Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

Ю.Н.Лазарев

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В АТМОСФЕРЕ

Учебное пособие

Самара 1998

УДК 629.782.015.7

Теория и практика решения задач управления движением аэрокосмических аппаратов в атмосфере: Учеб. пособие / Лазарев Ю.Н. Самар.гос.аэрокосм.ун-т. Самара, 1998. 48 с.
ISBN 5-7883-0044-4

В учебном пособии рассматриваются вопросы теории и практики решения задач управления движением аэрокосмических аппаратов в атмосфере. Приводятся теоретические основы метода последовательной линеаризации в объеме, достаточном для его приложения к широкому кругу задач управления движением сложных систем. Приводится математическая модель управляемого движения аэрокосмического аппарата в атмосфере. Рассмотрены примеры применения метода последовательной линеаризации при решении траекторных задач.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области динамики, баллистики и управления движением летательных аппаратов, и может быть использовано при выполнении курсовых, дипломных и учебно-исследовательских работ.

Ил. 12, библиогр.: 17 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева

Рецензенты: д-р техн.наук, проф. В.В.Салмин,
д-р техн.наук, проф. Ю.М.Заболотнов

ISBN 5-7883-0044-4

Предисловие

В настоящее время усилиями технически развитых стран расширяются и углубляются исследования космического пространства с целью его всестороннего использования при решении народнохозяйственных и оборонных задач. В этих условиях значительно возросла важность разработки транспортных космических систем многократного применения.

Определились три основные технические концепции построения многоразовых космических систем: ракетно-космические системы для выведения орбитальных многоразовых кораблей; многоразовые авиационно-космические системы, использующие дозвуковые самолеты-носители и реализующие горизонтальный старт и посадку; многоразовые воздушно-космические системы, реализующие гиперзвуковые скорости движения в атмосфере. Последней ступенью каждой системы является аэрокосмический аппарат - летательный аппарат (ЛА) многоразового применения, способный совершать управляемое движение как в атмосфере, так и в околоземном космическом пространстве и располагающий достаточно большим максимальным значением аэродинамического качества (K_{max}>1) на гиперзвуковых скоростях движения в атмосфере.

Совершенствование наземных и бортовых вычислительных систем позволяет применять при решении задач управления движением ЛА в атмосфере все более сложные и универсальные численные методы, в частности, метод последовательной линеаризации - прямой метод поиска в пространстве управлений. Метод сводится к построению минимизирующей последовательности управлений, требует выполнения большого объема вычислений и реализуется с помощью цифровых вычислительных машин.

В пособии приведены теоретические основы метода последовательной линеаризации, изложенные в объеме, достаточном для его приложения к широкому кругу задач управления движением сложных систем, рассмотрены вопросы применения этого метода при решении прикладных задач управления движением аэрокосмических аппаратов в атмосфере и приведены результаты решения траекторных задач при спуске в атмосфере с орбиты спутника Земли и с траектории выведения в нештатной ситуации, а также при изменении в атмосфере наклонения плоскости орбиты.

I. Постановка задачи управления

Общая задача управления аэрокосмическим аппаратом при движении в атмосфере заключается в определении параметров траектории и характеристик аппарата (задачи навигации и идентификации), формировании управления движением центра масс (задача наведения) и формировании управления движением относительно центра масс (задачи ориентации и стабилизации). В процессе управления задачи навигации и идентификации, наведения, ориентации и стабилизации решаются одновременно. Навигационная информация является необходимой для решения задачи наведения, в результате решения которой формируются управляющие зависимости по каналам управления движением центра масс ЛА. Реализация этих зависимостей осуществляется в результате решения задач ориентации и стабилизации ЛА относительно центра масс.

При разработке систем управления движением аэрокосмических аппаратов задачи навигации и идентификации, наведения, ориентации и стабилизации рассматриваются отдельно. Из общей задачи управления выделим для дальнейшего рассмотрения задачу наведения, от решения которой во многом зависит степень использования возможностей аэрокосмического аппарата при движении в атмосфере, точность управления и надежность выполнения маневров. Отметим, что ошибки решения задач навигации и идентификации, ориентации и стабилизации не должны заметно ухудшать качество управления траекторией, достигаемое при идеальной навигации и стабилизации. В дальнейшем под управлением будем понимать процесс формирования управления движением центра масс ЛА.

Решение задачи управления аэрокосмическим аппаратом проводится в два этапа. На первом этапе до начала процесса управления формируется номинальное управление, обеспечивающее достижение цели управления в соответствии с выбранными моделями движения. На втором этапе во время движения на основе номинального управления формируется командное управление, обеспечивающее выполнение целевой задачи в реальных условиях функционирования системы управления. Как номинальное, так и командное управление движением аэрокосмического аппарата формируется с учетом ограничений на управление, параметры траектории и характеристики конструкции. В пособии рассматриваются вопросы формирования номинального управления, излагаются методы и результаты решения траекторных задач.

Управление движением центра масс аэрокосмического аппарата при движении в атмосфере эффективно осуществляется путем изменения угла атаки, угла скоростного крена и тяги двигательной установки (ДУ). Небольшие изменения угла скольжения и тяга двигателей ориентации не оказывают существенного влияния на траекторию движения в атмосфере.

Общая техническая постановка задачи формулируется следующим образом. Известны характеристики аэрокосмического аппарата, начальные условия движения и цель управления. Требуется сформировать номинальное управление движением в атмосфере по каналам угла атаки, угла скоростного крена и тяги ДУ с учетом ограничений на управление, режимы движения и параметры траектории и оптимизирующее выбранный критерий качества управления.

Рассматриваемая задача управления математически формулируется следующим образом. Задана математическая модель движения в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $f=(f_1,\dots,f_n)$-вектор-функция правых частей размерности n,

$x=(x_1,\dots,x_n)$-вектор фазовых координат размерности n,

$u=(u_1,\dots,u_r)$-вектор управляющих воздействий размерности r.

Требуется определить управление $u(t)$ на отрезке времени $[0,T]$ для системы (1) с начальным условием (2), удовлетворяющее ограничениям на управление

$$u(t) \in U,\ \dot{u}(t) \in \dot{U} \quad \text{при всех } t \in [0,T], \tag{3}$$

ограничениям на функционалы

$$F_j[u(t)] \le 0 \quad (j=1,2,\dots,m) \tag{4}$$

и минимизирующее функционал

$$F_0[u(t)]. \tag{5}$$

Функционалы F_j $(j=0,1,2,\dots,m)$ рассматриваются как неявные зависимости управляющих воздействий $u(t)$, поэтому в общем случае запись $F_j[u(t)]$ выражает принципиальную возможность вычислить F_j по известной зависимости $u(t)$.

2. Модель движения

Вид уравнений движения центра масс аэрокосмического аппарата определяется выбранной системой координат и рассматриваемым составом действующих сил. При исследовании движения в атмосфере удобно использовать геоцентрическую неинерциальную систему координат, связанную с вращающейся Землей (географическую). Будем считать, что аппарат движется над поверхностью, имеющей форму эллипсоида вращения с экваториальным радиусом $R_e = 6378{,}160$ км и полярным радиусом $R_p = 6356{,}863$ км (эллипсоида Красовского), движение происходит под действием силы тяготения, полной аэродинамической силы, силы тяги ДУ и сил, обусловленных неинерциальностью системы отсчета.

Дифференциальные уравнения движения в рассматриваемой системе координат с учетом вращения Земли, нецентральности поля тяготения и при отсутствии ветра в атмосфере, дополненные уравнением изменения массы ЛА, имеют вид [1,2]

$$\dot{V} = -\sigma_x \rho V^2 - g_r \sin\theta + g_z \sin\chi\cos\theta + \frac{P_x}{m} +$$

$$+ R\Omega^2\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\chi),$$

$$\dot{\theta} = \sigma_y \rho V\cos\gamma_a + \left(\frac{V}{R} - \frac{g_r}{V}\right)\cos\theta - \frac{g_z}{V}\sin\chi\sin\theta + \frac{P_y}{Vm} +$$

$$+ 2\Omega\cos\varphi\cos\chi + \frac{R\Omega^2}{V}\cos\varphi(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\sin\chi),$$

$$\dot{\chi} = -\frac{\sigma_y \rho V}{\cos\theta}\sin\gamma_a - \frac{V\cos\theta}{R}\operatorname{tg}\varphi\cos\chi + g_z\frac{\cos\chi}{V\cos\theta} - \frac{P_z}{mV\cos\theta} -$$

$$- 2\Omega(\sin\varphi - \cos\varphi\sin\chi\operatorname{tg}\theta) - \frac{R\Omega^2}{V\cos\theta}\sin\varphi\cos\varphi\cos\chi,$$

$$\dot{R} = V\sin\theta,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{V\cos\theta}{R}\sin\chi,$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V\cos\theta}{R}\frac{\cos\chi}{\cos\varphi},$$

$$\dot{m} = -\beta .$$

Здесь V - скорость аппарата относительно Земли, θ- угол наклона траектории, χ - угол пути, R - величина радиуса-вектора центра масс аппарата, φ - геоцентрическая широта, λ - географическая долгота, m - масса аппарата, β - секундный расход топлива ДУ, ρ - плотность атмосферы, γ_a - угол скоростного крена, $\Omega \approx 0,727 * 10^{-4}$ c^{-1} - угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Радиальная и трансверсальная составляющие вектора гравитационного ускорения $\bar{g}$, лежащего в меридиональной плоскости, с точностью до полиномов Лежандра второго порядка определяются по формулам [3]:

$$g_r = \frac{\mu}{R^2} \left[1+\mu_e\left(\frac{R_e}{R}\right)^2(1-3\sin^2\varphi)\right],$$

$$g_z = -\mu_e\frac{\mu R_e^2}{R^4} \sin 2\varphi,$$

где μ = 398600,4 км^3/с^2 - гравитационная постоянная Земли,

μ_e= 0,00162 - безразмерная постоянная.

Проекции вектора силы тяги ДУ, жестко закрепленной и ориентированной вдоль продольной оси ЛА, вычисляются по формулам

$$P_x = P \cos\alpha,$$

$$P_y = P \sin\alpha \cos\gamma_a,$$

$$P_z = P \sin\alpha \sin\gamma_a,$$

где $P = P_{уд}\beta$ - сила тяги ДУ,

$P_{уд}$- удельная тяга,

α - угол атаки.

Коэффициенты σ_x и σ_y определяются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{C_{xa} S}{2m}, \qquad \sigma_y = \frac{C_{ya} S}{2m},$$

где C_{xa}, C_{ya} - коэффициенты аэродинамической силы лобового сопротивления и аэродинамической подъемной силы, зависящие от угла атаки α, числа Маха M и высоты полета над поверхностью Земли H,

S - характерная площадь аппарата.

Число Маха рассчитывается как отношение воздушной скорости ЛА, которая при отсутствии ветра совпадает со скоростью относительно Земли, и скорости звука на данной высоте:

$$M=V/a,$$

где скорость звука a связана с температурой воздуха T соотношением [3]

$$a=20,0463\sqrt{T}.$$

Высота H над поверхностью Земли, имеющей форму эллипсоида вращения с указанными выше параметрами, вычисляется по формуле:

$$H=R-R_p/\sqrt{1-0,0066934\cos^2\varphi}.$$

Плотность ρ и температура T атмосферы задаются в соответствии со стандартной моделью атмосферы СА-81 [4].

При численном интегрировании уравнений движения вычисляются следующие параметры траектории.

Составляющие вектора перегрузки n в проекциях на связанные продольную x и нормальную y оси ЛА определяются по соотношениям

$$n_x = \frac{P}{g_0 m} + \frac{S}{g_0 m}\frac{\rho v^2}{2}(C_{ya}\sin\alpha - C_{xa}\cos\alpha)$$

$$n_y = \frac{S}{g_0 m}\frac{\rho v^2}{2}(C_{ya}\cos\alpha + C_{xa}\sin\alpha),$$

где $g_0 \approx 9,81 м/с^2$ - гравитационное ускорение на поверхности Земли.

Удельный тепловой поток q_T в критической точке поверхности аппарата с радиусом кривизны $r_{кр}$ рассчитывается по формуле [5]

$$q_т=0,95\ 10^{-7}\sqrt{\frac{\rho}{r_{кр}}}\ V^{3,05}.$$

Скоростной напор q вычисляется по формуле

$$q = \rho V^2/2.$$

Аэродинамическое качество K определяется как отношение

$$K=C_{ya}/C_{xa}.$$

Зависимости от времени угла атаки $\alpha(t)$, угла скоростного крена $\gamma_a(t)$ и секундного расхода топлива маршевой ДУ $\beta(t)$ являются управляющими.

