i0}, \\ z_{i0} = x_{i0}^2/b. \end{cases} \quad (4.3.22)$$

Легко видеть, что система имеет три особые точки: $(0,0,0)$, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, причем две последние возникают только при $r > 1$.

Характеристическое уравнение для первой точки имеет вид:

$$(\lambda + b) \left[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) \right] = 0, \quad (4.3.23)$$

а его корни равны:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}. \quad (4.3.24)$$

Видно, что в области $0 < r < 1$ все три корня действительны и отрицательны – точка $(0,0,0)$ является устойчивым узлом. При $r > 1$ все корни действительны, но один становится положитель-

ным $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$ – точка $(0,0,0)$ является *седлом* с размерностью неустойчивого многообразия равной 1.

Характеристическое уравнение для второй и третьей точек имеет вид:

$$\lambda^3 + (\sigma + b - 1)\lambda^2 + (\sigma - r)b\lambda + 2\sigma r(r - 1) = 0. \quad (4.3.25)$$

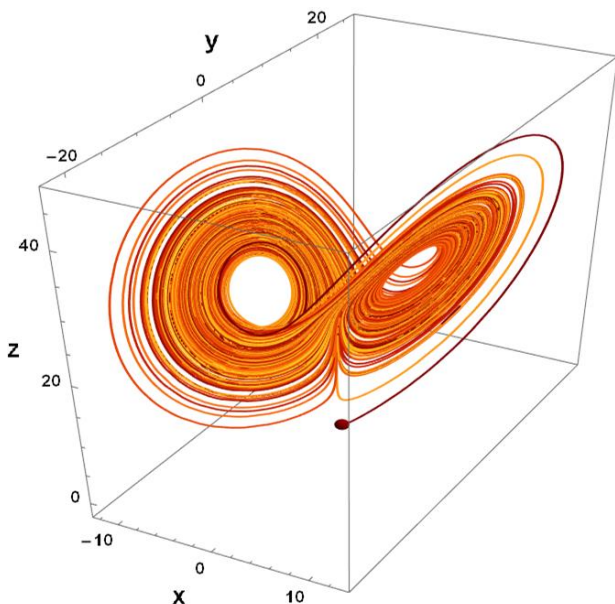


Рисунок 36. Аттрактор Лоренца (странный аттрактор)

Из корней уравнения (4.3.25) один действительный и отрицательный при любых значениях r и σ , а оставшиеся два – комплексно сопряженные, причем в области $0 < r < r_c$ действительные части этих корней отрицательны (*устойчивый фокус*), при $r < r_c$ равны нулю, а при $r > r_c$ положительны (*седло – фокус*). Здесь

$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$. Аналитически получить решение системы

(4.3.20) невозможно. Численный анализ показывает, что при $r > r_c$ фазовые траектории системы (4.3.20) лежат на многообразии, называемым *странным аттрактором*, рис. 36, которому соответствует режим *динамического хаоса*, рис. 37.

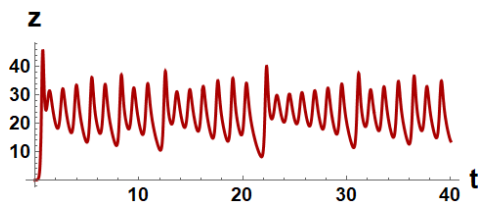


Рисунок 37. Режим случайных автоколебаний, соответствующий рассчитанному аттрактору

ГЛАВА 5 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С 2-МЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

5.1 Линейные колебания в системах с 2-мя степенями свободы

Модели данного типа встречаются часто, поскольку описывают систему из пары связанных линейных или нелинейных осцилляторов.

• **Силовая (емкостная) связь. Консервативные системы**

Рассмотрим пару математических маятников, связанных пружиной жесткостью k , пренебрегая потерями энергии. Положим $x_{1,2} = \varphi_{1,2}$, тогда имеем:

$$\ddot{x}_1 + (\omega_{01}^2 + k/m_1)x_1 = kx_2/m_1, \quad \ddot{x}_2 + (\omega_{02}^2 + k/m_2)x_2 = kx_1/m_2. \quad (5.1.1)$$

Соответствующая электрическая схема приведена ниже.

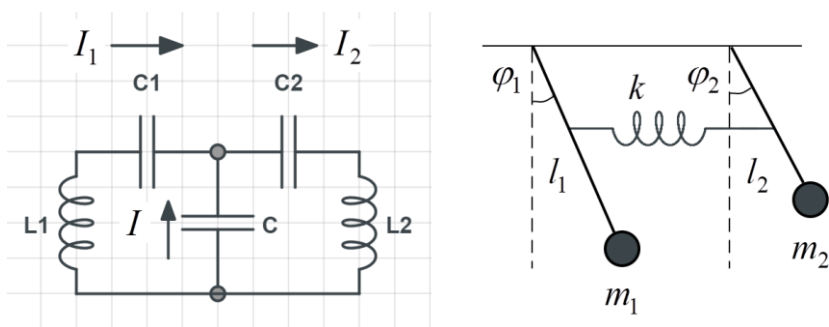


Рисунок 38. Примеры систем с силовой (емкостной) связью

Частоты, при которых один осциллятор не влияет на другой, называют парциальными. Здесь они равны $\Omega_{1,2}^2 = \omega_{01,2}^2 + k/m_{1,2}$. С их использованием (5.1.1) можно переписать в виде:

$$\ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = kx_2/m_1, \quad \ddot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = kx_1/m_2. \quad (5.1.2)$$

Однако реальные движения происходят с нормальными или собственными частотами, являющимися решениями характеристического уравнения, которое найдем, полагая $x_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\omega t)$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + \Omega_1^2 \right) X_1 - \frac{k}{m_1} X_2 = 0, \\ -\frac{k}{m_2} X_1 + \left(-\omega^2 + \Omega_2^2 \right) X_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_1^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & -\omega^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (5.1.3)$$

$$\Rightarrow \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0.$$

Откуда:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \mp \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \frac{4k^2}{m_1 m_2}}}{2}. \quad (5.1.4)$$

