

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ.
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

САМАРА
Издательство Самарского университета
2023

УДК 004.932(075)+621.391.8(075)

ББК А66я7+381я7

Т338

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Л. Л. Д о с к о л о в и ч,

д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Н о в и к о в

Т338 Теоретические основы цифровой обработки сигналов и изображений. Детерминированные модели: учебное пособие / *А.Ю. Денисова, В.В. Сергеев, М.А. Чичева, Р.Р. Юзькив.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 180 с.

ISBN 978-5-7883-1944-5

Учебное пособие состоит из шести разделов, посвященных основным аспектам детерминированных сигналов и систем: дискретным последовательностям, дискретным линейным системам, описанию сигналов и систем в частотной и z -области. В пособии содержатся сведения по дискретному преобразованию Фурье и спектральному анализу дискретных сигналов. Приводится обобщение основных понятий и методов на двумерные сигналы (изображения).

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем», направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» и другим информационно-технологическим направлениям высшего образования, а также аспирантов и научных работников.

Подготовлено на кафедре геоинформатики и информационной безопасности Самарского университета.

УДК 004.932(075)+621.391.8(075)

ББК А66я7+381я7

ISBN 978-5-7883-1944-5

© Самарский университет, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ИНВАРИАНТНЫЕ К СДВИГУ	6
1.1 Последовательности	6
1.2 Дискретные линейные системы инвариантные к сдвигу	10
1.3 Физическая реализуемость и устойчивость ЛИС-систем	13
1.4 Разностные уравнения	15
2 ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ.....	20
2.1 Частотная характеристика ЛИС-системы и спектры дискретных сигналов	20
2.2 Некоторые свойства спектров последовательностей.....	24
2.3 Соотношение между спектрами непрерывных и дискретных сигналов	31
3 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ	36
3.1 Дискретное преобразование Фурье	36
3.2 Использование ДПФ для вычисления отсчетов непрерывного спектра	42
3.3 Использование ДПФ для вычисления последовательности по ее спектру.....	43
3.4 Основные свойства ДПФ.....	45
3.5 Вычисление линейной свертки при помощи ДПФ	49
3.6 Быстрое преобразование Фурье.....	52
3.7 Быстрая свертка на основе ДПФ и секционирования сигнала.....	61
4 ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	65
4.1 Прямое z -преобразование.....	65
4.2 Основные свойства z -преобразования	74
4.3 Связь z -преобразования с ДПФ	79

4.4	Обратное z -преобразование	81
4.5	Анализ и синтез ЛИС-систем с использованием z -преобразования.....	89
5	ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ	98
5.1	Общая постановка задачи	98
5.2	Задача проектирования КИХ-фильтров.....	100
5.3	Усечение импульсной характеристики идеального фильтра.....	104
5.4	Метод взвешивания	111
5.5	Метод частотной выборки	115
5.6	Структурные схемы КИХ-фильтров	118
6	ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ	123
6.1	Двумерные последовательности.....	123
6.2	Двумерные дискретные ЛИС-системы	128
6.3	Физическая реализуемость двумерных систем	131
6.4	Двумерные разностные уравнения.....	136
6.5	Описание двумерных дискретных сигналов и систем в частотной области	139
6.6	Двумерное ДПФ.....	146
6.7	Двумерное z -преобразование.....	153
6.8	Основные свойства двумерного z -преобразования.....	165
6.9	Анализ и синтез двумерных ЛИС-систем с использованием z -преобразования.....	168
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	176

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Теоретические основы цифровой обработки сигналов и изображений. Детерминированные модели» предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем», направлению «Прикладная математика и информатика» и другим информационно-технологическим направлениям высшего образования, а также аспирантов и научных работников.

Учебное пособие состоит из шести разделов, посвященных основным аспектам детерминированных сигналов и систем: дискретным последовательностям, дискретным линейным системам, описанию сигналов и систем в частотной и z -области. В пособии содержатся сведения по дискретному преобразованию Фурье и спектральному анализу дискретных сигналов. Приводится обобщение основных понятий и методов на случай двумерных сигналов (изображений).

Каждый раздел содержит примеры практических заданий, выполнение которых поможет обучающимся лучше усвоить теоретический материал.

1 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ИНВАРИАНТНЫЕ К СДВИГУ

1.1 Последовательности

При цифровой обработке непрерывный сигнал – функция времени $f(t)$ представляется набором своих значений (отсчетов) в дискретные моменты – последовательностью. Мы ограничимся рассмотрением наиболее распространенного на практике случая, когда интервал между отсчетами (шаг дискретизации во времени) постоянен и равен Δ .

Для записи последовательности будем пользоваться одним из двух обозначений: $f = \{f(n\Delta)\}$ или $f = \{f(n)\}$. В обоих случаях n – целое. Первая запись определяет значения элементов последовательности как значения непрерывного сигнала в дискретные моменты физической шкалы времени, то есть непосредственно отражает процесс дискретизации сигнала:

$$f(n\Delta) = f(t)|_{t=n\Delta}. \quad (1.1)$$

Во второй записи в качестве аргумента дискретного сигнала используется просто порядковый номер отсчета n , которому в этом случае придается смысл дискретного безразмерного времени. Второе обозначение короче и поэтому предпочтительнее, однако, в случаях, когда требуется учитывать реальный масштаб времени, применяется первое.

Интервал определения последовательности может быть конечным, полубесконечным или бесконечным. При $n \in [N_1, N_2]$, где N_1, N_2 – целые, имеем последовательность *конечной длины*, при $n \in (-\infty, N_2]$ левостороннюю, а при $n \in (N_1, \infty)$ *правостороннюю* последовательность. При $n \in (-\infty, \infty)$ последовательность является *двусторонней* (бесконечной, неограниченной по аргумен-

ту). Для унификации рассмотрения всякую последовательность обычно приводят к бесконечной, полагая отсчеты, лежащие вне интервала определения, тождественно равными нулю. При этом данная классификация по существу относится не к области определения, а к области, в которой значения последовательности могут отличаться от нуля.

Последовательность называется *детерминированной*, если можно точно указать ее значения для любого момента дискретного времени n . Последовательность – *случайная*, если ее элементы – случайные величины. В рамках данного учебника мы рассматриваем только детерминированные последовательности.

Приведем примеры важнейших детерминированных последовательностей.

Единичный импульс:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Графическое изображение единичного импульса приведено на рисунке 1.1. Аналогично определяется и единичный импульс, сдвинутый на n_0 отсчетов:

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Единичный скачок:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Графическое изображение единичного скачка показано на рисунке 1.2. Единичный скачок можно выразить через единичный импульс:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k).$$

Приведенные обозначения единичного импульса и единичного скачка являются стандартными и используются далее везде.

Дискретный прямоугольный импульс длины N :

$$f(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & n < 0 \text{ или } n \geq N. \end{cases} \quad (1.5)$$

Эта последовательность (см. рисунок 1.3) очевидным образом выражается через функции единичного импульса или единичного скачка:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) = u(n) - u(n-N).$$

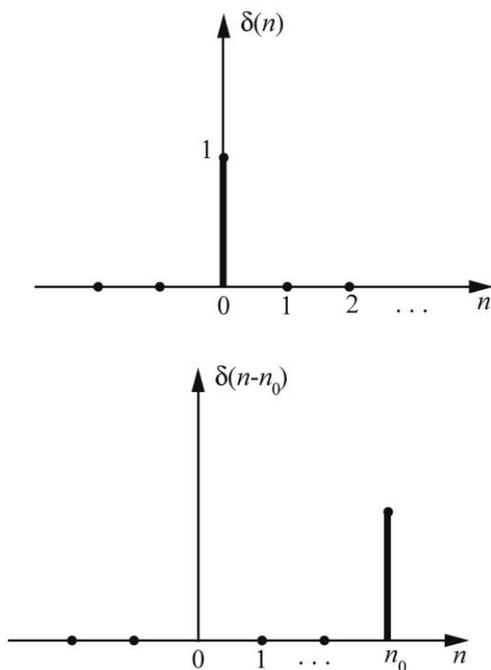


Рис. 1.1. Иллюстрации единичного импульса

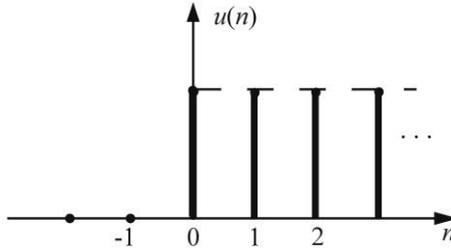


Рис. 1.2. Иллюстрация единичного скачка

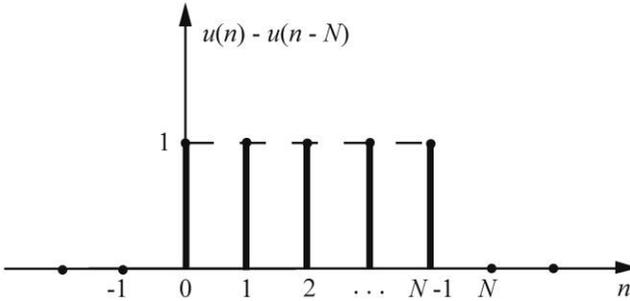


Рис. 1.3. Иллюстрация дискретного прямоугольного импульса

Дискретная правосторонняя экспонента:

$$f(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = a^n u(n). \quad (1.6)$$

График последовательности при $0 < a < 1$ показан на рисунке 1.4.

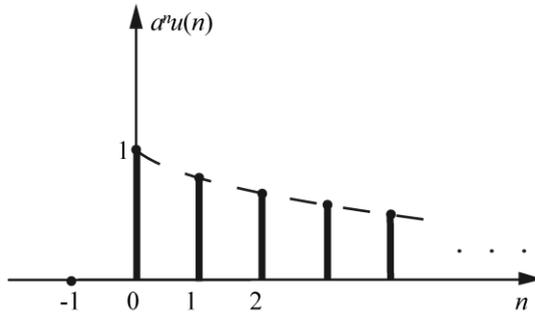


Рис. 1.4. Иллюстрация дискретной правосторонней экспоненты

Дискретная комплексная экспонента задается выражением

$$f(n) = e^{i\omega n} = \cos \omega n + i \sin \omega n, \quad (1.7)$$

где i – мнимая единица, ω – константа, имеющая смысл безразмерной частоты. Последовательность (1.7) играет исключительно важную роль при анализе сигналов и систем в частной области (см. раздел 2).

1.2 Дискретные линейные системы инвариантные к сдвигу

Будем называть *дискретной системой* правило L преобразования одной последовательности f , называемой *входной*, в другую последовательность g , называемую *выходной*.

В общем виде это преобразование обозначается

$$\{g(n)\} = L[\{f(n)\}]. \quad (1.8)$$

Дискретная система L называется *линейной*, если для нее соблюдается принцип суперпозиции, то есть для любых последовательностей f_1, f_2 и постоянных a, b

$$L[\{af_1(n) + bf_2(n)\}] = aL[\{f_1(n)\}] + bL[\{f_2(n)\}]. \quad (1.9)$$

Дискретная система, *инвариантная к сдвигу*, характеризуется тем, что, если справедливо соотношение (1.8), то справедливо и соотношение

$$\{g(n - n_0)\} = L[\{f(n - n_0)\}] \quad (1.10)$$

при любом целом n_0 . Иными словами, задержка входного сигнала приводит к равной задержке выходного сигнала без изменения самого закона преобразования входа в выход.

Дискретные системы, обладающие одновременно свойствами линейности и инвариантности к сдвигу, называются *дискретными линейными системами инвариантными к сдвигу* (ЛИС-системами).

Такие системы также иногда называют *дискретными линейными системами с постоянными параметрами* (ЛПП-системами). Клас-су ЛИС-систем принадлежат многие алгоритмы цифровой обра-ботки сигналов и дискретные модели реальных динамических объ-ектов. Для таких систем наиболее глубоко разработаны математи-ческие методы анализа и синтеза. Мы ограничимся рассмотрением именно этого класса дискретных систем.

Чтобы описать систему, нужно указать конкретное правило преобразования входного сигнала в выходной. ЛИС-систему мож-но описать с помощью ее импульсной характеристики.

Импульсная характеристика h дискретной ЛИС-системы определяется как реакция системы на входное воздействие в фор-ме единичного импульса:

$$\{h(n)\} = L[\{\delta(n)\}]. \quad (1.11)$$

Импульсная характеристика исчерпывающим образом описы-вает ЛИС-систему с точки зрения преобразования сигналов. Дей-ствительно, любую последовательность на входе ЛИС-системы можно представить в виде бесконечной суммы

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k). \quad (1.12)$$

В силу соотношения (1.9) преобразование суммы равно сумме преобразований слагаемых. Каждое слагаемое в сумме (1.12) есть сдвинутый единичный импульс с коэффициентом – значением со-ответствующего отсчета входной последовательности. Согласно (1.10) и (1.11) каждый такой импульс дает на выходе отклик в виде сдвинутой импульсной характеристики с тем же коэффициентом. Полная выходная последовательность записывается в виде:

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k). \quad (1.13)$$

Здесь и далее полагаем, что последовательности, входящие в выражения вида (1.13), таковы, что эта сумма ряда сходится при любом конечном n .

Таким образом, зная импульсной характеристики достаточно, чтобы по входной последовательности вычислить выходную.

Выражение (1.13) задает *свертку последовательностей* f и h . Часто используется его краткая символическая запись:

$$g(n) = f(n) * h(n). \quad (1.14)$$

Отметим некоторые легко доказываемые свойства свертки (пусть a, b и c – произвольные последовательности):

– *коммутативность*

$$a(n) * b(n) = b(n) * a(n); \quad (1.15)$$

– *ассоциативность*

$$a(n) * [b(n) * c(n)] = [a(n) * b(n)] * c(n); \quad (1.16)$$

– *дистрибутивность*

$$a(n) * [b(n) + c(n)] = a(n) * b(n) + a(n) * c(n). \quad (1.17)$$

Для любой последовательности $a(n)$ можно записать

$$a(n) * \delta(n - n_0) = a(n - n_0) \quad (1.18)$$

при любом целом n_0 . Формула (1.18) выражает так называемое *фильтрующее свойство* единичного импульса.

Легко показать, что, если ЛИС-система состоит из N последовательно соединенных звеньев с импульсными характеристиками h_1, h_2, \dots, h_N , то ее импульсная характеристика h равна свертке импульсных характеристик звеньев:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * \dots * h_N(n). \quad (1.19)$$

При параллельном соединении звеньев их импульсные характеристики суммируются, то есть для системы в целом

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + \dots + h_N(n) . \quad (1.20)$$

1.3 Физическая реализуемость и устойчивость ЛИС-систем

Дискретная система называется *физически реализуемой*, если значение выходной последовательности в произвольный момент n_0 зависит только от значений входной последовательности при $n \leq n_0$. Иначе говоря, для физически реализуемой системы отклик не опережает входное воздействие.

Для независимости выхода физически реализуемой дискретной ЛИС-системы от «будущих» значений входной последовательности требуется, чтобы в свертку (1.13) все значения $f(k)$ при $k > n$ входили с нулевыми коэффициентами. Очевидно, это выполняется, если

$$h(n) = 0 \quad \text{при } n < 0. \quad (1.21)$$

Это условие является необходимым и достаточным для физической реализуемости ЛИС-системы.

Дискретная система называется *устойчивой*, если любому ограниченному входному воздействию соответствует ограниченный отклик, то есть при

$$|f(n)| \leq M_f \quad \forall n \quad (1.22)$$

из (1.13) следует

$$|g(n)| \leq M_g \quad \forall n, \quad (1.23)$$

где M_f, M_g – некоторые положительные константы.

Необходимым и достаточным условием устойчивости дискретной ЛИС-системы является абсолютная суммируемость импульсной характеристики:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (1.24)$$

Докажем это. Сначала докажем необходимость, используя контрпример. Рассмотрим ограниченную входную последовательность

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } h(-n) \geq 0, \\ -1 & \text{при } h(-n) < 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

и определим значение последовательности на выходе системы при $n = 0$. В соответствии с формулами (1.13) и (1.25)

$$g(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|.$$

Если условие (1.24) не выполняется, то не выполняется и условие устойчивости (1.23). Следовательно, выполнение условия (1.24) является необходимым условием устойчивости системы. Для доказательства достаточности предположим, что условие (1.24) выполняется, и на вход системы поступает ограниченная последовательность, то есть справедливо неравенство (1.22). Тогда, используя свойство коммутативности свертки (1.13), получаем:

$$\begin{aligned} |g(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)f(n-k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |f(n-k)| \leq M_f \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = M_g < \infty, \end{aligned}$$

то есть всегда выполняется соотношение (1.23), выходная последовательность ограничена, а значит, система устойчива.

Теперь, после введения понятий физической реализуемости и устойчивости можно дать простую, но важную классификацию ЛИС-систем по форме импульсной характеристики. У ЛИС-систем

с конечной импульсной характеристикой (КИХ-систем), как следует из самого названия, импульсная характеристика представляет собой последовательность конечной длины, то есть $h(n) = 0$ при $n \notin [N_1, N_2]$. КИХ-системы всегда устойчивы, так как для них сумма (1.24) конечна. При $N_1 \geq 0$ такие системы являются физически реализуемыми.

ЛИС-системы с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-системы) имеют в качестве импульсной характеристики правостороннюю, левостороннюю или двустороннюю последовательность, то есть $h(n) = 0$ при $n < N_1$, или $h(n) = 0$ при $n > N_2$, или $h(n) \neq 0$ при $n \in (-\infty, \infty)$. Такие системы могут быть неустойчивыми. Требование физической реализуемости здесь выполняется только в первом случае при $N_1 \geq 0$.

Если у КИХ- или БИХ-системы импульсная характеристика равна нулю при $n < N_1 < 0$, то такая система тоже может быть реализована, если допустить задержку в получении сигнала на выходе. Величина этой задержки должна быть достаточной, чтобы «сдвинуть» импульсную характеристику вправо в область неотрицательных значений аргумента на число отсчетов не меньше $(-N_1)$. Строго говоря, при этом реализуется не исходная система, а другая, эквивалентная последовательному соединению системы и звена задержки. Однако в большинстве практических приложений такая замена вполне допустима.

1.4 Разностные уравнения

Как следует из выражений (1.13) и (1.21), для физически реализуемой БИХ-системы значение последовательности на выходе зависит от текущего и всех предыдущих значений входной последовательности. Описание (1.13) не является конструктивным в том

смысле, что не позволяет практически построить БИХ-систему: для получения каждого значения выходной последовательности требуется выполнить бесконечное число операций сложения и умножения. Число операций можно сделать конечным, если выразить текущее значение выходной последовательности не только через входные, но и через предыдущие выходные значения, иначе говоря, записать уравнение ЛИС-системы в рекурсивной форме. При этом получаем описание ЛИС-системы в виде *линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами*:

$$g(n) = \sum_{j=1}^M a_j g(n-j) + \sum_{j=0}^N b_j f(n-j), \quad (1.26)$$

где $\{a_j\}, \{b_j\}$ – коэффициенты уравнения, M, N – целые константы, характеризующие сложность системы.

Величина M при старшем коэффициенте $a_M \neq 0$ определяет порядок разностного уравнения (ЛИС-системы). БИХ-системы всегда имеют ненулевой порядок и являются *рекурсивными*: для них каждое следующее значение выходной последовательности вычисляется через M предыдущих. В частном случае, когда все коэффициенты $\{a_j\}$ равны нулю, уравнение (1.26) описывает *нерекурсивную* КИХ-систему, имеющую нулевой порядок.

Заметим, что разностное уравнение (1.26) при конечных M, N описывает более узкий класс физически реализуемых ЛИС-систем, нежели свертка (1.13). Для некоторых форм бесконечной импульсной характеристики переход от свертки к разностному уравнению невозможен. Впрочем, такие «неприводимые» случаи на практике не встречаются и поэтому ниже не рассматриваются.

Обратный переход от разностного уравнения (1.26) к свертке (1.13) возможен всегда, его осуществление означает выражение выходной последовательности через входную в явной форме, то

есть решение разностного уравнения. Методы решения разностных уравнений хорошо разработаны. В простейших случаях продуктивным является последовательное отыскание отсчетов выходного сигнала путем *прямой подстановки* в уравнение с дальнейшим обобщением результата методом математической индукции.

Пример 1.1. Пусть физически реализуемая ЛИС-система первого порядка описывается разностным уравнением

$$g(n) = ag(n-1) + f(n), \quad (1.27)$$

где a – постоянный коэффициент. Требуется получить описание системы в виде свертки. Найдем вначале импульсную характеристику системы. В соответствии с определением импульсной характеристики (1.11) уравнение (1.27) можно переписать в виде

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n). \quad (1.28)$$

Рассматриваемая система физически реализуема, поэтому все значения импульсной характеристики при $n < 0$ равны нулю (см. формулу (1.21)). При $n \geq 0$ значения импульсной характеристики определяются прямой подстановкой в уравнение (1.28) предыдущих значений с учетом формулы (1.2):

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = a \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a \cdot 1 + 0 = a;$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a \cdot a + 0 = a^2;$$

...

Анализируя этот результат, нетрудно заметить, что импульсная характеристика имеет аналитическое выражение в виде правосторонней экспоненты (1.6):

$$h(n) = a^n u(n). \quad (1.29)$$

С учетом свойства коммутативности свертки (1.13), а также выражения (1.4) для единичного скачка получаем окончательный результат

$$\begin{aligned}
 g(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)f(n-k) = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)f(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(n-k).
 \end{aligned}
 \tag{1.30}$$

Конец примера.

Заметим, что в общем случае при решении разностного уравнения (1.26) прямой подстановкой необходимо задавать *начальные условия*, число которых зависит от сложности уравнения. Так, для получения решения при $n \geq 0$ нужно задать $y(-1), y(-2), \dots, y(-M)$, а также $f(-1), f(-2), \dots, f(-N)$, то есть всего $(M + N)$ величин. Метод прямой подстановки, будучи громоздким, имеет весьма ограниченное применение. Существуют другие, более мощные аналитические методы решения разностных уравнений, позволяющие сразу получить результат в общем виде. Один из таких методов, основанный на применении z -преобразования, мы рассмотрим позже.

Описание ЛИС-системы с помощью разностного уравнения имеет важное практическое значение, поскольку непосредственно определяет алгоритм преобразования входной последовательности в выходную. По разностному уравнению легко строится структурная схема ЛИС-системы, состоящая из комбинации типовых элементов, осуществляющих операции суммирования (рисунок 1.5а), умножения на коэффициент (рисунок 1.5б) и задержки (сдвига) последовательности (рисунок 1.5в). Обозначение элемента задержки через z^{-1} будет обосновано позже.

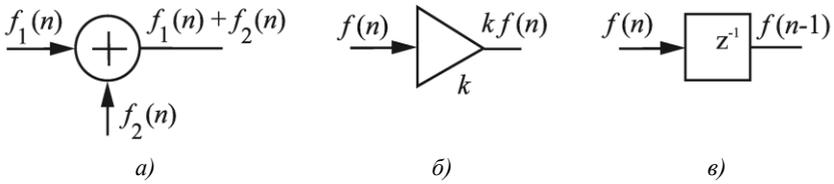


Рис. 1.5. Типовые элементы структурных схем ЛИС-систем:

а) элемент суммирования; б) элемент умножения; в) элемент задержки

На рисунке 1.6 представлена структурная схема, соответствующая прямой реализации ЛИС-системы по разностному уравнению (1.26).

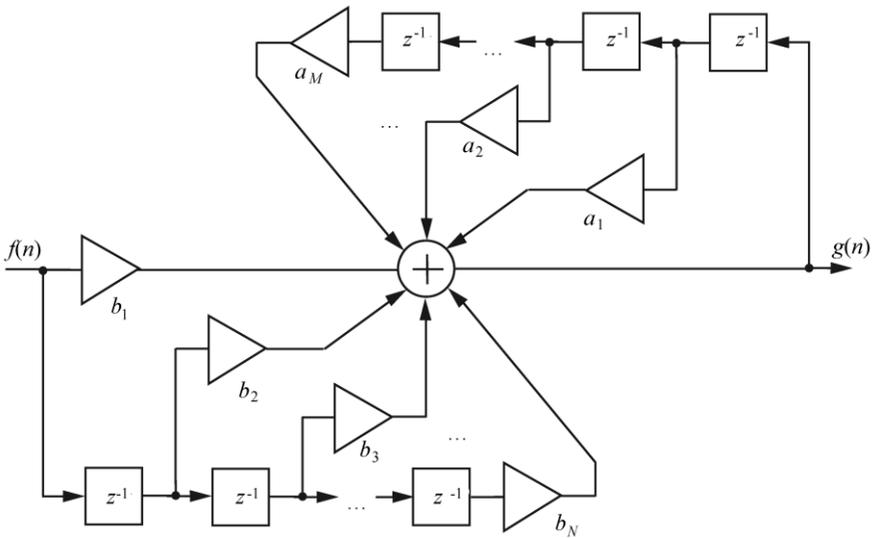


Рис. 1.6. Пример структурной схемы для прямой реализации ЛИС-системы по разностному уравнению

2 ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

2.1 Частотная характеристика ЛИС-системы и спектры дискретных сигналов

Весьма ценным для анализа ЛИС-систем является их описание с помощью отклика на синусоидальный входной сигнал. В теоретических исследованиях вместо синусоидального сигнала обычно берется комплексная экспонента (1.7). Обратим внимание на использование в выражении (1.7) безразмерной частоты

$$\omega = \Omega \Delta , \quad (2.1)$$

которое является достаточным для описания дискретных сигналов и систем вне связи с масштабом времени.

Итак, пусть на вход дискретной ЛИС-системы поступает комплексная экспонента (1.7). Тогда выходная последовательность запишется в виде

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) f(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{i\omega(n-k)} = \\ &= e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} . \end{aligned}$$

Мы получили выходную последовательность, совпадающую с входной с точностью до множителя, зависящего от частоты. Этот множитель

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} \quad (2.2)$$

называется *частотной характеристикой* дискретной ЛИС-системы. Почему используется столь сложная запись ее аргумента, станет ясно позднее.

Частотная характеристика задает «коэффициент передачи» ЛИС-системы при прохождении сигнала – комплексной экспоненты для каждого значения ее частоты ω :

$$e^{i\omega n} \xrightarrow{L} e^{i\omega n} H(e^{i\omega}).$$

Частотная характеристика определена тогда, когда ряд (2.2) сходится. Условие устойчивости ЛИС-системы (2.2) одновременно является и условием абсолютной сходимости этого ряда. Таким образом, для устойчивой системы частотная характеристика определена всегда.

Заметим, что ряд (2.2) можно рассматривать как степенной от комплексной переменной $z = e^{i\omega}$. Известно, что степенной ряд, абсолютно сходящийся на некотором множестве точек (в нашем случае – на единичной окружности в комплексной плоскости z или, что одно и то же, на всей числовой оси вещественной переменной ω), на том же множестве сходится равномерно. Этот факт равномерной сходимости нам понадобится ниже.

Выражение (2.2) позволяет вычислить частотную характеристику по импульсной. Установим и правило обратного перехода, для чего умножим обе части выражения (2.2) на $e^{i\omega n}$ и проинтегрируем по интервалу изменения частоты $(-\pi, \pi)$ (учтем при этом, что равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n} \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} d\omega \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(n-k)} d\omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вычисление интегралов под суммой с учетом формулы (1.3) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(n-k)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases} = 2\pi\delta(n-k),$$

выражение (2.3) приводится к свертке и, в соответствии с фильтрующим свойством единичного импульса (1.18), упрощается:

$$\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) 2\pi\delta(n-k) = 2\pi h(n) * \delta(n) = 2\pi h(n).$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (2.4)$$

Выражения (2.2) и (2.4) определяют соответственно *прямое и обратное преобразование Фурье* функции дискретного аргумента (последовательности). Преобразование Фурье функции иначе называется ее спектром. Частотная характеристика ЛИС-системы – это спектр ее импульсной характеристики.

Аналогичную пару преобразований Фурье можно записать и для произвольной последовательности f :

$$F(e^{i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-i\omega k}, \quad (2.5)$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (2.6)$$

Выражение (2.5) определяет спектр последовательности, а выражение (2.6) – представление последовательности через спектр. Будем считать, что ряд (2.5) сходится (на условиях сходимости ряда и, следовательно, существования спектра мы еще остановимся в следующем параграфе).

Спектральное представление сигналов и систем широко применяется при анализе измерительной информации, синтезе фильтров и т.д. Описание ЛИС-системы посредством частотной характеристики во многих случаях проще и удобнее описания во временной области. Убедимся в этом, установив связь спектров последовательностей на входе и выходе системы. Спектр выходной последовательности с учетом ее выражения через свертку (1.13) запишется в виде

$$\begin{aligned} G(e^{i\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)e^{-i\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(m-k) \right] e^{-i\omega m} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m-k) e^{-i\omega m}. \end{aligned}$$

Заметим, что допустимость перестановки сумм можно обосновать при условии ограниченности последовательности f и абсолютной суммируемости h . Заменим переменную для внутренней суммы $n = m - k$. Тогда

$$\begin{aligned} G(e^{i\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega(n+k)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-i\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание выражения (2.2) и (2.5), получаем соотношение

$$G(e^{i\omega}) = F(e^{i\omega})H(e^{i\omega}), \quad (2.7)$$

которое однозначно связывает спектры входной и выходной последовательностей.

Сопоставление формул (1.13) и (2.7) показывает, что свертка последовательностей преобразуется в произведение спектров.

Этот факт часто используют при анализе прохождения сигналов через ЛИС-систему и вообще при вычислении сверток: применение прямого и обратного преобразования Фурье и соотношения (2.7) по сложности вычислений иногда оказывается проще непосредственного использования формулы (1.13).