3. Метод последовательной линеаризации

Метод последовательной линеаризации предназначен для формирования приближенно-оптимального управления при наличии ограничений на функционалы задачи и управляющие зависимости. Метод является типичным методом спуска в пространстве управлений и сводится к построению минимизирующей последовательности управлений. Подробное описание метода последовательной линеаризации, а также вопросов, связанных с его численной реализацией, приведены в [6]. Модификация метода последовательной линеаризации, разработки по его применению в задачах формирования управления движением ЛА в атмосфере и результаты решения конкретных задач описаны в /7-11/.

Метод последовательной линеаризации состоит в построении последовательности итераций улучшения управления. На каждой итерации вычисляется малое конечное приращение $\delta u(t)$ опорного управления $u(t)$, позволяющее перейти к новому улучшенному опорному управлению $u(t)+\delta u(t)$. В начале работы метода задается начальное приближение опорного управления $u(t)$, которое затем последовательно улучшается в процессе поиска с целью удовлетворения всем условиям задачи (3) - (5).

Если имеется некоторое опорное управление $u(t)$, то расчет приращения $\delta u(t)$ осуществляется следующим образом.

1. Интегрируется система (1) с опорным управлением $u(t)$. Вычисляются опорное решение $x(t)$ и функционалы задачи F_j $(j=0,1,\dots,m)$, входящие в (4) и (5).

2. Для опорного закона движения $\{u(t),x(t)\}$ вычисляются функциональные производные $\omega^{(j)}(t)$ от функционалов F_j по управлению $u(t)$:

$$\omega^{(j)}(t)=\frac{\partial F_j[u(t)]}{\partial u(t)} \quad (j=0,1,\dots,m).$$

3. Вводится малая окрестность δU опорного управления $u(t)$. При этом должны быть выполнены следующие требования:

во-первых, окрестность δu опорного управления $u(t)$ должна входить в допустимую область изменения управления U, то есть $u(t)+\delta U(t)\in U$;

во-вторых, в окрестности δU приращения функционалов ΔF_j $(j=0,1,\dots,m)$ должны с достаточной точностью описываться формулами первого порядка

$$\Delta F_j \approx \delta F_j[\delta u(t)]=\int_0^T \omega^{(j)}(t)\delta u(t)dt;$$

в третьих, окрестность δU должна быть не слишком малой, чтобы обеспечить быстроту процесса перехода от начального приближения опорного управления к искомому, удовлетворяющему условиям задачи (3) - (5).

4. Определяется приращение $\delta u(t)$, являющееся решением линейного приближения исходной задачи (3) - (5) в окрестности опорного закона движения $\{u(t),x(t)\}$. В соответствии с этим $\delta u(t)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$\delta u(t)\in \delta U \text{ при всех } t\in[0,T], \tag{6}$$

$$F_j[u(t)]+\delta F_j[\delta u(t)]=F_j[u(t)]+\int_0^T\omega^{(j)}(t)\delta u(t)dt\leqslant 0, \quad (j=1,\ldots,m), \tag{7}$$

$$\min_{\delta u(t)} \delta F_0[\delta u(t)]= \min_{\delta u(t)} \int_0^T\omega^{(0)}(t)\delta u(t)dt. \tag{8}$$

5. Проверяется выполнение условий окончания поиска. Если полученное улучшенное управление $u(t)+\delta u(t)$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи (3) - (5), то поиск искомого управления считается законченным. Если условия не выполняются, то рассчитывается следующая итерация улучшения управления, начиная с пункта 1. В качестве опорного принимается улучшенное управление $u(t)+\delta u(t)$.

4. Способ дифференцирования функционалов

Основным инструментом теоретического анализа задач оптимального управления и разработки численных методов их приближенного решения является способ вычисления производных от входящих в постановку задачи функционалов по управлению

$$\omega(t)=\frac{\partial F[u(t)]}{\partial u}.$$

На информации о значениях функциональных производных основан переход к улучшенному управлению при выполнении итерации метода последовательной линеаризации.

Существует процедура [6] дифференцирования функционалов, определенных на траекториях управляемой системы, вида

$$F[u(t)]=\int_0^T\Phi[x(t),u(t)]dt, \tag{9}$$

$$F[u(t)]=\Phi[x(t')], \qquad (10)$$

где Φ - заданная достаточно гладкая функция своих аргументов;

t' - заданная точка на $[0,T]$.

Функционалы вида (9), (10) называются дифференцируемыми в смысле Фреше.

Часто встречающиеся в задачах управления движением функционалы вида

$$F[u(t)]=\max_{t} \Phi[x(t),u(t)], \qquad (11)$$

$$F[u(t)]=\int_{0}^{T}|\Phi[x(t),u(t)]|dt \qquad (12)$$

не имеют производных Фреше. Они дифференцируемы в некотором специальном смысле - по направлениям в функциональном пространстве (по Гато) [6]. При численном решении задач функционалы, дифференцируемые по Гато, заменяются одним или аппроксимируются с помощью специальных процедур несколькими функционалами, дифференцируемыми по Фреше.

Способ дифференцирования функционалов вида (9), (10) сводится к расчету по следующим соотношениям.

Элементы матрицы $\omega(t)$ частных производных m функционалов, дифференцируемых по Фреше по r управляющим воздействиям размерности $r\times m$ вычисляются по формуле

$$\omega(t) = f_u(t)\,\phi(t) + \Phi_u, \qquad (13)$$

где $f_u(t)=f_u[x(t),u(t)]$-сопряженная матрица размерности $r\times n$ частных производных правых частей уравнений (1) по управляющим воздействиям;

Φ_u - матрица размерности $r\times m$ частных производных функций Φ, входящих в выражения для функционалов, по управляющим воздействиям u.

Элементы матрицы сопряженных переменных ϕ размерности $n\times m$ являются решением сопряженной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\phi} = -f_x(t)\,\phi(t) - Y(t), \qquad (14)$$

где $f_x(t)=f_x[x(t),u(t)]$ -сопряженная матрица размерности $n\times n$ частных производных правых частей уравнений (1) по фазовым координатам;

$Y(t)$ - матрица размерности $n\times m$.

Для функционалов вида (9) $Y(t) = \Phi_x(t)$, где Φ_x - сопряженная матрица размерности $n\times m$ частных производных функций Φ по фазовым координатам x. Система уравнений (14) интегрируется справа налево с граничным условием $\phi(T)=0$.

Для функционалов вида (10) $Y(t) = 0$, $\Phi_u = 0$, а система (14) интегрируется справа налево с граничным условием $\phi(t')=\Phi_x(t')$, причем $\phi(t)=0$ при $t'\leqslant t\leqslant T$.

В задачах формирования управления движением аэрокосмических аппаратов в атмосфере большое значение имеют функционалы вида

$$F[u(t)]=\int_0^{t'} \Phi[x(t),u(t)]dt, \tag{15}$$

с помощью которых задаются ограничения на фазовые координаты и режимы движения в любой точке траектории.

Для этих функционалов элементы матрицы функциональных производных и сопряженных переменных вычисляются в соответствии с (13) и (14), причем $Y(t) = \Phi_x(t)$. Система (14) интегрируется справа налево с граничным условием $\phi(t')=0$, причем $\phi(t)=0$ при $t'\leqslant t\leqslant T$.

Таким образом, для дифференцирования функционалов вида (9), (10) и (15) необходимо проинтегрировать слева направо систему уравнений (1) и справа налево сопряженную систему уравнений (14), а также провести сложение, вычитание и перемножение матриц в соответствии с приведенными соотношениями.

5. Конечномерная аппроксимация задачи

Численная реализация метода последовательной линеаризации осуществляется с использованием конечномерной аппроксимации, которая позволяет процесс улучшения управления свести к последовательному решению стандартных задач линейного программирования. Хорошо разработанный и широко применяемый математический аппарат линейного программирования позволяет эффективно решать задачи с ограничениями. Рассмотрим способы редукции непрерывной задачи (6)-(8) к последовательности решений задач линейного программирования конечной размерности.

При выполнении итерации улучшения управления методом последовательной линеаризации исходная задача преобразуется в конечномерную вследствие замены дифференциальных уравнений движения (1) конечно-разностными при их численном интегрировании. В процессе численного интегрирования на отрезке времени $[0,T]$, относящемся к исследуемому участку траектории, располагаются точки t_i $(i=1,2,\ldots,N)$ – узлы, которым соответствует вся необходимая информация для решения линейного приближения задачи (6)-(8).

После расположения узлов t_i вычисляются значения в узловых точках фазовых координат x_i, сопряженных переменных φ_i и функциональных производных ω_i, а также фиксируются значения управляющих зависимостей u_i. В дальнейшем эти величины используются при аппроксимации зависимостей от времени фазовых координат, сопряженных переменных, функциональных производных и управляющих воздействий. Таким образом, непрерывная задача (6)-(8) преобразуется в конечномерную, пригодную для численного решения.

В результате конечномерной аппроксимации на каждой итерации улучшения управления условия (6)-(8) представляются в форме стандартной задачи линейного программирования. Для этого все используемые зависимости, представленные конечным набором значений в узлах, аппроксимируются по определенному правилу.

Процедура расчета итерации улучшения опорного управления при кусочно-линейной аппроксимации зависимостей формируется на основании следующих соотношений.

Управление u(t) представляет собой вектор-функцию размерности r. Пусть каждый компонент $u^{(k)}$ (k=1,2,...,r) опорного управления u(t) аппроксимирован непрерывной кусочно-линейной функцией со значениями $u_i^{(k)}$ в узловых точках t_i (i=1,2,...,N). В дальнейшем индекс "k" не будет указываться, и под управлением u(t) будем понимать или вектор-функцию размерности r или ее k- й компонент.

Тогда k-й компонент управления u(t), представленный в классе кусочно-линейных функций, в каждый момент времени t может быть рассчитан по формуле

$$u(t)=u_i+\frac{u_{i+1}-u_i}{t_{i+1}-t_i}(t-t_i),\quad t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}\quad (i=1,\dots,(N-1)).$$

Возмущение $\delta u(t)$ каждого k-того компонента управления u(t), представленное в том же классе функций, имеет вид

$$\delta u(t)=\delta u_i+\frac{\delta u_{i+1}-\delta u_i}{t_{i+1}-t_i}(t-t_i),\quad t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}\quad (i=1,\dots,(N-1)),$$

где δu_i, δu_{i+1} - постоянные величины, представляющие собой вариации непрерывного кусочно-линейного управления в узловых точках.

При этих допущениях условия (6)-(8) приводятся к следующей задаче линейного программирования относительно неизвестных $\delta u_1,\dots,\delta u_N$:

$$\delta u_i^-\leqslant\delta u_i\leqslant\delta u_i^+\quad (i=1,2,\dots,N), \tag{16}$$

$$F_j+\sum_{i=1}^{N}\delta u_i h_i^{(j)}\leqslant 0\quad (j=1,2,\dots,m), \tag{17}$$

$$\min_{\delta u_i} \sum_{i=1}^{N} \delta u_i h_i^{(0)}, \qquad (18)$$

где F_j – значения функционалов, вычисленные для опорного закона движения $\{u(t),x(t)\}$;

δu_i^+, δu_i^- – малые заданные величины.

Коэффициенты $h^{(j)}$ вычисляются по интегральным соотношениям [7]:

$$\left.\begin{aligned}
h_1^{(j)} &= -\int_{t_1}^{t_2} \omega^{(j)} \frac{t-t_2}{t_2-t_1}\,dt,\\
h_i^{(j)} &= \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \omega^{(j)} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\,dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega^{(j)} \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\,dt, (i=2,3,\ldots,N-1),\\
h_N^{(j)} &= \int_{t_{N-1}}^{t_N} \omega^{(j)} \frac{t-t_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\,dt \quad (j=0,1,\ldots,m).
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Если известны значения функциональных производных $\omega^{(j)}$ в узлах t_i $(i=1,2,\ldots,N)$, то, используя кусочно-линейную аппроксимацию зависимостей $\omega^{(j)}(t)$, можно получить следующие формулы для вычисления коэффициентов $h_i^{(j)}$ [9]:

$$\left.\begin{aligned}
h_1^{(j)} &= (t_2-t_1)\left(\frac{1}{3}\omega_1^{(j)}+\frac{1}{6}\omega_2^{(j)}\right),\\
h_i^{(j)} &= (t_i-t_{i-1})\left(\frac{1}{3}\omega_i^{(j)}+\frac{1}{6}\omega_{i-1}^{(j)}\right)+(t_{i+1}-t_i)\left(\frac{1}{3}\omega_i^{(j)}+\frac{1}{6}\omega_{i+1}^{(j)}\right),\\
&(i=2,\ldots,N-1),\\
h_N^{(j)} &= (t_N-t_{N-1})\left(\frac{1}{3}\omega_N^{(j)}+\frac{1}{6}\omega_{N-1}^{(j)}\right) \quad (j=0,1,\ldots,m).
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

6. Распределение узлов аппроксимации

Возможности вычислительной техники накладывают ограничение на количество узлов, поскольку при численном решении задачи каждому из них соответствует значительный объем хранимой в оперативной памяти вычислительной машины информации и вычислений, связанных с ее обработкой. Поэтому равномерное по времени расположение узлов на отрезке [0,T] для конкретной задачи может оказаться нерациональным. Например, в задачах формирования управления движением аэрокосмического аппарата на различных участках траектории допустима различная точность аппроксимации управляющих зависимостей, что связано с различной эффективностью управления на активных и пассивных участках траектории, а также в плотных и разреженных слоях атмосферы.