Относительные вклады одного из осцилляторов в нормальные моды другого или коэффициенты распределения можно получить, находя их из каждого уравнения по отдельности:

$$\begin{aligned} r_{1,2} = \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = \frac{\Omega_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2}{k/m_{1,2}} = \sqrt{\frac{m_{1,2}}{m_{2,1}}} r = \\ = \sqrt{\frac{m_{1,2}}{m_{2,1}}} \left(\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \frac{4k^2}{m_1 m_2}} - (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \right) \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2k}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Эти коэффициенты имеют разные знаки. Общее решение (5.1.1) имеет вид суперпозиции колебаний на нормальных модах:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 e^{i\omega_2 t}, \quad (5.1.6)$$

где константы A_i комплексны. Нормальные моды получаются стандартным способом путем замен $a_1 = (x_1 - r_2 x_2) / \sqrt{1 - r_1 r_2}$,

$a_2 = (-r_1 x_1 + x_2) / \sqrt{1 - r_1 r_2}$. В этих переменных (5.1.1) сводится к виду $\ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = 0$, $\ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = 0$.

• **Инерционная (индуктивная) связь**

а. Консервативные системы.

Рассмотрим пару RLC – контуров, с катушками, имеющими коэффициент взаимной индукции M , отличный от нуля (см. рис. 39 слева). Будем полагать для данного случая, что сопротивление резисторов пренебрежимо мало $R_{1,2} \rightarrow 0$.

Тогда, применяя к каждому контуру второе правило Кирхгофа $\varepsilon_{САМ1;2} + U_{C1;2} + \varepsilon_{B31;2} = 0$ с учетом определения силы тока к каждому из контуров, получим [1, 2, 10]:

$$L_1 \ddot{q}_1 + q_1 / C_1 + M \ddot{q}_2 = 0, \quad L_2 \ddot{q}_2 + q_2 / C_2 + M \ddot{q}_1 = 0. \quad (5.1.7)$$

Соответствующая механическая схема приведена рис. 39 справа.

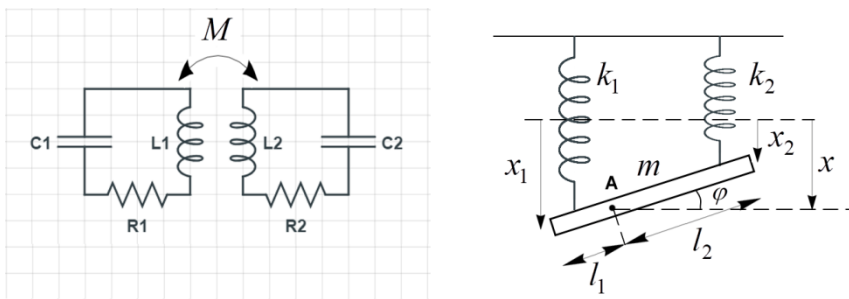


Рисунок 39. Примеры систем с инерционной (индуктивной) связью

Парциальные частоты здесь равны $\Omega_{1;2}^2 = \omega_{0;2}^2 = 1 / L_{1;2} C_{1;2}$. С их использованием (5.1.7) можно переписать в виде:

$$\ddot{q}_1 + \Omega_{01}^2 q_1 = -M L_1^{-1} \ddot{q}_2, \quad \ddot{q}_2 + \Omega_{02}^2 q_2 = -M L_2^{-1} \ddot{q}_1. \quad (5.1.8)$$

Нормальные частоты здесь определяются соотношениями $(-\omega^2 + \Omega_1^2)Q_1 - ML_1^{-1}\omega^2 Q_2 = 0$, $-ML_2^{-1}\omega^2 Q_1 + (-\omega^2 + \Omega_2^2)Q_2 = 0$, которые найдены в предположении $q_{1;2} = Q_{1;2} \exp(i\omega t)$, откуда

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_1^2 & -ML_1^{-1}\omega^2 \\ -ML_2^{-1}\omega^2 & -\omega^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

И таким образом окончательно:

$$\omega_{1;2}^2 = \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \mp \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\Omega_1^2 \Omega_2^2} \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \left(2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \right)^{-1}. \quad (5.1.10)$$

Коэффициенты распределения снова можно получить, находя их из каждого из алгебраических уравнений по отдельности:

$$r_{1;2} = \frac{X_{2;1}}{X_{1;2}} = \frac{\omega_{1;2}^2 - \Omega_{1;2}^2}{M / L_{1;2}}, \text{ а общее решение (5.1.7) снова имеет вид}$$

суперпозиции колебаний на нормальных модах:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 e^{i\omega_2 t}. \quad (5.1.11)$$

б. Диссипативные системы.

Учтем наличие сопротивления в индуктивно связанных контурах представленных на рис. 39. Как и в предыдущем случае, система, описывающая колебания, следует из закона Кирхгофа для первой и второй цепи:

$$q_1 / C_1 + I_1 R_1 = -\dot{\Phi}_1, \quad q_1 / C_2 + I_2 R_2 = -\dot{\Phi}_2. \quad (5.1.12)$$

Продифференцировав оба уравнения по времени, и учтя что $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$, $I_1 = \dot{q}_1$, $I_2 = \dot{q}_2$, в итоге преобразуем систему (5.1.12) к виду:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + C_1^{-1} I_1 + M \ddot{I}_2 &= 0, \\ L_2 \ddot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + C_2^{-1} I_2 + M \dot{I}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Ищем её решение в виде: $I_1 = Ae^{ot}$, $I_2 = Be^{ot}$. Подставляя это соотношение в (5.1.13), получаем систему, определитель которой должен быть равен нулю:

$$(\omega^2 L_1 + \omega R_1 + C_1^{-1})A + \omega^2 MB = 0, \quad \omega^2 MA + (\omega^2 L_2 + \omega R_2 + C_2^{-1})B = 0.$$

После преобразований, приходим к следующему уравнению 4-й степени:

$$\begin{aligned} (L_1 L_2 - M^2) \omega^4 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \omega^3 + \\ + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1 R_2 \right) \omega^2 + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) \omega + \frac{1}{C_1 C_2} = 0. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

с вещественными коэффициентами. По основной теореме алгебры оно имеет 4 комплексных корня, и их можно разбить на две пары комплексно сопряжённых. Вещественные части будут определять коэффициенты затухания, а мнимые – нормальные частоты: т.е. по два коэффициента затухания и нормальных частот.