2.2 Некоторые свойства спектров последовательностей

Перечислим некоторые наиболее существенные свойства спектров последовательностей. Для определенности будем в основном говорить о спектрах дискретных сигналов, хотя все сказанное, с точностью до обозначений, остается справедливым и для частотной характеристики дискретной ЛИС-системы. Вначале приведем несколько свойств, качественно характеризующих спектры.

Свойство 1. Достаточным (но не необходимым!) условием существования спектра последовательности f является абсолютная сходимость ряда (2.5):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty. \quad (2.8)$$

При выполнении условия (2.8) спектр (2.5) есть непрерывная функция частоты ω . Соответственно, как уже отмечалось, частотная характеристика ЛИС-системы определена и непрерывна в случае, если система устойчива (см. формулу (1.24)). Если условие (2.8) не выполняется, то ряд (2.5) либо расходится (при этом, естественно, спектр не определен), либо сходится условно (не абсолютно). В последнем случае спектр существует, хотя возможно не для всех значений частот, и может иметь разрывы.

Свойство 2. Спектр последовательности – периодическая функция частоты. Его период равен 2π , то есть

$$F(e^{i\omega}) = F(e^{i[\omega+2\pi k]}) \quad \text{для любого целого } k. \text{ Это очевидным об-}$$

разом вытекает из периодичности по частоте дискретной комплексной экспоненты, используемой в выражениях (2.5) и (2.6):

$$e^{i[\omega+2\pi k]n} = e^{i\omega n} e^{i2\pi kn} = e^{i\omega n} .$$

В силу этого свойства для полного описания спектра достаточно задать его на любом интервале частот длиной в период. Обычно используется интервал $\omega \in [0, 2\pi)$ или $\omega \in [-\pi, \pi)$.

В общем случае спектр – комплексная функция, которую можно представить через вещественную и мнимую части или через модуль и фазу:

$$F(e^{i\omega}) = \operatorname{Re} F(e^{i\omega}) + i \operatorname{Im} F(e^{i\omega}) = \left| F(e^{i\omega}) \right| e^{i \arg F(e^{i\omega})} .$$

Указанные компоненты спектра обладают следующим свойством.

Свойство 3. Если f – вещественная последовательность, то модуль и вещественная часть ее спектра являются четными функциями частоты, а фаза и мнимая часть – нечетными. Это свойство несложно доказать.

Принимая во внимание периодичность спектра и рассматривая его на интервале $\omega \in [0, 2\pi)$, данное свойство можно сформулировать иначе: модуль и вещественная часть спектра симметричны, а фаза и мнимая часть антисимметричны относительно середины интервала (точки $\omega = \pi$). Такая симметрия позволяет полностью описать спектр вещественной последовательности, задав его лишь на половине периода, то есть при $\omega \in [0, \pi)$. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие указанные свойства.

Пример 2.1. Определим частотную характеристику ЛИС-системы первого порядка (1.27). Импульсная характеристика системы задается выражением (1.29). Частотную характеристику –

спектр импульсной характеристики – получим, подставив выражение (1.29) в (2.2):

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-i\omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{-i\omega})^k. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полученная сумма геометрической прогрессии сходится, и притом абсолютно, если $|ae^{-i\omega}| = |a| < 1$. Одновременно обеспечивается и сходимость ряда (1.24), то есть устойчивость системы. Пусть система устойчива. Тогда после суммирования ряда (2.9) получаем

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-i\omega}} = \frac{1}{1 - a \cos \omega + i a \sin \omega}.$$

Модуль и фаза частотной характеристики определяются соответственно по формулам

$$\begin{aligned} |H(e^{i\omega})| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + a^2 \sin^2 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}; \\ \arg H(e^{i\omega}) &= -\operatorname{arctg} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}. \end{aligned}$$

Частотная характеристика зависит от синуса и косинуса частоты, то есть является периодической (см. свойство 2). Семейства графиков для ее модуля и фазы при различных значениях параметра a приведены на рисунке 2.1. Видно, что частотная характеристика – непрерывная функция частоты. Так как импульсная характеристика системы вещественна, частотная характеристика обладает симметрией на рассмотренном интервале (см. свойство 3).

Если $|a| \geq 1$, то ряды (1.24) и (2.2) не сходятся, система неустойчива, и ее частотная характеристика не существует.

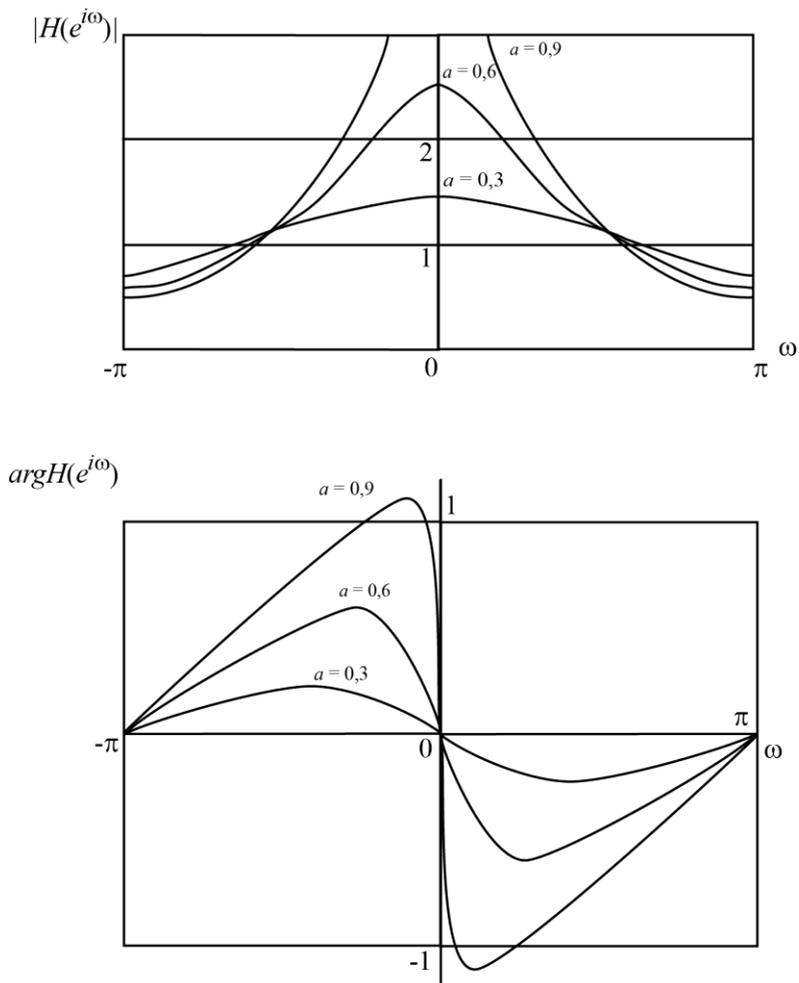


Рис. 2.1. Модуль и фаза частотной характеристики ЛИС-системы первого порядка

Пример 2.2. Последовательность

$$f(n) = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n} \quad (2.10)$$

не удовлетворяет условию (2.8), но ее спектр существует на интервале частот $[0, \pi]$ всюду, кроме точки $\omega = \omega_0$ и равен

$$F\left(e^{i\omega}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \omega_0, \\ 0, & \omega_0 < \omega \leq \pi, \end{cases} \quad (2.11)$$

что легко проверяется подстановкой выражения (2.11) в (2.6) с учетом симметрии спектра. Для данной последовательности ряд (2.5) является условно сходящимся, и ее спектр имеет разрыв в точке $\omega = \omega_0$.

Конец примера.

ЛИС-система с импульсной характеристикой вида (2.10) называется *идеальным фильтром низких частот дискретного времени*. Этот фильтр удаляет из входного сигнала все спектральные составляющие в диапазоне частот $\omega_0 < \omega \leq \pi$. Такая система не является ни физически реализуемой, ни устойчивой, но тем не менее играет важную теоретическую роль в задачах синтеза цифровых фильтров (см. раздел 5).

Следующие свойства спектров касаются различных действий с ними.

Свойство 4. Преобразование Фурье линейно. Это означает, что для любых последовательностей f_1, f_2 и постоянных a, b из соотношения

$$f_3(n) = a f_1(n) + b f_2(n) \quad (2.12)$$

следует

$$F_3\left(e^{i\omega}\right) = a F_1\left(e^{i\omega}\right) + b F_2\left(e^{i\omega}\right). \quad (2.13)$$

Свойство 5. Сдвиг последовательности соответствует умножению ее спектра на комплексную экспоненту, а именно, если

$$f_2(n) = f_1(n - n_0), \quad (2.14)$$

то

$$F_2(e^{i\omega}) = F_1(e^{i\omega})e^{-i\omega n_0} . \quad (2.15)$$

Такое преобразование спектра оставляет неизменным его модуль, но прибавляет к фазе слагаемое $(-\omega n_0)$, линейно зависящее от частоты.

Свойство 6. Инверсия (изменение знака аргумента последовательности) соответствует инверсии частоты в спектре, то есть если

$$f_2(n) = f_1(-n) , \quad (2.16)$$

то

$$F_2(e^{i\omega}) = F_1(e^{-i\omega}) . \quad (2.17)$$

Если инверсии подвергается вещественная последовательность, то с учетом 4-го свойства модуль и вещественная часть ее спектра остаются без изменения, а фаза и мнимая часть меняют знак, то есть получаем спектр, комплексно-сопряженный исходному.

Справедливость выражений (2.13), (2.15) и (2.17) легко проверяется подстановкой последовательностей (2.12), (2.14) и (2.16) в формулу (2.5).

Свойство 7. Свертка последовательностей соответствует произведению их спектров, то есть последовательность

$$f_3(n) = f_1(n) * f_2(n) \quad (2.18)$$

имеет спектр

$$F_3(e^{i\omega}) = F_1(e^{i\omega})F_2(e^{i\omega}) . \quad (2.19)$$

Это важное свойство в других обозначениях уже доказывалось и обсуждалось в предыдущем параграфе.

Свойство 8. Произведение последовательностей соответствует свертке их спектров, а именно, если

$$f_3(n) = f_1(n) f_2(n) , \quad (2.20)$$

то

$$F_3(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{i\phi}) F_2(e^{i[\omega-\phi]}) d\phi . \quad (2.21)$$

Формула (2.21) определяет так называемую круговую (циклическую) свертку периодических функций F_1 и F_2 . Для доказательства свойства 8 покажем, что из соотношения (2.21) следует соотношение (2.20). Подставим формулу (2.21) в выражение обратного преобразования Фурье (2.6) и далее переменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} f_3(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_3(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{i\omega}) F_2(e^{i[\omega-\phi]}) e^{i\omega n} d\phi d\omega = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{i\phi}) \left[\int_{-\pi}^{\pi} F_2(e^{i[\omega-\phi]}) e^{i\omega n} d\omega \right] d\phi . \end{aligned}$$

Заметим, что для допустимости перемены порядка интегрирования достаточно, чтобы подынтегральное выражение (то есть спектр F_3) было ограниченным. Введем новую переменную для внутреннего интеграла: $\nu = \omega - \phi$, тогда получим, что

$$f_3(n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{i\phi}) e^{i\phi n} \left[\int_{-\pi-\phi}^{\pi-\phi} F_2(e^{i\nu}) e^{i\nu n} d\nu \right] d\phi .$$

Все подынтегральные выражения – периодические, интегрирование идет по периоду, поэтому можно сдвинуть пределы интегрирования для внутреннего интеграла, тогда

$$f_3(n) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{i\phi}) e^{i\phi n} d\phi \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_2(e^{i\nu}) e^{i\nu n} d\nu \right]$$

$$= f_1(n) f_2(n),$$

что и требовалось доказать.

2.3 Соотношение между спектрами непрерывных и дискретных сигналов

Как уже отмечалось, дискретный сигнал (последовательность) обычно получают посредством дискретизации непрерывного сигнала. Дискретизация оказывает влияние на характеристики сигнала и, в частности, изменяет его спектр. Определим, как соотносятся между собой спектр исходной непрерывной функции времени и спектр полученной из нее последовательности.

Известно, что непрерывный сигнал $f(t)$ и его спектр $F_H(\Omega)$ связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$F_H(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt, \quad (2.22)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_H(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega, \quad (2.23)$$

где $\Omega \left[\frac{\text{радиан}}{c} \right]$ – угловая частота. Выражение (2.22) определяет спектр непрерывного сигнала (прямое преобразование Фурье), а выражение (2.23) дает представление сигнала через спектр (обратное преобразование). Для взаимно однозначного соответствия непрерывного сигнала и его спектра достаточно, чтобы тот и другой были абсолютно интегрируемыми на $(-\infty, \infty)$, кусочно-непрерывными и кусочно-монотонными.

Чтобы сравнивать спектр (2.22) со спектром последовательности (2.5), нужно выразить последний в сопоставимых координатах, то есть задать спектр последовательности в виде функции размерной частоты. Подставляя выражение для безразмерной частоты (2.1) в формулы (2.5) и (2.6), получаем

$$F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta)e^{-i\Omega\Delta k}, \quad (2.24)$$

$$f(n\Delta) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) e^{i\Omega\Delta n} d\Omega. \quad (2.25)$$

В выражениях (2.24) и (2.255) использовано обозначение последовательности, отражающее процесс дискретизации непрерывного сигнала (см. формулу (1.1)). Спектр последовательности в формуле (2.24), в отличие от формулы (2.25), зависит от шага дискретизации Δ и является периодическим по частоте Ω с периодом $2\pi/\Delta$.

Установим связь выражений (2.24) и (2.22). Дальнейшие преобразования ведутся в предположении, что функция F_H ограничена и абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. С учетом формулы (1.1) перейдем от непрерывного сигнала (2.23) к последовательности

$$f(n\Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_H(\Omega) e^{i\Omega\Delta n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi/\Delta}^{(2m+1)\pi/\Delta} F_H(\Omega) e^{i\Omega\Delta n} d\Omega.$$

Здесь на втором шаге произведена тождественная замена собственного интеграла бесконечной суммой интегралов по смеж-

ным интервалам длиной $2\pi/\Delta$. После введения для каждого слагаемого новой переменной интегрирования $\Omega' = \Omega - \frac{2\pi}{\Delta}m$ получаем

$$f(n\Delta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} F_{\text{H}}\left(\Omega' + \frac{2\pi}{\Delta}m\right) e^{i\left(\Omega' + \frac{2\pi}{\Delta}m\right)\Delta n} d\Omega'.$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования, отбросим ненужный штрих в обозначении частоты и учтем, что $e^{i2\pi mn} = 1$. Тогда

$$f(n\Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{\text{H}}\left(\Omega + \frac{2\pi}{\Delta}m\right) e^{i\Omega\Delta n} d\Omega.$$

Сравнение полученного выражения с выражением (2.25) выявляет искомое соотношение между спектрами:

$$F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{\text{H}}\left(\Omega + \frac{2\pi}{\Delta}m\right). \quad (2.26)$$

Таким образом, *спектр последовательности состоит из суммы бесконечного числа спектров непрерывного сигнала, сдвинутых друг относительно друга на $2\pi/\Delta$.*

Если спектр непрерывного сигнала ограничен по полосе частот, то есть

$$F_{\text{H}}(\Omega) = 0 \quad \text{при } |\Omega| \geq \pi/\Delta, \quad (2.27)$$

то в диапазоне $\Omega \in (-\pi/\Delta, \pi/\Delta)$, определяющем один период спектра последовательности,

$$F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta} F_{\text{H}}(\Omega).$$

Этот факт иллюстрирует рисунок 2.2. Очевидно, что в данном случае можно однозначно восстановить спектр непрерывного сиг-

нала по спектру последовательности, а, следовательно, и сам непрерывный сигнал по дискретному.

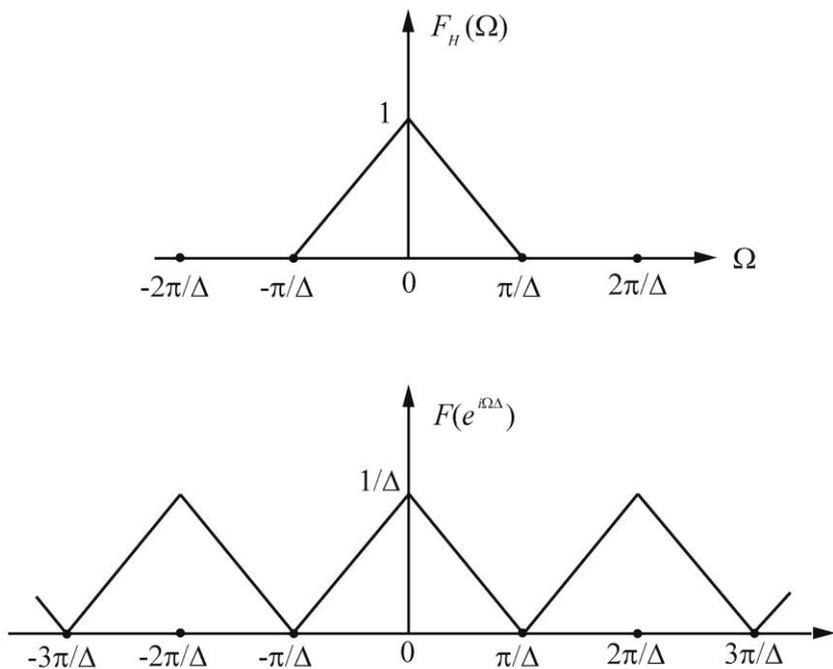


Рис. 2.2. Пример спектров непрерывного и дискретного сигналов

Если ограничение (2.27) не выполняется, то возникает *эффект наложения спектров*, выражающийся в том, что высокочастотные составляющие спектра непрерывного сигнала попадают в область более низких частот в спектре последовательности (рисунок 2.3). Этот эффект всегда нежелателен, поскольку из-за него теряется взаимно однозначная связь спектров; часть информации, содержащейся в непрерывном сигнале, необратимо теряется при дискретизации.

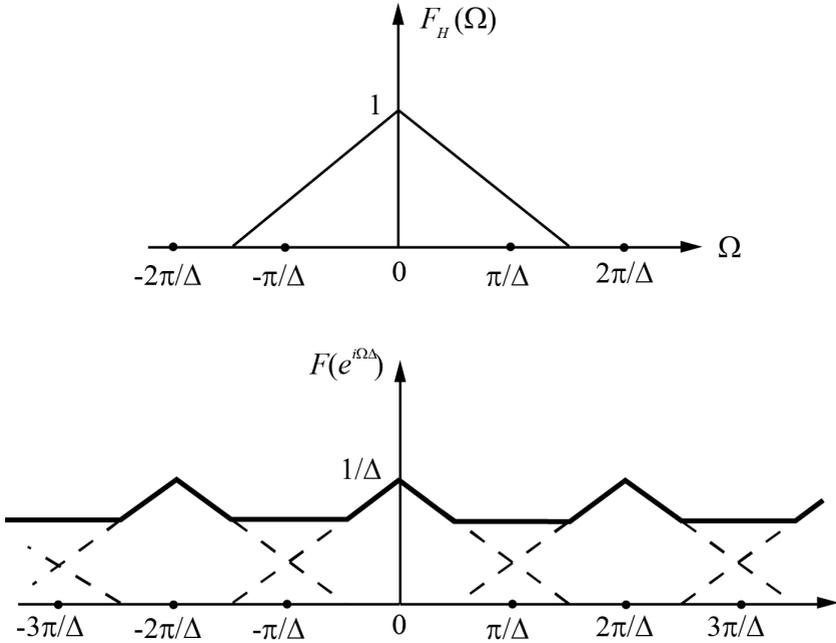


Рис. 2.3. Пример спектра непрерывного сигнала и дискретного с наложением спектров

Эффекта наложения можно избежать, если дискретизировать непрерывный сигнал с достаточно высокой скоростью: для выполнения неравенства (2.27) нужно, чтобы верхняя частота Ω_g в спектре непрерывного сигнала была меньше π/Δ , или, соответственно, шаг дискретизации

$$\Delta < \pi/\Omega_g . \quad (2.28)$$

На практике обычно выбирают с запасом: $\Delta \ll \pi/\Omega_g$.

Неравенство (2.28) представляет собой ограничение, налагаемое на шаг дискретизации непрерывного сигнала известной теоремой Котельникова.

3 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Анализ спектров – это одна из основных задач цифровой обработки сигналов. Инструментом цифрового спектрального анализа является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое переводит последовательность, заданную во временной области, в последовательность, соответствующую компонентам спектра. Связь между непрерывным и дискретным преобразованиями Фурье является одним из вопросов, рассматриваемых в данном разделе.

Практическая ценность ДПФ заключается в том, что для него разработаны чрезвычайно эффективные алгоритмы вычисления, называемые алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ).

3.1 Дискретное преобразование Фурье

Пусть $f_H(t)$ – непрерывная периодическая функция времени (см. рисунок 3.1):

$$f_H(t) = f_H(t + kT), \quad (3.1)$$

где T – период, k – любое целое число.

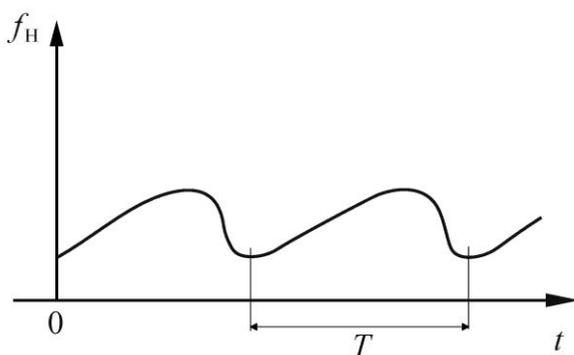


Рис. 3.1. Пример непрерывной периодической функции времени

Как известно, такую функцию можно разложить в ряд Фурье, то есть представить в спектральной области. Этот ряд (спектр) будет содержать гармонические (синусоидальные) составляющие с периодами $T, T/2, T/3, \dots, T/m, \dots$. В комплексной форме представление периодической функции через ряд Фурье записывается в виде:

$$f_H(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_H(m) e^{i \frac{2\pi}{T} mt} . \quad (3.2)$$

Здесь

$$\left\{ e^{i \frac{2\pi}{T} mt} \right\}_{m=-\infty}^{\infty}$$

– набор функций, образующих базис, по которому производится разложение $f_H(t)$ в ряд, $F_H(m)$ – коэффициенты этого разложения – спектральные компоненты сигнала. Эти компоненты образуют последовательность – дискретный спектр (см. рисунок 3.2). Заметим, что дискретность спектра обусловлена тем, что функция $f_H(t)$ периодична.

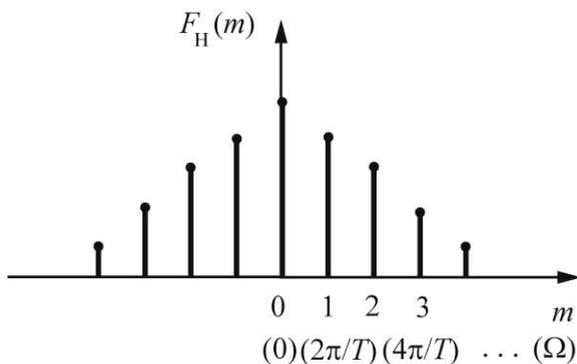


Рис. 3.2. Дискретный спектр функции

Пусть теперь $f(n)$ – последовательность, периодическая с периодом N :

$$f(n) = f(n + kN), \quad (3.3)$$

которую можно получить дискретизацией периодической функции непрерывного аргумента, удовлетворяющей условию (3.1). Такая последовательность есть частный случай периодической функции общего вида, поэтому для нее все сказанное выше остается в силе. При переходе от (3.1) к (3.3) мы просто заменили t на n , а T на N . В новых обозначениях можно записать и ряд (3.2):

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn}. \quad (3.4)$$

Однако то, что теперь функция рассматривается при целочисленных значениях аргумента, дает основание не удовлетвориться такой записью. Действительно, в данной ситуации базис разложения содержит только N различных функций:

$$\left\{ e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \right\}_{m=0}^{N-1},$$

а остальные базисные функции совпадают с ними. Это связано со свойством периодичности дискретной комплексной экспоненты:

$$e^{i\frac{2\pi}{N}mn} = e^{i\frac{2\pi}{N}(m+kN)n}.$$

Естественно, одинаковые базисные функции дают и одинаковые коэффициенты разложения. Поэтому представление последовательности через ряд вида (3.4) является избыточным.

Для устранения избыточности предлагается усечь ряд (3.4), ограничиваясь базисом только из N различных комплексных экспонент. Разложение по такому базису принято записывать в виде:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn}, \quad (3.5)$$

где последовательность коэффициентов $F(m)$ называется дискретным спектром или дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) исходной последовательности. Появившийся множитель перед суммой не меняет характера представления, он вводится исходя из некоторых дополнительных соображений.

Определим коэффициенты разложения (3.5). Умножим обе части выражения (3.5) на $e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$ при $0 < k \leq N-1$ и просуммируем по периоду:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}n(m-k)}. \quad (3.6)$$

После замены порядка суммирования выражение (3.6) преобразуется к виду:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(m-k)}. \quad (3.7)$$

Будем рассматривать интервал значений индексов длиной в период: $0 \leq m, k \leq N-1$. Нетрудно показать, что для этого интервала внутренняя сумма

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(m-k)} = \begin{cases} N & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases} = N \delta(m-k). \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в (3.7) после замены индекса получаем:

$$F(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}. \quad (3.9)$$

Пара соотношений (3.9), (3.5) определяют дискретное преобразование Фурье последовательности: (3.9) – прямое ДПФ, (3.5) – обратное.

Заметим, что, в отличие от «классического» преобразования Фурье, здесь и $f(n)$, и $F(m)$ – последовательности. Как следствие,

и в этом легко убедиться, и $F(m)$, и $f(n)$ – периодичны с периодом N (условная иллюстрация этого факта дана на рисунке 3.3).

Из соотношений (3.5), (3.9) видно, что для вычисления и прямого, и обратного ДПФ берутся отсчеты последовательностей только в N точках одного периода.

Это позволяет формально использовать ДПФ и для последовательностей $f(n)$ и $F(m)$, заданных только на интервале $[0, N-1]$, то есть непериодических (имеющих конечную длину). Однако при этом всегда неявно предполагается периодическая продолженность преобразуемых последовательностей на всю бесконечную числовую ось аргумента, как это показано на рисунке 3.3.

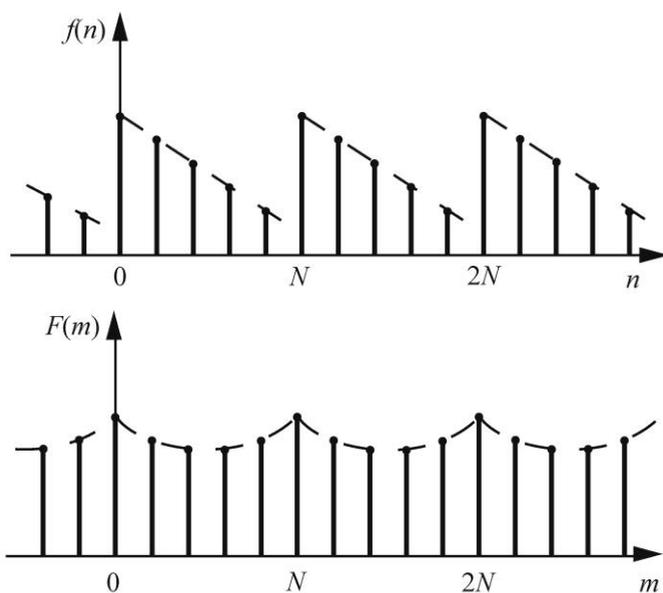


Рис. 3.3. Иллюстрация периодичности последовательности и ее дискретного спектра

Сравнив соотношения (2.5) и (3.9) с учетом конечности (отличия от нуля только на периоде) преобразуемой последовательно-

сти, видим, что переход от непрерывного спектра к ДПФ задается выражением:

$$F(m) = F\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}m}, \quad 0 \leq m \leq N-1. \quad (3.10)$$

Иными словами, коэффициенты ДПФ есть равноотстоящие отсчеты непрерывного спектра последовательности конечной длины на интервале частот $[0, 2\pi]$ (см. рисунок 3.4).

Заметим, что для математической строгости выражений типа (3.10) в них нужно по-разному обозначать функции справа и слева от знака равенства, например, вводить для них какую-то индексацию. Однако, чтобы не загромождать изложение, будем одинаково обозначать спектральные функции, но при этом принимать во внимание их разные аргументы.

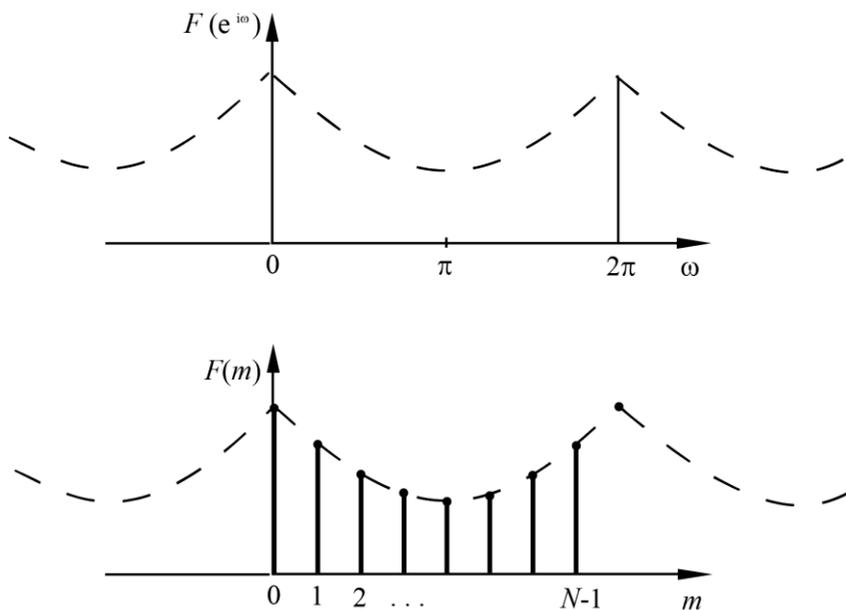


Рис. 3.4. Иллюстрация связи непрерывного спектра и ДПФ

3.2 Использование ДПФ для вычисления отсчетов непрерывного спектра

При цифровом спектральном анализе прикладной интерес представляют отсчеты непрерывного спектра. Если требуемое число отсчетов равно N – длине исходной последовательности, то они непосредственно определяются через ДПФ. Однако часто требуется более «детальный» анализ спектра, то есть получение большего, чем N , числа отсчетов. Дадим решение этой задачи.