Более целесообразно использовать неравномерное по времени расположение узлов: наибольшая концентрация узлов должна быть в местах наиболее интенсивного изменения и наибольшей эффективности управления. Этому требованию отвечает расположение узлов аппроксимации равномерно по характеристической скорости [9]:

$$V^*=\int_0^t (c_1|a_a|+c_2|a_p|+c_3 g_0)dt, \qquad \sum_{i=1}^{3} c_i=1, \qquad (21)$$

где a_a – ускорение от аэродинамических сил,

a_p – ускорение от силы тяги маршевых двигателей,

g_0 – ускорение свободного падения,

c_1, c_2, c_3 – весовые коэффициенты, подбором которых обеспечивается необходимое количество и расположение узлов.

Расположение узлов аппроксимации, равномерное по характеристической скорости (21), обеспечивает более частое их расположение по времени на участках траектории с большими величинами скоростного напора, т.е. там, где выше эффективность управления по каналам углов атаки и скоростного крена и более частое расположение узлов на участках включения ДУ, а также обеспечивает наличие узлов аппроксимации при пассивном движении аппарата в разреженных слоях атмосферы.

Аппроксимированное программное управление u_i "привязано" к временным узлам t_i и зависит от их расположения. На первой итерации улучшения управления, а также в процессе поиска, если расположение узлов меняется на каждой итерации улучшения управления, временные узлы t_i могут не совпадать с необходимой точностью со "скоростными" узлами t_{ci}, расположенными равномерно по характеристической скорости V^*. Совмещение узлов, заключающееся в целенаправленном перемещении узлов t_i в направлении узлов t_{ci}, обеспечивается следующей итерационной процедурой.

1. Выбираются моменты времени t_i, соответствующие начальному расположению узлов аппроксимации на отрезке $[0,T]$, к которым "привязывается" опорное управление $u(t)$ и преобразуется в аппроксимированное управление u_i, $i=1,2,\ldots,N$.

2. Рассчитывается траектория движения путем интегрирования

системы (1) из начальных условий (2) с программой управления u_i. В процессе интегрирования вычисляется характеристическая скорость V^* (21) и запоминаются моменты времени t_{ci}, расположенные равномерно по V^*.

3. Вычисляется величина ε, характеризующая соответствие узлов t_i и t_{ci},

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{ci}|.$$

4. Проверяется выполнение условия $\varepsilon \leq \varepsilon_{доп}$, где $\varepsilon_{доп}$ – заданная точность соответствия узлов.

В случае выполнения условия соответствия узлов моменты времени t_i можно считать расположенными равномерно по характеристической скорости V^* с заданной точностью.

Если это условие не выполняется, то принимается $t_i = t_{ci}$, $u_i = u_{ci}$, и процедура повторяется. Условием обеспечения сходимости процедуры совмещения узлов является достаточно частое расположение узлов на отрезке [0,T].

Если в формулировке задачи присутствуют функционалы вида (10) или (15), то набор узлов t_i следует дополнить узлами в заданных точках t'. При наличии в формулировке задачи функционалов вида (11) следует провести интегрирование системы (1) с управлением u_i, определить моменты t', соответствующие экстремальным значениям функций Ф, и дополнить набор узлов t_i узлами в точках t'.

7. Метод плавающих узлов

Задача формирования управления движением в атмосфере аэрокосмического аппарата методом последовательной линеаризации имеет особенность, связанную с тем, что при небольших количественных изменениях управляющих зависимостей, происходящих в процессе поиска улучшенного управления, могут происходить качественные изменения траектории движения. Обычно это связано с появлением или исчезновением отражений (рикошетов) ЛА от нижних, более плотных слоев атмосферы, что приводит к значительным изменениям продолжительности движения по траектории.

Рассмотренный способ дифференцирования функционалов задачи по управлению позволяет рассчитать значения функциональных производных для заданных моментов времени $t' \in [0,T]$. Зная эти значения, с большой степенью точности можно при изменении управления предсказать изменения функционалов в моменты времени, для которых рассчитывались соответствующие функциональные производные.

Изменение управления на каждой итерации поиска приводит к изменению траектории и, как следствие, к изменению длины отрезка $[0,T]$, а при замене функционалов, дифференцируемых по Гэто, функционалами, дифференцируемыми по Фреше, и к изменению положения моментов времени t'. Поэтому использование полученных этим способом функциональных производных может привести к недостаточной эффективности процесса поиска улучшенного управления.

Метод плавающих узлов [8] обеспечивает рациональное распределение узлов аппроксимации и учет изменения длины отрезка $[0,T]$ в процессе улучшения управления, в том числе и при качественном изменении траектории на каждой итерации поиска.

Для рассмотрения метода плавающих узлов удобно использовать функцию Гамильтона, которая для функционалов (9) и (15) имеет вид

$$H(x,u,\phi)=f(t)\phi(t)+\Phi.$$

Для функционалов (10) гамильтониан записывается в виде

$$H(x,u,\phi)=f(t)\phi(t).$$

Вектор-функция ϕ определяется из решения сопряженной системы вида

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{22}$$

Для функционалов вида (9) $\phi(T)=0$, для функционалов вида (15) $\phi(t')=0$, а для функционалов вида (10) $\phi(t')=\Phi_x(t')$, причем $\phi(t)=0$ при $t'<t\leq T$.

Можно показать [6], что условия (6)-(8) с помощью функции Гамильтона могут быть преобразованы и записаны в следующем виде:

$$\delta u(t)\in \delta U \text{ при всех } t\in[0,T], \tag{23}$$

$$F_j[u(t)]+\delta F_j[\delta u(t)]=F_j[u(t)]+\int_0^T \frac{\partial H^{(j)}}{\partial u}\delta u(t)dt \leq 0, \ (j=1,\dots,m), \tag{24}$$

$$\min_{\delta u} \delta F_0[\delta u(t)]=\min_{\delta u} \int_0^T \frac{\partial H^{(0)}}{\partial u}\delta u(t)dt. \tag{25}$$

Для функционалов вида (11) и (12) гамильтонианы записаны быть не могут, при численном решении эти функционалы заменяются на функционалы других видов.

Значения функций $\frac{\partial H}{\partial u}(t)$, соответствующих функциональным производным $\omega(t)$, определяются по формулам:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\psi + \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \tag{26}$$

для функционалов вида (10) $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$. Таким образом, для определения зависимости $\frac{\partial H}{\partial u}(t)$ необходимо проинтегрировать слева направо систему (1) и справа налево систему (22).

Метод плавающих узлов основан на замене независимой переменной путем отображения отрезка времени $[0,T]$ в отрезок $[0,1]$. Для этого вводится функция $v(\tau)=t$, $\tau\in[0,1]$, $v(0)=0$, $v(1)=T$, которая должна удовлетворять условию монотонности $\frac{dv}{d\tau} \geqslant 0$, исключающему обратный ход времени. Функция v является дополнительным управлением, связанным с расположением узлов аппроксимации.

Система уравнений (1), функционалы (9), (10) и (15) после замены переменной приобретают вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau} f(x,u),$$

$$F[u(t)]=\int_0^1 \Phi[x(t),u(t)]dt,$$

$$F[u(\tau)]=\Phi[x(\tau')],$$

$$F[u(t)]=\int_0^{\tau'} \Phi[x(t),u(t)]dt,$$

где τ' - заданная точка на $[0,1]$.

Вариации функционалов после замены независимой переменной зависят от малых локальных вариаций δu управления u и δv функции замены времени v следующим образом:

$$\delta F[\delta u(\tau),\delta v(\tau)] = \int_0^1 \frac{dv}{d\tau}\frac{\partial H}{\partial u}\delta u(\tau)d\tau + \int_0^1 H(\tau)\frac{d\delta v}{d\tau}(\tau)d\tau.$$

Выражение для вариации функциональной производной приводится к виду

$$\delta F[\delta u(\tau),\delta v(\tau)]=\int_0^1 \frac{dv}{d\tau}\frac{\partial H}{\partial u}\delta u(\tau)d\tau-\int_0^1 \frac{du}{d\tau}\frac{\partial H}{\partial u}\delta v(\tau)d\tau+H(1)\delta v(1).$$

Последнее соотношение позволяет преобразовать условия (23) - (25) к виду

$$\delta u(\tau)\in\delta U,\ \delta v(\tau)\in\delta V \text{ при всех } \tau\in[0,1], \tag{27}$$

$$F_j[u(t)]+\int_0^1 \frac{dv}{d\tau}\frac{\partial H^{(j)}}{\partial u}\delta u(\tau)d\tau-\int_0^1 \frac{du}{d\tau}\frac{\partial H^{(j)}}{\partial u}\delta v(\tau)d\tau+H^{(j)}(1)\delta v(1)\leqslant 0, \tag{28}$$

$$(j=1,\dots,m),$$

$$\min_{\delta u,\delta v}\left[\int_0^1 \frac{dv}{d\tau}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial u}\delta u(\tau)d\tau-\int_0^1 \frac{du}{d\tau}\frac{\partial H^{(0)}}{\partial u}\delta v(\tau)d\tau+H^{(0)}(1)\delta v(1)\right], \tag{29}$$

где δV- малая окрестность функции v.

При численном решении управление $u(\tau)$ и функция $v(\tau)$ задаются набором значений в узловых точках на отрезке [0,1]. Условия (27)-(29) приводятся к задаче линейного программирования относительно неизвестных δu_i и δv_i:

$$\delta u_i^- \leqslant \delta u_i \leqslant \delta u_i^+,\ \delta v_i^- \leqslant \delta v_i \leqslant \delta v_i^+,\ (i=1,\dots,N), \tag{30}$$

$$F_j+\sum_{i=1}^{N} h_i^{(j)}\delta u_i+\sum_{i=2}^{N} p_i^{(j)}\delta v_i \leqslant 0,\quad (j=1,2,\dots,m), \tag{31}$$

$$\min_{\delta u,\delta v}\left[\sum_{i=1}^{N} h_i^{(0)}\delta u_i+\sum_{i=2}^{N} p_i^{(0)}\delta v_i\right], \tag{32}$$

где δu_i^-, δu_i^+, δv_i^-, δv_i^+ - малые заданные величины, $h^{(j)}$, $p^{(j)}$ - коэффициенты, определяемые по интегральным зависимостям, например, [8]:

$$\left.\begin{aligned}
&h_1^{(j)}=\lambda_1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau_2-\tau}{\tau_2-\tau_1}d\tau,\\
&h_i^{(j)}=\lambda_{i-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau-\tau_{i-1}}{\tau_i-\tau_{i-1}}d\tau+\lambda_i\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau_{i+1}-\tau}{\tau_{i+1}-\tau_i}d\tau,\\
&h_N^{(j)}=\lambda_{N-1}\int_{\tau_{N-1}}^{\tau_N}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau-\tau_{N-1}}{\tau_N-\tau_{N-1}}d\tau,
\end{aligned}\right| \tag{33}$$

$$p_i^{(j)}=-\left\{æ_{i-1}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau-\tau_{i-1}}{\tau_i-\tau_{i-1}}d\tau+æ_i\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau_{i+1}-\tau}{\tau_{i+1}-\tau_i}d\tau\right\},$$

$$p_N^{(j)}=-\left\{æ_{N-1}\int\limits_{\tau_{N-1}}^{\tau_N}\omega^{(j)}(\tau)\frac{\tau_N-\tau}{\tau_N-\tau_{N-1}}d\tau\right\}+H^{(j)}(1),$$

$(i=2,\dots,N-1)$, $(j=1,\dots,m)$.