Определить эти частоты довольно трудно. Нужно в это уравнение подставить решение в виде $\omega = -\gamma + i\omega_n$ и отделить мнимую часть от действительной. Получается очень громоздкая система из двух уравнений, которую решить в общем виде очень трудно. Зато парциальные частоты определяются очень легко. Для этого достаточно в уравнениях (5.1.13) поочерёдно положить $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$. Получаем уравнения:

$$L_1 \ddot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + C_1^{-1} I_1 = 0, \quad L_2 \ddot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + C_2^{-1} I_2 = 0. \quad (5.1.15)$$

Колебания, соответствующие парциальным частотам, будут обычными затухающими колебаниями (из-за индуктивной связи). Получаем:

$$\omega_{p1}^2 = \left(\frac{1}{L_1 C_1} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{2L_1} \right)^2, \omega_{p2}^2 = \left(\frac{1}{L_2 C_2} \right)^2 - \left(\frac{R_2}{2L_2} \right)^2, \quad (5.1.16)$$

$$\gamma_{p1} = -\frac{R_1}{2L_1}, \gamma_{p2} = -\frac{R_2}{2L_2}.$$

5.2 Нелинейные колебания в системах с 2-мя степенями свободы. Двухконтурный автогенератор

Общий вид электрической схемы двухконтурного автогенератора представлен на рис. 40.

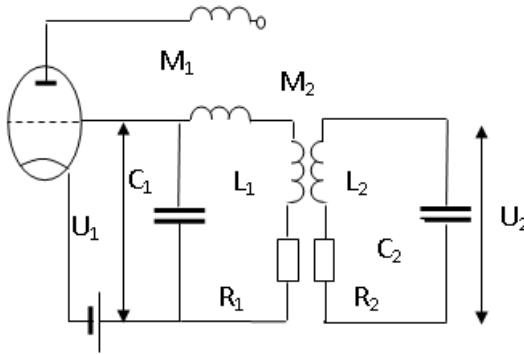


Рисунок 40. Схема двухконтурного автогенератора

Колебательный процесс в этой системе описывается следующей парой уравнений, которые записываются по аналогии с разделом 5.1 [2]:

$$L_1 C_1 \ddot{U}_1 + [R_1 C_1 - M_1 S_0 + M_1 S_2 U_1^2] \dot{U}_1 + U_1 + M_2 C_2 \ddot{U}_2 = 0,$$

$$L_2 C_2 \ddot{U}_2 + R_2 C_2 \dot{U}_1 + U_2 + M_2 C_1 \ddot{U}_1 = 0. \quad (5.2.1)$$

Парциальные частоты контуров равны $\Omega_{1;2}^2 = L_{1;2}^{-1} C_{1;2}^{-1}$, их отношение обозначим как $\zeta = n_2^2 / n_1^2$, коэффициент связи (индуктивной) контуров $\alpha = M_2^2 / L_1 L_2 < 1$, степень возбуждения генератора

$\mu = \Omega_1(M_1S_0 - R_1C_1)$, отношение декремента затухания во втором контуре к инкременту нарастания в первом равно $\delta = (R_2L_1C_1 / L_2)(M_1S_0 - R_1C_1)^{-1}$. Введем также безразмерные переменные $t = t\Omega_1$, $x_1 = U_1\sqrt{M_1S_2 / (M_1S_0 - R_1C_1)}$, $x_2 = U_2(L_2C_2 / M_1C_1)\sqrt{M_1S_2 / (M_1S_0 - R_1C_1)}$.

Тогда система (5.2.1) примет вид:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \alpha\ddot{x}_2 = \mu[1 - x_1^2]\dot{x}_1, \quad \ddot{x}_2 + \zeta\dot{x}_2 + \ddot{x}_1 = \mu\delta\ddot{x}_2. \quad (5.2.2)$$

При $\mu = 0$ в этой системе наблюдаются колебания с нормальными частотами $\omega_{1,2}$, получающимися подстановкой при $\mu = 0$ в систему (5.2.2) решений вида $x_{1,2} \sim \exp(i\omega t)$, что приводит к уравнению:

$$(1 - \alpha)\frac{\omega^4}{\Omega_1^4} - (1 + \zeta)\frac{\omega^2}{\Omega_1^2} + \zeta = 0, \quad (5.2.3)$$

имеющему корни

$$\frac{\omega_{1,2}^2}{\Omega_1^2} = \frac{1 + \zeta \pm \sqrt{(1 + \zeta)^2 - 4(1 - \alpha)\zeta}}{2(1 - \alpha)} = \frac{1 + \zeta \pm \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\alpha\zeta}}{2(1 - \alpha)}. \quad (5.2.4)$$

Решение (5.2.2) при $\mu = 0$ имеет вид $x_1 = a_1e^{i\omega_1 t} + a_2e^{i\omega_2 t} + c.c.$, $x_2 = a_1\Psi_1e^{i\omega_1 t} + a_2\Psi_2e^{i\omega_2 t} + c.c.$ Подстановка их в (5.2.2) приводит к алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} (1 - \omega_1^2 - \alpha\Psi_1\omega_1^2)a_1 + (1 - \omega_2^2 - \alpha\Psi_2\omega_2^2)a_2 = 0, \\ (\zeta - \omega_1^2 - \Psi_1\omega_1^2)a_1 + (\zeta - \omega_2^2 - \Psi_2\omega_2^2)a_2 = 0. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega_1^2 - \alpha\Psi_1\omega_1^2 & 1 - \omega_2^2 - \alpha\Psi_2\omega_2^2 \\ \zeta - \omega_1^2 - \Psi_1\omega_1^2 & \zeta - \omega_2^2 - \Psi_2\omega_2^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2.6)$$

получим выражения для $\Psi_{1,2}$:

$$\Psi_{1;2} = \left(1 - \frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2} \right) \left(\alpha \frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2} \right)^{-1} = \left(\frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2} \right) \left(\zeta - \frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2} \right)^{-1}. \quad (5.2.7)$$

Если $\mu \ll 1$, $\delta \ll 1$, для решения системы (5.2.2) можно воспользоваться методом Ван дер Поля и искать решения в виде $x_1 = a_1(t)e^{i\omega_1 t} + a_2(t)e^{i\omega_2 t} + c.c.$, $x_2 = a_1(t)\Psi_1 e^{i\omega_1 t} + a_2(t)\Psi_2 e^{i\omega_2 t} + c.c.$.