Пусть имеется последовательность конечной длины:

$$f(n) = 0 \text{ при } n \notin [0, N-1]$$

и требуется определить L отсчетов ее непрерывного спектра $F(e^{i\omega})$, равномерно распределенных на интервале $[0, 2\pi]$, то есть на периоде спектра ($L > N$).

Преобразование Фурье (спектр) последовательности задается выражением (2.5), которое в данном случае записывается в виде:

$$F(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\omega n}. \quad (3.11)$$

Определим отсчеты спектра в L точках спектра (3.11), а именно, при значениях частоты $\omega_l = \frac{2\pi}{L}l$, $0 \leq l \leq L-1$:

$$F(e^{i\omega_l}) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{L}nl}. \quad (3.12)$$

С другой стороны, введем в рассмотрение новую последовательность длиной в L отсчетов:

$$f^*(n) = \begin{cases} f(n) & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & N \leq n \leq L-1. \end{cases} \quad (3.13)$$

И вычислим её L -точечное ДПФ:

$$F^*(l) = \sum_{n=0}^{L-1} f^*(n) e^{-i\frac{2\pi}{L}nl} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{L}nl}. \quad (3.14)$$

На последнем шаге преобразований здесь учтено, что, поскольку при $N \leq n \leq L-1$ последовательность (3.13) равна нулю, то пределы суммирования в (3.14) сужаются. Сравнивая выражения (3.12) и (3.14) видим, что

$$F\left(e^{i\omega l}\right) = F^*(l).$$

Таким образом, простое дополнение последовательности конечной длины нулями позволяет получить сколь угодно большое число отсчетов ее непрерывного спектра при помощи ДПФ.

3.3 Использование ДПФ для вычисления последовательности по ее спектру

Спектральный анализ дискретного сигнала основан на переходе от последовательности к ее спектру. Выше мы видели, что для вычисления любого числа отсчетов спектра можно использовать ДПФ. Однако в практических приложениях встречается и обратная задача, когда спектр задан, а требуется получить саму последовательность. Оказывается, для получения последовательности по спектру также можно использовать ДПФ (точнее, обратное ДПФ).

Для вычисления обратного ДПФ нужен не сам непрерывный спектр последовательности, а лишь его отсчеты, то есть дискретный спектр $F(m)$. Переход от непрерывного спектра к отсчетам («дискретизация» спектра) может повлиять на форму получаемой последовательности. Поэтому, чтобы получить искомым результат, нужно правильно выбирать значение N – длину ДПФ (число отсчетов непрерывного спектра). Рассмотрим эти вопросы детально.

Пусть $f(n)$ – произвольная последовательность (не обязательно конечной длины) и существует ее непрерывный спектр:

$$F(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-i\omega n}.$$

Имея $F(e^{i\omega})$, мы должны при помощи обратного ДПФ получить исходную последовательность $f(n)$.

В первую очередь произведем дискретизацию спектра. Для этого на интервале частот $[0, 2\pi)$ возьмем N равномерно расположенных отсчетов спектра, которые будем считать коэффициентами ДПФ:

$$F(m) = F(e^{i\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}, 0 \leq m \leq N-1. \quad (3.15)$$

От дискретного спектра $F(m)$ при помощи обратного ДПФ (3.5) можно перейти к самой последовательности. Но, как уже говорилось, при этом получается не исходная (произвольная) последовательность, а периодическая с периодом N :

$$f_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m)e^{i\frac{2\pi}{N}mn}. \quad (3.16)$$

Выясним, как связаны между собой $f(n)$ и $f_N(n)$. Для этого подставим в выражение (3.16) значения коэффициентов ДПФ (3.15) (при этом заменим индекс внутреннего суммирования):

$$\begin{aligned} f_N(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-i\frac{2\pi}{N}mk} \right] e^{i\frac{2\pi}{N}mn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}m(n-k)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Заметим, что в (3.17) внутренняя сумма при произвольных n, k :

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}m(n-k)} = \begin{cases} N & \text{при } n-k+rN=0 \\ 0 & \text{при } n-k+rN \neq 0 \end{cases} = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-k+rN),$$

где r – любое целое. Поэтому продолжая цепочку преобразований (3.17), получаем:

$$\begin{aligned} f_N(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-k+rN) = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \delta(n-k+rN) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n+rN). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Таким образом, периодическая последовательность, полученная при помощи обратного ДПФ из дискретизированного спектра непериодической последовательности, состоит из бесконечной суммы сдвинутых копий исходной последовательности.

Если длина последовательности $f(n)$ превышает N , то слагаемые в (3.18) имеют пересекающиеся области ненулевых значений, то есть возникает «эффект наложения». Для бесконечной последовательности эффект наложения есть всегда.

В случае последовательности конечной длины, чтобы эффекта наложения не было, следует выбрать N больше длины последовательности.

3.4 Основные свойства ДПФ

Дадим сводку некоторых свойств ДПФ, которые могут быть полезны в дальнейшем.

Свойство 1. *Линейность.* Если $f_1(n) \rightarrow F_1(m)$, $f_2(n) \rightarrow F_2(m)$ то, $a f_1(n) + b f_2(n) \rightarrow a F_1(m) + b F_2(m)$ при любых постоянных a, b . Здесь предполагается, что последовательности f_1 и f_2 имеют одинаковую длину.

Свойство 2. Периодичность (уже упоминалось выше). Последовательности, удовлетворяющие прямому ДПФ

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}$$

и, соответственно, обратному ДПФ

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn}$$

являются периодическими с периодом N . Такие последовательности удобно представлять не на числовой прямой, а на окружности, как показано на рисунке 3.5.

При таком представлении их можно рассматривать одновременно и как периодические, и как последовательности конечной длины на интервале $[0, N-1]$.

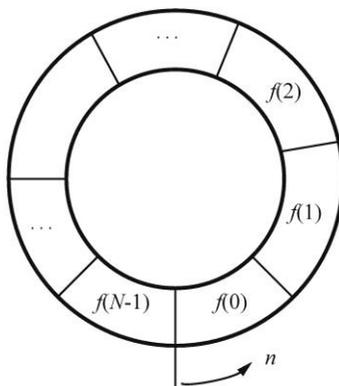


Рис. 3.5. Представление конечных последовательностей, удовлетворяющих ДПФ

Свойство 3. Сдвиг. Если последовательность $f(n)$ – периодична с периодом N и ее ДПФ – $F(m)$, то последовательность

$$f(n - n_0) \text{ имеет ДПФ } F(m) e^{-i\frac{2\pi}{N}n_0m}.$$

Следует учитывать особенности сдвига, если ДПФ применяется к последовательности конечной длины. В этом случае последовательность дополняется до периодической и осуществляется так называемый круговой («циклический») сдвиг. Если представить такую последовательность на окружности, то циклической сдвиг соответствует повороту окружности на n_0 точек.

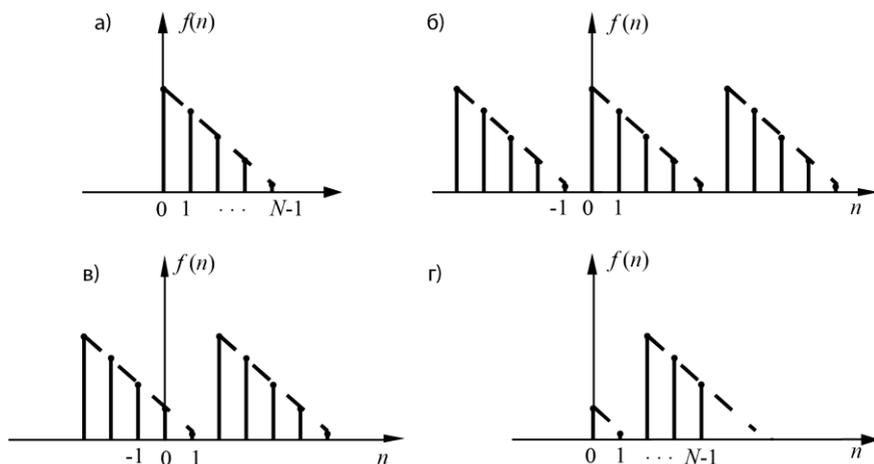


Рис. 3.6. Иллюстрация эффекта циклического сдвига

Эффект циклического сдвига для последовательности конечной длины, представленной на числовой оси, иллюстрирует рисунок 3.6. На рисунке 3.6а показана последовательность конечной длины, заданная на $[0, N - 1]$. При ДПФ последовательность считается периодически продолженной (см. рисунок 3.6б). При умножении ДПФ на экспоненту сдвигается именно периодическая последовательность, то есть мы получаем последовательность, показанную на рисунке 3.6в. И сдвинутая последовательность снова рассматривается на интервале $[0, N - 1]$, то есть в результате имеем последовательность конечной длины, показанную на рисунке 3.6г, в которой отсчеты, вышедшие в результате сдвига за пределы

интервала $[0, N - 1]$, например, как в данной иллюстрации, вправо, опять появляются на этом же интервале слева.

Свойство 4. *Циклическая свертка последовательностей.* Пусть $f(n)$ и $h(n)$ – периодические последовательности с периодом N и их ДПФ равны соответственно $F(m)$ и $H(m)$. Сформируем новое ДПФ, перемножив два имеющихся:

$$G(m) = F(m)H(m)$$

и вычислим обратное ДПФ от произведения. Полученная в результате этих действий последовательность $g(n)$ будет связана с исходными последовательностями следующим соотношением:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(n-k). \quad (3.19)$$

Выражение определяет так называемую *круговую (циклическую) свертку периодических последовательностей*.

Такое название становится понятным, если рассмотреть последовательности на окружностях (см. рисунок 3.7). Значения циклической свертки получаются поэлементным перемножением соответственных отсчетов на окружностях и последующим суммированием произведений. На рисунке 3.7а дана иллюстрация для вычисления $g(0)$:

$$g(0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(-k).$$

Различные значения отсчетов круговой свертки получаются при смещении одной окружности относительно другой (см. рисунки 3.7б и в):

$$g(1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(1-k), \quad \dots, \quad g(N-1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(N-1-k).$$

Очевидно, последовательность $g(n)$ также является периодической с периодом N . Рассматривается она на том же интервале $[0, N - 1]$, что и сворачиваемые последовательности.

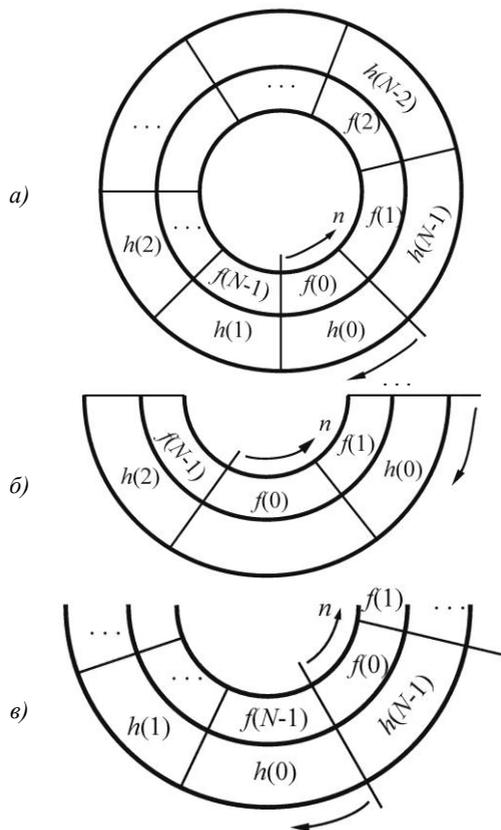


Рис. 3.7. Иллюстрация циклической свертки последовательностей

3.5 Вычисление линейной свертки при помощи ДПФ

Практический интерес при обработке сигналов представляет линейная (апериодическая) свертка последовательностей вида (1.13), которая не совпадает с циклической сверткой (3.19). Тем не

менее хотелось бы для получения линейной свертки применить ДПФ, поскольку это преобразование имеет очень эффективный алгоритм вычисления (см. далее п. 3.6). Возникает вопрос, как, производя вычисление циклической свертки последовательностей, получить результат, совпадающий с линейной сверткой. Рассмотрим решение этой задачи.

Пусть имеются две последовательности конечной (и, возможно, разной) длины

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 \quad \text{при } n \notin [0, N_1 - 1], \\ h(n) &= 0 \quad \text{при } n \notin [0, N_2 - 1]. \end{aligned}$$

и требуется вычислить их линейную свертку (см. также (1.13)):

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k). \quad (3.20)$$

Нетрудно убедиться, что последовательность (3.20) также имеет конечную длину в $(N_1 + N_2 - 1)$ отсчетов:

$$g(n) = 0 \quad \text{при } n \notin [0, N_1 + N_2 - 2].$$

С учетом этого согласимся получать вместо конечной последовательности – линейной свертки периодическую последовательность – циклическую свертку с тем условием, что на основном периоде (начинающемся с точки $n = 0$) они совпадут. Такое совпадение возможно, если период циклической свертки будет не меньше, чем длина линейной (то есть не меньше $N_1 + N_2 - 1$). Но для того, чтобы циклическая свертка имела заданный период, такой же период должны иметь сворачиваемые последовательности, и такую же длину должно иметь ДПФ, применяемое здесь по схеме, изложенной в свойстве 4 (см. предыдущий параграф). Поэтому исходные последовательности нужно дополнить нулями, как минимум до длины в $(N_1 + N_2 - 1)$ отсчетов и применять ДПФ такой же длины.

Благодаря дополнению нулями при циклической свертке ненулевые значения периода одной последовательности $f(n)$ будут взаимодействовать с ненулевыми значениями только одного периода второй последовательности $h(n)$. При этом полностью исключаются круговые наложения, характерные для циклической свертки.

Метод вычисления линейной свертки при помощи ДПФ, который иллюстрирован схемой на рисунке 3.8, получил название «быстрой свертки» в отличие от непосредственного суммирования произведений в соответствии с (3.20) («прямой» свертки).

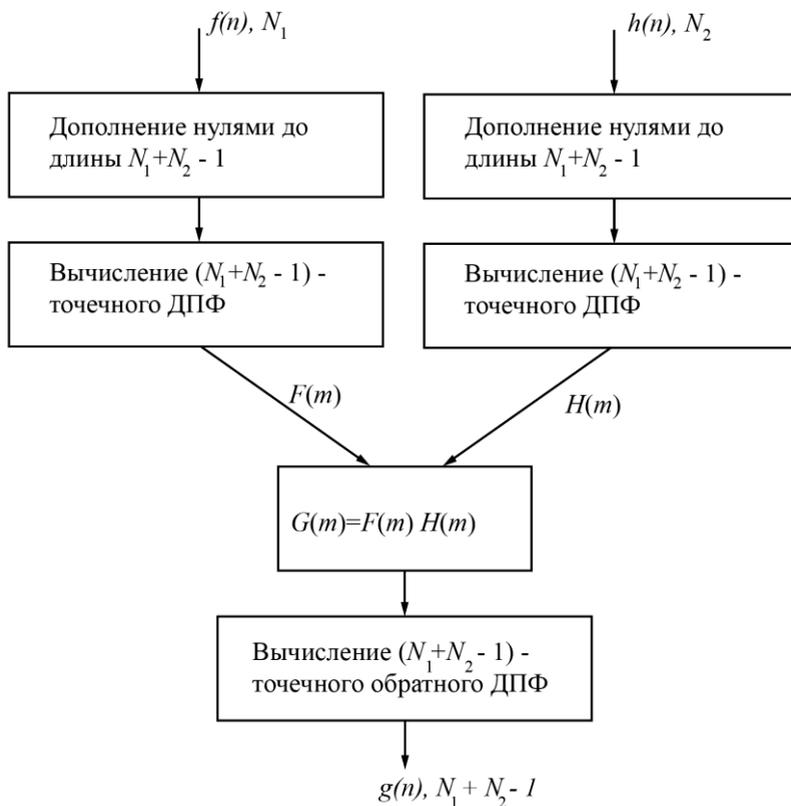


Рис. 3.8. Схема вычисления линейной свертки при помощи ДПФ

Термин «быстрая» здесь употреблен потому, что вычисление свертки через ДПФ более эффективно с точки зрения числа выполняемых арифметических операций. Выигрыш в эффективности начинается при длинах сворачиваемых последовательностей в несколько десятков отсчетов (20-30) и быстро растет с увеличением N_1 и N_2 .

3.6 Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим принцип построения алгоритмов вычисления ДПФ, обладающих малой вычислительной сложностью и называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Таких алгоритмов существует довольно много. Ниже показано, как строится так называемый алгоритм БПФ с прореживанием во времени, наиболее простой и наглядный.

Прямое дискретное преобразование Фурье (3.9) можно записать в виде

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w_N^{mn}, \quad (3.21)$$

где $w_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ – так называемый фазовый (поворачивающий) множитель. Если использовать векторное представление комплексного числа r на комплексной плоскости, то умножение этого числа на w_N поворачивает вектор вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $\frac{2\pi}{N}$ (см. рисунок 3.9).

Сформулируем некоторые очевидные свойства фазового множителя, которые нам понадобятся далее:

1) $w_N^{K+lN} = w_N^K$ при произвольном целом l , то есть степень w_N , рассматриваемая как показательная функция, периодична с периодом N ;

- 2) $w_N^N = 1$;
- 3) $w_N^{N/2} = -1$;
- 4) $w_N^2 = w_{N/2}$.

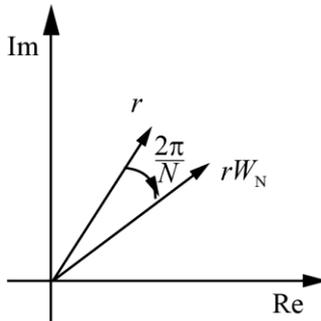


Рис. 3.9. Иллюстрация умножения комплексного числа на фазовый множитель

Поскольку дискретный спектр (3.21) рассматривается в N точках ($0 \leq m \leq N-1$), то если вычислять его непосредственно по формуле (3.21), считая, что фазовые множители получены заранее, потребуется N раз выполнить по N операций умножения и по $(N-1)$ операций сложения комплексных чисел. Так как преобразование вычисляется на ЭВМ, то общее время его выполнения (без учета служебных операций) равно:

$$T_{\text{ДПФ}} = N^2 T_y + N(N-1) T_c \approx N^2 (T_y + T_c), \quad (3.22)$$

где T_y – время выполнения операции комплексного умножения, T_c – время выполнения операции комплексного сложения. Квадратичный характер возрастания вычислительной сложности ДПФ и вызывает необходимость разработки алгоритмов БПФ.

Одна из основных идей БПФ заключается в том, что исходная N -точечная последовательность разбивается на несколько более коротких последовательностей, дискретные спектры которых мо-

гут быть скомбинированы таким образом, чтобы в итоге получилось ДПФ полной последовательности. В частности, можно разбить последовательность на две равные части по $N/2$ отсчетов. Тогда, если пренебречь затратами времени на объединение (комбинирование) частей

$$T_{\text{ДПФ}} \approx (T_y + T_c) \left(\frac{N}{2} \right)^2 \times 2 = (T_y + T_c) N^2 \frac{1}{2},$$

то есть имеем двукратный выигрыш во времени по сравнению с (3.22). Причем операцию разбиения можно повторять многократно, при этом выигрыш будет еще более значительным.

Реализуем идею разбиения для частного, но широко применяемого на практике случая, когда длина ДПФ равна целой степени двойки: $N = 2^M$. Напомним, что преобразованию подлежит последовательность $f(n)$, $0 \leq n \leq N-1$. Введем в рассмотрение две $N/2$ -точечные последовательности, состоящие из четных и нечетных членов исходной последовательности:

$$f_0(l) = f(2l), \quad f_1(l) = f(2l+1), \quad 0 \leq l \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (3.23)$$

Тогда N -точечное ДПФ разбивается на два слагаемых:

$$\begin{aligned} F(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w_N^{mn} = \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ \text{(по четным)}}}^{N-1} f(n) w_N^{mn} + \sum_{\substack{n=0 \\ \text{(по нечетным)}}}^{N-1} f(n) w_N^{mn} = \\ &= \sum_{l=0}^{N/2-1} f(2l) w_N^{2ml} + \sum_{l=0}^{N/2-1} f(2l+1) w_N^{m(2l+1)}, \end{aligned}$$

окончательно:

$$\begin{aligned}
 F(m) &= \sum_{l=0}^{N/2-1} f_0(l) \left(w_N^2\right)^{ml} + w_N^m \sum_{l=0}^{N/2-1} f_1(l) \left(w_N^2\right)^{ml} = \\
 &= \sum_{l=0}^{N/2-1} f_0(l) w_{N/2}^{ml} + w_N^m \sum_{l=0}^{N/2-1} f_0(l) w_{N/2}^{ml} = F_0(m) + w_N^m F_1(m),
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

где $F_0(m), F_1(m)$ – $N/2$ -точечные ДПФ последовательностей $f_0(n)$ и $f_1(n)$.

Дискретные спектры $F_0(m)$ и $F_1(m)$ определены при $0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$, однако нам нужно знать $F(m)$ при $0 \leq m \leq N - 1$. Поэтому нужно доопределить формулу (3.24) для интервала $\frac{N}{2} \leq m \leq N - 1$, используя свойство периодичности спектров:

$$\begin{cases} F(m) = F_0(m) + w_N^m F_1(m), \\ F\left(m + \frac{N}{2}\right) = F_0\left(m + \frac{N}{2}\right) + w_N^{m + \frac{N}{2}} F_1\left(m + \frac{N}{2}\right), \end{cases} \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1. \tag{3.25}$$

Заметим, что из свойств фазового множителя следует:

$$w_N^{m + \frac{N}{2}} = -w_N^m,$$

это позволяет в два раза сократить в (3.25) число используемых значений фазового множителя и записать окончательно:

$$\begin{cases} F(m) = F_0(m) + w_N^m F_1(m), \\ F\left(m + \frac{N}{2}\right) = F_0(m) - w_N^m F_1(m), \end{cases} \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1, \tag{3.26}$$

В этой формуле в обоих строках содержатся одинаковые значения дискретных спектров $F_0(m)$ и $F_1(m)$ и одинаковые значения фазовых множителей.

Полученное соотношение определяет операцию объединения «половинных» ДПФ в целое, которую часто изображают графически. Для этого приняты специальные обозначения. Вычисления по (3.26) требуют выполнения двух типов «элементарных» операций: сложение-вычитание пары чисел (так называемой «бабочки»): и умножения на постоянный множитель, который мы уже использовали ранее (см. рисунок 3.10).

В качестве примера на рисунке 3.11 изображена схема формирования 8-точечного ДПФ из двух ДПФ длины 4.

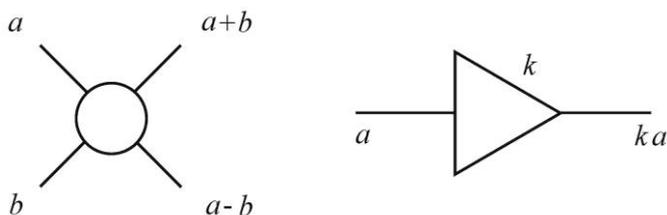


Рис. 3.10. Элементарные операции, используемые в ДПФ

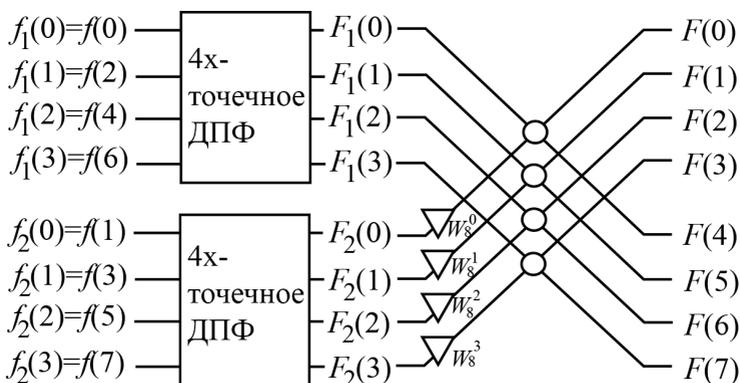


Рис. 3.11. Схема формирования 8 точечного ДПФ из двух 4-точечных

Используя аналогичную операцию разбиения (прореживания) вычислим каждое 4-точечное ДПФ через пару двухточечных. При этом обозначим:

$$f_{11}(n) - \text{четные члены} \quad f_1(n),$$

$$f_{12}(n) - \text{нечетные члены} \quad f_1(n),$$

$$f_{21}(n) - \text{четные члены} \quad f_2(n),$$

$$f_{22}(n) - \text{нечетные члены} \quad f_2(n).$$

Схема, соответствующая предпоследнему шагу преобразований, показанная на рисунке 3.11, имеет вид, изображенный на рисунке 3.12.

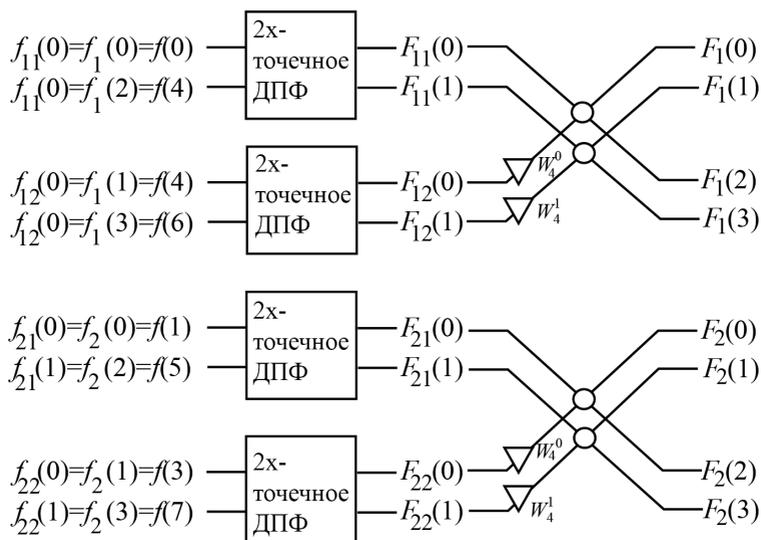


Рис. 3.12. Предпоследний шаг преобразования 8 точечной последовательности в ДПФ

И, наконец, двухточечное ДПФ может быть вычислено впрямую, так как показано на рисунке 3.13 для первого блока приведенной схемы. Здесь учтено, что $w_2^0 = 1$, поэтому преобразование выполняется без умножений:

$$F_{11}(0) = f_{11}(0) + f_{11}(1),$$

$$F_{11}(1) = f_{11}(0) - f_{11}(1).$$

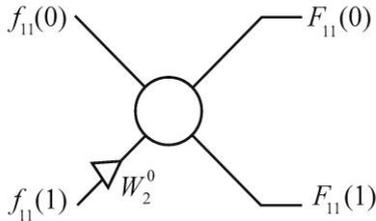


Рис. 3.13. Вычисление двухточечного ДПФ

На рисунке 3.14 изображена схема 8-точечного ДПФ полностью, в ней учтено известное свойство фазового множителя $w_{N/2} = w_N^2$, а также ради регулярности структуры показаны и тривиальные умножения. Аналогичную структуру имеет и схема БПФ для большего числа точек (равного целой степени двойки).

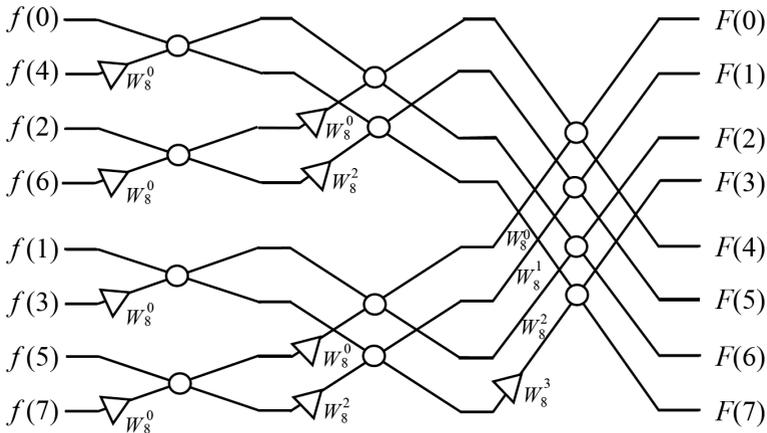


Рис. 3.14. Полная схема 8-ми точечного ДПФ

Произведем оценку вычислительной сложности такого алгоритма БПФ. Преобразование выполняется за $\log_2 N$ шагов. На

каждом шаге, очевидно, нужно выполнить N сложений (или вычитаний) и $N/2$ умножений. Поэтому время выполнения БПФ:

$$T_{\text{БПФ}} = \log_2 N \left[\frac{N}{2} T_y + N T_c \right] = N \log_2 N \left(\frac{T_y}{2} + T_c \right), \quad (3.27)$$

То есть $T_{\text{БПФ}}$ пропорционально $N \log_2 N$, что существенно меньше оценки (3.22). Относительный выигрыш от применения БПФ:

$$T_{\text{ДПФ}}/T_{\text{БПФ}} \text{ пропорционален } \frac{N}{\log_2 N} \text{ и растет с увеличением } N.$$

В завершение параграфа сделаем несколько замечаний.