Поиск управления u, функции v, вариаций δu и δv, а также представление производных $\frac{\partial H}{\partial u}$ в классе кусочно-линейных функций позволяет получить конечные соотношения для производных $\frac{du}{d\tau}$, $\frac{dv}{d\tau}$ и коэффициентов $h^{(j)}$ и $p^{(j)}$.

Кусочно-линейные зависимости управления u, функции v, вариаций δu и δv и производных $\frac{\partial H}{\partial u}$ имеют вид:

$$u(\tau)=u_i+\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau_{i+1}-\tau_i}(\tau-\tau_i),\qquad v(\tau)=v_i+\frac{v_{i+1}-v_i}{\tau_{i+1}-\tau_i}(\tau-\tau_i),$$

$$\delta u(\tau)=\delta u_i+\frac{\delta u_{i+1}-\delta u_i}{\tau_{i+1}-\tau_i}(\tau-\tau_i),\ \delta v(\tau)=\delta v_i+\frac{\delta v_{i+1}-\delta v_i}{\tau_{i+1}-\tau_i}(\tau-\tau_i),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\tau)=\omega(\tau)=\omega_i+\frac{\omega_{i+1}-\omega_i}{\tau_{i+1}-\tau_i}(\tau-\tau_i),\ (i=1,2,\dots,(N-1)),$$

где $u_i, v_i, \delta u_i, \delta v_i, \omega_i$ – значения величин в узловых точках τ_i.

Значения производных $\frac{du}{d\tau}$ и $\frac{dv}{d\tau}$ в узловых точках вычисляются по формулам:

$$\left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_i}=æ_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau_{i+1}-\tau_i},\qquad \left.\frac{dv}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_i}=\lambda_i=\frac{v_{i+1}-v_i}{\tau_{i+1}-\tau_i},\ (i=1,2,\dots,(N-1)).$$

Выполнение условия $\frac{dv}{d\tau}\geqslant 0$ обеспечивается при

$\delta v_i^-=(v_i-v_{i-1})/2$ $(i=2,3,\dots,N)$; $\delta v_i^+=(v_{i+1}-v_i)/2$ $(i=2,3,\dots,N-1)$.

Возможность совпадения двух соседних узловых точек позволяет формировать не только непрерывное, но и разрывное кусочно-линейное управление. Малость допустимой окрестности δV обеспечивается заданием ограничений $\delta v_i^-\leqslant\varepsilon_v$, $\delta v_i^+\leqslant\varepsilon_v$, где $\varepsilon_v\ll 1$.

Коэффициенты $h^{(j)}$ и $p^{(j)}$ вычисляются по формулам [12]:

$$\left.\begin{aligned}
&h_1^{(j)}=\lambda_1(\tau_2-\tau_1)(\tfrac{1}{3}\omega_2^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_2^{(j)}),\\
&h_i^{(j)}=\lambda_{i-1}(\tau_i-\tau_{i-1})(\tfrac{1}{3}\omega_i^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_{i-1}^{(j)})+\lambda_i(\tau_{i+1}-\tau_i)(\tfrac{1}{3}\omega_i^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_{i+1}^{(j)}),\\
&h_N^{(j)}=\lambda_N(\tau_N-\tau_{N-1})(\tfrac{1}{3}\omega_N^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_{N-1}^{(j)}),\\
&p_i^{(j)}=-\left\{\varkappa_{i-1}(\tau_i-\tau_{i-1})(\tfrac{1}{3}\omega_i^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_{i-1}^{(j)})+\varkappa_i(\tau_{i+1}-\tau_i)(\tfrac{1}{3}\omega_i^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_{i+1}^{(j)})\right\},\\
&p_N^{(j)}=-\left\{\varkappa_{N-1}(\tau_N-\tau_{N-1})(\tfrac{1}{3}\omega_N^{(j)}+\tfrac{1}{6}\omega_{N-1}^{(j)})\right\}+H^{(j)}(1),\\
&(j=1,2,\ldots,m),\ (i=2,3,\ldots,N-1).
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Использование метода плавающих узлов вместо других способов конечномерной аппроксимации задачи совместно с методом последовательной линеаризации приводит к повышению размерности задачи линейного программирования. Если размерность матрицы коэффициентов h (20) без использования метода плавающих узлов равна $(m+1)\times(r\times N)$, где $(m+1)$ - число функционалов задачи, r - размерность вектора управлений, N - число узловых точек аппроксимации, то при использовании метода плавающих узлов общая размерность матриц h и p (34) увеличивается до $(m+1)\times((r+1)\times N)$.

Однако наибольший объем вычислений при реализации численной процедуры решения задачи линейного программирования на каждой итерации улучшения управления методом последовательной линеаризации производится при численном интегрировании основной (1) и сопряженной (22) систем дифференциальных уравнений, которое производится в одинаковом объеме при использовании всех рассмотренных способов конечномерной аппроксимации.

Поэтому применение метода плавающих узлов незначительно увеличивает время расчетов, заметно увеличивая, однако, необходимый объем оперативной памяти вычислительной машины. Усложнение вычислительной процедуры при конечномерной аппроксимации с использованием метода последовательной линеаризации компенсируется значительным повышением эффективности процесса поиска улучшенного управления, особенно в относительно сложных задачах формирования многоканального управления.

8. Учет ограничений на управление

В сформулированной технической задаче формирования управления движением аэрокосмического аппарата в атмосфере большое значение имеют условия выполнения ограничений на управляющие зависимости по каждому из рассматриваемых каналов управления. Эти ограничения рассматриваются как ограничения на величину и скорость изменения угла атаки, угла скоростного крена и расхода топлива в зависимости от вектора параметров траектории p:

$$u_{min}(p) \leqslant u \leqslant u_{max}(p) \tag{35}$$

$$\dot{u}_{min}(p) \leqslant |\dot{u}| \leqslant \dot{u}_{max}(p). \tag{36}$$

Рассмотрим способы учета ограничений на управление вида (35), (36) при реализации численных методов формирования управления по k-ому каналу u(t) (k=1,...,r) [9,10].

Учет ограничений вида (35) осуществляется на каждой итерации улучшения управления следующим образом.

1. С помощью численных методов и алгоритмов на основе последовательной линеаризации в узлах аппроксимации задачи вычисляются улучшенные значения управляющей зависимости u_i (i =1,...,N) без учета ограничений (35).

2. Последовательно проверяется, начиная с первого узла, выполнение неравенств

$$u_{i\,min} \leqslant u_i \leqslant u_{i\,max} \quad (i=1,\ldots,N).$$

где $u_{i\,min}$ и $u_{i\,max}$, - значения заданных функций $u_{min}(p)$ и $u_{max}(p)$ в узлах аппроксимации.

В узлах, в которых эти ограничения не выполняются, значения управляющих зависимостей заменяются на $u_{i\,min}$ или $u_{i\,max}$.

3. В качестве нового улучшенного опорного управления принимается зависимость, удовлетворяющая ограничениям (35).

Учет ограничений вида (36) осуществляется на каждой итерации улучшения управления следующим образом.

1. В узлах аппроксимации задачи вычисляются улучшенные значения управляющих зависимостей u_i (i =1,...,N) без учета ограничений (36).

2. Последовательно проверяется, начиная с интервала между первым и вторым узлом, выполнение неравенств

$$\dot{u}_{i\,min} < \frac{|u_{i+1}-u_i|}{t_{i+1}-t_i} < \dot{u}_{i\,max} \quad (i=1,\ldots,N-1).$$

Здесь $\dot{u}_{i\,min}$ и $\dot{u}_{i\,max}$ – значения заданных функций $\dot{u}_{min}(p)$ и $\dot{u}_{max}(p)$ в узлах аппроксимации.

На интервалах, на которых эти ограничения не выполняются, производится перерасчет значений управляющих зависимостей в конце интервала. Если $u_{i+1} - u_i > 0$, то перерасчет производится по одной из следующих формул:

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_{i\,max}\,(t_{i+1}-t_i),$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_{i\,min}\,(t_{i+1}-t_i) \quad (i=1,\ldots,N-1).$$

Если $u_{i+1} - u_i < 0$, то перерасчет производится по одной из следующих формул:

$$u_{i+1} = u_i - \dot{u}_{i\,max}\,(t_{i+1}-t_i),$$

$$u_{i+1} = u_i - \dot{u}_{i\,min}\,(t_{i+1}-t_i) \quad (i=1,\ldots,N-1).$$

3. В качестве нового улучшенного управления принимается зависимость, удовлетворяющая ограничениям (36).

Поскольку рассчитанное на итерации неисправленное улучшенное управление принадлежит малой окрестности δU опорного управления, а учет рассматриваемых ограничений не расширяет область δU, то предлагаемые способы учета ограничений на управляющие зависимости не вносят дополнительных погрешностей в процесс поиска управления, удовлетворяющего всем условиям задачи.

Выбранное направление разработки численных методов формирования управления, основанное на построении минимизирующей последовательности управлений, позволяет учитывать также ограничения на управление в виде равенств

$$u = u_{треб}(p), \tag{37}$$

$$\dot{u} = \dot{u}_{треб}(p). \tag{38}$$

Учет ограничений вида (37) осуществляется на каждой итерации улучшения управления следующим образом.

1. С помощью разрабатываемых численных методов на основе последовательной линеаризации в узлах аппроксимации задачи вычисляются улучшенные значения управляющей зависимости u_i $(i=1,\ldots,N)$ без учета ограничений (37).

2. Последовательно проверяется, начиная с первого узла, вы-

полнение равенства (37):

$$u_i = u_{\text{треб}_i}(p) \quad (i=1,\dots,N),$$

где $u_{\text{треб}_i}(p)$ - значения заданной функции $u_{\text{треб}}(p)$ в узлах аппроксимации.

В узлах, в которых это равенство не выполняется, значения управляющих зависимостей заменяются на $u_{\text{треб}_i}(p)$.

3. В качестве нового улучшенного опорного управления принимается зависимость, удовлетворяющая ограничениям (37).

Учет ограничений вида (38) осуществляется на каждой итерации улучшения управления следующим образом.

1. В узлах аппроксимации задачи вычисляются улучшенные значения управляющих зависимостей u_i $(i=1,\dots,N)$ без учета ограничений (38).

2. Последовательно проверяется, начиная с интервала между первым и вторым узлом, выполнение равенств:

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{t_{i+1}-t_i} = \dot{u}_{\text{треб}_i}(p) \quad (i=1,\dots,N-1),$$

где $\dot{u}_{\text{треб}_i}(p)$ - значения заданной функции $\dot{u}_{\text{треб}}(p)$ в узлах аппроксимации.

На интервалах, на которых эти ограничения не выполняются, производится перерасчет значений управляющих зависимостей в конце интервала. Если $u_{\text{треб}_i}(p) > 0$, то перерасчет производится по формуле

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_{\text{треб}_i}(p)\,(t_{i+1}-t_i) \quad (i=1,\dots,N-1).$$

Если $u_{\text{треб}_i}(p) < 0$, то перерасчет производится по формуле

$$u_{i+1} = u_i - \dot{u}_{\text{треб}_i}(p)\,(t_{i+1}-t_i) \quad (i=1,\dots,N-1).$$

3. В качестве нового улучшенного управления принимается зависимость, удовлетворяющая ограничениям (38).

Предложенные способы учета ограничений на управление могут применяться к отдельным участкам траектории. Способы учета ограничений на величину и скорость изменения управляющих зависимостей могут применяться одновременно.

На следующей итерации улучшения управления методом последовательной линеаризации в качестве опорного принимается улучшенное управление, удовлетворяющее наложенным ограничениям.

9. Учет ограничений на параметры траектории

При разработке численных методов формирования управления движением, основанных на построении минимизирующей последовательности управлений, возникают трудности, связанные с ограничениями на режимы движения и фазовые координаты, которые как функционалы задачи не имеют производных Фреше и могут дифференцироваться лишь по направлениям в функциональном пространстве (по Гато). К числу таких ограничений относятся ограничения на максимальные значения скоростного напора, перегрузки и удельного теплового потока, а также ограничения на экстремальные значения фазовых координат и их отклонений от требуемых значений.

Функционалы, соответствующие перечисленным ограничениям, записываются следующим образом:

$$F[u(t)]=\max_{t} \int_{0}^{t} \Phi[x(t),u(t)]dt, \qquad (39)$$

$$F[u(t)]=\max_{t} \Phi[x(t),u(t)]. \qquad (40)$$

Предположим, что для опорного управления максимальное значение функции Ф или ее интеграла достигается на отрезке $[0,T]$ в момент времени t'. Трудность вычисления производных функционалов вида (39) и (40) заключается в том, что при изменении управляющей зависимости $u(t)$ на каждой итерации поиска меняется не только максимальное значение функции Ф или ее интеграла, но и время его достижения t'.