Подставляя эти соотношения в (5.2.2), получим:

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\ddot{a}}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \underline{\omega_1^2 a_1} \right) e^{i\omega_1 t} + \underline{a_1 e^{i\omega_1 t}} \\ & + \alpha \Psi_1 \left(\underline{\ddot{a}}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \underline{\omega_1^2 a_1} \right) e^{i\omega_1 t} + c.c. + \\ & \left(\underline{\ddot{a}}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \underline{\omega_2^2 a_2} \right) e^{i\omega_2 t} + \underline{a_2 e^{i\omega_2 t}} \\ & + \alpha \Psi_2 \left(\underline{\ddot{a}}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \underline{\omega_2^2 a_2} \right) e^{i\omega_2 t} + c.c. = \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} & = \mu \left[1 - \left(a_1^2 e^{2i\omega_1 t} + 2a_1 a_2 e^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} + a_2^2 e^{2i\omega_2 t} + c.c. \right) \right. \\ & \left. - 2 \left(|a_1|^2 + a_1 a_2^* e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 t} + a_2 a_1^* e^{-i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} + |a_2|^2 \right) \right] \times \\ & \times \begin{pmatrix} \left(\underline{\dot{a}}_1 + i\omega_1 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + \left(\underline{\dot{a}}_2 + i\omega_2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} \\ + \left(\underline{\dot{a}}_1^* - i\omega_1 a_1^* \right) e^{-i\omega_1 t} + \left(\underline{\dot{a}}_2^* - i\omega_2 a_2^* \right) e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\ddot{a}}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \underline{\omega_1^2 a_1} \right) e^{i\omega_1 t} + \underline{\zeta a_1 e^{i\omega_1 t}} \\ & + \Psi_1 \left(\underline{\ddot{a}}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \underline{\omega_1^2 a_1} \right) e^{i\omega_1 t} + c.c. + \\ & \left(\underline{\ddot{a}}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \underline{\omega_1^2 a_1} \right) e^{i\omega_1 t} + \underline{\zeta a_1 e^{i\omega_1 t}} \\ & + \Psi_1 \left(\underline{\ddot{a}}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \underline{\omega_1^2 a_1} \right) e^{i\omega_1 t} + c.c. + \\ & \left(\underline{\ddot{a}}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \underline{\omega_2^2 a_2} \right) e^{i\omega_2 t} + \underline{\zeta a_2 e^{i\omega_2 t}} \\ & + \Psi_2 \left(\underline{\ddot{a}}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \underline{\omega_2^2 a_2} \right) e^{i\omega_2 t} + c.c. = \\ & = \mu \delta \left(\Psi_1 \left(\underline{\dot{a}}_1 + i\omega_1 a_1 \right) e^{i\omega_1 t} + \Psi_2 \left(\underline{\dot{a}}_2 + i\omega_2 a_2 \right) e^{i\omega_2 t} \right) + c.c. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Для получения уравнения для a_1 умножим уравнения на $e^{-i\omega_1 t}$, а для a_2 – на $e^{-i\omega_2 t}$ и оставим в уравнениях только слагаемые, перед которыми не стоит экспоненциальный множитель того или иного вида – все эти слагаемые осциллируют и при усреднении по времени исчезают. В результате получим:

$$\begin{aligned}
 (1 + \alpha\Psi_1)2i\omega_1\dot{a}_1 &= \mu \left[i\omega_1 a_1 - 2i\omega_1 (|a_1|^2 + |a_2|^2) a_1 - 2i\omega_2 a_2 a_1 a_2^* \right], \\
 (1 + \Psi_1)2i\omega_1\dot{a}_1 &= \mu\delta\Psi_1 i\omega_1 a_1, \\
 (1 + \alpha\Psi_2)2i\omega_2\dot{a}_2 &= \mu \left[i\omega_2 a_2 - 2i\omega_2 (|a_1|^2 + |a_2|^2) a_2 - 2i\omega_1 a_1 a_2 a_1^* \right], \\
 (1 + \Psi_2)2i\omega_2\dot{a}_2 &= \mu\delta\Psi_2 i\omega_2 a_2.
 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Откуда после приведения:

$$\begin{cases}
 (1 - \alpha)\Psi_1\dot{a}_1 = \mu \left[\frac{a_1}{2} - (|a_1|^2 + |a_2|^2) a_1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_2 a_1 a_2^* \right] - \frac{\mu\delta\Psi_1}{2} a_1, \\
 (1 - \alpha)\Psi_2\dot{a}_2 = \mu \left[\frac{a_2}{2} - (|a_1|^2 + |a_2|^2) a_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} a_1 a_2 a_1^* \right] - \frac{\mu\delta\Psi_2}{2} a_2.
 \end{cases} \tag{5.2.11}$$

Перейдем далее к действительным амплитудам и фазам по формулам $a_{1,2} = A_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$. Тогда после сокращения на $\exp(i\varphi_{1,2})$:

$$\begin{cases}
 \frac{(1 - \alpha)}{\mu A_1} \Psi_1 (\dot{A}_1 + iA_1\dot{\varphi}_1) = \left[\frac{1}{2} - (|A_1|^2 + |A_2|^2) - \frac{\omega_2}{\omega_1} |A_2|^2 \right] - \frac{\delta\Psi_1}{2}, \\
 \frac{(1 - \alpha)}{\mu A_2} \Psi_2 (\dot{A}_2 + iA_2\dot{\varphi}_2) = \left[\frac{1}{2} - (|A_1|^2 + |A_2|^2) - \frac{\omega_1}{\omega_2} |A_1|^2 \right] - \frac{\delta\Psi_2}{2}.
 \end{cases} \tag{5.2.12}$$

После простых преобразований окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_1 &= \mu\eta_1 \left[1 - (A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2) \right] A_1 / 2, \\
 \dot{A}_2 &= \mu\eta_2 \left[1 - (A_2^2 + \alpha_{21}A_1^2) \right] A_2 / 2, \\
 \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

где $\eta_{1;2} = \sigma_{1;2} \lambda_{1;2}$, $\sigma_{1;2} = \pm \frac{\omega_{1;2}^4}{4} \frac{\omega_{2;1}^2 - 1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$, $\lambda_{1;2} = 1 \left(1 - \frac{\delta}{\zeta} \frac{\Psi_{1;2}}{\Psi_{2;1}} \right)$,

$\alpha_{12;21} = \frac{2\lambda_{2;1}}{\lambda_{1;2}}$ – коэффициенты нелинейной связи мод.