Во-первых, из схемы БПФ видно, что дискретный спектр получается из последовательности с переставленными элементами. Перестановка (переупорядочение) данных – характерная особенность большинства алгоритмов БПФ. При $N = 2^M$ закон перестановки весьма прост: отсчеты входной последовательности должны быть расположены в двоично-инверсном порядке. Такой порядок определяется следующим образом. Нужно записать аргументы (номера) отсчетов последовательности в двоичном коде, используя M двоичных разрядов. Затем порядок следования разрядов инвертируется (заменяется на обратный). Получаемые после этого числа и будут являться порядковыми номерами отсчетов после перестановки.

На рисунке 3.15 показана схема двоично-инверсионного переупорядочения отсчетов для $N=8$, на нем же приведено двоичное представление номеров отсчетов до и после инверсии.

Если требуется обрабатывать последовательность, представленную в естественном порядке, нужно граф двоичной инверсии присоединить слева к рассмотренной ранее схеме БПФ.

Во-вторых, при использовании рассмотренного алгоритма не требуется дополнительной памяти ЭВМ кроме той, которая отведена под исходные данные (обрабатываемый массив). Результаты

всех промежуточных шагов вычислений, а также сам дискретный спектр можно размещать в той же памяти, что и входную последовательность. Подобные алгоритмы БПФ, в которых для входной и выходной последовательности, а также для промежуточных данных используется одна и та же область памяти, называются *алгоритмами БПФ с замещением*.

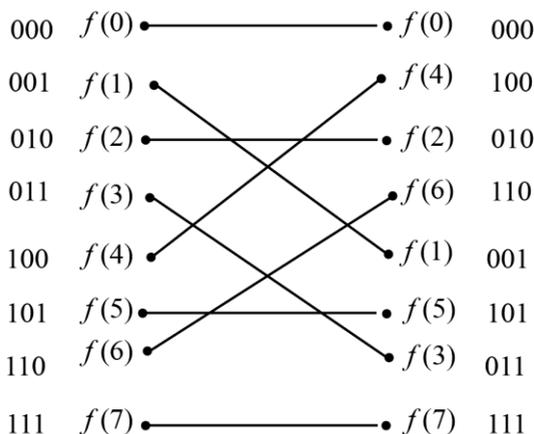


Рис. 3.15. Схема двоично-инверсионного переупорядочения отсчетов, используемая в ДПФ длины 8

В третьих, хотя мы рассмотрели алгоритм прямого ДПФ, все сказанное остается в силе и для обратного преобразования:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) w_N^{-mm} . \quad (3.27)$$

Обратное ДПФ вычисляется по тому же самому алгоритму БПФ, если в нем заменить w_N на w_N^{-1} , а в конце вычислений, разделить результат на N . То есть рассмотренный алгоритм БПФ обеспечивает вычисление как прямого, так и обратного преобразований.

3.7 Быстрая свертка на основе ДПФ и секционирования сигнала

Хорошо известен быстрый метод вычисления дискретной циклической свертки двух N -периодических последовательностей, основанный на применении дискретного преобразования Фурье:

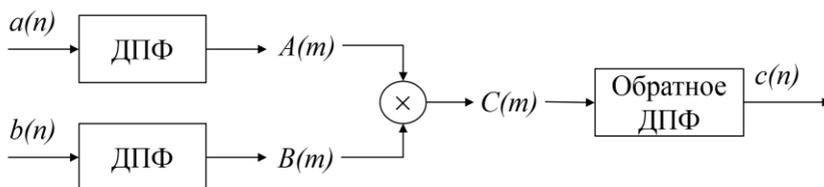


Рис. 3.16. Схема быстрой циклической свертки на основе ДПФ

Целесообразность использования данного метода базируется на наличии быстрых алгоритмов ДПФ, которые имеют «удельную» вычислительную сложность (число операций на отсчет сигнала) примерно пропорциональную $\log N$. Однако данный подход имеет ряд недостатков.

Во-первых, требуется получить периодическую свертку. Во-вторых, на практике часто встречается ситуация, когда длина преобразуемого сигнала во много раз превышает длину импульсной характеристики. В этом случае более эффективными являются методы секционированного вычисления свертки. Рассмотрим один из таких методов – метод перекрытия с накоплением, поскольку данный метод удобнее в программной реализации.

Суть метода перекрытия с накоплением заключается в следующем. Из обрабатываемой последовательности $x(n)$ выделяются блоки $x^{(l)}(n)$ размером N отсчетов с перекрытием в $M - 1$ точке:

$$x^{(l)}(n) = x[n + l(N - M + 1)], \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Далее с помощью ДПФ длины N вычисляется циклическая свертка каждого блока с импульсной характеристикой дополненной нулями и периодизированной.

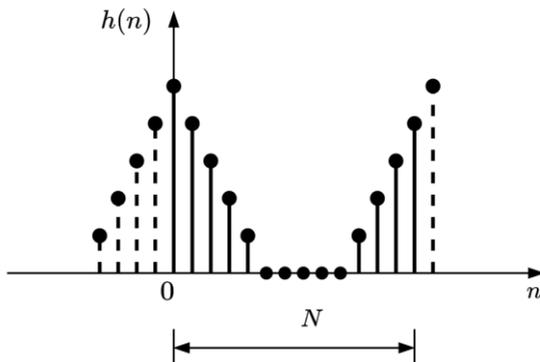


Рис. 3.17. Дополненная нулями и периодизированная импульсная характеристика

Поскольку импульсная характеристика $h(n)$ все время одна и та же, то ее ДПФ можно вычислить заранее. Таким образом в ходе получения циклических сверток используется только два преобразования: прямое и обратное для сигнала.

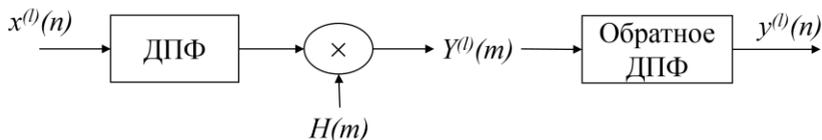


Рис. 3.18. Процесс применения ДПФ для вычисления свертки одной секции сигнала

В результате формируются выходные блоки $y^{(l)}(n)$, имеющие длину N . Поскольку импульсная характеристика конечна, искажениям из-за цикличности подвержены лишь крайние отсчеты выходных блоков (по M^+ и M^- с каждой стороны), а их средние $N - M + 1$ отсчетов в точности совпадают с искомыми элементами аperiodической свертки. Поэтому заключительным шагом преобразований является получение выходной последовательности из средних частей выходных блоков:

$$y[n+l(N-M+1)] = y^{(l)}(n), \quad M^+ \leq n \leq N - M^- - 1, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Графическая иллюстрация сказанному приведена на рисунке 3.19.

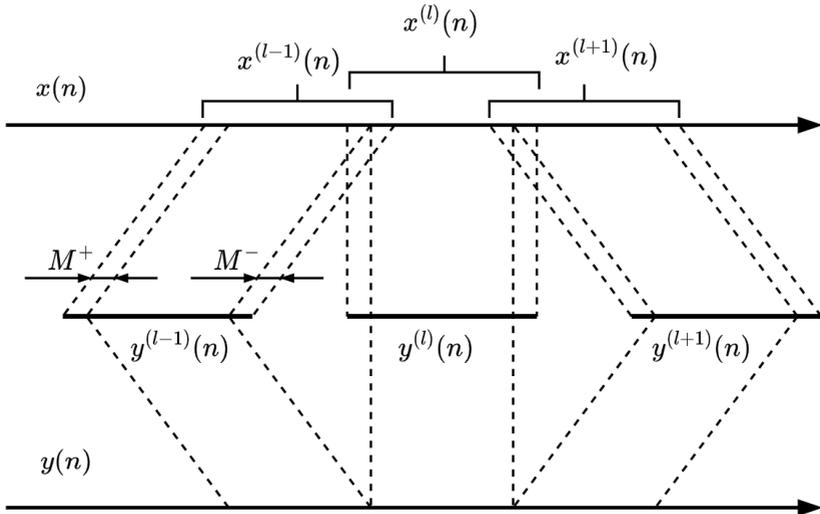


Рис. 3.19. Схема секционированной свертки

Таким образом, на каждые $N - M + 1$ отсчетов выходной последовательности вычисляется одна циклическая свертка длины N (два ДПФ и N умножений). Пусть это требует $S(N)$ арифметических операций. Тогда «удельная» сложность вычисления аperiodической свертки (реализации КИХ-фильтра) равна:

$$U(M, N) = \frac{S(N)}{N - M + 1}.$$

Эта величина служит критерием вычислительной эффективности описанной процедуры и должна быть минимизирована за счет:

- а) выбора наиболее быстрого алгоритма ДПФ длины N , используемого в циклической свертке;
- б) выбора оптимальной длины секции N .

Обычно удается получить $S(N)$: $N \log N$. При этом типичный вид зависимости $U(M, N)$ от N при фиксированном M выглядит примерно как показано на рисунке 3.20.

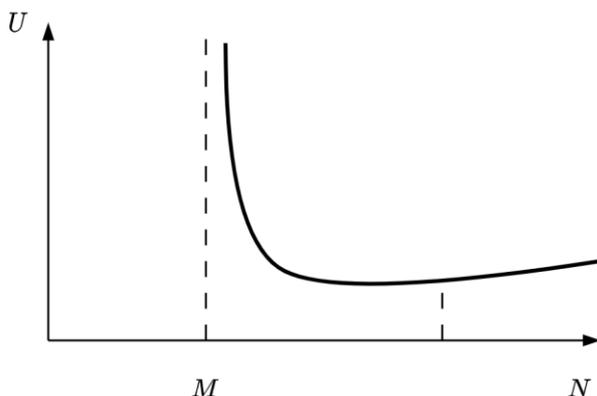


Рис. 3.20. Схематический вид зависимости «удельной» сложности вычисления секционированной свертки от длины секции N

Поэтому рекомендуется выбирать значение $N_{opt} \in [3M, 5M]$, причем гораздо опаснее занизить длину блока, чем завysить ее.

Описанный метод вычисления свертки легко обобщается на двумерный случай. Кроме того, он обеспечивает точное и достаточно быстрое вычисление свертки. Однако несмотря на наличие очень эффективных алгоритмов ДПФ это далеко не всегда решает проблему вычислительной сложности моделирования.

В случае, если имеется потребность дальнейшего ускорения моделирования, следует перейти к приближенному вычислению свертки, используя идею параллельной рекурсивной реализации КИХ-фильтров.

4 ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4.1 Прямое z-преобразование

При изучении дискретных сигналов и систем чрезвычайно полезным оказывается представление последовательностей при помощи z-преобразования. Прямым z-преобразованием последовательности f называется комплексная функция

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}, \quad (4.1)$$

где z – комплексная переменная. Ниже иногда будем использовать сокращенную запись (4.1) в форме $f(n) \xrightarrow{z} F(z)$. Множество значений z , для которых ряд (4.1) сходится, и, следовательно, z-преобразование существует и является конечным, называется *областью сходимости* z-преобразования. Область сходимости зависит от формы преобразуемой последовательности.

Часто в литературе z-преобразование вводится в форме:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}.$$

Это так называемое *одностороннее* z-преобразование, которое применяется для последовательностей, заданных только при $n \geq 0$. Выражение (4.1) задает более общее *двустороннее* z-преобразование. С математической точки зрения оно определяет разложение комплексной функции $F(z)$ в степенной ряд Лорана.

Если f – последовательность конечной длины, то есть $f(n) = 0$ при $n \notin [N_1, N_2]$, то z-преобразование вычисляется как сумма конечного числа слагаемых

$$F(z) = \sum_{k=N_1}^{N_2} f(n) z^{-n} . \quad (4.2)$$

Очевидно, что его область сходимости включает те значения z , при которых все слагаемые в сумме (4.2) конечны, то есть всю комплексную z -плоскость за исключением точки $z=0$, если $N_2 > 0$, и точки $z=\infty$, если $N_1 < 0$. Этот факт иллюстрирует Рисунок 4.1а, на котором область сходимости z -преобразования отмечена штриховкой (такой способ изображения областей сходимости будем использовать и в дальнейшем).

Для *полубесконечной левосторонней последовательности* ($f(n)=0$ при $n > N_2$):

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} f(n) z^{-n} . \quad (4.3)$$

В данном случае степенной ряд бесконечен по положительным степеням z . Известно, что такой ряд сходится в круге с центром в начале координат (рисунок 4.1б), то есть при

$$|z| < R_+ , \quad (4.4)$$

где R_+ – внешний радиус сходимости, некоторая постоянная. Вопрос о сходимости на границе области, то есть при $|z|=R_+$ должен исследоваться дополнительно для каждого конкретного ряда. Следует заметить, что, если $N_2 > 0$, то ряд (4.3) содержит и конечное число членов с отрицательными степенями z , в этом случае, очевидно, из области сходимости исключается точка $z=0$.

Для *полубесконечной правосторонней последовательности* ($f(n)=0$ при $n < N_1$) имеем бесконечный ряд по отрицательным степеням z :

$$F(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad (4.5)$$

Опираясь на предыдущий случай, легко показать, что ряд (4.5) сходится во внешней части круга (рисунок 4.1в):

$$|z| > R_-, \quad (4.6)$$

где R_- – внутренний радиус сходимости, а также, возможно, на самой границе области (то есть при $|z| = R_-$). Если $N_1 < 0$, то из области сходимости исключается точка $z = \infty$.

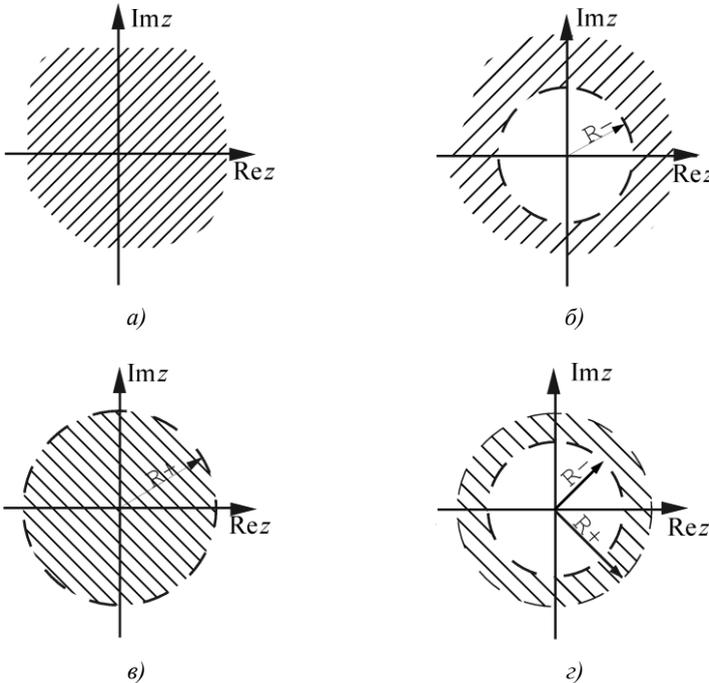


Рис. 4.1. Примеры различных областей сходимости для z -преобразования:
 а) конечной последовательности; б) правосторонней последовательности;
 в) левосторонней последовательности; г) двусторонней бесконечной последовательности

В общем случае, когда f – бесконечная двусторонняя последовательность, ее z -преобразование можно представить как сумму z -преобразований левосторонней и правосторонней последовательностей:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^N f(n)z^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)z^{-n}, \quad (4.7)$$

где N – произвольное целое число. Первое слагаемое в выражении (4.7) имеет область сходимости вида (4.4), второе слагаемое – область сходимости вида (4.6). Если $R_- < R_+$, то получаем, что полное z -преобразование сходится внутри кольца (рисунок 4.1г):

$$R_- < |z| < R_+ \quad (4.8)$$

и, возможно, на его границах. Если $R_- > R_+$, то области сходимости слагаемых в выражении (4.7) не пересекаются, и z -преобразование двусторонней последовательности не существует. Если $R_- = R_+$, то z -преобразование определено лишь тогда, когда оба слагаемых в выражении (4.7) сходятся на границах своих областей сходимости. Примером такого "экзотического" случая может служить z -преобразование последовательности $\frac{\sin \omega_0 n}{\pi n}$, сходящееся только на единичной окружности (см. таблицу 4.1, строку 14).

Следует заметить, что функция $F(z)$, если ее задать не через ряд, а в явном виде, может иметь смысл не только в области сходимости, но и на всей комплексной плоскости. Область сходимости начинает играть роль лишь тогда, когда мы связываем эту функцию с определенной последовательностью f , то есть пытаемся получить ее, суммируя ряд (4.1). Тогда при указании области сходимости соответствие последовательности и ее z -преобразования является взаимно однозначным. Одно и то же z -преобразование, но

с различными областями сходимости, соответствует разным последовательностям (см. таблицу 4.1, строки 5, 6 и 8, 9), поэтому при вычислении z -преобразований и манипуляциях с ними указание областей сходимости является обязательным.

Таблица 4.1. Z -преобразования некоторых последовательностей

№ п/п	Последовательность*	z -преобразование	Область сходимости z -преобразования
1	Единичный импульс $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1	Вся z -плоскость
2	$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	z^{-n_0}	$z \neq 0$ (при $n_0 > 0$) или $z \neq \infty$ (при $n_0 < 0$)
3	Единичный скачок $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
4	Прямоугольный импульс $u(n) - u(n - N), N > 0$	$1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$	$ z \neq 0$
5	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - a z^{-1}}$	$ z > a $
6	$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - a z^{-1}}$	$ z < a $
7	$n a^n u(n)$	$\frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$	$ z > a $
8	$(n + 1) a^n u(n)$	$\frac{1}{(1 - a z^{-1})^2}$	$ z > a $
9	$-(n + 1) a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{(1 - a z^{-1})^2}$	$ z < a $

Окончание табл. 4.1

№ п/п	Последовательность	z -преобразование	Область сходимости z -преобразования
10	$a^n u(n) + b^{-n} u(-n-1) =$ $= \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ b^{-n}, & n < 0, ab < 1 \end{cases}$	$\frac{1-ab}{(1-az^{-1})(1-bz)}$	$ a < z < \frac{1}{ b }$
11	$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^{ n },$ $ a < 1$	$\frac{1}{1-0,5a(z+z^{-1})}$	$\left \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} \right < z <$ $< \left \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \right $
12	$a^n \cos(\omega n + \phi) u(n)$	$\frac{\cos \phi - a \cos(\phi - \omega) z^{-1}}{1 - 2a(\cos \omega) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
13	$\frac{1}{n} u(n-1)$	$\ln \left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right)$	$ z \geq 1, z \neq 1$
14	$\frac{\sin \omega_0 n}{\pi n}, 0 < \omega < \pi$	$\begin{cases} 1, & \arg z < \omega_0 \\ 0, & \omega_0 < \arg z \leq \pi \end{cases}$	$ z = 1, \arg z \neq \omega_0$
15	$\frac{a^n}{n!} u(n)$	$\exp(-az^{-1})$	$z \neq 0$

* $a, b, \omega, \phi, \omega_0$ – константы.

Как следует из свойств степенных рядов, внутри области сходимости функция $F(z)$ является *аналитической*. Особые точки функции, в которых она теряет аналитичность, определяют границу области.

Важнейший класс z -преобразований представляют *дробно-рациональные функции*, то есть отношения полиномов от z или, что эквивалентно, от z^{-1} :

$$F(z) = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}}{\sum_{j=0}^M c_j z^{-j}}, \quad (4.9)$$

где $\{b_j\}, \{c_j\}$ – постоянные коэффициенты.

Особыми точками дробно-рациональной функции, которые могут ограничить область сходимости z -преобразования, являются *полюсы*, то есть те значения z , при которых она обращается в бесконечность. Очевидно, полюсы – это корни полинома в знаменателе $F(z)$. Введем в рассмотрение и нули дробно-рациональной функции – корни полинома в числителе. Разлагая полиномы на множители, можно привести формулу (4.9) к виду

$$F(z) = \frac{b_0 \prod_{j=1}^N (1 - q_j z^{-1})}{c_0 \prod_{j=1}^M (1 - p_j z^{-1})}, \quad (4.10)$$

где $\{q_j\}$ – нули, $\{p_j\}$ – полюсы.

При получении (4.10) предполагается, что коэффициенты b_0 и c_0 не равны нулю. В более общем случае, когда b_0, b_1, \dots, b_{N_1} и c_0, c_1, \dots, c_{M_1} все равны нулю ($N_1 < N, M_1 < M$), выражение (4.10) принимает вид:

$$F(z) = \frac{b_{N_1+1}}{c_{M_1+1}} z^{(M_1 - N_1)} \frac{\prod_{j=1}^{N-N_1} (1 - q_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{M-M_1} (1 - p_j z^{-1})},$$

здесь кроме нулей $\{q_j\}$ и полюсов $\{p_j\}$ имеется еще $(M_1 - N_1)$ -кратный нуль (если $M_1 > N_1$) или $(N_1 - M_1)$ -кратный полюс (если $N_1 > M_1$) в начале координат.

Как следует из формулы (4.10), дробно-рациональное z -преобразование с точностью до константы описывается расположением нулей и полюсов в z -плоскости. Диаграмма нулей и полюсов в сопоставлении с областью сходимости z -преобразования наглядно отражает основные качественные характеристики последовательности. Отметим, что область сходимости дробно-рационального z -преобразования никогда не включает границы, то есть соответствует строгим неравенствам (4.4), (4.6) или (4.8).

Пример 4.1. Вычислим z -преобразование правосторонней экспоненты $f(n) = a^n u(n)$. В соответствии с формулой (4.1), имеем

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n .$$

Этот ряд (геометрическая прогрессия) сходится, если $|az^{-1}| < 1$ или $|z| > |a|$. При этом

$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} .$$

Данное дробно-рациональное z -преобразование имеет единственный полюс в точке $z = a$ и единственный нуль в начале координат. Соответствующая ему диаграмма нулей и полюсов для вещественного положительного a приведена на рисунке 4.2 (на этом и следующих рисунках полюсы обозначаются крестиком, а нули – кружочком).

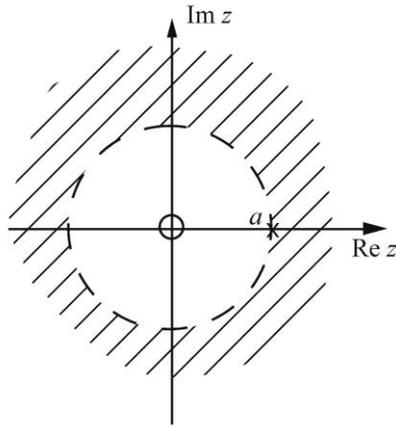


Рис. 4.2. Диаграмма нулей и полюсов для z -преобразования правосторонней экспоненты

Еще раз обратимся к выражению (4.1). Если комплексную переменную представить через модуль и фазу: $z = r e^{i\omega}$, то

$$F(z) = F(re^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) r^{-n} e^{-i\omega n}. \quad (4.11)$$

При $r = 1$ выражение (4.11) совпадает с (2.5), то есть z -преобразование превращается в спектр последовательности. Таким образом, спектр последовательности – это ее z -преобразование, вычисленное на единичной окружности (рисунок 4.3):

$$F(e^{i\omega}) = F(z) \Big|_{z=e^{i\omega}}. \quad (4.12)$$

Разумеется, выражение (4.12) имеет смысл только тогда, когда единичная окружность принадлежит области сходимости z -преобразования, то есть когда $R_- < 1$, и $R_+ > 1$, (см. формулы (4.4), (4.6), (4.8)). Если область сходимости не включает единичную окружность, то спектр последовательности не определен, однако z -преобразование существует. Следовательно,

z -преобразование является более общим средством описания последовательностей, чем спектр Фурье. Класс последовательностей, описываемых при помощи z -преобразования, включает не только затухающие в обе стороны последовательности, для которых сходится ряд (2.5), но и многие другие, не являющиеся ограниченными при устремлении аргумента к плюс или минус бесконечности.

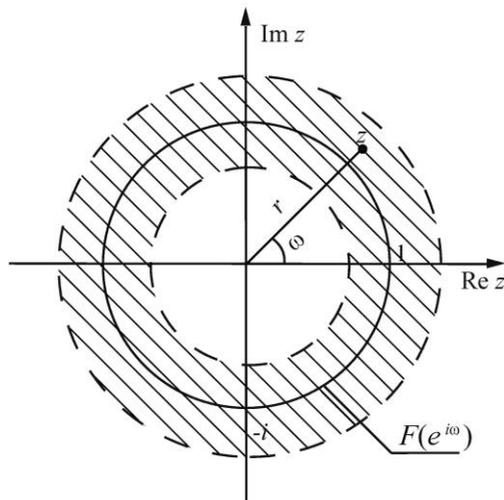


Рис. 4.3. Иллюстрация к интерпретации спектра последовательности

4.2 Основные свойства z -преобразования

Для работы с z -преобразованиями и, в частности, для вычисления z -преобразований последовательностей, не вошедших в приведенную выше таблицу, могут оказаться полезными следующие их свойства.

Свойство 1. Z -преобразование последовательности f существует, и ряд (4.1) сходится в кольце

$$R_- < |z| < R_+, \quad (4.13)$$

где R_- – неотрицательная, а R_+ – строго положительная константы ($R_- < R_+$), если

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(n)|} &= R_-, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(-n)|} &= R_+, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ означает верхний предел последовательности.

Напомним, что *верхним пределом действительной последовательности* $a(n)$ называется число A такое, что:

- 1) существует подпоследовательность данной последовательности, стремящаяся к A ;
- 2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое N , что $a(n) < A + \varepsilon$ при $n \geq N$.

Всякая последовательность имеет единственный (конечный или бесконечный) верхний предел. Верхний предел совпадает с пределом в обычном смысле, если последний существует.

На границах кольца, то есть при $|z| = R_-$ и $|z| = R_+$ z -преобразование может как сходиться, так и расходиться. Примем этот результат без доказательства, ограничившись его простотой интерпретацией. Пределы (4.14) означают, что абсолютные значения элементов последовательности могут, например, иметь экспоненциальную асимптотику:

$$\begin{aligned}|f(n)| &\sim A_1 R_-^n \text{ при } n \rightarrow \infty, \\ |f(n)| &\sim A_2 R_+^n \text{ при } n \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где A_1, A_2 – некоторые положительные числа.

Если $R_+ > R_- > 1$, то последовательность $|f(n)|$, является расходящейся, то есть $\lim_{n \rightarrow -\infty} |f(n)| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(n)| = \infty$.

Если $R_- < R_+ < 1$, то она сходится к нулю $\lim_{n \rightarrow -\infty} |f(n)| = \infty$,
 $\lim_{n \rightarrow -\infty} |f(n)| = 0$.

При $R_- < 1$ имеем затухающую в обе стороны последовательность $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |f(n)| = 0$, для которой выполняется условие абсолютной суммируемости (2.8).

Свойство 2. Z -преобразование линейно, то есть, если

$$f_1(n) \xrightarrow{z} F_1(z), \quad f_2(n) \xrightarrow{z} F_2(z),$$

то для любых постоянных a, b :

$$af_1(n) + bf_2(n) \xrightarrow{z} aF_1(z) + bF_2(z). \quad (4.15)$$

Справедливость соотношения (4.15) вытекает из самого определения z -преобразования (4.1). Областью сходимости суммы (4.15) является пересечение областей сходимости слагаемых. Исключения составляют ситуации, когда, например, при линейной комбинации дробно-рациональных z -преобразований появившиеся нули компенсируют некоторые полюсы. В этом случае область сходимости может расшириться (такой эффект имел место при переходе от z -преобразования единичного скачка к z -преобразованию прямоугольного импульса, см. таблицу 4.1, строки 3 и 4).

Свойство 3. Сдвиг последовательности соответствует умножению ее z -преобразования на целую степень z , а именно, если

$$f_2(n) = f_1(n - n_0), \quad (4.16)$$

то

$$F_2(z) = z^{-n_0} F_1(z). \quad (4.17)$$

Для доказательства достаточно подставить последовательность (4.16) в формулу (4.1) и заменить переменную при суммировании:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n-n_0)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)z^{-m-n_0} = \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)z^{-m} = z^{-n_0} F_1(z). \end{aligned}$$

При сдвиге последовательности область сходимости z -преобразования не изменяется за исключением, возможно, точек $z=0$ и $z=\infty$.

Свойство 4. Умножение последовательности на аргумент соответствует дифференцированию ее z -преобразования, а точнее, если

$$f_2(n) = nf_1(n), \quad (4.18)$$

то

$$F_2(z) = -z \frac{dF_1(z)}{dz}. \quad (4.19)$$

Докажем это, для чего запишем сумму (4.1) относительно последовательности f_1 и продифференцируем:

$$\frac{dF_1(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)z^{-n}.$$

Внутри области сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf_1(n)z^{-n} = \\ &= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_2(n)z^{-n} = -z^{-1} F_2(z), \end{aligned}$$

что эквивалентно соотношению (4.19). При умножении последовательности на аргумент область сходимости z -преобразования не меняется за исключением, возможно, точек границ области, на которых функция $F_1(z)$ теряет аналитичность.

Свойство 5. Умножение последовательности на экспоненту изменяет масштаб аргумента в z -преобразовании. Если $f_1(n) \xrightarrow{Z} F_1(z)$ с областью сходимости $R_- < |z| < R_+$ и

$$f_2(n) = a^n f_1(n), \quad (4.20)$$

то

$$F_2(z) = F_1(z/a) \quad (4.21)$$

с областью сходимости $|a|R_- < |z| < |a|R_+$. Для доказательства этого свойства подставим последовательность (3.20) в формулу (4.1):

$$F_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n f_1(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n) (z/a)^{-n} = F_1(z/a),$$

что и требуется получить. Область сходимости для $F_2(z)$ получается подстановкой z/a вместо z в неравенство для области сходимости $F_1(z)$.