Преобразование исходной задачи в конечномерную позволяет при численном решении аппроксимировать функционалы, дифференцируемые по Гато, несколькими функционалами, дифференцируемыми по Фреше. Процедуры аппроксимации [6] основаны на замене одного функционала вида (40) несколькими функционалами вида (10).

В общем случае такая замена производится неоднозначно. Очевидно, что в результате использования этой методики размерность задачи линейного программирования, к многократному решению которой сводится процесс улучшения управления, существенно возрастает в соответствии с увеличением общего числа рассматриваемых функционалов.

Упростить численную процедуру поиска улучшенного управления в условиях наличия многочисленных ограничений вида (39) и (40) позволяет подход, основанный на замене каждого функционала, дифференцируемого по Гато, только одним функционалом, дифференцируемым по Фреше. Этот подход предполагает тщательный подбор параметров вычислительной процедуры метода последовательной линеаризации, а также, в некоторых случаях, позволяет использовать алгоритмы, ускоряющие процесс поиска управления, удовлетворяющего ограничениям на максимальные значения параметров траектории [9,10].

В соответствии с этим подходом на каждой итерации решения задачи линейного программирования функционалы вида (39) и (40) заменяются соответственно одним функционалом вида (15) или (10). Для этого при численном интегрировании траектории движения вычисляются значения функции Ф или ее интеграла на отрезке $[0,T]$ и фиксируются их максимальные значения и соответствующие этим значениям моменты времени t'.

В зависимости от вида функции Ф используются два способа учета ограничений на максимальные значения контролируемых параметров траектории.

Первый способ реализуется для функционалов вида (39) при их замене на функционал вида (15), а также для функционалов вида (40) в том случае, если функция Ф имеет вид аналитического выражения, явно не зависящего от управления, то есть, если функционал (40) заменяется на функционал вида (10).

В этом случае расчет производных осуществляется в соответствии с рассмотренной методикой дифференцирования функционалов вида (15) или (10). Если значение функционала выходит за пределы назначенного ему ограничения, то каждый компонент вектора управления u_k $(k=1,2,\dots,r)$ заменяется в каждом узле аппроксимации на отрезке времени $[0,t']$ улучшенным по результатам решения задачи линейного программирования (16) - (18) значением в соответствии с величиной и знаком производной в этом узле. Изменение управления u_k на отрезке $[0,t']$ ограничивается величиной малой окрестности δU_k, которая является параметром численного метода решения задачи линейного программирования. В общем случае величина малой окрестности δU_k может быть различной в разных узлах.

Этот способ применяется при работе с функционалами, которые входят в формулировку задачи управления движением аэрокосмического аппарата в атмосфере как ограничения на максимальные значения скоростного напора и удельного теплового потока, а также ограничения на экстремальные значения фазовых координат.

Второй способ реализуется для функционалов вида (40) в том случае, если функция Ф имеет вид аналитического выражения, явно зависящего от управления, то есть, если функционал (40) заменяется на функционал вида

$$F[u(t)]=\Phi[x(t'),u(t')]. \quad (41)$$

Улучшение управления на каждой итерации метода последовательной линеаризации производится с учетом возможности непосредственного воздействия на значение контролируемого функционала путем изменения управления в момент времени t'.

Сначала расчет производных функционалов вида (41) осуществляется в соответствии с рассмотренной методикой дифференцирования функционалов вида (10).

Если значение функционала выходит за пределы назначенного ему ограничения, то, как и в предыдущем случае, каждый компонент вектора управления u_k $(k=1,2,\ldots,r)$ изменяется в каждом узле аппроксимации на отрезке времени $[0,t']$ по результатам решения задачи линейного программирования (16) - (18) в соответствии с величиной и знаком полученных производных функционалов по управлению $u_k(t)$. Изменение управления u_k ограничивается величиной малой окрестности δU_k.

Для узла аппроксимации, соответствующего моменту времени t', компоненты вектора управления изменяются в соответствии со знаком функциональной производной (при численном расчете после проведения конечномерной аппроксимации роль этой производной выполняет соответствующий коэффициент $h^{(j)}$ (19)). Однако допустимое приращение управления по сравнению с величиной малой окрестности δU_k существенно увеличивается. Кроме того, поскольку на следующей итерации улучшения управления момент времени t' может изменить свое положение на отрезке $[0,T]$, то для соседних узлов допустимое приращение управления также увеличивается.

Предложенный способ, во-первых, обеспечивает увеличение скорости изменения функционала за счет более быстрого изменения управления в окрестности экстремального значения функции Φ, во-вторых, позволяет учитывать возможное изменение номера контролируемого узла на следующей итерации поиска из-за изменения управления, в-третьих, предотвращает обратное нежелательное изменение управления при смене номера узла в случае, если знак функциональной производной в контролируемом узле противоположен знаку функциональных производных в соседних узлах.

Этот подход применяется при работе с такими функционалами задачи управления движением аэрокосмических аппаратов, как ограничения на максимальные значения проекций вектора перегрузки на продольную и нормальную связанные оси ЛА.

Эти величины непосредственно зависят от угла атаки α и при отсутствии тяги ДУ определяются следующим образом:

$$n_x = \frac{c_x Sq}{g_0 m}(K\sin\alpha - \cos\alpha),$$

$$n_y = \frac{c_x Sq}{g_0 m}(\sin\alpha + K\cos\alpha).$$

Изменение угла атаки приводит к изменению величин составляющих вектора перегрузки по связанным осям ЛА. Производные составляющих перегрузки в связанных осях по углу атаки имеют вид

$$\frac{\partial n_x}{\partial\alpha} = \frac{Sq}{g_0 m}\left[c_x(K\cos\alpha + \sin\alpha) + \frac{\partial c_x}{\partial\alpha}(K\sin\alpha - \cos\alpha)\right],$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial\alpha} = \frac{Sq}{g_0 m}\left[c_x(\cos\alpha - K\sin\alpha) + \frac{\partial c_x}{\partial\alpha}(\sin\alpha + K\cos\alpha)\right].$$

В общем случае процедура учета каждого из ограничений на максимальные значения контролируемых параметров траектории сводится к выполнению следующих операций, выполняемых на каждой итерации улучшения управления.

1. Интегрируется траектория движения.

Интегрирование не является дополнительным, поскольку выполняется для вычисления значений сразу всех функционалов задачи.

2. Фиксируется время t' и номер n соответствующего этому моменту времени узла, в котором функция Φ или ее интеграл достигает экстремального значения.

3. Применяется способ дифференцирования функционалов вида (10) или (15).

4. Задается значение малой окрестности δU.

5. Решается задача линейного программирования (16) - (18) относительно неизвестных $s_1,\dots,s_N$.

Для функционалов вида (40), которые рассматриваются как функционалы вида (41), дополнительно выполняется следующая операция.

6. В узле с номером n, а также в близлежащих принимается, что значение приращения соответствует максимально возможному. Например, для узлов с номерами n, $n-1$ и $n+1$ принимается

$$s_{n-1} = s_n = s_{n+1} = K_n\,\delta U\,\mathrm{sign}(h_n^{(j)}).$$

где K_{u} ≥ 1 – коэффициент уменьшения допустимой области изменения управления.

7. Формируется улучшенное опорное управление.

Основным параметром процедуры является допустимое значение малой окрестности опорного управления δU. В связи с аппроксимацией функционалов, дифференцируемых по Гато, только одним функционалом, дифференцируемым по Фреше, выбор численного значения этого параметра должен производиться особенно тщательно.

При выполнении пункта 6 дополнительными параметрами процедуры являются число узлов, в которых управление изменяется более быстро, чем в остальных, а также величины коэффициентов K_{u}, которые могут быть различны для разных узлов. Эти параметры процедуры могут изменяться в широких пределах в зависимости от видов ограничений и других условий решения исходной задачи.

Преобразование задачи к конечномерному виду позволяет в зависимости от ее сложности использовать один из следующих приемов фиксирования момента времени t', соответствующего достижению контролируемым параметром траектории своего экстремального значения.

Первый прием заключается в фиксировании момента времени t' после расположения узлов аппроксимации. Этот момент времени выбирается соответствующим узлу с экстремальной величиной функции Φ или ее интеграла. При этом расположение узлов на исследуемом участке траектории производится из соображений, не связанных с проблемами аппроксимации функционалов, дифференцируемых по Гато. В этом случае точность фиксирования положения функционала на отрезке $[0,T]$ определяется частотой расположения узлов аппроксимации.

Второй прием заключается в фиксировании момента времени t' в процессе численного интегрирования траектории движения. В этом случае после расположения основных узлов аппроксимации в множество узлов включается дополнительный, момент времени t' которого соответствует экстремальному значению функции Φ или ее интеграла. В этом случае точность фиксирования положения функционала определяется величиной шага интегрирования траектории движения.

10. Формирование программ управления спуском в атмосфере

Рассмотрим решение следующих задач оптимизации пространственного движения аэрокосмического аппарата при спуске в атмосфере Земли [9].

Задача 1. Найти программы управления углами атаки и крена, максимизирующие боковую дальность спуска при отсутствии ограничений.

Задача 2. Найти программы управления углами атаки и крена, максимизирующие боковую дальность спуска при различных значениях максимальной допустимой температуры конструкции.

Задача 3. Найти программы управления углами атаки и крена, максимизирующие боковую дальность спуска при наличии ограничений на управление, максимальные значения перегрузки, скоростного напора, температуры конструкции и высоты полета после первого отражения аппарата от плотных слоев атмосферы.

Задачи 1 и 2 имеют известные решения принципом максимума. Их формулировки и форма представления результатов соответствуют работе [1]. В этой работе боковой дальностью спуска является конечная широта, поскольку рассматривается спуск с экваториальной орбиты. Задача 3 также является модельной и характеризуется наличием многочисленных ограничений.

Решение всех трех задач проводилось при одинаковых условиях. С целью сравнения результатов расчетов первых двух задач с известными результатами дифференциальные уравнения и начальные условия движения принимались в соответствии с [1], в частности, начальные значения высоты, скорости и угла наклона траектории принимались равными соответственно 95 км, 7,5 км/с и -4°. Конечное значение широты фиксировалось на высоте 10 км.

Параметры атмосферы выбирались из таблицы в зависимости от высоты в соответствии со стандартными значениями [4]. Также таблично задавались аэродинамические характеристики аппарата - значения аэродинамической подъемной силы и силы лобового сопротивления. Максимальное значение аэродинамического качества на гиперзвуковых скоростях полета в атмосфере составляло примерно 1,5. Радиус кривизны поверхности аппарата в критической точке принимался равным 1 м.

Как показали результаты численного моделирования, отличия в модели движения, начальных условиях, аэродинамических характеристиках, вызванные отсутствием в [1] необходимых сведений, не оказали влияния на сопоставимость результатов решения задач 1 и 2..

Учет ограничений на управление и режимы движения при численном решении задач осуществлялся с использованием рассмотренных процедур. В задачах 2 и 3 в качестве функционала-ограничения, соответствующего максимальной температуре конструкции, использовалось максимальное значение удельного теплового потока q_{Tmax} в критической точке, положение которой считалось неизменным при изменении угла атаки.

В задаче 3 на значения управляющих зависимостей и параметров траектории были наложены следующие ограничения. Угол атаки мог принимать значения от 10° до 40°, угол крена по абсолютной величине должен быть меньше 70°. Высота полета после первого отражения от плотных слоев атмосферы должна быть меньше 50 км, проекция перегрузки на нормальную ось связанной системы координат - меньше 4, удельный тепловой поток - меньше 2000 кДж/(м^{2}с), скоростной напор - меньше 20 кН/м^2.

Управление рассчитывалось при следующих условиях. Узлы аппроксимации располагались равномерно по характеристической скорости V^* с шагом 150-300 м/с, при этом число узлов аппроксимации задачи не превышало 50-100. Размеры области δU уменьшались по мере приближения к оптимальной программе управления и составляли по углам атаки и крена от 1° на первых итерациях до 0,01° на последних. Набор узлов t_i обновлялся на каждой итерации, число выполненных итераций не превышало 200.

Решение задач заканчивалось при стабилизации оптимизируемого функционала относительно некоторого значения. Практически это осуществлялось следующим образом. Если за 10 шагов улучшения управления значение конечной широты увеличивалось менее чем на 0,001°, то производился возврат к программам управления, полученным десятью итерациями ранее, и расчет повторялся с другими параметрами вычислительного алгоритма. Если конечная широта не увеличивалась, то последние программы управления принимались за оптимальные. В отдельных случаях с целью подтверждения неулучшаемости полученного управления решение задачи повторялось с другим исходным управлением.