Таким образом, колебания в генераторе происходят на *тех же частотах*, что и в *линейной системе* – фазы постоянны. Это дает возможность исследовать амплитудные уравнения отдельно. Вводя время $\tau = \mu t$ и величину $m_{1;2} = A_{1;2}^2$, имеем весьма распространенную систему [2]:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \mu \eta_2 \left[1 - (m_1 + \alpha_{21} m_2) \right] m_1, \\ \dot{m}_2 &= \mu \eta_1 \left[1 - (m_2 + \alpha_{12} m_1) \right] m_2. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

ГЛАВА 6 КОЛЕБАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С 2.5 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

6.1 Осцилляторы с индуктивной связью

Колебательный процесс в показанной на рис. 39 системе связанных контуров под действием гармонической силы описывается парой уравнений, приведенных ранее с учетом обобщенных внешних сил, действующих в контурах. Обезразмерим эти уравнения для упрощения описания колебаний в системе и сокращения количества управляющих параметров:

$$\begin{array}{l|l}
 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + 2\gamma_1 \frac{dI_1}{dt} + \Omega_1^2 I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d^2 I_2}{dt^2} = F_1(t) & \frac{d^2 I_2}{dt^2} + 2\gamma_2 \frac{dI_2}{dt} + \Omega_2^2 I_2 + \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} = F_2(t) \\
 \Downarrow & \Downarrow \\
 \Omega_1^2 \frac{d^2 I_1}{d(\Omega_1 t)^2} + 2\gamma_1 \Omega_1 \frac{dI_1}{d\Omega_1 t} + & \Omega_1^2 \frac{d^2 I_2}{d(\Omega_1 t)^2} + 2\gamma_2 \Omega_1 \frac{dI_2}{d\Omega_1 t} + \\
 + \Omega_1^2 I_1 + \Omega_1^2 \frac{M}{L_1} \frac{d^2 I_2}{d(\Omega_1 t)^2} = F_1(t) & + \Omega_2^2 I_2 + \Omega_1^2 \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{d(\Omega_1 t)^2} = F_2(t) \\
 \Downarrow & \Downarrow \\
 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d^2 I_2}{dt^2} = -\frac{2\gamma_1}{\Omega_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{F_1(t)}{\Omega_1^2} & \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} I_2 + \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} = -\frac{2\gamma_2}{\Omega_1} \frac{dI_2}{dt} + \frac{F_2(t)}{\Omega_1^2} \\
 \Downarrow & \Downarrow \\
 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{M}{L_2} \frac{d^2 \left(\frac{L_2}{M} I_2 \right)}{dt^2} = & \frac{M}{L_2} \frac{d^2 \left(\frac{L_2}{M} I_2 \right)}{dt^2} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \frac{M}{L_2} \frac{L_2}{M} I_2 + \\
 = -\frac{2\gamma_1}{\Omega_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{F_1(t)}{\Omega_1^2} & + \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} = -\frac{2\gamma_2}{\Omega_1} \frac{M}{L_2} \frac{d \left(\frac{L_2}{M} I_2 \right)}{dt} + \frac{F_2(t)}{\Omega_1^2} \\
 \Downarrow & \Downarrow \\
 \frac{d^2 J_1}{dt^2} + J_1 + \frac{M^2}{L_1 L_2} \frac{d^2 J_2}{dt^2} = -\frac{2\gamma_1}{\Omega_1} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{F_1(t)}{\Omega_1^2} & \frac{d^2 J_2}{dt^2} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} J_2 + \frac{d^2 J_1}{dt^2} = -\frac{2\gamma_2}{\Omega_1} \frac{dJ_2}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{F_2(t)}{\Omega_1^2}
 \end{array}$$

$$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + J_1 + \alpha \frac{d^2 J_2}{dt^2} = -\mu \frac{dJ_1}{dt} + f_1(t) \quad \left| \quad \frac{d^2 J_2}{dt^2} + \zeta J_2 + \frac{d^2 J_1}{dt^2} = -\mu\delta \frac{dJ_2}{dt} + f_2(t) \right.$$

В итоге имеем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_1}{dt^2} + J_1 + \alpha \frac{d^2 J_2}{dt^2} &= -\mu \frac{dJ_1}{dt} + f_1(t), \\ \frac{d^2 J_2}{dt^2} + \zeta J_2 + \frac{d^2 J_1}{dt^2} &= -\mu\delta \frac{dJ_2}{dt} + f_2(t). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Здесь $\Omega_{1;2}^2 = L_{1;2}^{-1} C_{1;2}^{-1}$, $\zeta = \Omega_2^2 / \Omega_1^2$ – парциальные частоты контуров и их отношение, $2\gamma_{1;2} = R_{1;2} / L_{1;2}$ – коэффициенты диссипации, $J_1 = I_1$, $J_2 = L_2 I_2 / M$, $\alpha = M_2^2 / L_1 L_2 < 1$ – коэффициент индуктивной связи контуров, $J_1 = I_1$, $J_2 = L_2 I_2 / M$, $\alpha = M_2^2 / L_1 L_2 < 1$ – отношение декрементов затухания в контурах, $f_1(t) = F_1(t) / \Omega_1^2$, $f_2(t) = L_2 F_2(t) / M \Omega_1^2$.