Свойство 6. Инверсия (изменение знака) времени последовательности приводит к замене переменной z на z^{-1} в выражении z -преобразования, то есть, если $f_1(n) \xrightarrow{Z} F_1(z)$ с областью сходимости $R_- < |z| < R_+$ и

$$f_2(n) = f_1(-n), \quad (4.22)$$

то

$$F_2(z) = F_1(z^{-1}) \quad (4.23)$$

с областью сходимости $(1/R_+) < |z| < (1/R_-)$. Доказательство этого свойства сводится к подстановке последовательности (4.22) в формулу (4.1) и замене переменной при суммировании:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(-n)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)z^m = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)(z^{-1})^{-m} = F_1(z^{-1}). \end{aligned}$$

Область сходимости $F_2(z)$ получим, подставив z^{-1} вместо z в неравенство для области сходимости $F_1(z)$.

Свойство 7. Свертка последовательностей соответствует произведению их z -преобразований. Если

$$f_3(n) = f_1(n) * f_2(n), \quad (4.24)$$

то

$$F_3(z) = F_1(z)F_2(z). \quad (4.25)$$

Нетрудно провести доказательство этого свойства, с точностью до обозначений совпадающее с доказательством аналогичного свойства для спектров (см. п. 2.2). Областью сходимости $F_3(z)$ является пересечение областей сходимости $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Исключения составляют случаи компенсации полюсов $F_1(z)$ нулями $F_2(z)$ или наоборот, при которых область сходимости может расширяться.

4.3 Связь z -преобразования с ДПФ

В рамках данного учебного пособия мы рассматриваем три функциональных преобразования последовательностей: преобразование Фурье, ДПФ и z -преобразование. Эти преобразования вза-

имосвязаны. Связь непрерывного преобразования Фурье с ДПФ рассмотрена в п.3.1 (формула (3.10)), а с z -преобразованием – в п.4.1 (формула (4.12)). Легко установить и связь z -преобразования и ДПФ.

Пусть имеется последовательность конечной длины:

$$f(n) = 0 \text{ при } n \notin [0, N-1].$$

Вычислим ее z -преобразование (чтобы не было путаницы в обозначениях, будем индексировать его буквой z):

$$F_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)z^{-n}. \quad (4.26)$$

Сравнение выражений (3.9) и (4.26) сразу показывает, что коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины N равны значениям ее z -преобразования в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности в комплексной z -плоскости (см. рисунок 4.4):

$$F(m) = F_z(z) \Big|_{z=e^{i\frac{2\pi}{N}m}}, \quad 0 \leq m \leq N-1. \quad (4.27)$$

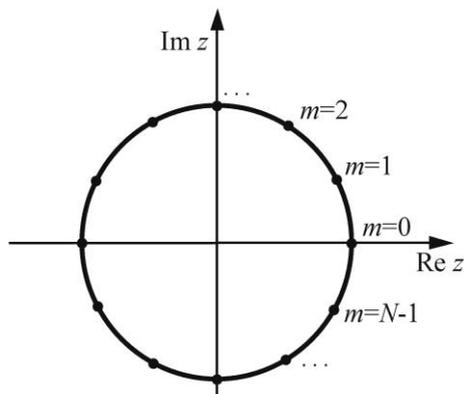


Рис. 4.4. Связь ДПФ и z -преобразования

Формула (4.27) задает простой способ определения ДПФ по z -преобразованию. Возможен и обратный переход, то есть определение z -преобразования по ДПФ:

$$\begin{aligned}
 F_z(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \right] z^{-n} = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1} \right)^n = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1} \right)^N}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1}} = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{F(m)}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1}}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Выражение (4.28) интерполирует значения коэффициентов ДПФ на всю комплексную z -плоскость.

4.4 Обратное z -преобразование

Установим правило перехода от z -преобразования к исходной последовательности. Соотношение для такого обратного z -преобразования можно вывести из интегральной теоремы Коши, из которой следует, что

$$\oint_C z^{k-1} dz = 2\pi i \delta(k), \tag{4.29}$$

где интеграл берется против часовой стрелки по замкнутому контуру C , охватывающему начало координат комплексной z -плоскости. Умножим обе части выражения (4.1) на z^{k-1} и проинтегрируем по C , выбрав контур так, чтобы он полностью лежал внутри области сходимости z -преобразования:

$$\oint_C F(z)z^{k-1} dz = \oint_C z^{k-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} dz.$$

Равномерно сходящийся на C ряд можно интегрировать почленно, поэтому с учетом формул (4.29) и (1.18) имеем

$$\begin{aligned} \oint_C F(z)z^{k-1} dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \oint_C z^{k-n-1} dz = \\ &= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(k-n) = 2\pi i f(k). \end{aligned}$$

Отсюда следует окончательное соотношение для обратного z -преобразования:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z)z^{k-1} dz, \quad (4.30)$$

где C – контур, окружающий начало координат с направлением обхода против часовой стрелки и расположенный в области сходимости $F(z)$.

Практически взять интеграл (4.30) можно несколькими способами. Если подынтегральная функция

$$W(z) = F(z)z^{n-1} \quad (4.31)$$

является аналитической во всей внутренней области контура, за исключением конечного числа особых точек, то универсальный способ вычисления дает *теорема о вычетах*. В соответствии с ней, интеграл (4.31) определяется через сумму вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C W(z) dz = \sum_{j=1}^N \text{Res}[W(z), z = p_j] \quad (4.32)$$

где N – число особых точек внутри контура C , $\{p_j\}$ – особые точки, $\text{Res}[W(z), z = p_j]$ – вычет функции $W(z)$ в точке $z = p_j$.

Для функции $W(z)$, имеющей своими особыми точками полюсы, вычеты вычисляются следующим образом. Если полюс в точке $z = p_j$ простой, то есть $W(z)$ можно представить в виде

$$W(z) = \frac{U(z)}{z - p_j},$$

где $U(z)$ – функция, не имеющая особенностей (аналитическая) в точке $z = p_j$, то

$$\operatorname{Res}[W(z), z = p_j] = \lim_{z \rightarrow p_j} [(z - p_j)W(z)] = U(p_j). \quad (4.33)$$

Если полюс в точке $z = p_j$ l -кратный, то есть:

$$W(z) = \frac{U(z)}{(z - p_j)^l}, \quad l \geq 2,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[W(z), z = p_j] &= \frac{1}{(l-1)!} \lim_{z \rightarrow p_j} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} [(z - p_j)^l W(z)] = \\ &= \frac{1}{(l-1)!} \left. \frac{d^{l-1} U(z)}{dz^{l-1}} \right|_{z=p_j}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Выражения (4.32) – (4.34) позволяют находить, в частности, обратные z -преобразования для дробно-рациональных функций $F(z)$.

Пример 4.2. Вычислим последовательность, соответствующую z -преобразованию $F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ с областью сходимости $|z| > |a|$.

Согласно соотношению (4.31), в данном случае

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz.$$

Контур интегрирования C должен располагаться в области сходимости, то есть вне круга радиуса $|a|$ с центром в начале координат. При $n \geq 0$ подынтегральная функция $W(z) = \frac{z^n}{z-a}$ имеет один простой полюс в точке $z = a$. При $n < 0$ появляется второй полюс кратности $(-n)$ в начале координат. Взаимное расположение области сходимости, контура интегрирования и обоих полюсов показано на рисунке 4.5. Как видно, оба полюса охватываются контуром. В соответствии с выражениями (4.32) и (4.33) при $n \geq 0$:

$$f(n) = \text{Res} \left[\frac{z^n}{z-a}, z=a \right] = a^n.$$

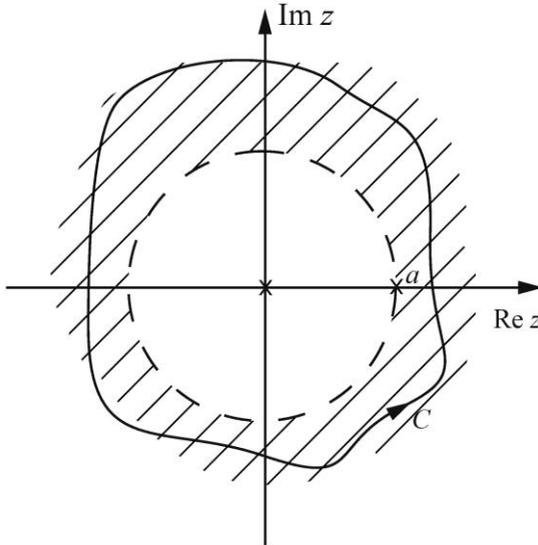


Рис. 4.5. Взаимное расположение области сходимости, контура интегрирования и полюсов: иллюстрация к примеру

При $n < 0$ последовательность определяется как сумма двух вычетов, значение первого из которых уже найдено:

$$\begin{aligned} f(n) &= \operatorname{Res} \left[\frac{z^n}{z-a}, z=a \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{z^n}{z-a}, z=0 \right] \\ &= a^n + \operatorname{Res} \left[\frac{z^n}{z-a}, z=0 \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Найдем вычет в начале координат. При $n = -1$ полюс в $z = 0$ простой, и поэтому $\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z(z-a)}, z=0 \right] = -a^{-1}$. При $n = -2$ полюс двукратный. В соответствии с выражением (4.35):

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^n}{z^2(z-a)}, z=0 \right] = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-a} \right) \Bigg|_{z=0} = - \frac{1}{(z-a)^2} \Bigg|_{z=0} = -a^{-2}.$$

Для произвольного отрицательного n получается:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{z^n}{z^{(-n)}(z-a)}, z=0 \right] &= \frac{1}{(-n-1)!} \frac{d^{(-n-1)}}{dz^{(-n-1)}} \left(\frac{1}{z-a} \right) \Bigg|_{z=0} \\ &= \frac{(-1)^{(-n-1)}}{(z-a)^{(-n)}} \Bigg|_{z=0} = -a^n. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Таким образом, подставив выражение (4.36) в формулу (4.35), при $n < 0$ имеем $f(n) = a^n - a^n = 0$.

Окончательный результат:

$$f(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = a^n u(n).$$

Конец примера.

Непосредственное вычисление обратного z -преобразования методом вычетов может оказаться весьма трудоемким, особенно если у функции $F(z)$ имеется много особых точек. На практике чаще используют обходной путь, приводя $F(z)$ к представлению в виде суммы простых функций, обратные z -преобразования которых известны. Так, для дробно-рациональной функции $F(z)$ общего вида (3.9) применяется ее разложение на простые дроби:

$$F(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = A(z^{-1}) + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{l_j} \frac{C_{jk}}{(1 - p_j z^{-1})^k}, \quad (4.37)$$

где $P(z^{-1}), Q(z^{-1}), A(z^{-1})$ – полиномы от z^{-1} , M – общее число полюсов, l_j – кратность полюса p_j , C_{jk} – постоянные коэффициенты. Слагаемое A в разложении (3.34) присутствует, если степень полинома P не меньше степени полинома Q , и определяется алгебраическим делением P на Q . Значения постоянных C_{jk} можно найти методом неопределенных коэффициентов (см. пример ниже). Выражение (4.37) позволяет представить произвольную дробно-рациональную функцию через сумму табличных z -преобразований.

При переходе от выражения (4.37) к самой последовательности следует обращать особое внимание на взаимное расположение полюсов z -преобразования и его области сходимости общего вида (4.8). Как уже отмечалось, именно полюсы определяют радиусы области сходимости. Простая дробь

$$\frac{C_{jk}}{(1 - p_j z^{-1})^k}$$

соответствует последовательности правосторонней, если $|p_j| \leq R_-$, и левосторонней, если $|p_j| \geq R_+$. Область сходимости такого эле-

ментарного z -преобразования будет определяться соответственно неравенством $|z| > |p_j|$ или $|z| < |p_j|$.

Пример 4.3. Определим последовательность, соответствующую z -преобразованию

$$F(z) = \frac{1-ab}{(1-bz)(1-az^{-1})}, \quad |ab| < 1 \quad (4.38)$$

с областью сходимости

$$|a| < |z| < \frac{1}{|b|}. \quad (4.39)$$

Для этого запишем выражение (4.38) в виде отношения полиномов по отрицательным степеням z :

$$F(z) = \frac{\left(a - \frac{1}{b}\right)z^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{b}z^{-1}\right)} \quad (4.40)$$

а затем, учитывая наличие полюсов в точках $z=a$ и $z=1/b$, произведем разложение на простые дроби:

$$F(z) = \frac{C_1}{1-az^{-1}} + \frac{C_2}{1-\frac{1}{b}z^{-1}}. \quad (4.41)$$

где C_1, C_2 – неопределенные коэффициенты. Для отыскания C_1 и C_2 приведем выражение (4.41) к общему знаменателю и сравним его с записью (4.40):

$$\frac{C_1 - \frac{1}{b}C_2 z^{-1} + C_2 - aC_2 z^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{b}z^{-1}\right)} = \frac{\left(a - \frac{1}{b}\right)z^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{b}z^{-1}\right)}.$$

Приравнявая в числителях коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -\frac{1}{b}C_1 - aC_2 = a - \frac{1}{b}, \end{cases}$$

решение которой дает: $C_1 = 1, C_2 = -1$, то есть

$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{a - \frac{1}{b}z^{-1}} = F_1(z) + F_2(z). \quad (4.42)$$

Первое слагаемое $F_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ имеет полюс в точке $z=a$,

расположенной на внутренней границе кольца сходимости (4.39), как показано на рисунке 4.6. Следовательно, оно соответствует правосторонней последовательности и имеет область сходимости $|z| > |a|$.

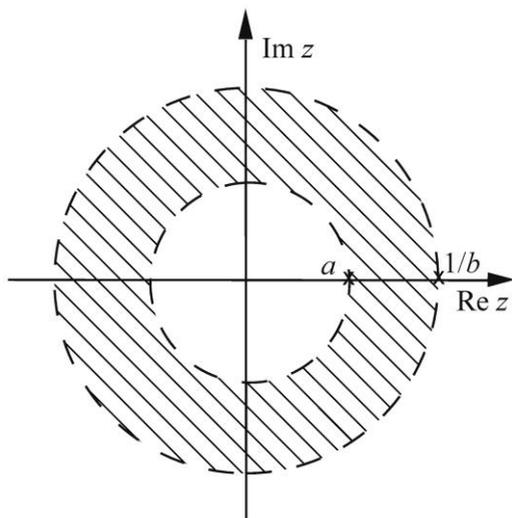


Рис. 4.6. Расположение полюсов: иллюстрация к примеру

Из таблицы 4.1 z -преобразований получаем:

$$f_1(n) = a^n u(n).$$

Второе слагаемое в сумме (4.42)

$$F_2(z) = \frac{-1}{a - \frac{1}{b}z^{-1}}$$

имеет полюс в точке $z=1/b$, расположенной на внешней границе кольца сходимости (4.39). Следовательно, оно соответствует левосторонней последовательности и имеет область сходимости $|z| < 1/|b|$. Из таблицы 4.1 z -преобразований: $f_2(n) = b^{-n} u(-n-1)$.

В силу линейности z -преобразования окончательный результат получаем в виде

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) = a^n u(n) + b^{-n} u(-n-1) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ b^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Конец примера.

4.5 Анализ и синтез ЛИС-систем с использованием z -преобразования

Определим *передаточную функцию* дискретной ЛИС-системы как z -преобразование ее импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}. \quad (4.43)$$

Передаточная функция является еще одной формой описания ЛИС-системы, она однозначно определяет закон преобразования входной последовательности в выходную. Действительно, учитывая соответствие формул (4.24) и (4.25), свертку (1.14) можно записать в z -области в виде

$$G(z) = F(z)H(z), \quad (4.44)$$

где $G(z), F(z)$ – z -преобразования выходной и входной последовательностей. Область сходимости $G(z)$ состоит как минимум из пересечения областей сходимости $F(z)$ и $H(z)$.

Выражение, аналогичное (4.44), мы имели и раньше при описании ЛИС-системы в частотной области (см. формулу (2.7)). Это естественно, ведь в соответствии с соотношением (4.12) частотная характеристика системы есть ее передаточная функция (а спектр дискретного сигнала – его z -преобразование) при значениях переменной z , взятых на единичной окружности в комплексной z -плоскости. Однако понятие передаточной функции существенно шире понятия частотной характеристики, поскольку применимо и к неустойчивым ЛИС-системам, для которых ряд (4.43) не сходится на единичной окружности.

Передаточную функцию нетрудно получить непосредственно из разностного уравнения ЛИС-системы. Покажем это на примере физически реализуемой системы, описываемой разностным уравнением (1.26). Используя сформулированные в п. 4.2 свойства 2 и 3 z -преобразования (линейность и сдвиг последовательности), уравнение (1.26) можно записать в преобразованной форме:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{j=1}^M a_j G(z) z^{-j} + \sum_{j=0}^N b_j F(z) z^{-j} = \\ &= G(z) \sum_{j=1}^M a_j z^{-j} + F(z) \sum_{j=0}^N b_j z^{-j} \end{aligned}$$

Отсюда легко выражается $G(z)$ в явном виде:

$$G(z) = F(z) \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}}{1 - \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}}. \quad (4.45)$$

Сопоставив выражения (4.45) и (4.44), видим, что

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^N b_j z^{-j}}{1 - \sum_{j=1}^M a_j z^{-j}} . \quad (4.46)$$

Полученная передаточная функция $H(z)$ отличается от записи (4.9) только обозначениями коэффициентов в знаменателе, то есть является дробно-рациональной. Нетрудно показать, что ЛИС-системы, допускающие представление в виде разностных уравнений конечного порядка, всегда имеют дробно-рациональные передаточные функции.

Заметим, что переход от уравнения (1.26) к (4.45) по существу определяет метод решения линейных разностных уравнений с помощью z -преобразования. В отличие от громоздкого и неуниверсального метода прямой подстановки, в данном случае можно получить результат в общем виде и не указывать начальные значения для участвующих в решении последовательностей (предполагается, что они являются бесконечными, то есть заданы для всех значений дискретного времени).

Пример 4.4. На вход ЛИС-системы первого порядка, описываемой разностным уравнением (1.27), поступает сигнал – правосторонняя экспонента:

$$f(n) = b^n u(n), \quad b \neq a . \quad (4.47)$$

Определим последовательность на выходе системы. Для этого перейдем от разностного уравнения к передаточной функции:

$$G(z) = aG(z)z^{-1} + F(z) ,$$

$$G(z) = F(z) \frac{1}{1 - az^{-1}} , \quad (4.48)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (4.49)$$

Передаточная функция имеет один полюс в точке $z=a$ и соответствует правосторонней импульсной характеристике (так как система физически реализуема). Следовательно, область сходимости $H(z)$ – внешняя часть круга: $|z| > |a|$. Определив по таблице z -преобразований соответствующую передаточной функции (4.49) импульсную характеристику

$$h(n) = a^n u(n),$$

можно записать решение разностного уравнения во временной области в виде свертки:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(n-k),$$

что совпадает с выражением (1.30). Однако в данном случае нам известна входная последовательность, поэтому можно конкретизировать результат. Для последовательности (4.47) из таблицы находим

$$F(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|. \quad (4.50)$$

Подставив формулы (4.49) и (4.50) в (4.44), получим

$$G(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}, \quad |z| > \max\{|a|, |b|\}.$$

После разложения $G(z)$ на простые дроби имеем

$$G(z) = \frac{a}{a-b} \times \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{b}{a-b} \times \frac{1}{1 - bz^{-1}}. \quad (4.51)$$

Сопоставление полюсов функции $G(z)$ с ее областью сходимости показывает, что оба слагаемых в выражении (4.51) соответ-

ствуют правосторонним последовательностям. После перехода от (4.51) к последовательности получаем окончательный результат

$$g(n) = \frac{a}{a-b} a^n u(n) - \frac{b}{a-b} b^n u(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} u(n).$$

Конец примера.

Выполняя последовательность преобразований (1.26) в (4.46) в обратном порядке, можно перейти от дробно-рациональной передаточной функции к разностному уравнению. Это открывает простую возможность синтеза структуры ЛИС-системы с заданной импульсной характеристикой.

Пример 4.5. Построим структурную схему ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = a^n \left(\cos \frac{\pi}{2} n \right) u(n). \quad (4.52)$$

С помощью таблицы 4.1 перейдем от характеристики (4.52) к передаточной функции системы:

$$H(z) = \frac{1}{1+a^2 z^{-2}}, \quad |z| > |a|.$$

В соответствии с выражением (4.44)

$$G(z) = F(z)H(z) = F(z) \frac{1}{1+a^2 z^{-2}}$$

или

$$G(z) \left(1 + a^2 z^{-2} \right) = F(z),$$

$$G(z) = -a^2 G(z) z^{-2} + F(z).$$

Последнему соотношению во временной области соответствует разностное уравнение

$$g(n) = -a^2 g(n-2) + f(n). \quad (4.53)$$

Структурная схема системы, описываемой разностным уравнением (4.53), представлена на рисунок 4.7.

Конец примера.

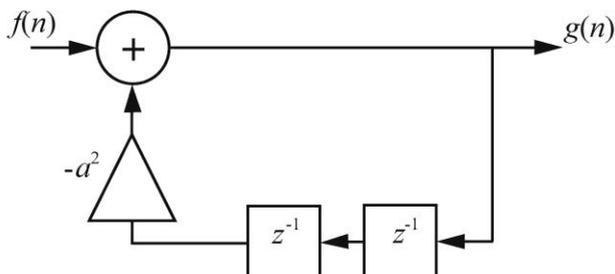


Рис. 4.7. Структурная схема, описываемая разностным уравнением (3.50)

Формулу (4.44) можно использовать и для определения передаточной функции ЛИС-системы по известным сигналам на входе и выходе, то есть для синтеза системы, осуществляющей заданное преобразование:

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)}, \quad (4.54)$$

а также для определения входного сигнала по известным выходному сигналу и передаточной функции:

$$F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}. \quad (4.55)$$

При этом, однако, следует учитывать, что соотношения (4.54) и (4.55) не всегда позволяют однозначно определить последовательность h и f соответственно, так как во многих случаях можно произвольно назначать область сходимости и, следовательно, получать правосторонние, левосторонние или двусторонние последовательности.

Пример 4.6. Определим, какую последовательность f нужно подать на вход ЛИС–системы с импульсной характеристикой $h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$, чтобы получить на выходе $g(n) = 3u(n)$.

Перейдем к z -преобразованиям:

$$H(z) = 1 + 2z^{-1}, \quad z \neq 0; \quad G(z) = \frac{3}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

В соответствии с формулой (4.55) z -преобразование входной последовательности

$$F(z) = G(z) \frac{1}{H(z)} = \frac{3}{1-z^{-1}} \frac{1}{1+2z^{-1}}. \quad (4.56)$$

Для первого сомножителя в выражении (4.56) область сходимости известна ($|z| > 1$). Для второго ее можно назначить либо внутри окружности, проходящей через полюс в точке $z = -2$, либо вне ее. В первом случае область сходимости $F(z)$ – кольцо: $1 < |z| < 2$, то есть f будет двусторонней последовательностью. Во втором случае область сходимости $F(z)$ – внешняя часть круга: $|z| > 2$, то есть f – правосторонняя последовательность. Таким образом, задача имеет два решения:

а) f – двусторонняя последовательность:

$$F(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{1+2z^{-1}};$$

$$1 < |z| < 2 \quad |z| > 1 \quad |z| < 2$$

$$f(n) = u(n) - 2(-2)^n u(-n-1);$$

б) f – правосторонняя последовательность:

$$F(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{1+2z^{-1}};$$

$$|z| > 2 \quad |z| > 1 \quad |z| > 2$$

$$f(n) = \left[1 + 2(-2)^n \right] u(n) .$$

Конец примера.

Ранее было сформулировано условие устойчивости ЛИС-системы, выраженное как требование абсолютной суммируемости ее импульсной характеристики (см. формулу (1.24)). То же условие можно выразить и как требование к передаточной функции системы. Имеется простая взаимосвязь между расположением полюсов на z -плоскости, областью сходимости передаточной функции и такими свойствами системы, как устойчивость и физическая реализуемость. Неравенство (1.24) означает, что ряд (4.43) абсолютно сходится на единичной окружности, а такое возможно, если единичная окружность расположена в области сходимости ряда. Следовательно, ЛИС-система является устойчивой, если область сходимости передаточной функции содержит внутри себя окружность единичного радиуса на z -плоскости.

Как уже говорилось, область сходимости дробно-рационального z -преобразования ограничена полюсами. Если ЛИС-система физически реализуема, то есть ее импульсная характеристика является правосторонней последовательностью, удовлетворяющей условию (1.21), то область сходимости передаточной функции – внешняя часть круга, проходящего через наиболее удаленный от начала координат полюс. Такая система устойчива, если все полюсы ее передаточной функции лежат внутри единичной окружности. Пример диаграммы полюсов для устойчивой физически реализуемой системы дан на рисунке 4.8.

Отметим, наконец, следующее: в соответствии с формулами (1.19), (1.20) и свойствами z -преобразования при последовательном соединении N ЛИС-систем (звеньев) передаточная функция объединенной системы

$$H(z) = \prod_{j=1}^N H_j(z) , \quad (4.57)$$

где $H_j(z)$ – передаточная функция j -го звена, а при параллельном соединении

$$H(z) = \sum_{j=1}^N H_j(z) . \quad (4.58)$$

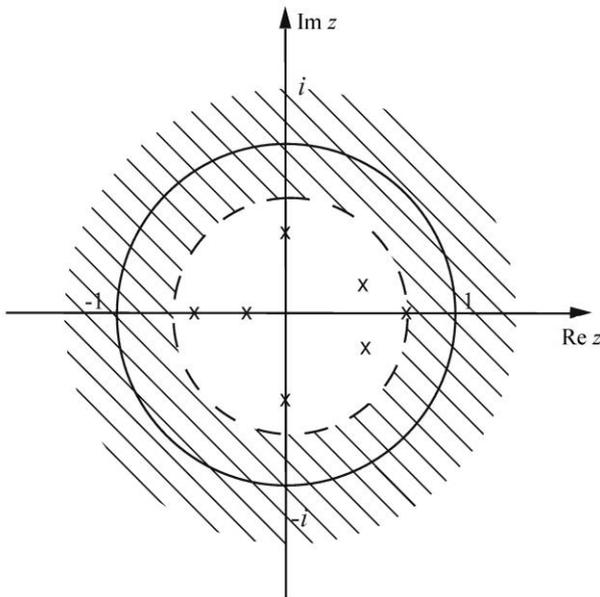


Рис. 4.8. Диаграмма полюсов для устойчивой физически реализуемой ЛИС-системы

Соотношение (4.57) используется при реализации системы в последовательной (каскадной) форме, а соотношение (4.58) – в параллельной. Представление дробно-рациональной передаточной функции в виде (4.57) легко получить, выразив ее через нули и полюсы (см. формулу (4.10)), а представление в виде суммы (4.58) – разложив ее на простые дроби (см. формулу (4.37)).

5 ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

5.1 Общая постановка задачи

Линейным цифровым фильтром принято называть ЛИС-систему, реализуемую с помощью некоторого арифметического устройства (компьютера или спецвычислителя). В практических приложениях чаще всего фильтрация выражается в том, что некоторые составляющие спектра сигнала проходят через ЛИС-систему без изменений, а некоторые подавляются (устраняются). Поэтому требования к фильтру обычно задаются в частотной области, а именно: при расчете фильтра требуется обеспечить заданную форму частотной характеристики системы. Поскольку на практике точное решение задачи синтеза ЛИС-системы с нужной частотной характеристикой зачастую оказывается недостижимым, обычно речь идет о ее приближенном решении, т.е. об аппроксимации (приближении) требуемой частотной характеристики частотной характеристикой ЛИС-системы, имеющей приемлемую сложность реализации.

При построении цифрового фильтра обычно используются ЛИС-системы с вещественными импульсными характеристиками, данное обстоятельство равносильно тому, что частотную характеристику цифрового фильтра достаточно определить на интервале $[0, \pi]$ ввиду ее симметрии. Поэтому задача построения цифрового фильтра сводится к поиску ЛИС-системы, аппроксимирующей заданную частотную характеристику на интервале $[0, \pi]$.

Различают нерекурсивные и рекурсивные цифровые фильтры.

Нерекурсивный цифровой фильтр – это такой фильтр, в котором каждый отсчет выходной последовательности вычисляется как взвешенная сумма отсчетов входной последовательности. Вообще говоря, данное свойство справедливо для любых ЛИС-

систем, так как выходная последовательность всегда задается как свёртка импульсной характеристики с входной последовательностью (см. также (1.13)):

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) f(n-k). \quad (5.1)$$

Однако, выражение (5.1) определяет фильтр, который невозможно построить на практике. Поскольку при реализации фильтра можно суммировать только конечное число входных отсчетов, причем не опережающих выходной сигнал по времени, физически реализуемый нерекursивный фильтр должен иметь импульсную характеристику конечной длины, отличающуюся от нуля только при неотрицательных значениях аргумента:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) f(n-k),$$
$$h(n) = 0, \quad n \notin [0, N-1].$$

Таким образом, нерекursивный цифровой фильтр – это то же самое, что и введенная в п.1.2 ЛИС-система с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр).

Рекурсивный цифровой фильтр – это фильтр, для которого отсчет выходной последовательности формируется с учетом предыдущих выходных отсчетов. Физически реализуемые рекурсивные фильтры описываются разностными уравнениями вида (1.26).

Рекурсивные фильтры являются в общем случае фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтрами).

В настоящем учебном пособии будет рассматриваться только проектирование КИХ-фильтров, имеющих ряд важных реализационных преимуществ, о которых будет сказано позднее. О проектировании БИХ-фильтров можно прочесть в специальной литературе, например [1].