Основные результаты решения задачи 1 приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показаны начальные приближения программ изменения углов атаки и крена (α_0, γ_{a0}) и полученное приближенно-оптимальное управление ($\alpha_{opt}, \gamma_{aopt}$), а также расположение узлов аппроксимации на последней итерации и изменение высоты H и скорости V от времени при реализации приближенно-оптимального управления. На рис. 2 для оптимальной траектории изображены зависимости от времени широты φ, долготы λ и угла пути χ.

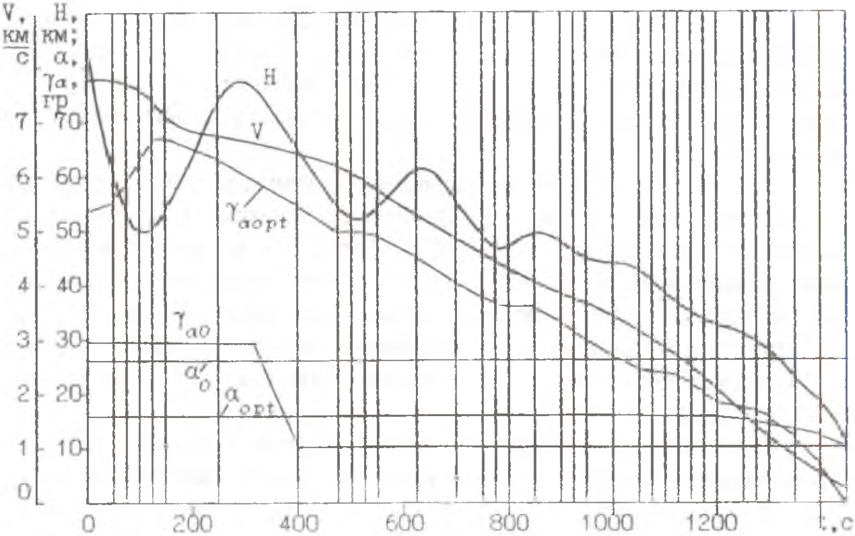

Рис. 1.

Программы управления и изменение высоты и скорости по времени

Из сравнения результатов решения задачи с известными следует, что приближенно-оптимальное управление (рис.1) близко к полученному принципом максимума (рис.2.2,а [1]). Совпадает также характер изменения параметров обеих траекторий (рис.2 и рис.2.2,б [1]). Отметим заметное отличие полученного управления $(\alpha_{opt}, \gamma_{aopt})$ от его начального приближения (α_0, γ_{a0}).

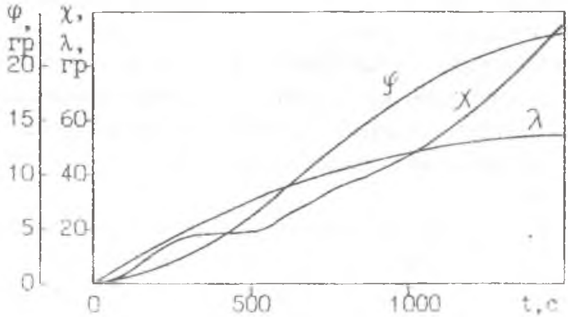

Рис. 2. Изменение широты, долготы и угла пути по времени

В результате решения задачи 2 получены приближенно-оптимальные программы углов атаки и крена (рис. 3), повторяющие характер оптимальных программ, построенных с помощью принципа максимума (рис. 2.22 [1]).

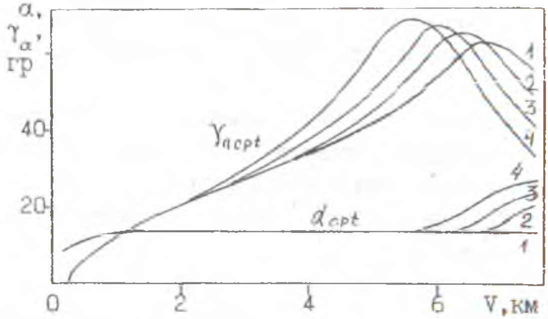

Рис. 3. Влияние ограничения по удельному тепловому потоку на оптимальные программы углов атаки и крена:
1-без ограничения, 2 -ограничение $q_{т1доп}$, 3-ограничение $q_{т2доп}$, 4-ограничение $q_{т3доп}$, $q_{т1доп} > q_{т2доп} > q_{т3доп}$

На рис. 4 показана зависимость максимальной конечной боковой дальности спуска $\varphi_{к_{max}}$ от допустимых значений удельного теплового потока $q_{тдоп}$ в критической точке аппарата. Результаты численного моделирования показали, что с увеличением допустимого значения удельного теплового потока максимально достижимая боковая дальность стремится к значению, соответствующему движению аппарата с максимальным значением аэродинамического качества (программы 1, рис. 3).

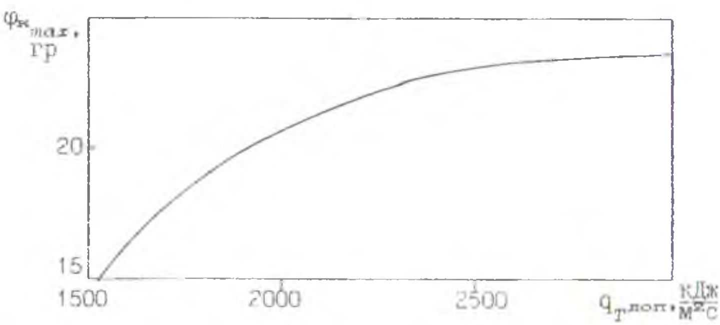

Рис. 4. Зависимость максимальной боковой дальности от допустимого значения удельного теплового потока

При решении задачи 3 в качестве начального приближения программ управления были приняты постоянные значения углов атаки α_o и крена γ_{ao}, равные соответственно 25° и 50°. Как показали расчеты, данные программы не обеспечивают выполнение ограничений на высоту полета после первого отражения от плотных слоев атмосферы и на скоростной напор, при этом конечная боковая дальность спуска составляет 9°.

В результате решения задачи 3 получены приближенно-оптимальные программы изменения углов атаки и крена, обеспечивающие наибольшее значение боковой дальности спуска, равное примерно 12°, при выполнении всех заданных ограничений на управление и параметры траектории.

На рис. 5 показаны начальные приближения программ изменения углов атаки и крена (α_o, γ_{ao}), полученное приближенно-оптимальное управление (α_{opt}, γ_{opt}), а также соответствующие им зависимости высоты H_o и H_{opt} от времени. Из-за большого количества узлов аппроксимации их положение на рисунке не показано.

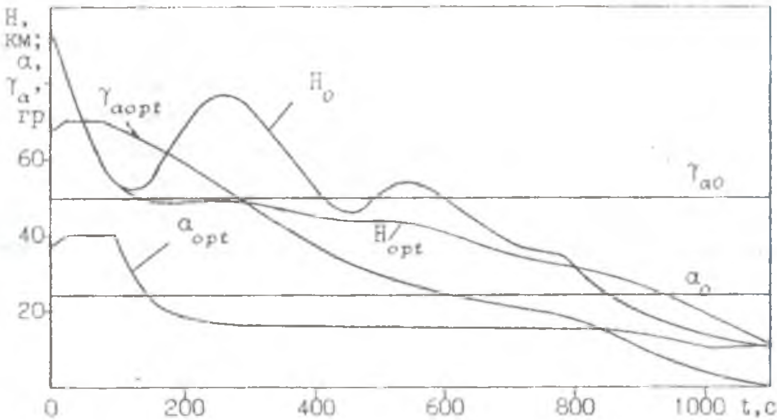

Рис. 5. Программы управления и изменение высоты по времени

II. Оптимизация управления при изменении в атмосфере наклонения плоскости орбиты

Рассмотрим маневр поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата, находящегося на низкой околоземной орбите [12]. Траектория маневра включает в себя атмосферный участок, на котором под действием аэродинамических сил происходит поворот плоскости орбиты. Управление осуществляется изменением углов атаки α, скоростного крена γ_a и секундного расхода топлива β, от которого зависит тяга двигателя.

В [1,13-15] рассмотрены трехимпульсные маневры поворота плоскости орбиты с атмосферным участком. Импульсная структура маневра позволила применить принцип максимума [16] в качестве теоретической основы формирования двухканального (по углам атаки и крена) оптимального управления. Получены оптимальные траектории, состоящие из участков движения по границам и внутри области ограничений в соответствии с принципом максимума. В настоящей работе при оптимизации трехканального управления используются численные методы на основе последовательной линеаризации, позволяющие формировать оптимальные траектории с протяженными активными участками.

Оптимизация управления по углам атаки и крена проводилась для атмосферного участка поворота плоскости орбиты. Критерием оптимальности являлось конечное значение скорости. Максимизация этого показателя равнозначна минимизации потерь на сопротивление движению в атмосфере.

Момент времени T фиксировался после отражения аппарата от плотных слоев атмосферы при выполнении условия достижения условной границы атмосферы ($H_к=H_{треб}=100$ км, $\Delta H_{доп}=0{,}1$ км) или равенства нулю угла наклона траектории ($\theta_к=\theta_{треб}=0$, $\Delta\theta_{доп}= 0{,}01^\circ$). Выполнение одного из двух последних условий использовалось для окончания интегрирования, причем выполнение другого условия при этом не контролировалось.

Расчет затрат топлива, необходимых для перевода аппарата на конечную орбиту, производился по аналитическим соотношениям в предположении импульсного характера приложения тяги.

Задача 4. Найти программы управления углами атаки и крена, максимизирующие конечную скорость при наличии ограничений на угол атаки и на отклонение конечного значения угла курса от требуемого значения, т.е. найти

$$(\alpha(t),\gamma_a(t))=\underset{\alpha,\gamma_a}{\operatorname{argmax}}(V(T))$$

при условиях

$$\alpha_{min}\leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max},\ \Delta\chi_к-\Delta\chi_{доп}\leqslant 0,$$

$$\Delta H_к-\Delta H_{доп}\leqslant 0,\ \Delta\theta_к-\Delta\theta_{доп}\leqslant 0.$$

На рис. 6 показаны полученное оптимальное управление (α,γ_a), удовлетворяющее условиям задачи, а также соответствующие ему зависимости высоты H и удельного теплового потока в критической точке аппарата $q_т$ от времени. Аппарат потерял 10% начальной скорости. Затраты топлива, необходимые для завершения маневра, составляют 26% от начальной массы аппарата.

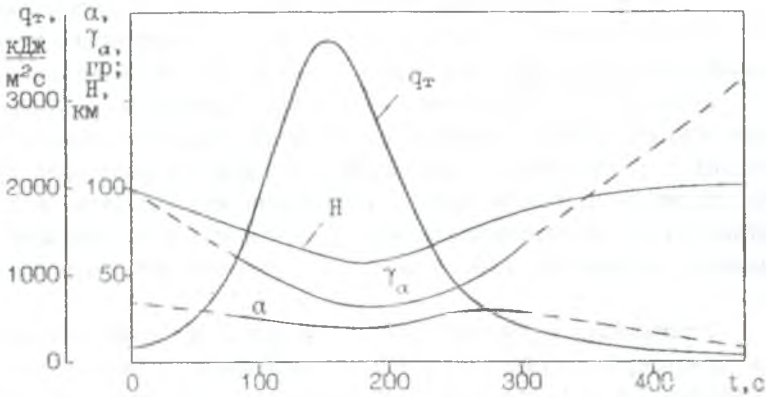

Рис. 6. Программы управления и зависимости высоты и удельного теплового потока от времени

Задача 5. Найти программы управления углами атаки и крена, максимизирующие конечную скорость при наличии ограничений на угол атаки, на отклонение конечного значения угла курса от требуемого значения и максимальный удельный тепловой поток в критической точке аппарата, т.е. найти

$$(\alpha(t),\gamma_\alpha(t)) = \underset{\alpha,\gamma_\alpha}{\mathrm{argmax}}\ (V(T))$$

при условиях

$$\alpha_{min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max}, \qquad \Delta\chi_к - \Delta\chi_{доп} \leqslant 0, \qquad q_{Tmax} - q_{Tдоп} \leqslant 0,$$

$$\Delta H_к - \Delta H_{доп} \leqslant 0, \qquad \Delta\theta_к - \Delta\theta_{доп} \leqslant 0.$$

Результаты решения приведены на рис. 7, описание которого соответствует описанию рис. 6. Скорость аппарата уменьшилась на 12%. Затраты топлива, необходимые для завершения маневра, составляют 30% от начальной массы аппарата.