Будем полагать, что внешние силы $f_{1;2}(t)$ являются гармоническими, и представим их в комплексном виде: $f_{1;2}(t) = \Phi_{1;2} e^{i\Omega t}$. Будем интересоваться вынужденным решением системы (6.1.1), разыскивая его в виде $J_{1;2} = X_{1;2} \exp(i\Omega t)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} -\Omega^2 X_1 e^{i\Omega t} + X_1 e^{i\Omega t} - \alpha \Omega^2 X_2 e^{i\Omega t} &= -i\mu \Omega X_1 e^{i\Omega t} + \Phi_1 e^{i\Omega t} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \Omega^2 + i\mu\Omega) X_1 - \alpha \Omega^2 X_2 &= \Phi_1, \\ -\Omega^2 X_2 e^{i\Omega t} + \zeta X_2 e^{i\Omega t} - \Omega^2 X_1 e^{i\Omega t} &= -i\mu\delta \Omega X_2 e^{i\Omega t} + \Phi_2 e^{i\Omega t} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\Omega^2 X_1 + (\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega) X_2 &= \Phi_2. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Используя для решения системы (6.1.2), например, правило Крамера [103-105], приходим к выражениям для амплитуд колебаний осцилляторов:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Phi_1 & -\alpha\Omega^2 \\ \Phi_2 & \zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \Omega^2 + i\mu\Omega & -\alpha\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega \end{vmatrix}} \Rightarrow \quad (6.1.3)$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{(\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega)\Phi_1 + \alpha\Omega^2\Phi_2}{(1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)(\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega) - \alpha\Omega^4},$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \Omega^2 + i\mu\Omega & \Phi_1 \\ -\Omega^2 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \Omega^2 + i\mu\Omega & -\alpha\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega \end{vmatrix}} \Rightarrow \quad (6.1.4)$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{\Omega^2\Phi_1 + (1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)\Phi_2}{(1 - \Omega^2 + i\mu\Omega)(\zeta - \Omega^2 + i\mu\delta\Omega) - \alpha\Omega^4}.$$

Слева на рис. 41 приведены резонансные кривые $\text{Re}[X_{1,2}]$ при различных силах, действующих на контуры, и коэффициентах связи осцилляторов. Справа на рис. 41 приведены резонансные кривые $\text{Re}[X_{1,2}]$ при различных отношениях парциальных частот осцилляторов.

Резонансные кривые демонстрируют следующие эффекты:

1. Если частота внешней силы Ω близка к одной из нормальных частот осцилляторов, то наступает резонанс.

2. Если частота внешней силы Ω , действующая на 1-й осциллятор, совпадает с *парциальной* частотой 2-го осциллятора Ω_2 , то 1-й осциллятор не колеблется $\text{Re}[X_1]=0$. Это явление называется *динамическим демпфированием*.

3. При воздействии на один осциллятор внешней силы, 2-й будет колебаться так же, как 1-й при воздействии внешней силы на 2-й. Это – *теорема взаимности*.

4. Для возникновения резонанса в связанной системе необходимо, но не достаточно, чтобы частота внешней силы совпадала с одной из собственных частот, рис. 41.

Кроме того, как показано в [2], если в системе присутствует и индуктивная и емкостная связи, то при некотором значении частоты внешней силы один из осцилляторов не колеблется – происходит компенсация связей, и колебания от одного осциллятора не передаются другому.

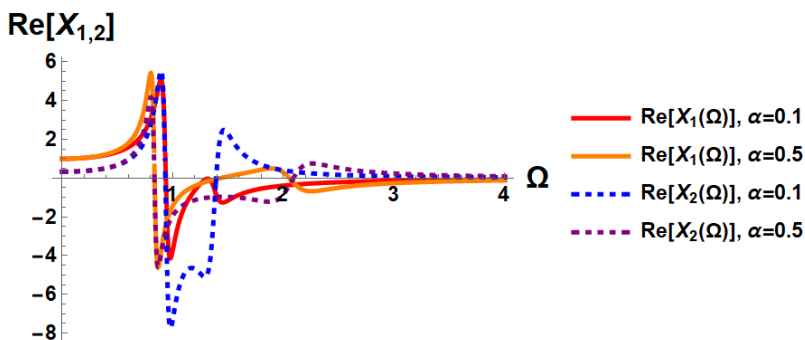


Рисунок 41. Резонансные кривые $\text{Re}[X_1]$ и $\text{Re}[X_2]$ при значениях параметров: $\mu = 0.1$, $\delta = 1.2$, $\zeta = 1.5$ и значениях обобщенных сил: $\Phi_1 = 1$; $\Phi_2 = 0,5$

6.2 Осцилляторы с емкостной связью под действием гармонической сил

Рассмотрим поведение осцилляторов с емкостной (инерционной) (см. рис. 38) связью под действием гармонической внешней силы. В этом случае колебания с использованием метода комплексификации описываются системой:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \Omega_1^2 x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 &= \frac{F_1 e^{i\Omega t}}{m_1}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\gamma_2 \frac{dx_2}{dt} + \Omega_2^2 x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 &= \frac{F_2 e^{i\Omega t}}{m_2}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Будем интересоваться вынужденным решением системы (6.2.1), разыскивая его в виде $x_{1;2} = X_{1;2} \exp(i\Omega t)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2)X_1 - \frac{k}{m_1} X_2 &= \frac{F_1}{m_1}, \\ -\frac{k}{m_2} X_1 + (-\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2)X_2 &= \frac{F_2}{m_2}. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Используя, например, *правило Крамера* [103-105], приходим к выражениям для амплитуд колебаний каждого из осцилляторов, приведенным на рис. 42 (пунктир – второй осциллятор, первый график – $\gamma_{1;2} = 0$).