5.2 Задача проектирования КИХ-фильтров

Как уже было сказано, КИХ-фильтр – это ЛИС-система с импульсной характеристикой $h(n) = 0, n \notin [0, N-1]$.

Передаточная функция КИХ-фильтра имеет вид:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \\ &= h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(N-1)z^{-(N-1)}. \end{aligned}$$

Частотная характеристика получается из передаточной функции при $z = e^{i\omega}$ и представляет собой полином степени $N-1$ от $e^{-i\omega}$.

$$H(e^{i\omega}) = h(0) + h(1)e^{-i\omega} + \dots + h(N-1)e^{-i\omega(N-1)}.$$

В результате расчета цифрового фильтра требуется обеспечить заданную (идеальную) частотную характеристику – $H_u(e^{i\omega})$, которая, в общем случае, не является полиномом степени $N-1$ от $e^{i\omega}$. Поэтому задача проектирования КИХ-фильтра заключается в аппроксимации функции $H_u(e^{i\omega})$ степенным полиномом $(N-1)$ -ого порядка. В результате этой аппроксимации определяются коэффициенты полинома, то есть значения импульсной характеристики фильтра $h(0), \dots, h(N-1)$.

Дополнительные ограничения на эти значения возникают, если требуется обеспечить линейную фазу частотной характеристики. Такое требование бывает очень полезным в прикладных задачах, поскольку обеспечивает просто задержку (сдвиг) выходного (отфильтрованного) сигнала относительно входного, без какой-либо дополнительной деформации результата фильтрации. Рас-

смотрим этот вопрос подробнее. Будем считать, что импульсная характеристика фильтра вещественна, тогда его частотная характеристика имеет вид

$$\begin{aligned} H(e^{i\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)[\cos \omega n - i \sin \omega n] = \\ &= \operatorname{Re} H(e^{i\omega}) + i \operatorname{Im} H(e^{i\omega}), \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} H(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n$, $\operatorname{Im} H(e^{i\omega}) = -\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n$.

Требование к линейности фазы частотной характеристики записывается в виде

$$\arg H(e^{i\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} H(e^{i\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{i\omega})} = -\alpha\omega.$$

где α – некоторая константа. Взяв тангенс от обеих частей последнего соотношения, получим

$$\frac{\operatorname{Im} H(e^{i\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{i\omega})} = -\operatorname{tg} \alpha\omega.$$

Тогда, с учетом выражений для действительной и мнимой части частотной характеристики фильтра получим

$$\frac{\operatorname{Im} H(e^{i\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{i\omega})} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n} = \operatorname{tg} \alpha\omega = -\frac{\sin \alpha\omega}{\cos \alpha\omega}. \quad (5.2)$$

Будем рассматривать (5.2) как уравнение относительно $h(n)$. Найдем решение данного уравнения.

Случай 1. Если $\alpha = 0$, то $\operatorname{tg} \alpha \omega = 0$ и $\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n = 0$. Един-

ственное решение этого уравнения выглядит так

$$h(n) = \begin{cases} \text{const}, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Этот случай не представляет практического интереса, поскольку соответствует отсутствию фильтра.

Случай 2. Если $\alpha \neq 0$, то можно перекрестно перемножить члены уравнения (5.2):

$$\cos \alpha \omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n = \sin \alpha \omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n.$$

Тогда получаем

$$\cos \alpha \omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n - \sin \alpha \omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\sin \omega n \cos \alpha \omega - \sin \alpha \omega \cos \omega n] = 0.$$

В итоге получаем

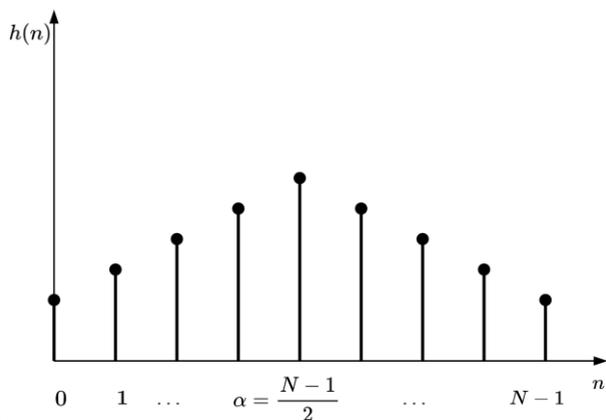
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(n - \alpha) \omega = 0. \quad (5.3)$$

Выражение (5.3) должно быть справедливо для любых значений ω .

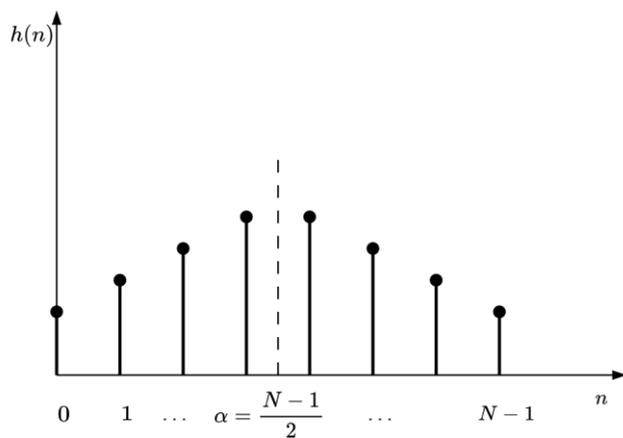
Можно показать, что одно из решений этого уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{N-1}{2}; \\ h(n) = h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Решение (5.4) означает, что импульсная характеристика фильтра с линейной фазой частотной характеристики симметрична. Примеры графиков КИХ-фильтров с линейной фазой приведены на рисунке 5.1. При этом параметр α приобретает понятный смысл величины сдвига отфильтрованного сигнала относительно входного.



а)



б)

Рис. 5.1. Примеры графиков импульсной характеристики фильтра с линейной фазой: а) для нечетных N ; б) для четных N

5.3 Усечение импульсной характеристики идеального фильтра

Рассмотрим простую процедуру, позволяющую получить КИХ-фильтр. Пусть заданы требования к модулю идеальной частотной характеристики – $|H_u(e^{i\omega})|$. Будем считать саму частотную характеристику вещественной и неотрицательной. Тогда

$$H_u(e^{i\omega}) = |H_u(e^{i\omega})|.$$

Определим по идеальной частотной характеристике идеальную импульсную характеристику. Как известно, частотная и импульсная характеристики связаны между собой преобразованием Фурье (см. формулы (2.5) и (2.6)).

В силу того, что частотная характеристика $H_u(e^{i\omega})$ вещественна, идеальная импульсная характеристика $h_u(n)$ получается симметричной относительно начала координат, то есть является четной функцией, рисунок 5.2.

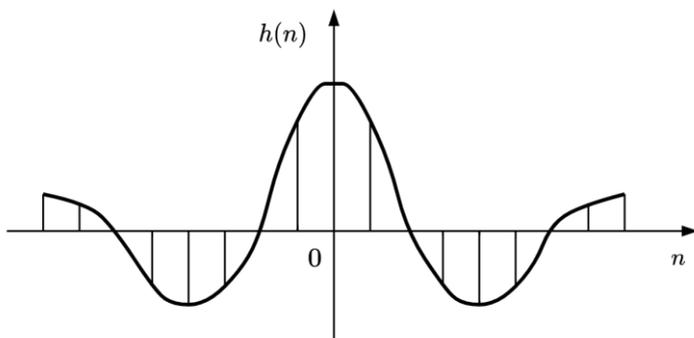


Рис. 5.2. Пример симметричной идеальной импульсной характеристики

Однако такая импульсная характеристика не годится для построения фильтра, так как в общем случае она не ограничена в обе стороны, т.е. не является конечной импульсной характеристикой, и

не равна нулю при $n < 0$, т.е. соответствующая ей ЛИС-система не является физически реализуемой.

Если временно отложить в сторону вопрос физической реализуемости, то, чтобы получить КИХ-фильтр, импульсную характеристику $h_u(n)$ нужно ограничить с обеих сторон, т.е. произвести ее «усечение». Произведем такое усечение идеальной импульсной характеристики так, чтобы в ней осталось только N отсчетов, симметрично расположенных относительно начала координат. Получим новую импульсную характеристику

$$\bar{h}(n) = \begin{cases} h_u(n), & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Очевидно, что N здесь приходится брать нечетным. Пример усечения импульсной характеристики показан на рисунке 5.3.

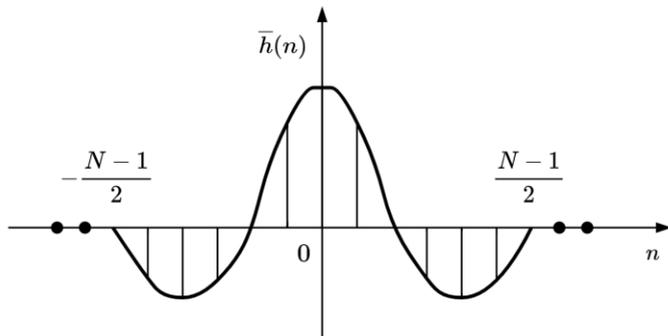


Рис. 5.3. Пример усечения импульсной характеристики

Импульсная характеристика (5.5) уже соответствует КИХ-системе. Ее частотная характеристика имеет вид:

$$H(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} h_u(n) e^{-i\omega n}. \quad (5.6)$$

Функция (5.6) аппроксимирует идеальную частотную характеристику. Точность этой аппроксимации всегда можно рассчитать. Если она нас удовлетворяет, то осуществляется последний шаг синтеза КИХ-фильтра: для обеспечения его физической реализуемости усеченная импульсная характеристика сдвигается на $\frac{N-1}{2}$ отчетов вправо:

$$h(n) = \bar{h}\left(n - \frac{N-1}{2}\right).$$

При этом получаем искомую импульсную характеристику физически реализуемого КИХ-фильтра, см. рисунок 5.4.

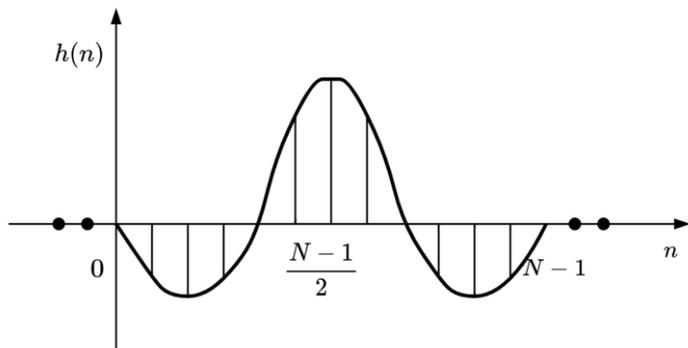


Рис. 5.4. Пример импульсной характеристики КИХ-фильтра

Указанный сдвиг приведет к задержке сигнала на выходе фильтра на $\frac{N-1}{2}$ отсчетов, т.е. у частотной характеристики появится линейная фаза:

$$\arg H(e^{j\omega}) = -\alpha\omega,$$

где $\alpha = \frac{N-1}{2}$ — фазовая задержка.

Данный метод построения КИХ-фильтра очень прост. Однако, на практике им воспользоваться не удастся из-за одного неприятного обстоятельства. Усечение импульсной характеристики вызывает неприемлемое искажение частотной характеристики, которое называется эффектом Гиббса. Этот эффект выражается в появлении выбросов и колебаний в окрестностях точек резкого изменения или разрыва на аппроксимируемой идеальной частотной характеристике. Иллюстрация эффекта Гиббса на примере фильтра низких частот (ФНЧ) приведена на рисунке 5.5.

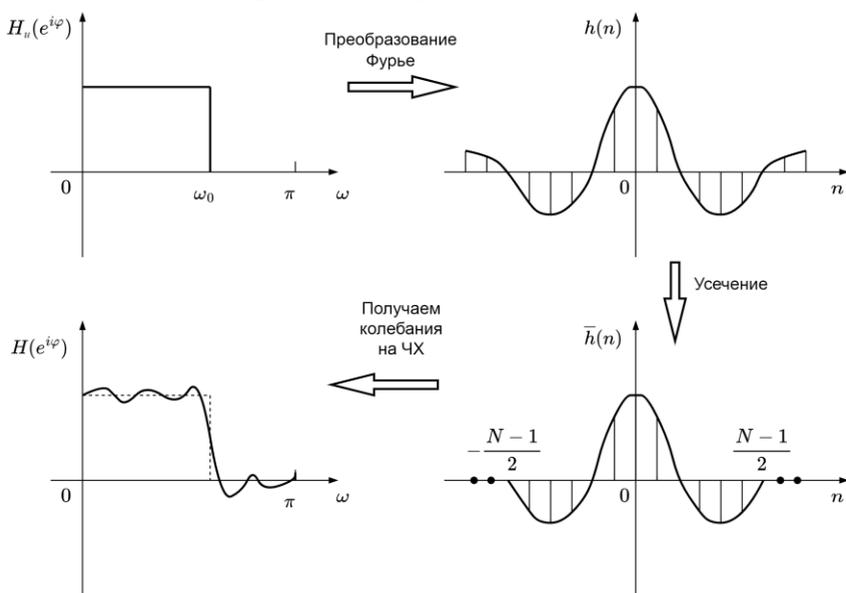


Рис. 5.5. Эффект Гиббса для фильтра низких частот

Для ФНЧ со ступенчатой идеальной частотной характеристикой, показанной на рисунке выше, амплитуда таких колебаний составляет около десяти процентов от значения частотной характеристики в полосе пропускания. Причем, колебания не уменьшаются и при увеличении длины импульсной характеристики КИХ-фильтра растет лишь частота колебаний, рисунок 5.6.

Понятно, что если требования к точности аппроксимации достаточно высоки, то рассматриваемый метод построения КИХ-фильтра не годится. Нельзя ли его усовершенствовать? Для того, чтобы понять, как можно избавиться от эффекта Гиббса, разберемся в его причине.

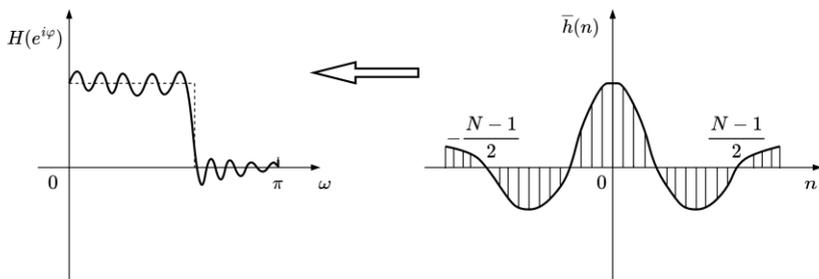


Рис. 5.6. Эффект возрастания частоты колебаний при увеличении числа отчетов импульсной характеристики

Усечение импульсной характеристики можно рассматривать как её умножение на функцию прямоугольного окна:

$$\bar{h}(n) = h_u(n)v(n),$$

где

$$v(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}. \end{cases}$$

Учтем, что последовательности $\bar{h}(n)$ соответствует спектр $H(e^{i\omega})$, последовательности $h_u(n)$ соответствует спектр $H_u(e^{i\omega})$, последовательности $v(n)$ соответствует спектр:

$$V(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-i\omega n}.$$

Введем замену $k = n + \frac{N-1}{2}$, тогда $n = k - \frac{N-1}{2}$ и с учетом последнего выражения получим

$$\begin{aligned}
 V(e^{i\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega\left(k - \frac{N-1}{2}\right)} = e^{i\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\omega k} = \\
 &= e^{i\omega\frac{N-1}{2}} \frac{1 - e^{-i\omega N}}{1 - e^{-i\omega}} = e^{i\omega\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{e^{-i\omega\frac{N}{2}} \left(e^{i\omega\frac{N}{2}} - e^{-i\omega\frac{N}{2}} \right)^{-i\omega N}}{e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}} \right)} .
 \end{aligned}$$

То есть,

$$V(e^{i\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} . \quad (5.7)$$

Примерный вид функции (5.7) на интервале $[0, 2\pi]$ показан на рисунке 5.7.

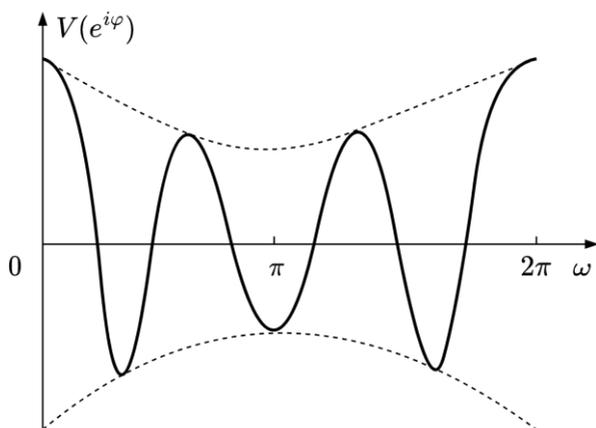


Рис. 5.7. Примерный вид спектра прямоугольного окна

Из рисунка 5.7 видно, что функция (5.7) имеет ярко выраженный колебательный характер. Если увеличить N , то частота колебаний возрастет, но их амплитуда не уменьшится, см. рисунок 5.8.

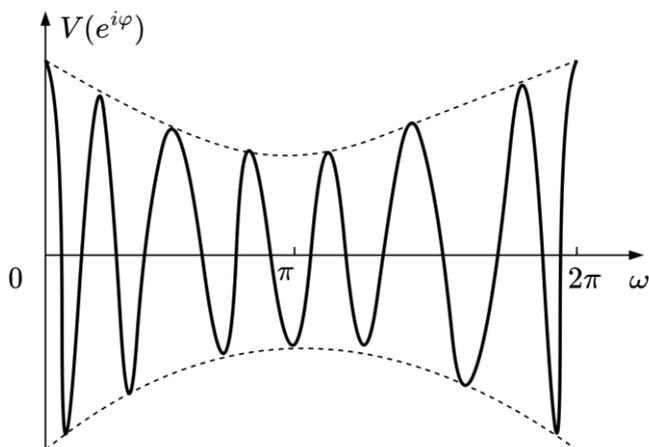


Рис. 5.8. Примерный вид спектра прямоугольного окна с увеличением N

Нам известно свойство преобразования Фурье, что произведение последовательностей соответствует циклической свертке их спектров, т.е. в наших обозначениях, если

$$\bar{h}(n) = h_u(n) \cdot v(n),$$

то

$$H(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_u(e^{i\varphi}) V(e^{i(\omega-\varphi)}) d\varphi.$$

Частотная характеристика КИХ-фильтра равна свёртке требуемой (идеальной) частотной характеристики со спектром функции окна. Это качественно объясняет эффект Гиббса. Поскольку спектр функции окна имеет колебательный характер, то колебания проникают и в результат свёртки.

Эффекта Гиббса можно было бы избежать, если бы функция $V(e^{i\omega})$ не имела вредных колебаний. Однако такому спектру будет соответствовать не прямоугольное окно, а какое-то другое.

Таким образом, мы подошли к другому (уже практически используемому) методу расчета КИХ-фильтров – методу взвешивания.

5.4 Метод взвешивания

Идея метода взвешивания заключается в том, что импульсная характеристика проектируемого КИХ-фильтра получается умножением импульсной характеристики идеального фильтра на некоторую весовую функцию окна:

$$\bar{h}(n) = h_u(n) \cdot v(n).$$

То есть общая схема расчета, описанная выше, сохраняется, только $v(n)$ не прямоугольное, а некое другое окно.

Функция окна должна отвечать следующим требованиям:

1) она должна быть ограничена по аргументу:

$$v(n) = 0, \quad |n| > \frac{N-1}{2}.$$

2) спектр функции окна должен иметь по возможности малые колебания («боковые лепестки»), рисунок 5.9, так как именно они являются причиной эффекта Гиббса.

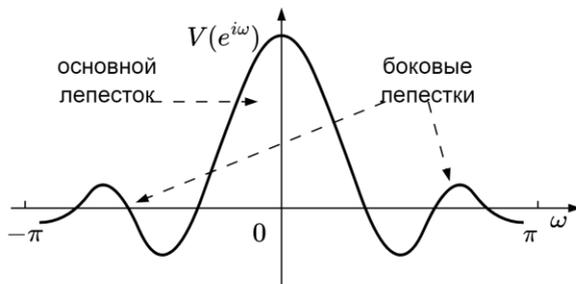


Рис. 5.9. Расположение «основного и боковых лепестков» в спектре

3) спектр функции окна должен быть по возможности более узким. Рассмотрим пример на рисунке 5.10.

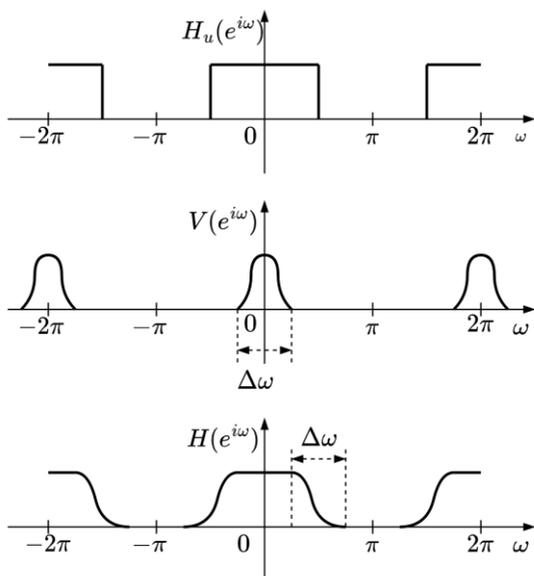


Рис. 5.10. Пример влияния функции окна на частотную характеристику фильтра

Из рисунка 5.10 видно, что частотная характеристика фильтра «размывается» по сравнению с идеальной. Появляется переходная полоса, ширина которой в первом приближении равна ширине спектра («главного лепестка», рисунок 5.9) функции окна. Желательно, чтобы переходные полосы были как можно более узкими.

Следует сказать, что сформулированные требования к функции окна являются противоречивыми. Поэтому задача выбора хорошего окна оказывается весьма сложной.

Приведем два примера функций окна.

1) прямоугольное окно (оно уже было выше):

$$v(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}. \end{cases}$$

Функция прямоугольного окна и ее спектр показаны на рисунках 5.11-5.12. Ширина «главного лепестка» составляет $\frac{4\pi}{N}$. «Боковые лепестки» большие, и из-за них возникает эффект Гиббса.

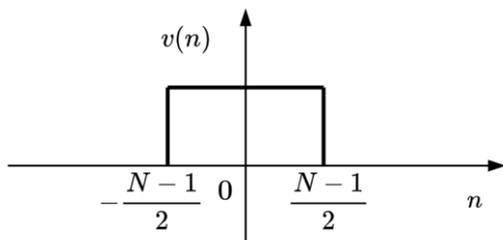


Рис. 5.11. Функция прямоугольного окна

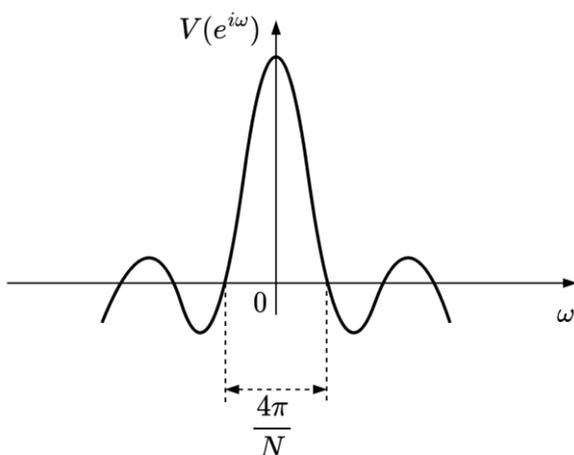
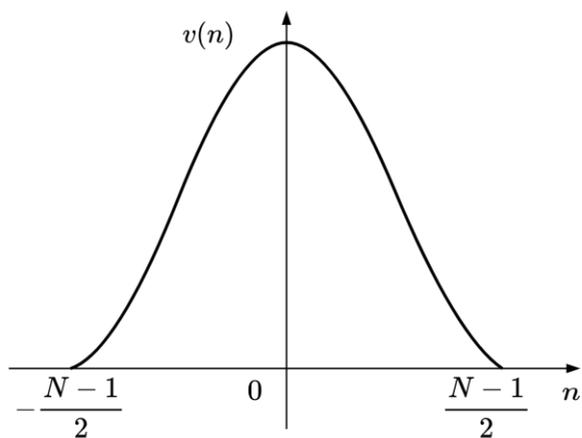


Рис. 5.12. Спектр функции прямоугольного окна

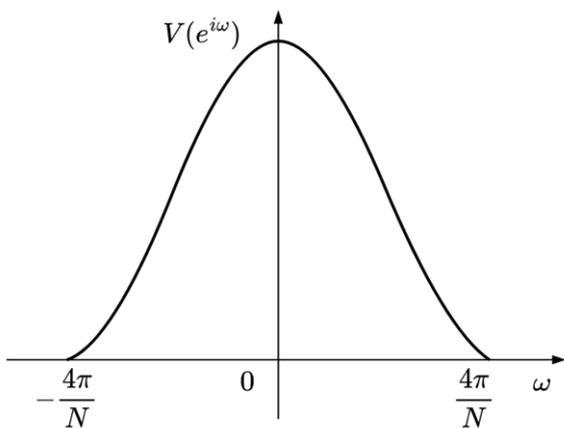
2) обобщенное окно Хемминга:

$$v(n) = \begin{cases} a + (1-a) \cos \frac{2\pi n}{N}, & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}. \end{cases}$$

Здесь $0 \leq a \leq 1$. Обычно берется $a = 0.5$. Спектр окна при $a = 0.5$ показан на рисунке 5.13. Ширина «главного лепестка» для такого окна равна $\frac{8\pi}{N}$, т.е. в два раза шире, чем для прямоугольного окна. Зато «боковые лепестки» практически отсутствуют.



а)



б)

Рис. 5.13.

а) Окно Хемминга, б) Спектр окна Хэмминга при $a = 0.5$

Существует множество других функций окон, подробнее о них можно прочитать в литературе.

Достоинства метода взвешивания: универсальность, относительная простота проектирования.

Недостатки:

1) трудно обеспечить высокое качество аппроксимации, в частности, получить узкие переходные полосы частотной характеристики;

2) недостаточная гибкость при проектировании. В процессе расчета фильтра можно подбирать только окна и менять длину импульсной характеристики, причем по нечетным значениям. Каждый раз можно анализировать точность аппроксимации частотной характеристики и, в конце концов, выбрать подходящий вариант. Но говорить об оптимальности полученного фильтра нельзя. Таким образом, получается, что проектирование фильтра методом взвешивания производится полуэвристически, путем подбора функции окна.

5.5 Метод частотной выборки

Это еще один метод проектирования КИХ-фильтров. В его основу положены три уже известные нам факта.

Во-первых, КИХ-фильтр, описываемый N значениями своей импульсной характеристики $h(n) = 0, n \notin [0, N-1]$, равным образом может быть описан и через ДПФ импульсной характеристики $H(m)$. Взаимооднозначная связь $h(n)$ и $H(m)$ была установлена ранее (см. формулы (3.5), (3.9)):

$$H(m) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-i \frac{2\pi}{N} mn},$$
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H(m) e^{i \frac{2\pi}{N} mn}.$$

Таким образом, если известна последовательность $H(m)$, $0 \leq m \leq N-1$, то известна и $h(n)$, т.е. фильтр полностью определен.

Во-вторых, известна однозначная связь ДПФ с непрерывным спектром последовательности конечной длины (см. формулу (3.10)), в данном случае – с частотной характеристикой КИХ-фильтра:

$$H(m) = H\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}m}, \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

То есть ДПФ импульсной характеристики фильтра получается в результате дискретизации его частотной характеристики.

В-третьих, можно осуществить обратный переход, т.е. по $H(m)$ вычислить непрерывный спектр (частотную характеристику) по схеме:

$$H(m) \rightarrow H(z) \xrightarrow{z=e^{i\omega}} H\left(e^{i\omega}\right)$$

или

$$H(m) \rightarrow h(n) \rightarrow H\left(e^{i\omega}\right).$$

На использовании этих свойств и основан метод частотной выборки, который заключается в следующем.

Заданная (идеальная) частотная характеристика фильтра $H_u\left(e^{i\omega}\right)$ равномерно дискретизируется по частоте на периоде $[0, 2\pi]$, т.е. производится выборка отсчетов в частотной области. И полученные отсчеты рассматриваются как коэффициенты ДПФ импульсной характеристики КИХ-фильтра:

$$H(m) = H_u\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi m}{N}}, \quad 0 \leq m \leq N-1.$$

Иллюстрация метода частотной выборки для фильтра низких частот приведена на рисунке 5.14.

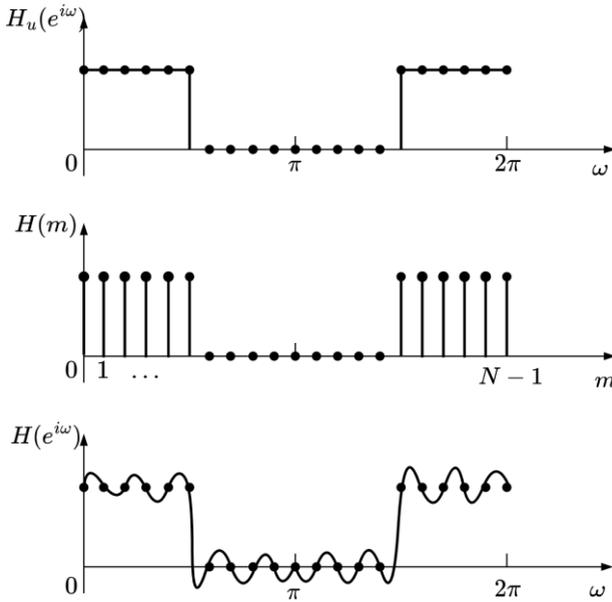


Рис. 5.14. Метод частотной выборки

В интервалах между отсчетами (выборками) частотной характеристики будет наблюдаться некоторая погрешность аппроксимации. Если выборков мало (N не велико), то эта погрешность может быть большой. С ростом N погрешность уменьшается.