Сравнение результатов оптимизации двухканального управления на атмосферном участке траектории с известными [1,13-15] показывает их идентичность. Отличие управления в начале и конце траектории связано с расположением этих участков в разреженных слоях атмосферы, где изменение управляющих зависимостей $\alpha(t)$ и $\gamma_a(t)$ практически не влияет на движение аппарата. На всех рисунках края управляющих зависимостей, относящиеся к этим участкам траектории, изображены штриховой линией.

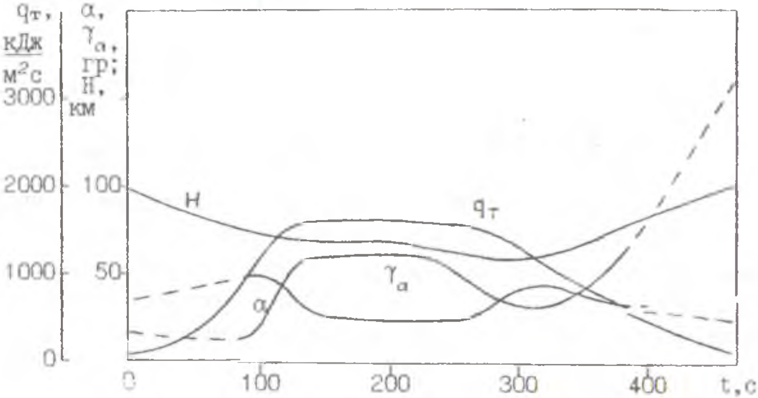

Рис. 7. Программы управления и зависимости высоты и удельного теплового потока от времени

Оптимизация управления по углам атаки и крена и по секундному расходу топлива обеспечивает возвращение аэрокосмического аппарата на конечную орбиту спутника Земли после поворота ее плоскости в атмосфере с наименьшими затратами. В качестве критерия оптимальности рассматривалось конечное значение массы аппарата, которое требовалось максимизировать.

Момент времени T фиксировался после отражения аппарата от плотных слоев атмосферы при выполнении условия достижения требуемой высоты конечной орбиты ($H_к=H_{треб}=200$ км, $\Delta H_{доп}=0{,}1$ км) или требуемого угла наклона траектории ($\theta_к=\theta_{треб}=0$, $\Delta\theta_{доп}=0{,}01^\circ$). В отличие от задач 4 и 5, при выполнении одного из условий выполнение другого также контролировалось, т.е. одно из условий являлось критерием окончания маневра, а другое – одним из функционалов, причем в процессе численного решения их роли могли неоднократно меняться. Требуемое конечное значение скорости и его допустимое отклонение принимались равными: $V_{треб}=7400$ м/с; $\Delta V_{доп}=5$ м/с. Отметим, что в качестве начального приближения программы управления секундным расходом топлива принималось значение, равное нулю, что соответствует пассивному движению аппарата.

Задача 6. Найти программы управления углами атаки и крена, и также секундного расхода топлива, максимизирующие конечную массу аппарата при наличии ограничений на угол атаки, секундный расход и на отклонения конечных значений угла курса, высоты, скорости и угла наклона траектории от требуемых значений, т.е. найти

$$(\alpha(t),\gamma_a(t),\beta(t)) = \underset{\alpha,\gamma_a,\beta}{\operatorname{argmax}}\ (m(T))$$

при условиях

$$\alpha_{min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{max}, \quad \Delta\chi_к - \Delta\chi_{доп} \leqslant 0,$$

$$\Delta V_к - \Delta V_{доп} \leqslant 0, \quad \Delta H_к - \Delta H_{доп} \leqslant 0, \quad \Delta\theta_к - \Delta\theta_{доп} \leqslant 0.$$

На рис. 8 показаны полученное оптимальное управление (α,γ_a,β), удовлетворяющее условиям задачи, а также соответствующие ему зависимости высоты H и удельного теплового потока в критической точке аппарата $q_т$ от времени. Затраты топлива на проведение маневра составили 24% от начальной массы аппарата.

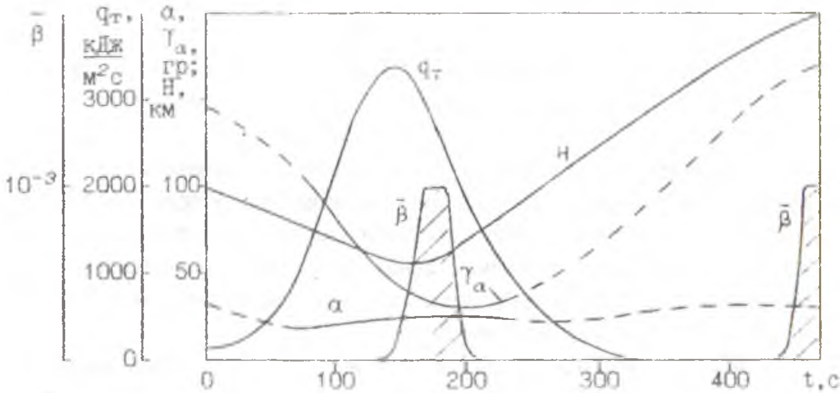

Рис. 8. Программы управления и зависимости высоты и удельного теплового потока от времени

Задача 7. Найти программы управления углами атаки и крена, а также секундного расхода топлива, максимизирующие конечную массу аппарата при наличии ограничений на угол атаки, секундный расход топлива, удельный тепловой поток в критической точке и на отклонения конечных значений угла курса, высоты, скорости и угла наклона траектории от требуемых значений, т.е. найти

$$(\alpha(t), \gamma_a(t), \beta(t)) = \underset{\alpha, \gamma_a, \beta}{\operatorname{argmax}} (m(T))$$

при условиях

$$\alpha_{min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{max}, \quad \Delta\chi_к - \Delta\chi_{доп} \leqslant 0, \quad \Delta V_к - \Delta V_{доп} \leqslant 0,$$

$$q_{T max} - q_{T доп} \leqslant 0, \quad H_к - \Delta H_{доп} \leqslant 0, \quad \Delta\theta_к - \Delta\theta_{доп} \leqslant 0.$$

Результаты решения приведены на рис. 9, описание которого соответствует описанию рис. 8. Затраты топлива на проведение маневра составили 29% от начальной массы аппарата.

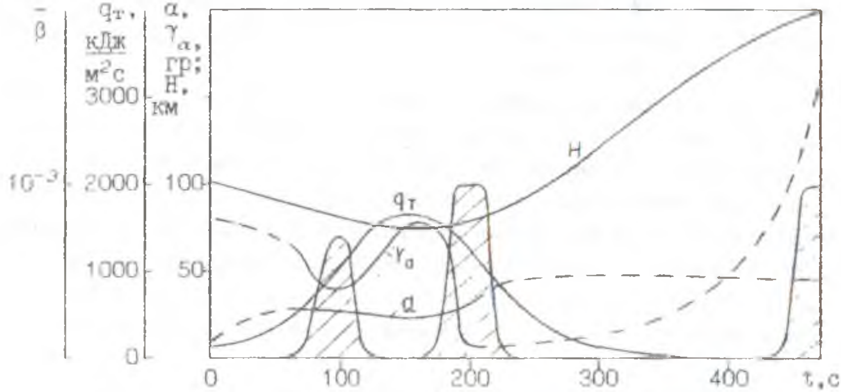

Рис. 9. Программы управления и зависимости высоты и удельного теплового потока от времени

Анализ полученных результатов показывает, что для двухканального и трехканального управления затраты топлива на совершение маневра возрастают пропорционально значению ограничения на удельный тепловой поток.

Оптимизация трехканального управления приводит к меньшим ожидаемым затратам топлива на совершение всего маневра по сравнению с оптимизацией двухканального управления.

Сравнение результатов решения задач 6 и 7 показывает, что введение ограничения на удельный тепловой поток приводит к необходимости трехкратного включения тяги (в отличие от двухкратного в импульсной постановке): первый импульс тяги расходуется на доразгон аппарата при входе в плотные слои атмосферы для поддержания его на больших высотах, второй - при выходе из плотных слоев для подъема на высоту конечной орбиты, а третий - на увеличение скорости до орбитальной.

12. Области достижимости и управление движением в нештатной ситуации

Рассматриваемая нештатная ситуация связана с прекращением выведения аэрокосмического аппарата на орбиту спутника Земли [11]. Предполагается, что после отделения от ракеты-носителя или внешнего топливного бака аэрокосмический аппарат совершает автономный полет. Целью управления является приведение к началу участка предпосадочного маневрирования или в область параметров движения, в которой возможно срабатывание средств спасения экипажа. Управление движением центра масс осуществляется изменением углов атаки и скоростного крена.

Исследование нештатной ситуации проводится в три этапа. Сначала для известных начальных условий движения строятся области достижимости на поверхности приведения. На этом этапе изучаются предельные маневренные возможности аэрокосмического аппарата в сложившейся ситуации. Затем формируется номинальное управление, обеспечивающее приведение аэрокосмического аппарата в заданную область фазовых координат в расчетных условиях. На последнем этапе моделируется командное управление в условиях действия возмущений.

В решенных модельных задачах считалось, что траектория выведения совпадает с плоскостью экватора. В качестве объекта управления рассматривался аэрокосмический аппарат типа орбитального корабля транспортной космической системы с максимальным значением аэродинамического качества на гиперзвуковых скоростях движения в атмосфере, равным 2,5, и радиусом кривизны критической точки поверхности 1 м. Параметры атмосферы соответствовали стандартным значениям [4]. В модели движения учитывалась несферичность поля тяготения Земли и ее вращение вокруг собственной оси.

Начальный момент времени $t_0=0$ для траектории возвращения соответствовал 375 секунде выведения орбитального корабля транспортной космической системы Space Shuttle [5]. После дополнения значений скорости, угла наклона траектории и высоты [5] значениями угла курса, боковой и продольной дальностей, соответствующими модельным условиям, получен следующий набор начальных условий: скорость $V_0=5000$ м/с, угол наклона траектории $\theta_0=-2°$, угол курса $\chi_0=0$, высота $H_0=120$ км, боковая дальность $D_0=0$ и продольная дальность $L_0=0$.

Поверхностью приведения являлась сфера с центром в центре Земли, проходящая на высоте 20 км над экватором.

На управление накладывались ограничения: угол атаки мог принимать значения от $\alpha_{min}=10^{\circ}$ до $\alpha_{max}=40^{\circ}$, а угол скоростного крена по абсолютной величине не мог превышать $\gamma_{\alpha max}=80^{\circ}$.

При численном решении модельных задач методом последовательной линеаризации узлы аппроксимации располагались равномерно по характеристической скорости [2] с шагом 150 м/с при числе узлов около 50. Набор узлов аппроксимации обновлялся на каждой итерации улучшения управления. Использовалась кусочно-линейная аппроксимация программ изменения углов атаки и крена, зависимостей фазовых координат и функциональных производных от времени. Размеры области допустимых значений приращений при формировании номинального управления уменьшались по мере приближения к оптимальным программам и составляли по углу атаки от $0{,}2^{\circ}$ на первых итерациях до $0{,}01^{\circ}$ на последних, по углу скоростного крена - от $0{,}5^{\circ}$ до $0{,}02^{\circ}$, при формировании командного управления размеры области допустимых значений приращений по обоим каналам принимались равными $0{,}2^{\circ}$.

Построение областей достижимости выполнено в результате решения задач максимизации конечной боковой дальности $D_к$ при различных требуемых значениях конечной продольной дальности $L_к$, а также максимизации и минимизации конечной продольной дальности $L_к$ при различных требуемых значениях конечной боковой дальности $D_к$. Оптимизационные задачи решались как без учета ограничений на режимы движения, так и с учетом ограничений на максимальные значения нормальной перегрузки n_y, удельного теплового потока q_T в критической точке аппарата и скоростного напора q.

Области достижимости построены после решения следующих задач оптимального управления.