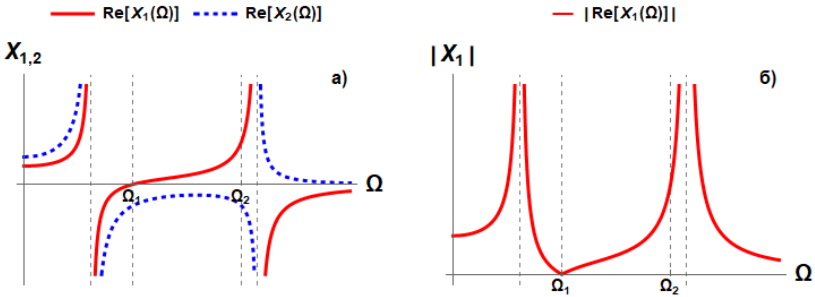


Рисунок 42. Резонансные кривые $\text{Re}[X_1]$ (6.2.3) и $\text{Re}[X_2]$ (6.2.4) при значениях параметров: $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $\Omega_1 = 2$, $\Omega_2 = 4$, $k = 6$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и значениях обобщенных сил: $F_1 = 1$, $F_2 = 0$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1/m_1 & -k/m_1 \\ F_2/m_2 & -\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2 & -k/m_1 \\ -k/m_2 & -\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} \Rightarrow \quad (6.2.3)$$

$$X_1 = \frac{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2\right) \frac{F_1}{m_1} + k \frac{F_2}{m_1 m_2}}{\left(\Omega^2 + 2i\gamma_1 - \Omega_1^2\right) \left(\Omega^2 + 2i\gamma_2 - \Omega_2^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2}}.$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2 & F_1/m_1 \\ -k/m_2 & F_2/m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2 & -k/m_1 \\ -k/m_2 & -\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} \Rightarrow \quad (6.2.4)$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2\right) \frac{F_2}{m_2} + k \frac{F_1}{m_1 m_2}}{\left(\Omega^2 + 2i\gamma_1 - \Omega_1^2\right) \left(\Omega^2 + 2i\gamma_2 - \Omega_2^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

І. Основная Литература

1. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва: Физматлит, 2008. 497 с.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
3. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. *Линейные колебания и волны*. Москва: Физматлит, 2001. 416 с.
4. Кузнецов А.П., Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. *Линейные колебания и волны. Сборник задач*. Москва: Физматлит, 2001. 128 с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. 2-е изд. Москва: Наука, 1981. 914 с.
6. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. *Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики)*. Москва: Физический факультет МГУ, 2001. 144 с.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. Москва: Наука, 1987. 384 с.
8. Ланда П.С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. 2-е изд. Москва: URSS, 2010. 359 с.
9. Ланда П.С. *Нелинейные колебания волны : [динамические модели, собственные и вынужденные колебания и волны, колебания и волны в активных системах. Автоколебания и автоволны, автоколебания в жидкостях и газах и переходы к турбулентности]*. Изд. 2-е, испр. и доп. Синергетика: от прошлого к будущему. Москва: ЛИБРОКОМ, 2010. 551 с.
10. Люисселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике*. Москва: Иностранной литературы, 1963. 352 с.

11. Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. Москва: Наука, 1972. 472 с.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания*. 2-е изд. Москва: УРСС, 2009. 424 с.
13. Ланда П.С. *Автоколебания в распределённых системах*. 2-е изд. Москва: URSS, 2010. 320 с.
14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания*. 3-е изд. Синергетика: от прошлого к будущему. URSS, 2020. 352 с.
15. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны*. 2-е изд. Москва: Радио и связь, 1988. 440 с.
16. Уизем Д. *Линейные и нелинейные волны*. Москва: Мир, 1977. 638 с.
17. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн*. Москва: Наука, 1979. 378 с.
18. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы*. Москва: Наука, 1987. 240 с.
19. Исакович М.А. *Общая акустика*. Москва: Наука, 1973. 496 с.
20. Степанов А.В., Зайцев В.В. *Магнитосферы активных областей Солнца и звёзд*. Москва: Физматлит, 2018. 387 с.
21. Priest E. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. 2014. 576 p.

II. Дополнительная Литература

22. Стрелков С.П. *Введение в теорию колебаний*. 3-е изд., стер. Изд-во "Лань", 2005. 440 с.
23. Ден-Гартог Д.П. *Механические колебания*. Москва: Физматгиз, 1960. 580 с.
24. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва: Наука, 1974. 504 с.

25. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса.* Москва: Наука, 1988. 368 с.
26. Горелик Г.С. *Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику.* Физматлит, 2008. 656 с.
27. Конторович М.И. *Нелинейные колебания в радиотехнике.* Москва: Советское радио, 1973. 320 с.
28. Мандельштам Л.И. *Лекции по колебаниям.* Москва: АН СССР, 1955. 124 с.
29. Баутин Н.Н. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* 2-е изд. Москва: Наука, 1990. 496 с.
30. Блэкьер О. *Анализ нелинейных систем.* Москва: Наука, 1969. 400 с.
31. Блехман И.И. *Синхронизация в природе и технике.* Москва: Ленанд, 2021.
32. Заславский Г.М. *Стохастичность динамических систем.* Москва: Наука, 1984. 271 с.
33. Каплан А.Е., Кравцов Ю.А., Рылов В.А. *Параметрические генераторы и делители частоты.* Москва: Сов. Радио, 1966. 334 с.
34. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и хаотическая динамика.* Москва: Мир, 1984. 324 с.
35. Найфэ А. *Введение в методы возмущений.* Москва: Мир, 1984. 535 с.
36. Журавлев В.Ф. Климов Д.М. *Прикладные методы в теории колебаний.* Москва: Наука, 1988. 328 с.
37. Анищенко В.С. *Сложные колебания в простых системах.* Москва: Наука, 1990. 315 с.

38. Владимиров С.Н., Майдановский А.С., Новиков С.С. *Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем*. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1993. 312 с.
39. Мун Ф. *Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров*. Москва: Мир, 1990. 312 с.
40. Кузнецов С.П. *Динамический хаос*. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
41. Бетчов Р., Криминале В. *Вопросы гидродинамической устойчивости*. Москва: Мир, 1971. 547 с.
42. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. *Динамические модели теории управления*. Москва: Наука, 1985. 378 с.
43. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. *Разделение частот в теории колебаний и волн*. Москва: Наука, 1983. 288 с.
44. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. 6-е изд. Москва: Ленанд, 2017. 416 с.
45. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: Физматлит, 2009. 208 с.
46. Хединг Д. *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*. Москва: Мир, 1965. 291 с.
47. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: МЦНМО, 2018. 344 с.
48. Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: Наука, 1980. 347 с.
49. Постников Л.В., Королев В.И. *Сборник задач по теории колебаний*. Москва: Наука, 1978. 198 с.
50. Пиппард А. *Физика колебаний*. Москва: Высшая школа, 1985. 367 с.
51. Эрроусмит Д., Плейс К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: Мир, 1986. 234 с.