Понятно, что рост N означает усложнение фильтра, а значит по этому пути долго двигаться нельзя. Однако в данном методе заложена возможность улучшения качества аппроксимации и без увеличения N . Как уже говорилось, на идеальной частотной характеристике обычно допускаются некоторые переходные полосы, на которых погрешность не контролируется. При дискретизации частотной характеристики в эти переходные полосы попадают некоторые отсчеты ДПФ. Значения этих отсчетов можно считать независимыми переменными и подбирать таким образом, чтобы минимизировать по-

грешность аппроксимации тех участков частотной характеристики, где она контролируется. Здесь можно поставить задачу оптимизации, которая решается в пространстве переменных – значений отсчетов ДПФ в переходных полосах. Эта задача сводится к задаче линейного программирования и решается известными методами.

5.6 Структурные схемы КИХ-фильтров

После того, как фильтр рассчитан (произведена аппроксимация частотной характеристики). Нужно выбрать его структуру (способ реализации). Рассмотрим возможные структурные схемы для КИХ-фильтров:

1) прямая свертка – простейший и наиболее очевидный вариант структуры.

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)f(n-k) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1). \quad (5.8)$$

Непосредственно из (5.8) следует схема на рисунке 5.15. В качестве параметров фильтра здесь выступают значения его импульсной характеристики. Этот вариант удобен при небольших N , в противном случае реализация оказывается слишком громоздкой и медленной в вычислительном плане.

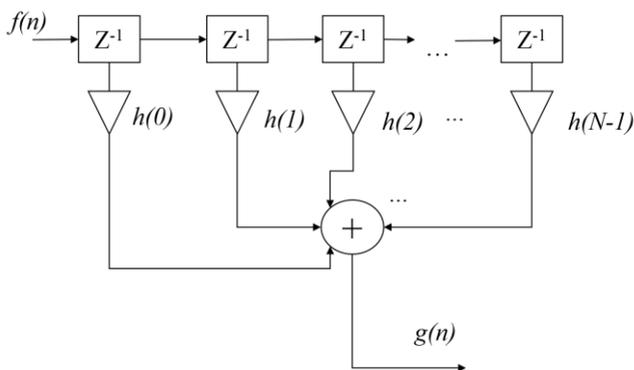


Рис. 5.15. Структурная схема прямой свертки

2) быстрая свертка. Как нам уже известно, свертку можно вычислять не только напрямую, но и при помощи быстрого преобразования Фурье. Условная схема вычисления фильтра в данном случае будет иметь вид представленный на рисунке 5.16.

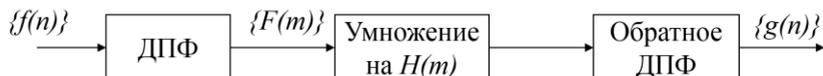


Рис. 5.16. Условная структурная схема быстрой свёртки

Здесь фильтр задается ДПФ импульсной характеристики $H(m)$. Следует напомнить, что требуемая аperiodическая свертка здесь получается при дополнении последовательности нулями и правильном выборе длины ДПФ. Кроме того, нужно отметить, что здесь обрабатываются последовательности конечной длины (блоки данных). В п.3.7 была описана схема, допускающая обработку бесконечной входной последовательности с использованием секционированной свертки.

Реализация КИХ-фильтров в форме быстрой свертки выгодна при больших значениях N .

3) частотная выборка – еще один способ реализации фильтра. Данный способ вытекает из известного соотношения (см. также формулу (4.28):

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{H(m)}{1 - z^{-1} e^{i \frac{2\pi}{N} m}}, \quad (5.9)$$

где $H(z)$ – передаточная функция КИХ-фильтра.

Известно, что параллельные соединения линейных звеньев соответствуют сложению их передаточных функций, а последовательные – перемножению. В формуле (5.9) есть и то, и другое. Структурная схема фильтра, соответствующая выражению (5.9) имеет вид, представленный на рисунке 5.17.

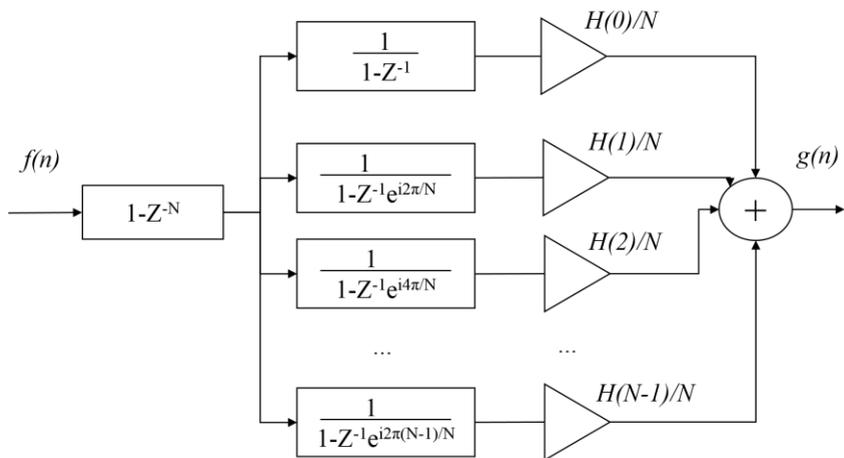


Рис. 5.17. Структурная схема частотной выборки

Для данной структурной схемы КИХ-фильтр задается отсчетами ДПФ $H(m)$. Остается определить форму реализации звеньев. Передаточная функция $1 - z^{-N}$ соответствует вычитанию двух последовательностей: исходной и задержанной на N отсчетов. Данная передаточная функция реализуется структурной схемой, показанной на рисунке 5.18.

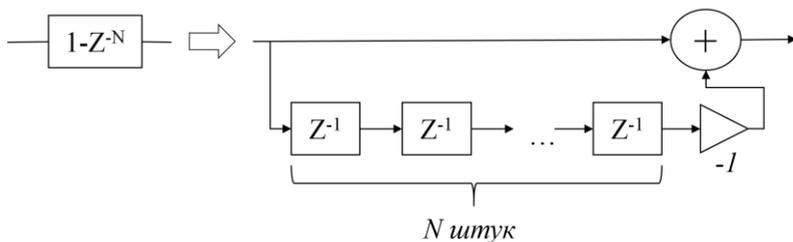


Рис. 5.18. Структурная схема звена $1 - z^{-N}$

Звено с передаточной функцией общего вида $\frac{1}{1 - az^{-1}}$ соответствует системе первого порядка со структурной схемой на рисунке 5.19.

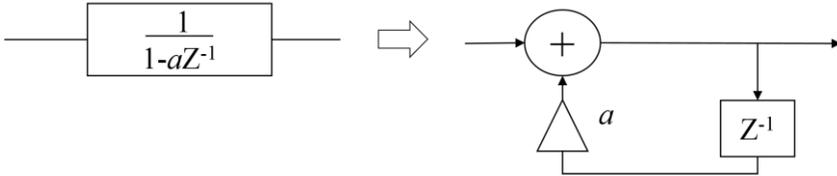


Рис. 5.19. Структурная схема звена $\frac{1}{1-az^{-1}}$

То, что в данном случае a – комплексное число, при цифровой реализации не меняет дела. Заметим, что каждая из таких систем первого порядка, строго говоря, неустойчива (полюс ее передаточной функции располагается на единичной окружности), но вся схема в целом соответствует устойчивому КИХ-фильтру: этот полюс компенсируется нулем передаточной функции стоящего перед ней звена.

Форма реализации в виде частотной выборки особенно выгодна для узкополосных фильтров, для которых $H(m)$ отлично от нуля в малом числе точек. В этом случае и число параллельных ветвей будет мало.

4) рекурсивная реализация КИХ-фильтра. Для некоторых частных случаев импульсной характеристики КИХ-фильтр можно построить в рекурсивной форме. Здесь уместно привести пример.

Пусть

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & n < 0 \text{ или } n > N-1. \end{cases}$$

Тогда

$$h(n) = u(n) - u(n-N).$$

Передаточная функция будет иметь вид

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}.$$

Откуда получаем разностное уравнение

$$g(n) = g(n-1) - f(n) - f(n-N).$$

Полученное разностное уравнение рекурсивно и имеет структурную схему, показанную на рисунке 5.20.

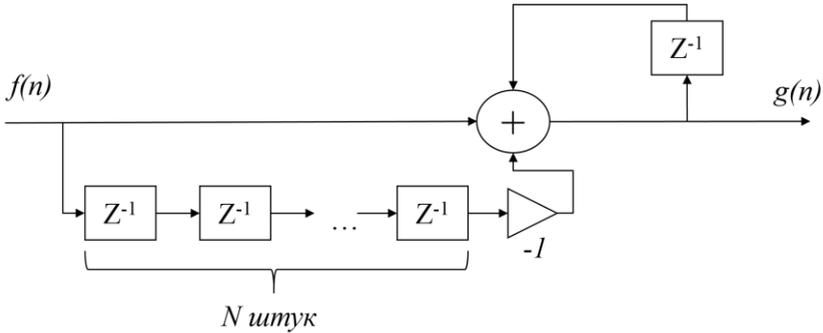


Рис. 5.20. Структурная схема для примера рекурсивного КИХ-фильтра

Такая реализация фильтра проще прямой свертки, так как в прямой свертке потребовалось бы $N-1$ сложений, а здесь – всего два сложения.

Рекурсивную реализацию удобно использовать в тех случаях, когда передаточную функцию фильтра можно представить в несложной дробно-рациональной форме.

6 ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

6.1 Двумерные последовательности

Изложенная выше теория рассматривала одномерные сигналы, заданные как функции одного аргумента (условно – времени). Однако во многих приложениях, в частности, при компьютерной обработке цифровых изображений приходится иметь дело с функциями, зависящими от двух или даже большего числа аргументов. Обобщим все изложенное выше на случай двумерных сигналов.

Двумерный дискретный сигнал (последовательность) может быть получен из двумерного непрерывного сигнала $f(x_1, x_2)$ путем его дискретизации по аргументам. Пусть интервалы между отсчетами сигнала (шаги дискретизации) по каждой координате плоскости аргументов постоянны и равны Δ_1, Δ_2 , то есть двумерная последовательность задается выражением

$$f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2) = f(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1 = n_1\Delta_1 \\ x_2 = n_2\Delta_2}} \quad (6.1)$$

при целочисленных n_1, n_2 . Формула (6.1) определяет последовательность $f = \{f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2)\}$ через значения непрерывного сигнала в дискретных точках плоскости аргументов, то есть непосредственно отражает процесс дискретизации сигнала. В тех случаях, когда “привязка” отсчетов к физической шкале непрерывных координат не играет роли, можно воспользоваться более кратким и удобным обозначением последовательности: $f = \{f(n_1, n_2)\}$, где n_1, n_2 приобретают смысл порядковых номеров отсчетов по координатам.

Следует заметить, что термин «последовательность» формально перенесен сюда из теории одномерных сигналов и в дан-

ном контексте не вполне корректен. Действительно, для отсчетов на плоскости нет объективно существующего «следования» (то есть отношения порядка, описываемого понятиями «раньше» – «позже»), а имеется просто их двумерная совокупность или, как говорят, решетка отсчетов.

Заметим также, что, если в одномерном случае существовал единственный способ дискретизации с постоянным шагом, то для двумерного мы имеем бесконечное множество ее вариантов, отличающихся наклоном прямых, «вдоль» которых берутся отсчеты сигнала. Записанная выше процедура формирования двумерной последовательности соответствует так называемой прямоугольной решетке (см. рисунок 6.1а). В некоторых системах ввода изображений используется дискретизация по треугольной решетке (см. рисунок 6.1б), которая, как показывают исследования, обеспечивает некоторые преимущества при обработке двумерных сигналов. Ниже мы будем рассматривать только двумерные последовательности, заданные на прямоугольной решетке, поскольку этот случай наиболее распространен на практике.

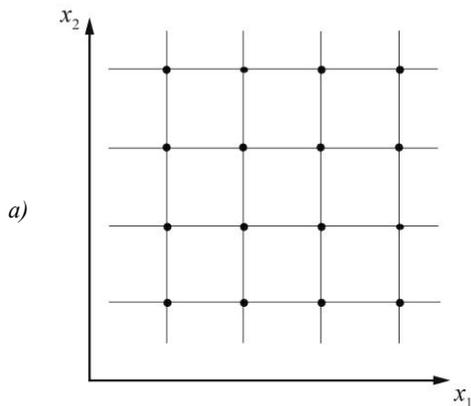


Рис. 6.1. Положение отсчетов двумерной последовательности на плоскости аргументов непрерывного сигнала (продолжение рис. на стр. 125):
а) прямоугольная решетка; б) треугольная решетка

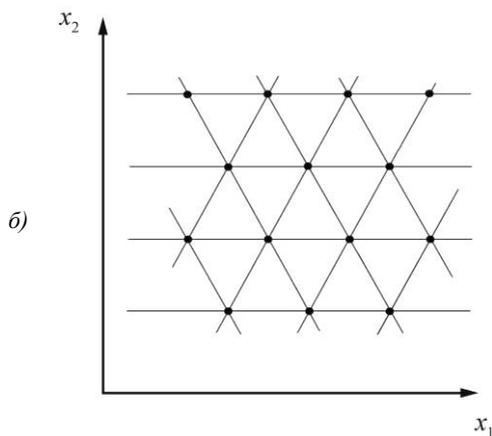


Рис. 6.1. Положение отсчетов двумерной последовательности на плоскости аргументов непрерывного сигнала (начало рис. на стр. 124):
 а) прямоугольная решетка; б) треугольная решетка

Рассмотрим некоторые важнейшие двумерные последовательности.

Двумерный единичный импульс:

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{при } n_1 \neq 0 \text{ или } n_2 \neq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Графическое изображение единичного импульса представлено на рисунке 6.2.

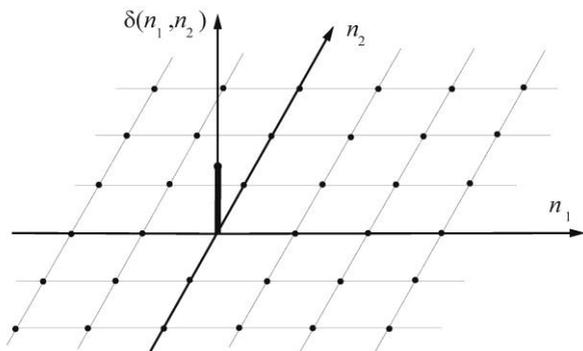


Рис. 6.2. Двумерный единичный импульс

Двумерный единичный скачок:

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \geq 0 \text{ и } n_2 \geq 0, \\ 0 & \text{при } n_1 < 0 \text{ или } n_2 < 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Эта последовательность изображена на рисунке 6.3. Приведенные обозначения двумерных единичных импульса и скачка будем использовать везде далее.

Двумерная экспоненциальная функция первого квадранта:

$$f(n_1, n_2) = a^{n_1} b^{n_2} u(n_1, n_2). \quad (6.4)$$

Изображение этой последовательности для $0 < a, b < 1$ дано на рисунке 6.4.

Двумерная дискретная комплексная экспонента задается выражением

$$f(n_1, n_2) = e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}, \quad (6.5)$$

где i – мнимая единица, ω_1, ω_2 – вещественные константы, имеющие смысл безразмерных пространственных частот (см. п. 2.1).

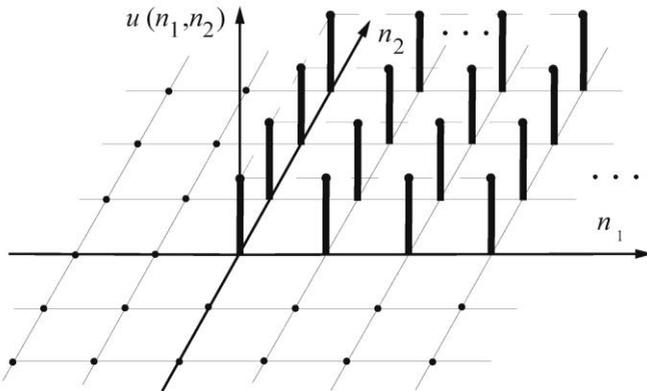


Рис. 6.3. Двумерный единичный скачок

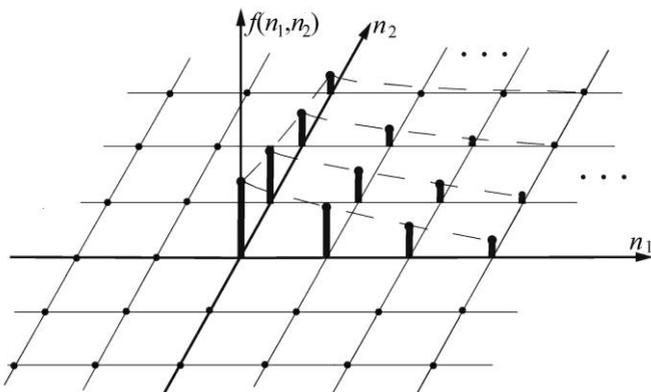


Рис. 6.4. Двумерная экспоненциальная функция первого квадранта

Важный класс двумерных последовательностей составляют разделимые (факторизуемые) последовательности, которые можно представить в виде

$$f(n_1, n_2) = f_1(n_1) f_2(n_2) \quad (6.6)$$

Для разделимых последовательностей многие задачи анализа и синтеза двумерных сигналов и систем решаются наиболее просто, так как сводятся к решению соответствующих “одномерных” задач. Все рассмотренные выше двумерные последовательности являются разделимыми. Например,

$$\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1) \delta(n_2), \quad u(n_1, n_2) = u(n_1) u(n_2),$$

где $\delta(n_1), \delta(n_2), u(n_1), u(n_2)$ – одномерные единичные импульсы и скачки.

Как и в одномерном случае, можно дать классификацию двумерных последовательностей по форме области ненулевых значений отсчетов. Правда, здесь вместо четырех классов последовательностей (конечной длины, бесконечных, право- и левосторонних) мы будем иметь гораздо большее многообразие. Так, только для разделимых последовательностей, опираясь на классификацию одномерных последовательностей, входящих в (6.6), можно ука-

зять 16 классов. Столь громоздкая классификация не очень удобна для анализа, поэтому мы ограничимся разделением двумерных последовательностей всего на два класса: на последовательности *конечной длины*:

$$f(n_1, n_2) \neq 0 \quad \text{при} \quad n_1 \in [M_1, N_1] \\ \text{и} \quad n_2 \in [M_2, N_2], \quad (6.7)$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 – целые константы ($M_1 \leq N_1, M_2 \leq N_2$), и на последовательности *бесконечной длины*, для которых записанное условие не выполняется. Детализацию второго класса будем вводить по мере необходимости.

6.2 Двумерные дискретные ЛИС-системы

Двумерной дискретной системой будем называть правило L , ставящее в соответствие входной двумерной последовательности f выходную двумерную последовательность g . В общем виде это соответствие (преобразование) записывается в виде

$$\{g(n_1, n_2)\} = L[\{f(n_1, n_2)\}]. \quad (6.8)$$

Определение двумерных дискретных линейных систем с постоянными параметрами (ЛИС-систем) аналогично определению одномерных: для них должен соблюдаться принцип суперпозиции:

$$L[\{af_1(n_1, n_2) + bf_2(n_1, n_2)\}] = \\ = aL[\{f_1(n_1, n_2)\}] + bL[\{f_2(n_1, n_2)\}] \quad (6.9)$$

для любых f_1, f_2 и постоянных a, b , и они должны обладать свойством инвариантности к сдвигу сигнала по каждой координате, то есть

$$\{g(n_1 - m_1, n_2 - m_2)\} = L[\{f(n_1 - m_1, n_2 - m_2)\}] \quad (6.10)$$

при любых целых m_1, m_2 . Двумерные системы, для которых выполняется условие (6.10), называются также *пространственно-инвариантными* или *изопланатичными*.

Импульсная характеристика h двумерной дискретной ЛИС-системы определяется как реакция системы на входное воздействие в форме двумерного единичного импульса:

$$\{h(n_1, n_2)\} = L[\{\delta(n_1, n_2)\}]. \quad (6.11)$$

Импульсная характеристика исчерпывающим образом описывает двумерную ЛИС-систему с точки зрения преобразования сигналов. Выходная последовательность определяется через *двумерную дискретную свертку* импульсной характеристики системы и входной последовательности:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (6.12)$$

Здесь и далее полагаем, что последовательности, входящие в выражения вида (6.12) таковы, что эта сумма сходится при любых конечных n_1, n_2 .

Ниже наряду с (6.12) будем использовать краткую символическую запись двумерной свертки:

$$g(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) ** f(n_1, n_2). \quad (6.13)$$

Двумерная свертка обладает всеми свойствами одномерной свертки: коммутативностью, дистрибутивностью (см. п. 1.2) и, кроме того, рядом дополнительных свойств, вытекающих именно из двумерности рассматриваемых последовательностей. Так, если h и f – разделимые последовательности, то и выходная последовательность также разделима. Действительно, при выполнении соотношений (6.6) и

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1) h_2(n_2) \quad (6.14)$$

из (6.12) получаем:

$$\begin{aligned}
 g(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) h_2(m_2) f_1(n_1 - m_1) f_2(n_2 - m_2) = \\
 &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) f_1(n_1 - m_1) \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h_2(m_2) f_2(n_2 - m_2) = \\
 &= g_1(n_1) g_2(n_2)
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 g_1(n_1) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) f_1(n_1 - m_1), \\
 g_2(n_2) &= \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h_2(m_2) f_2(n_2 - m_2).
 \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned}
 [h_1(n_1) h_2(n_2)] ** [f_1(n_1) f_2(n_2)] &= \\
 &= [h_1(n_1) * f_1(n_1)] \times [h_2(n_2) * f_2(n_2)], \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

то есть для разделимых последовательностей двумерная свертка вычисляется через произведение одномерных.

Если импульсная характеристика двумерной ЛИС-системы факторизуема, то для произвольного входного сигнала

$$\begin{aligned}
 g(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} h_1(m_1) \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h_2(m_2) f(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = \\
 &= h_1(n_1) * h_2(n_2) * f(n_1, n_2) \quad , \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

то есть операция двумерной свертки сводится к последовательно-му выполнению двух одномерных сверток. Это означает, что преобразование сигнала двумерной ЛИС-системой с разделимой импульсной характеристикой эквивалентно его последовательному

преобразованию двумя одномерными системами: с импульсной характеристикой $h_1(n_1)$ системы, действующей по координате n_1 и с импульсной характеристикой $h_2(n_2)$ системы, действующей по координате n_2 .

Развивая аналогию между одномерными и двумерными системами, отметим, что, как и в одномерном случае, двумерные ЛИС-системы могут характеризоваться фундаментальными свойствами *физической реализуемости* и *устойчивости*. Двумерная система называется устойчивой, если любому ограниченному входному сигналу соответствует ограниченный выходной сигнал, то есть при

$$|f(n_1, n_2)| \leq M_f$$

выполняется

$$|g(n_1, n_2)| \leq M_g,$$

где M_f, M_g – некоторые положительные константы. Необходимым и достаточным условием устойчивости двумерной дискретной ЛИС-системы является абсолютная суммируемость импульсной характеристики:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |h(n_1, n_2)| < \infty. \quad (6.17)$$

Доказательство этого факта – такое же, как и в одномерном случае. С понятием физической реализуемости двумерных систем дело обстоит сложнее, этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

6.3 Физическая реализуемость двумерных систем

Вспомним, что мы называли физически реализуемой такую одномерную систему, у которой выходной сигнал не зависел от входного сигнала в опережающие моменты времени, то есть от его «буду-

щих» значений. Однако, как уже отмечалось, в двумерной последовательности аргументы являются не временными, а пространственными, для ее отсчетов не определено отношение порядка типа «прошлое» – «будущее», и поэтому, строго говоря, понятие физической реализуемости системы не имеет смысла. Тем не менее на практике обычно приходится искусственно вводить указанное отношение для двумерного сигнала, задавая некоторое правило его *развертки* (упорядочения отсчетов) в одномерную последовательность. При этом понятие физической реализуемости вновь приобретает смысл, но оказывается жестко связанным с конкретным видом развертки.

Известны различные, в том числе и довольно сложные способы развертки, используемые в устройствах ввода и обработки двумерных сигналов. Наибольшее распространение получила *развертка телевизионного типа*. Пусть имеется двумерная последовательность конечной длины, отвечающая условию (6.7). Представим прямоугольную область ее ненулевых отсчетов в виде матрицы размерами $(N_1 - M_1 + 1) \times (N_2 - M_2 + 1)$:

$$\{f(n_1, n_2)\} = \begin{pmatrix} f(M_1, M_2) & f(M_1, M_2 + 1) & \text{К} & f(M_1, N_2) \\ f(M_1 + 1, M_2) & f(M_1 + 1, M_2 + 1) & \text{К} & f(M_1 + 1, N_2) \\ & \text{К} & & \\ f(N_1, M_2) & f(N_1, M_2 + 1) & \text{К} & f(N_1, N_2) \end{pmatrix}.$$

Развертка телевизионного типа заключается в последовательном упорядочении строк или столбцов этой матрицы. Очевидно, существует восемь вариантов такой развертки: начиная с каждого из четырех углов матрицы, по ее строкам и столбцам. Мы ограничимся рассмотрением лишь одного, наиболее часто используемого варианта – строчной развертки в направлении возрастания аргументов. В этом случае осуществляется так называемое *лексикографическое упорядочение отсчетов*, в результате которого они выстраиваются в одномерную последовательность вида

$$f(M_1, M_2), f(M_1, M_2 + 1), K, f(M_1, N_2), \\ f(M_1 + 1, M_2), f(M_1 + 1, M_2 + 1), K, f(M_1 + 1, N_2), K, f(N_1, N_2).$$

Для простоты изложения далее будем считать, что размеры матрицы отсчетов достаточно велики, чтобы не обращать внимание на нерегулярность строчной развертки, то есть на ее скачки с конца каждой строки на начало следующей. С учетом этой оговорки, для строчной развертки области «прошлого» и «будущего», заданные относительно некоторого отсчета $f(n_1, n_2)$, на плоскости аргументов выглядят так, как показано на рисунке 6.5. При этом из соотношения свертки (6.2) следует, что независимость выходных отсчетов $g(n_1, n_2)$ от будущих (в принятом смысле) значений входного сигнала обеспечивается, если

$$h(m_1, m_2) = 0 \quad \text{при } m_1 = 0, m_2 < 0 \quad (6.18) \\ \text{и при } m_1 < 0 \text{ и любых } m_2.$$

Условие (6.18) является необходимым и достаточным для физической реализуемости двумерной ЛИС-системы при строчной развертке сигнала, его графическая иллюстрация дана на рисунке 6.6а.

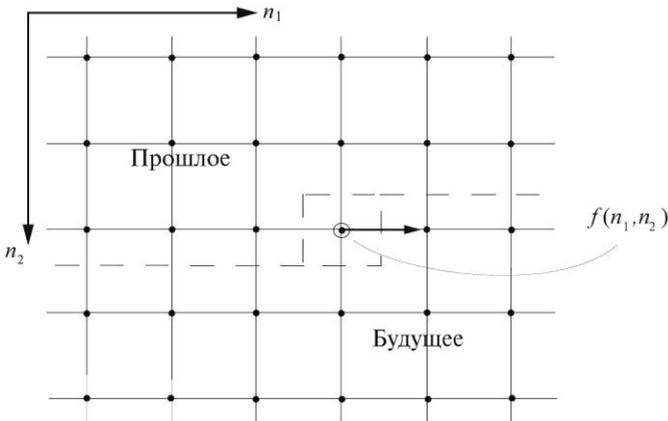


Рис. 6.5. Области «прошлого» и «будущего» при строчной развертке

Часто к двумерной системе предъявляется более жесткое требование физической реализуемости при любом порядке возрастания аргументов n_1, n_2 выходного сигнала, то есть и при строчной развертке, и при ее транспонированном варианте – развертке по столбцам. В этом случае приходим к следующему необходимому и достаточному условию реализуемости:

$$h(m_1, m_2) = 0 \quad \text{при } m_1 < 0 \text{ и любом } m_2, \quad (6.19)$$

$$\text{и при любом } m_1 \text{ и } m_2 < 0.$$

Двумерная ЛИС-система, для которой выполняется это условие, называется *каузальной*, иллюстрация для ее импульсной характеристики дана на рисунке 6.6б.