Задача 8. Найти $(\alpha(t),\gamma_{\alpha}(t)) = \underset{\alpha,\gamma_{\alpha}}{\operatorname{argmax}}\,(D_к)$

без и при наличии ограничения на продольную дальность

$$|L_к - L_{треб}| \leqslant \Delta L_{доп}.$$

Задача 9. Найти $(\alpha(t),\gamma_{\alpha}(t))= \underset{\alpha,\gamma_{\alpha}}{\operatorname{argmax}}\,(L_к)$ и

$$(\alpha(t),\gamma_{\alpha}(t))= \underset{\alpha,\gamma_{\alpha}}{\operatorname{argmin}}\,(L_к)$$

без и при наличии ограничения на боковую дальность

$$|D_к - D_{треб}| \leqslant \Delta D_{доп}.$$

Требовалось учесть ограничения на управление

$$\alpha_{min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max}, \qquad |\gamma_a| \leqslant \gamma_{amax},$$

а также решить задачи как без учета ограничений на режимы движения, так и с учетом одного из следующих условий

$$n_{ymax} - n_{y\,доп} \leqslant 0, \quad q_{Tmax} - q_{T\,доп} \leqslant 0, \quad q_{max} - q_{доп} \leqslant 0.$$

Допустимые значения параметров траектории, являющиеся ограничениями на режимы движения, принимались следующими: для нормальной перегрузки $n_{y\,доп}=2,5$ и $n_{y\,доп}=4,5$, для удельного теплового потока $q_{T\,доп}=1000$ кДж/(м^{2}с), для скоростного напора $q_{доп}=20$ кН/м^2. Требуемые значения продольной $L_{треб}$ и боковой $D_{треб}$ дальностей задавались в пределах зон достижимости с интервалом 500 км, а их допустимые отклонения $\Delta L_{доп}$ и $\Delta D_{доп}$ принимались равными 1 км.

Вследствие симметричности области достижимости относительно экватора формировались программы управления, обеспечивающие достижение крайних точек лишь в северном полушарии. Для достижения крайних точек в южном полушарии в программах управления углом крена необходимо изменить знаки на противоположные.

При построении областей достижимости первой рассчитывалась точка с максимальной продольной дальностью. В качестве начального приближения принималось постоянное значение угла атаки, равное 15°, и угла крена, равное нулю. Начальные приближения программ управления остальных расчетных точек соответствовали оптимальным программам управления, обеспечивающим достижение соседних точек границы области достижимости.

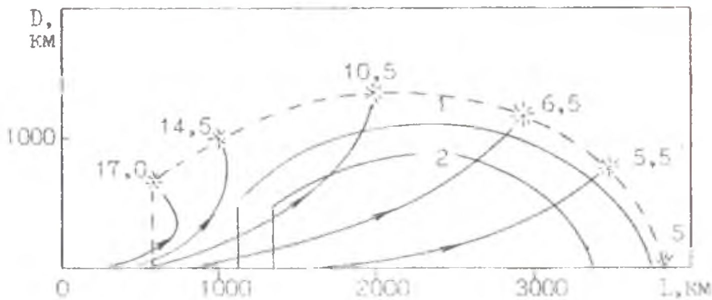

Рис. 10. Области достижимости и трассы полета

На рис. 10 и 11 штриховой линией показана область достижимости на сфере приведения при отсутствии ограничений на режимы движения. Около отмеченных звездочками точек стоят числа, соответствующие на рис. 10 максимальным значениям нормальной перегрузки, а на рис. 11–максимальным значениям скоростного напора в кН/м^2 (верхнее число) и удельного теплового потока в кДж/(м^{2}с) на траекториях, приводящих в эти точки.

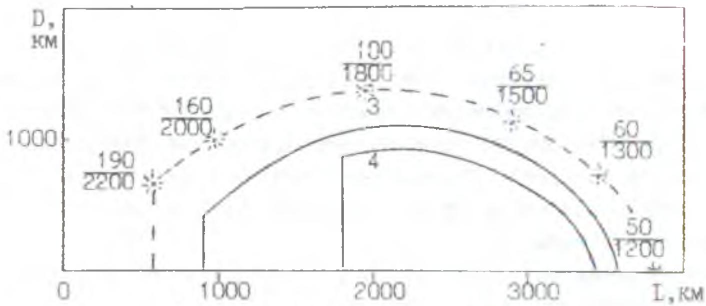

Рис. 11. Области достижимости

Сплошными линиями показаны области достижимости при наличии ограничений на нормальную перегрузку (линии 1 и 2, соответствующие значениям допустимой нормальной перегрузки 4,5 и 2,5, рис. 10), удельный тепловой поток (линия 3, рис. 11) и скоростной напор (линия 4, рис. 11). Кроме этого, на рис. 10 показаны проекции на сферу приведения оптимальных траекторий, приводящих в отмеченные звездочками точки.

Построение областей достижимости с учетом различных ограничений на текущие параметры движения свидетельствует о принципиальной возможности приведения аэрокосмического аппарата в любую точку поверхности внутри области достижимости. Для выполнения предпосадочного маневрирования с последующей посадкой на взлетно-посадочную полосу или для выполнения условий срабатывания специальных средств спасения экипажа необходимо удовлетворение заданным требованиям к конечным значениям фазовых координат.

С целью подтверждения возможности выполнения маневра, обеспечивающего приведение аэрокосмического аппарата в заданную область конечных значений фазовых координат, решена задача формирования номинального двухканального управления в рассматриваемой нештатной ситуации.

Задача 10. Найти

$$(\alpha(t), \gamma_a(t))$$

с учетом ограничений на управление

$$\alpha_{min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{max}, \qquad |\gamma_a| \leqslant \gamma_{amax}$$

и при наличии ограничений на терминальные условия

$$|V_к - V_{треб}| \leqslant \Delta V_{доп}, \quad |\theta_к - \theta_{треб}| \leqslant \Delta\theta_{доп}, \quad |\chi_к - \chi_{треб}| \leqslant \Delta\chi_{доп}$$

$$|L_к - L_{треб}| \leqslant \Delta L_{доп}, \quad |D_к - D_{треб}| \leqslant \Delta D_{доп}.$$

В качестве терминальных значений скорости и угла наклона траектории приняты величины, близкие к тем, которые обеспечивают после выполнения предпосадочного маневрирования приземление аэрокосмического аппарата. Терминальные значения угла курса, продольной и боковой дальности заданы из условия нахождения трассы внутри области достижимости.

Ограничения на терминальные условия движения задавались следующими значениями: $V_{треб}$= 500 м/с, $\Delta V_{доп}$= 20 м/с, $\theta_{треб}$= -10°, $\Delta\theta_{доп}$= 1°, $\chi_{треб}$= 90°, $\Delta\chi_{доп}$= 15°, $D_{треб}$= 640 км, $\Delta D_{доп}$= 20 км, $L_{треб}$= 2560 км, $\Delta L_{доп}$= 20 км.

На рис. 12 приведены основные результаты формирования номинального управления в рассматриваемой нештатной ситуации: показаны полученные программы номинального управления ($\alpha_{ном}, \gamma_{a\,ном}$) и соответствующая им зависимость высоты H от времени t. Расчетные конечные значения фазовых координат находятся внутри заданной допустимой области конечных параметров движения: $V_к$=484 м/с, $\theta_к$=-10,7°, $\chi_к$=104°, $D_к$=638 км, $L_к$=2578 км.

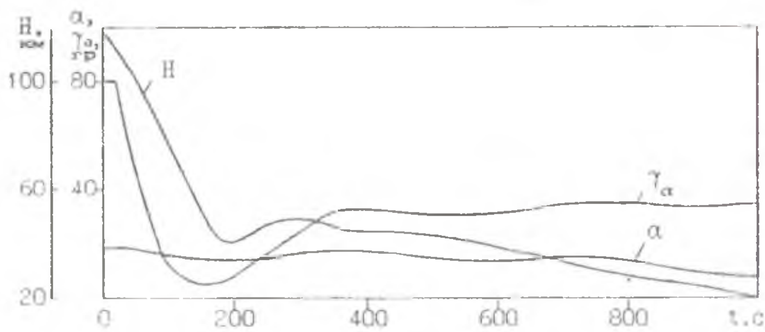

Рис. 12. Программы управления и зависимости высоты от времени

Заключение

Результаты решения задач оптимального управления и сравнения их с решениями тех же задач принципом максимума, а также результаты решения новых задач позволяют сделать вывод о работоспособности и эффективности метода последовательной линеаризации при численном решении задач управления движением в атмосфере аэрокосмических аппаратов.

Достоинствами метода являются малая чувствительность к начальному приближению программ управления, возможность учета разнообразных ограничений, возможность контроля за процессом поиска и влияния на него, относительная простота перенастройки вычислительного алгоритма при изменении условий задачи, в том числе при появлении дополнительных ограничений. Подход, основанный на идеях последовательной линеаризации, может использоваться при решении принципиально новых задач управления движением аэрокосмических аппаратов, а также при разработке командных алгоритмов управления их движением, реализующихся в реальном времени.

Численные методы на основе последовательной линеаризации позволяют решать задачи оптимизации многоканального управления при наличии ограничений на управление и режимы движения. Оптимизация двухканального и трехканального управления аэрокосмическим аппаратом при изменении наклонения плоскости орбиты в атмосфере обеспечила уточнение известных и получение новых результатов без введения допущения об импульсном характере маневра и с учетом ограничений, связанных с реальными условиями движения. Результаты построения областей достижимости свидетельствуют о больших возможностях аэрокосмических аппаратов при маневрировании в нештатных ситуациях, связанных с необходимостью автономного полета из нестандартных начальных условий входа в атмосферу.

Практика применения метода последовательной линеаризации позволяет охарактеризовать его как универсальный подход к решению широкого круга задач управления движением сложных динамических систем.

Библиографический список

1. Шкадов Л.М., Буханова Р.С., Илларионов В.Ф., Плохих В.П. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере.-М.: Машиностроение, 1972.-240с.

2. Ярошевский В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов.-М.: Наука, 1988.-336с.

3. Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В. Механика полета (Общие сведения. Уравнения движения).-М.: Машиностроение, 1969.-420с.

4. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры.-Введ. с 01.07.82.

5. Инженерный справочник по космической технике / Под ред. А.В.Солодова.-М.: Военное издательство Министерства обороны СССР, 1977.-432с.

6. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления.-М.: Наука, 1978.-488с.

7. Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. К решению задач оптимального управления при входе в атмосферу // Космические исследования, 1987.-Т.25.-Вып.1.-С.37-46.

8. Голубев Ю.Ф., Серегин И.А., Хайруллин Р.З. Метод плавающих узлов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991.-N 2.-С.48-53.

9. Лазарев Ю.Н. Решение задач формирования программ управления движением в атмосфере аэрокосмических аппаратов на основе последовательной линеаризации // Космические исследования. 1994.-Т.32.-Вып.4-5.-С.83-91.

10. Лазарев Ю.Н. Управление движением аэрокосмического аппарата в атмосфере на основе метода последовательной линеаризации // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 1996.-N.2.-С.134-138.

11. Лазарев Ю.Н. Области достижимости и управление движением в атмосфере аэрокосмического аппарата в нештатной ситуации // Космические исследования. 1996.-Т.34.-Вып.4.-С.434-438.

12. Балакин В.Л., Лазарев Ю.Н., Филиппов Е.А. Оптимизация управления аэрокосмическим аппаратом при изменении в атмосфере наклонения плоскости орбиты // Космические исследования. 1996.-Т.34.-Вып.2.-С.190-196.

13. Гурман В.И., Салмин В.В., Шершнев В.М. Аналитическая оценка приближенно-оптимальных комбинированных разворотов // Космические исследования. 1969.-Т.7.-Вып.6.-С.819-826.

14. Балакин В.Л., Белоконов В.М., Шершнев В.М. Об оптимальных режимах поворота плоскости орбиты спутника Земли с использованием аэродинамических сил // Космические исследования. 1974.-Т.12.-Вып.3.-С.346-352.

15. Балакин В.Л., Белоконов В.М., Шершнев В.М. Комбинированный маневр поворота плоскости орбиты при наличии ограничений на режимы движения // Космические исследования. 1976.-Т.14.-Вып.4.-С.498-503.

16. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов.-М.: Физматгиз, 1976.-392с.

17. Edinger L.D. The Space Shuttle ascent flight control system // Proceedings of AIAA Guidance and Control Conf., San Diego, Calif., 1976. -P.225-235.

Содержание

Учебное издание

Лазарев Юрий Николаевич

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В АТМОСФЕРЕ

Учебное пособие

Редактор Т.К.Кретинина

Техн. редактор Г.А.Усачева

Корректор Т.К.Кретинина

Лицензия ЛР N 020301 от 30.12.96

Подписано в печать 14. 04. 98. Формат 60×84 1/16

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл.печ.л. 2,79 . Усл.кр.-отт. 2,91 . Уч.-изд.л. 3,0 .

Тираж 100 экз. Заказ 55 .

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева.

443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного аэрокосмического университета.

443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.