52. Арнольд В.И. *Теория катастроф*. Москва: URSS, 2022. 136 с.
53. Андронов А.А. и др. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. Москва: Наука, 1966. 568 с.
54. Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах*. Москва: Мир, 1968. 432 с.
55. Смит Д.М. *Модели в экологии*. Москва: Мир, 1976. 336 с.
56. Бломберген Н. *Нелинейная оптика*. Москва: Мир, 1966. 501 с.
57. Кляцкин В.И. *Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах*. Москва: Наука, 2000. 437 с.
58. Гаузе Г.Ф. *Борьба за существование*. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 240 с.
59. Тода М. *Теория нелинейных решеток*. Москва: Мир, 1986. 247 с.
60. Вольтера В. *Математическая теория борьбы за существование*. Москва: Мир, 1976. 288 с.
61. Пригожин И.Р. *От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках*. Синергетика: от прошлого к будущему. Москва: Едиториал УРСС, 2016. 304 с.
62. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. Москва: Наука, 2001. 649 с.
63. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. Москва: Наука, 2001. 732 с.
64. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. Москва: Наука, 2001. 243 с.
65. Скотт Э. *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*. Москва: Советское радио, 1977. 324 с.
66. Крауфорд Ф. *Волны*. Москва: Наука, 1974. 411 с.
67. Бхатнагар П. *Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах*. Москва: Мир, 1983. 136 с.

68. Лайтхилл Д. *Волны в жидкостях*. Москва: Мир, 1981. 403 с.
69. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. Москва: Наука, 1981. 197 с.
70. Блохинцев Д.И. *Акустика неоднородной движущейся среды*. Москва: URSS, 2021. 208 с.
71. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов*. Москва: Мир, 1984. 335 с.
72. Гинзбург В.Л. *Распространение электромагнитных волн в плазме*. Москва: URSS. 2015, 688 с.
73. Кринский В.И., Михайлов А.С. *Автоволны*. Москва: Наука, 1984. 375 с.
74. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. Москва: Мир, 1987. 347 с.
75. Свирижев Ю.М. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы*. Москва: Наука, 1987. 359 с.
76. Руденко О.В., Солуян С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики*. Москва, 1975. 234 с.
77. Бриллюэн Л., Пародии М. *Распространение волн в периодических структурах*. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1959. 409 с.
78. Карпман В.И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. Москва: Наука, 1973. 241 с.
79. Лэм Д.Л. *Введение в теорию солитонов*. Москва: Мир, 1984. 295 с.
80. Nakariakov V.M. et al. *TRACE observation of damped coronal loop oscillations: Implications for coronal heating*. Science. 1999. 285: p. 862-864.
81. Hershaw J. et al. *Damped large amplitude transverse oscillations in an EUV solar prominence, triggered by large-scale transient coronal waves*. Astronomy and Astrophysics. 2011. 531: p. A53.

82. Zaqarashvili T.V., Roberts B. *Swing wave-wave interaction: Coupling between fast magnetosonic and Alfvén waves*. Physical Review E, 2002. 66: p. 026401.
83. Moldover M.R., Mehl J.B., Greenspan M. *Gas-filled spherical resonators: Theory and experiment*. The Journal of the Acoustical Society of America, 1986. 79(2): p. 253-272.
84. Pree S., Putterman S., Koulakis J.P. *Acoustic self-oscillation in a spherical microwave plasma*. Physical Review E, 2019. 100: p. 033204.
85. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. *Теория колебаний в радиотехнике*. Москва: Наука, 1984. 319 с.

III. Справочная Литература

86. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Наука, 1976. 576 с.
87. Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка*. Москва: Наука, 1966. 278 с.
88. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Физматлит, 2001. 576 с.
89. Полянин А.Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики*. Физматлит, 2001. 505 с.
90. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики*. Москва: Физматлит, 2002. 457 с.
91. Полянин А.Д., Манжиров А.В. *Справочник по интегральным уравнениям*. Москва: Физматлит, 2003.
92. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*. Москва: Физматлит, 2001. 416 с.

93. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. Москва: Физматлит, 2005, 256 с.
94. Бабич В.М. и др. *Линейные уравнения математической физики*. Москва: Наука, 1964. 368 с.
95. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике*. Москва: Наука, 1977. 136 с.
96. Матвеев Н.М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. СПб. и др.: Лань, 2003, 832 с.
97. Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Лань, 2002. 432 с.
98. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. Москва: Наука, 1970. 512 с.
99. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука, 1978. 400 с.
100. Олвер Ф. *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*. Москва: Наука, 1989. 639 с.
101. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва: URSS, 2009, 352 с.
102. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. Москва: Наука, 1979. 832 с.
103. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. Москва: Лань, 2010. 608 с.
104. Градштейн И.С., Рыжик И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва: Наука, 1975. 1108 с.
105. Корн Т., Корн Г. *Справочник по математике для научных работников и инженеров и учащихся втузов*. Москва: Наука, 1984, 832 с.

106. Прудников А.П., Маричев О.И., Брычков Ю.А. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. Москва: Физматлит, 2003. 632 с.
107. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. Москва: Наука, 1989. 767 с.
108. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*. Москва: Наука, 1968. 344 с.
109. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. Москва: Наука, 1973. 228 с.
110. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва: URSS, 2004. 800 с.
111. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике*. Москва: Лань, 2004. 688 с.
112. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Москва: Физматлит, 2003. 400 с.
113. Владимиров В.С. и др. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. Москва: Физматлит, 2016. 520 с.
114. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления*. Москва: Наука, 1980. 288 с.
115. Арсенин В.Я. *Методы математической физики и специальные функции*. Москва: Наука, 1974. 299 с.

Учебное издание

Завершинский Дмитрий Игоревич

**ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ.
КОЛЕБАНИЯ В ПЛАЗМЕ**

Учебно-методическое пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 07.09.2023. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 9,25.

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.