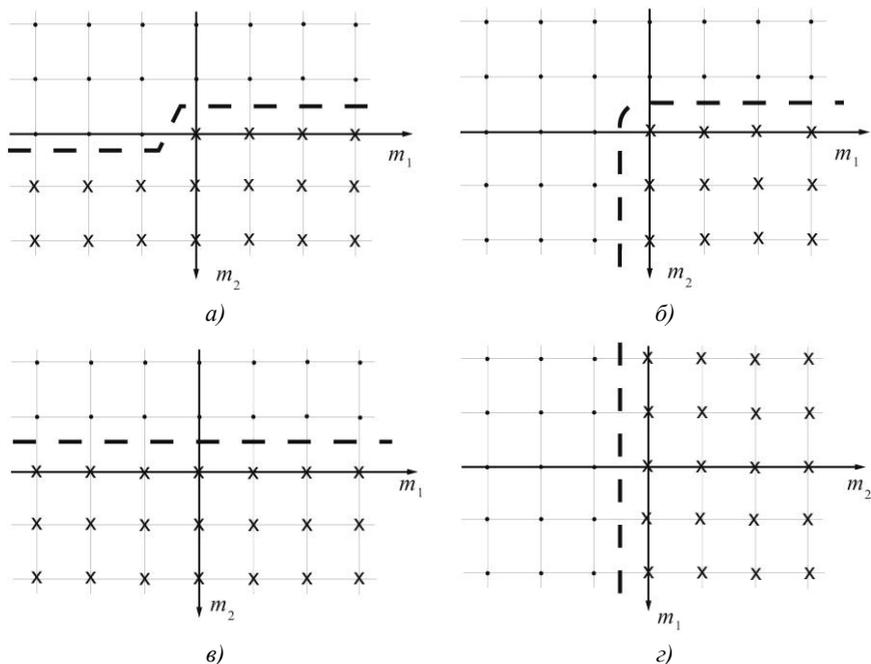


Рис. 6.6. Области потенциально ненулевых значений импульсных характеристик двумерных ЛИС-систем (отмечены крестиками):

- а) – система, физически реализуемая при строчной развертке;
- б) каузальная система; в) каузальная система; г) полукаузальные системы

Наряду с каузальными системами иногда приходится рассматривать и *полукаузальные* ЛИС-системы, для которых

$$h(m_1, m_2) = 0 \text{ при } m_1 < 0 \text{ или } m_2 < 0 \quad (6.20)$$

(см. рисунок 6.6в, г). Для таких двумерных систем считается, что вся строка (или столбец) матрицы отсчетов сигнала соответствует одному и тому же моменту времени. Соответственно, есть «прошлые» и «будущие» строки (столбцы), но отсчеты внутри каждой строки (столбца) поступают в обработку одновременно (параллельно).

И, наконец, существуют *некаузальные* двумерные ЛИС-системы, то есть такие, для которых не налагается никаких ограничений на область ненулевых значений импульсной характеристики. Их одномерными аналогами являются физически нереализуемые ЛИС-системы.

Заметим, что, если импульсная характеристика двумерной системы является факторизуемой (см. (6.4)), то прослеживается простая связь между физической реализуемостью составляющих ее одномерных систем и каузальностью. Если одномерные ЛИС-системы с импульсными характеристиками h_1 и h_2 обе физически реализуемы, то двумерная система является каузальной, если физически реализуема лишь одна из одномерных систем, то двумерная система полукаузальна, если обе одномерные физически нереализуемы, то двумерная некаузальна.

В заключение параграфа отметим, что, как и в одномерном случае, можно выделить двумерные ЛИС-системы с конечной и бесконечной импульсной характеристикой (КИХ- и БИХ-системы). У двумерной КИХ-системы импульсная характеристика – двумерная последовательность конечной длины. Такая система либо является каузальной, либо может быть приведена к каузальной системе введением задержки по строкам и столбцам при получении

выходного отсчета. Как следует из (6.17), двумерная КИХ-система всегда устойчива.

Двумерная БИХ-система, как и ее одномерный аналог, в общем случае может быть и физически нереализуемой (некаузальной), и неустойчивой.

6.4 Двумерные разностные уравнения

Двумерные системы, обладающие свойством физической реализуемости при заданной развертке сигнала, во многих случаях можно описать, указав способ рекурсивного вычисления отсчетов выходной последовательности. Для двумерной ЛИС-системы такое описание дается в форме двумерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in Q_g} a_{m_1, m_2} g(n_1 - m_1, n_2 - m_2) + \sum_{(m_1, m_2) \in Q_f} b_{m_1, m_2} f(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (6.21)$$

где $\{a_{m_1, m_2}\}$, $\{b_{m_1, m_2}\}$ – коэффициенты уравнения, Q_f , Q_g – конечные множества индексов, по которым производится суммирование отсчетов входной (f) и выходной (g) последовательностей.

Множества Q_f и Q_g должны выбираться так, чтобы при заданном способе развертки двумерных сигналов используемые в (6.21) отсчеты входной последовательности не были «будущими» по отношению к текущему моменту (точке (n_1, n_2) на плоскости аргументов), а отсчеты выходной последовательности были строго «прошлыми». Так, например, для каузальной двумерной ЛИС-системы уравнение (6.21) записывается в виде:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ (m_1, m_2) \neq (0,0)}}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} a_{m_1, m_2} g(n_1 - m_1, n_2 - m_2) + \\ + \sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} b_{m_1, m_2} f(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \quad , \quad (6.22)$$

где M_1, M_2, N_1, N_2 – целые константы, характеризующие сложность системы.

Пара значений (M_1, M_2) при

$$\max_{0 \leq m_2 \leq M_2} |a_{M_1 m_2}| > 0 \quad \text{и} \quad \max_{0 \leq m_1 \leq M_1} |a_{m_1 M_2}| > 0$$

определяет порядок разностного уравнения (6.22) (каузальной ЛИС-системы) по каждой из координат. Для БИХ-систем хотя бы одна из величин M_1 и M_2 положительна, такие системы являются рекурсивными: в них каждый следующий отсчет выходной двумерной последовательности вычисляется через $(M_1 + 1)(M_2 + 1) - 1$ предыдущих. В частном случае, когда все $\{a_{m_1, m_2}\}$ равны нулю, уравнения (6.21) и (6.22) описывают нерекурсивную КИХ-систему порядка $(0,0)$. Для нее, очевидно, имеет место совпадение разностного уравнения со сверткой (6.12) при конечной импульсной характеристике

$$h(m_1, m_2) = \begin{cases} b_{m_1 m_2} & \text{при } (m_1, m_2) \in Q_f, \\ 0 & \text{при } (m_1, m_2) \notin Q_f. \end{cases}$$

Как средство описания ЛИС-системы разностное уравнение имеет очевидное преимущество перед сверткой: в нем каждый отсчет выходной последовательности может вычисляться за конечное число операций сложения и умножения. В то же время следует иметь в виду, что представление в виде разностного уравнения удастся применить далеко не к каждой двумерной ЛИС-системе. Во-

первых, еще раз напомним, что такое представление имеет практический смысл, только если ЛИС-система физически реализуема, и, следовательно, ее импульсная характеристика удовлетворяет рассмотренным выше ограничениям. Во-вторых, импульсная характеристика даже физически реализуемой системы может быть такова, что в разностном уравнении (6.21) потребуется использовать бесконечные множества Q_f , Q_g (для каузальной системы уравнение (6.22) будет иметь бесконечный порядок). На вопросах переходов от импульсной характеристики двумерной ЛИС-системы к разностному уравнению (в случае, когда это возможно) и обратно мы остановимся позже.

Разностное уравнение (6.21) непосредственно определяет алгоритм преобразования двумерного сигнала дискретной физически реализуемой ЛИС-системой. Для иллюстрации такого преобразования часто используется условная схема вычисления отсчетов выходной последовательности, общий вид которой представлен на рисунке 6.7.

Для осуществления рекурсивных вычислений по разностному уравнению необходимо задать довольно много *начальных условий*. Так, в случае каузальной ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением (6.22), для получения отсчетов выходной последовательности в первом квадранте (при $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$) требуется указать значения $g(n_1, n_2)$ при

$$\begin{aligned} -M_1 \leq n_1 < 0 \text{ и } n_2 \geq -M_2, \\ n_1 \geq 0 \text{ и } -M_2 \leq n_2 < 0, \end{aligned}$$

а также рассматривать входной сигнал $f(n_1, n_2)$ не только в первом квадранте, но и при

$$\begin{aligned} -N_1 \leq n_1 < 0 \text{ и } n_2 \geq -N_2, \\ n_1 \geq 0 \text{ и } -N_2 \leq n_2 < 0. \end{aligned}$$

Ниже при использовании разностных уравнений мы будем считать, что входные и выходные сигналы заданы на всей плоскости аргументов, поэтому указывать начальные условия нам не потребуется.

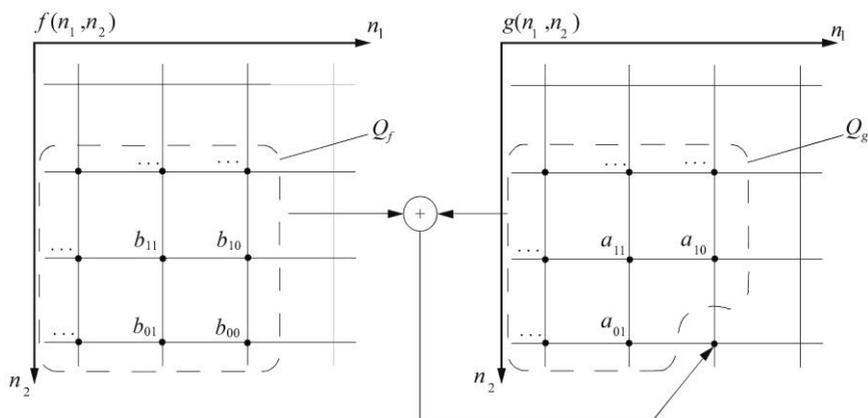


Рис. 6.7. Схемы вычисления отсчетов двумерной выходной последовательности по разностному уравнению (6.21)

6.5 Описание двумерных дискретных сигналов и систем в частотной области

Пусть на вход двумерной ЛИС-системы подается двумерная дискретная экспонента (6.5). При условии сходимости суммы (6.12) для данного входного сигнала на выходе системы имеем выходную двумерную последовательность

$$\begin{aligned}
 g(n_1, n_2) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) e^{i[\omega_1(n_1-m_1)+\omega_2(n_2-m_2)]} = \\
 &= e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) e^{-i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)},
 \end{aligned}$$

совпадающую с входной с точностью до множителя, зависящего от пространственных частот ω_1, ω_2 . Этот множитель

$$H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) e^{-i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)} \quad (6.23)$$

называется *частотной характеристикой* двумерной дискретной ЛИС-системы. Частотная характеристика задает коэффициент передачи ЛИС системы при входном сигнале – двумерной комплексной экспоненте для каждого значения параметров ω_1 и ω_2 . Выражение (6.23) задает *прямое преобразование Фурье* двумерной последовательности, которое также называется двумерным (пространственным) спектром. Частотная характеристика двумерной ЛИС-системы есть пространственный спектр ее импульсной характеристики.

По формуле (6.23) можно установить и правило обратного перехода, то есть выразить импульсную характеристику двумерной системы через частотную:

$$h(m_1, m_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) e^{i(\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (6.24)$$

данное соотношение определяет обратное преобразование Фурье двумерной последовательности h .

Преобразование Фурье по аналогии с (6.23) можно записать для произвольного двумерного дискретного сигнала f :

$$F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) e^{-i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}, \quad (6.25)$$

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (6.26)$$

Выражение (6.25) определяет пространственный спектр двумерной последовательности, а выражение (6.26) – представление двумерной последовательности через пространственный спектр.

Представления двумерных дискретных сигналов и ЛИС-систем в частотной области (то есть с помощью преобразования Фурье) широко применяются при их анализе и синтезе, поскольку во многих случаях проще и удобнее соответствующих представлений в области пространственных аргументов.

Перечислим некоторые важнейшие свойства спектров последовательностей (их более простые «одномерные» аналоги изложены в п. 2.2).

Свойство 1. Достаточным условием существования спектра двумерной последовательности f является ее абсолютная суммируемость:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |f(n_1, n_2)| < \infty. \quad (6.27)$$

Из сопоставления условий (6.17) и (6.27) следует, что для существования частотной характеристики двумерной ЛИС-системы достаточно, чтобы система была устойчивой.

Свойство 2. Двумерное преобразование Фурье линейно. Это означает, что для любых последовательностей f_1 , f_2 и постоянных a , b из соотношения

$$f(n_1, n_2) = a f_1(n_1, n_2) + b f_2(n_1, n_2),$$

следует

$$F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = a F_1(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) + b F_2(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}).$$

Свойство 3. Если двумерная последовательность разделима, то есть для нее выполняется соотношение (6.6), то ее спектр также является разделимым:

$$F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = F_1(e^{i\omega_1}) F_2(e^{i\omega_2}). \quad (6.28)$$

Свойство 4. Спектр двумерной последовательности f – периодическая функция пространственных частот ω_1 , ω_2 . Его период по этим переменным равен 2π , то есть

$$F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = F\left[e^{i(\omega_1+2\pi k_1)}, e^{i(\omega_2+2\pi k_2)}\right]$$

при любых целых k_1 , k_2 .

Свойство 5. Если двумерная последовательность f вещественна, то ее спектр обладает следующими свойствами центральной симметрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) &= \operatorname{Re} F(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}), \\ \operatorname{Im} F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) &= -\operatorname{Im} F(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}), \\ \left| F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) \right| &= \left| F(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}) \right|, \\ \arg F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) &= -\arg F(e^{-i\omega_1}, e^{-i\omega_2}). \end{aligned}$$

В соответствии со свойствами 4 и 5, линии равных значений вещественной части (или модуля) и мнимой части (или аргумента) спектра двумерной последовательности в плоскости переменных ω_1 , ω_2 могут выглядеть, например, так, как показано на рисунке 6.8. Очевидно, чтобы полностью описать такой спектр, достаточно задать его на периоде по одной пространственной частоте и на половине периода по другой, то есть, например, на двумерном «прямоугольном» интервале:

$$-\pi_1 < \omega_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \omega_2 \leq \pi.$$

Если вещественная последовательность разделима, то свойства симметрии ее спектра усиливаются, поскольку симметричным является каждый из двух одномерных спектров, входящих как сомножители в (6.28). При этом достаточно рассматривать дву-

мерный спектр на одном квадрате шириной в половину периода, то есть, например, при

$$0 \leq \omega_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \omega_2 \leq \pi.$$

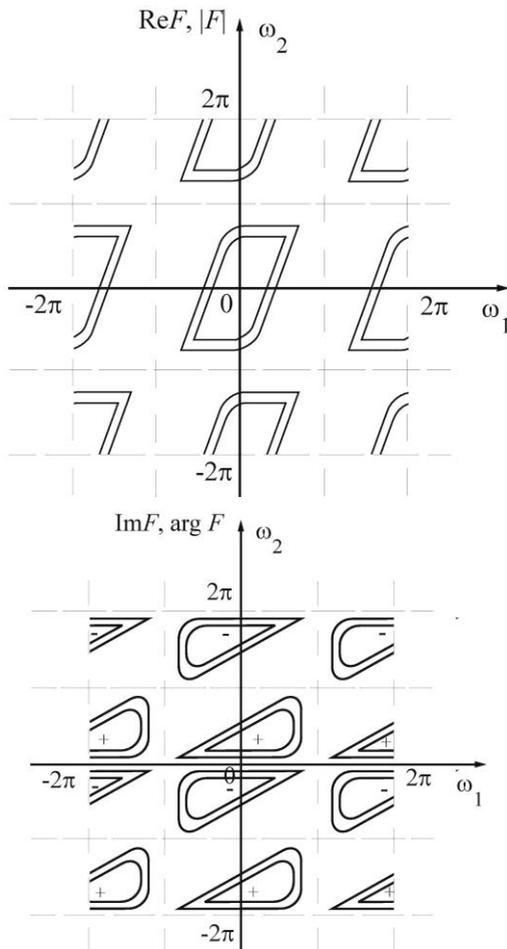


Рис. 6.8. Линии равных уровней спектров двумерной вещественной последовательности

Свойство 6. Свертка двумерных последовательностей соответствует произведению их спектров, то есть последовательность (6.13) имеет спектр

$$G(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}).$$

Из последнего свойства следует, что, как и в одномерном случае, частотная характеристика $H(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2})$ полностью определяет ЛИС-систему, то есть однозначно задает правило преобразования входной двумерной последовательности в выходную (при их описании в частотной области).

Остановимся на важном вопросе *соответствия между спектром двумерной последовательности и спектром непрерывной двумерной функции*, из которой эта последовательность получена. Прямое и обратное преобразования Фурье (переход к спектру и обратно) для непрерывной функции f пространственных переменных x_1, x_2 задается соотношением:

$$F_H(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad (6.29)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_H(\Omega_1, \Omega_2) e^{i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)} d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (6.30)$$

где Ω_1, Ω_2 – угловые пространственные частоты, имеющие размерность радиан/единица длины. Из (6.1) и (6.30) выразим двумерную последовательность, полученную в результате пространственной дискретизации непрерывной функции, через спектр F_H этой функции:

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2) &= f(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2) = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_H(\Omega_1, \Omega_2) e^{i(\Omega_1 \Delta_1 n_1 + \Omega_2 \Delta_2 n_2)} d\Omega_1 d\Omega_2. \end{aligned} \quad (6.31)$$

С учетом значений шагов дискретизации произведем замену размерных пространственных частот на безразмерные $\omega_1 = \Omega_1 \Delta_1,$

$\omega_2 = \Omega_2 \Delta_2$ и выполним несложные преобразования выражения (6.31), заключающиеся в разбиении интервалов интегрирования, замене переменных и порядка выполнения и суммирования:

$$\begin{aligned}
 f(n_1, n_2) &= f(n_1 \Delta_1, n_2 \Delta_2) = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} F_H \left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2} \right) e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2 = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \int_{(2k_1-1)\pi}^{(2k_1+1)\pi} \int_{(2k_2-1)\pi}^{(2k_2+1)\pi} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \times \\
 &\quad \times F_H \left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2} \right) e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2 = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} F_H \left(\frac{\omega_1 + 2\pi k_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi k_2}{\Delta_2} \right) \right] \times \\
 &\quad \times e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2.
 \end{aligned}$$

Сопоставление последнего выражения с формулой (6.26) выявляет искомое соотношение между спектрами:

$$F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} F_H \left(\frac{\omega_1 + 2\pi k_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi k_2}{\Delta_2} \right). \quad (6.32)$$

Таким образом, спектр двумерной последовательности формируется как сумма бесконечного числа спектров исходной непрерывной функции, сдвинутых друг относительно друга по переменным ω_1 , ω_2 на интервалы, кратные 2π . Данное суммирование и определяет периодичность спектра последовательности (см. свойство 4).

Если спектр непрерывной функции ограничен, а именно,

$$F_H(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \quad \text{при} \quad |\Omega_1| \geq \frac{\pi}{\Delta_1} \quad \text{или} \quad |\Omega_2| \geq \frac{\pi}{\Delta_2}, \quad (6.33)$$

то на интервале $|\omega_1| < \pi, |\omega_2| < \pi$, определяющем период спектра последовательности,

$$F(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} F_H\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2}\right).$$

В этом случае можно однозначно восстановить спектр непрерывного двумерного сигнала по спектру последовательности, а сам непрерывный сигнал – по дискретному.

Если ограничение (6.33) не выполняется, то наблюдается эффект наложения спектров, выражающийся в том, что высокочастотные составляющие спектра непрерывной функции попадают в область более низких частот в спектре последовательности. Такое наложение нарушает взаимно однозначное соответствие спектров непрерывного и дискретного двумерных сигналов и исключает возможность безошибочного восстановления непрерывной функции по ее отсчетам. Чтобы не допустить эффекта наложения нужно выбрать шаги дискретизации из условий

$$\Delta_1 < \frac{\pi}{\Omega_{1\max}}, \quad \Delta_2 < \frac{\pi}{\Omega_{2\max}},$$

где $\Omega_{1\max}, \Omega_{2\max}$ – максимальные (граничные) пространственные частоты спектра непрерывного двумерного сигнала:

$$F_H(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \quad \text{при} \quad |\Omega_1| \geq \Omega_{1\max} \quad \text{или} \quad |\Omega_2| \geq \Omega_{2\max}.$$

6.6 Двумерное ДПФ

Полезным инструментом анализа двумерных последовательностей является двумерное дискретное преобразование Фурье, являющееся обобщением одномерного ДПФ, рассмотренного в разделе 3. Как известно, одномерное ДПФ работало с последовательностями конечной длины, аналогично, двумерное ДПФ применимо к двумерной последовательности (изображению) $f(n_1, n_2)$, задан-

ной на прямоугольном фрагменте: $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$, $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$, где N_1, N_2 – размеры изображения в отсчетах. Ниже для краткости математических выражений мы примем, что $N_1 = N_2 = N$, т.е. конечное двумерное изображение задано на квадратной области.

Прямое и обратное двумерное ДПФ размером $N \times N$ задается выражениями:

$$F(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) e^{-i \frac{2\pi}{N} (m_1 n_1 + m_2 n_2)}, \quad (6.34)$$

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} F(m_1, m_2) e^{i \frac{2\pi}{N} (m_1 n_1 + m_2 n_2)}, \quad (6.35)$$

где $F(m_1, m_2)$, $0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1$ – двумерный дискретный спектр Фурье изображения.

Поскольку ядро (базис) двумерного ДПФ является разделимым, можно интерпретировать данное преобразование как двукратное одномерное ДПФ, последовательно выполненное по разным аргументам, например, сначала по горизонтали, а затем по вертикали. На этом основано большинство алгоритмов двумерного БПФ, которые построены по «строчно-столбцовому» принципу. Следует заметить однако, что существуют и более эффективные (быстрые) алгоритмы, которые сразу строятся как двумерные, не используя свойство разделимости базиса. В рамках данного учебного пособия они не рассматриваются.

Сравнение формул (6.25) и (6.34) показывает, что двумерный дискретный спектр имеет простую связь с непрерывным преобразованием Фурье (спектром) изображения:

$$F(m_1, m_2) = F\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right) \Big|_{\omega_1 = \frac{2\pi}{N} m_1, \omega_2 = \frac{2\pi}{N} m_2}, \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq N - 1, \quad (6.36)$$

то есть дискретный спектр – это просто равноотстоящие отсчеты непрерывного спектра, взятые на двумерном периоде. Поэтому двумерное ДПФ наследует все основные свойства двумерного непрерывного спектра: двумерную периодичность, симметрию (если изображение – двумерная вещественная последовательность) и т.д.

В графических иллюстрациях двумерный массив ДПФ принято изображать на периоде, на котором он вычисляется быстрыми алгоритмами, с расположением осей аргументов, как в матрицах. Так, формулу, записанную выше иллюстрирует рисунок 6.9.

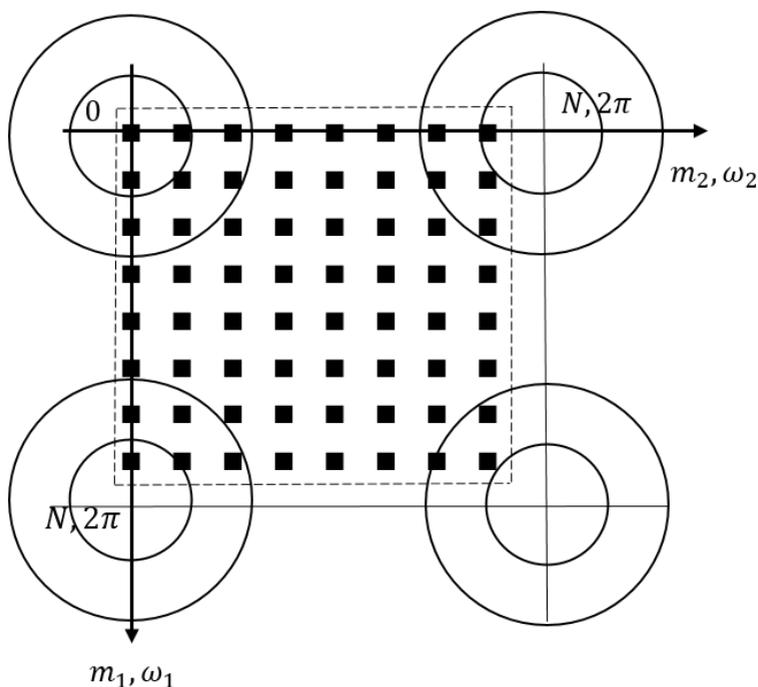


Рис. 6.9. Соответствие непрерывного и дискретного спектров двумерной последовательности конечной длины. Окружностями отмечены лепестки периодического непрерывного спектра, пунктиром выделена область вычисляемого двумерного ДПФ

Чаще всего двумерное ДПФ используется для быстрого выполнения преобразования изображения двумерной ЛИС-системой, т.е. для вычисления свертки (6.13). Процедура «быстрой свертки» заключается в переводе изображения $f(n_1, n_2)$ и периодизированной (см. пояснение ниже) импульсной характеристики преобразующей ЛИС-системы $h_N(n_1, n_2)$ в дискретно-спектральную область, т.е. вычисления $F(m_1, m_2)$ и $H(m_1, m_2)$, соответственно, их последующем перемножении:

$$G(m_1, m_2) = H(m_1, m_2)F(m_1, m_2), \quad (6.37)$$

и выполнении обратного ДПФ, в результате которого получается выходное изображение $g(n_1, n_2)$.

Здесь необходимо принять во внимание двойственный характер преобразуемых последовательностей. С одной стороны, они рассматриваются как двумерные последовательности конечной длины, определенные на прямоугольном (в общем случае) фрагменте. С другой стороны, они считаются периодически продолженными на всю плоскость дискретных аргументов. По аналогии с одномерным случаем, когда применительно к ДПФ последовательности рассматривались на круге (см. рисунок 3.5), можно сказать, что двумерные последовательности, подвергающиеся двумерному ДПФ (все равно, прямому или обратному) заданы своими значениями на торе. Иными словами, свертка, вычисляемая с использованием формулы (6.37), является циклической. В результате ее выполнения края выходного изображения всегда будут искажаться из-за круговых наложений. В практических задачах импульсная характеристика преобразующей ЛИС-системы, как правило, является короткой в сравнении с размерами изображения, поэтому такими искажениями обычно пренебрегают.

Зачастую преобразующая ЛИС-система непосредственно задается своей частотной характеристикой, рассчитанной тем или

иным образом. В этом случае ее дискретный вариант $H(m_1, m_2)$, участвующий в процедуре быстрой свертки, получается просто в результате дискретизации непрерывной частотной характеристики по двум частотным аргументам, как это показано формулой (6.36). При этом быстрая свертка дополнительно ускоряется за счет того, что из процедуры исключается одно прямое ДПФ.

Если же для ЛИС-системы известна импульсная характеристика $h(n_1, n_2)$, то следует иметь в виду, что для получения $H(m_1, m_2)$ дискретному спектральному преобразованию должна подвергаться не она сама, а ее «периодизированная» версия:

$$h_N(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(n_1 + k_1 N, n_2 + k_2 N). \quad (6.38)$$

Понятно, что формула (6.38) непригодна для практического применения, поскольку число слагаемых в ней бесконечно. Но если ЛИС-система устойчива, то ее импульсная характеристика является затухающей в плоскости аргументов относительно своего центра. Поэтому $h_N(n_1, n_2)$ с достаточной точностью может быть получена при конечном числе слагаемых:

$$h_N(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-K}^{K+1} \sum_{k_2=-K}^{K+1} h(n_1 + k_1 N, n_2 + k_2 N). \quad (6.39)$$

где K – граница суммирования, от которой зависит точность вычисления периодизированной импульсной характеристики. Следует обратить внимание, что пределы суммирования в (6.39) несимметричны, это обусловлено тем, что $h_N(n_1, n_2)$, поступающая на вход двумерного ДПФ, задается на интервале $0 \leq n_1, n_2 \leq N-1$, расположенном несимметрично относительно начала координат.

При минимально возможном значении $K=0$ сумма (6.39) содержит четыре слагаемых, при $K=1$ – уже 16 (рисунок 6.10). В общем случае, очевидно, нужно суммировать $(2K+2)^2$ слагаемых.

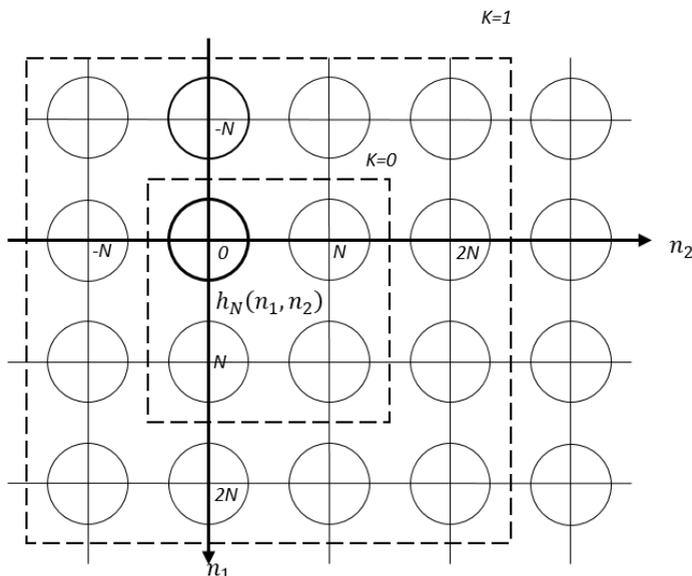


Рис. 6.10. Периодизация двумерной импульсной характеристики. Окружностями условно отмечены сдвинутые копии импульсной характеристики (жирная окружность – исходная (непериодизированная) импульсная характеристика. Пунктиром выделены области суммирования при $K=0$ и $K=1$

Заметим, что если ЛИС-система реализуется с помощью ДПФ, можно игнорировать требование ее физической реализуемости. В данном случае импульсную характеристику $h(n_1, n_2)$ удобно рассматривать как двумерную последовательность, имеющую своим центром начало координат. Если при этом она является последовательностью конечной длины, удовлетворяющей условию

$$h(n_1, n_2) = 0 \text{ при } |n_1|, |n_2| \geq \frac{N}{2}, \quad (6.40)$$

то эффекты наложения при ее периодизации отсутствуют и формулу (6.39) можно не использовать, достаточно просто расставить значения $h(n_1, n_2)$, попадающие в разные квадранты плоскости аргументов, по соответствующим углам фрагмента $N \times N$, поступающего на вход двумерного ДПФ. Иллюстрация к сказанному представлена на рисунке 6.11 для «прямоугольной» импульсной характеристики размером 5×5 , расположенной симметрично начала координат, и $N = 8$.

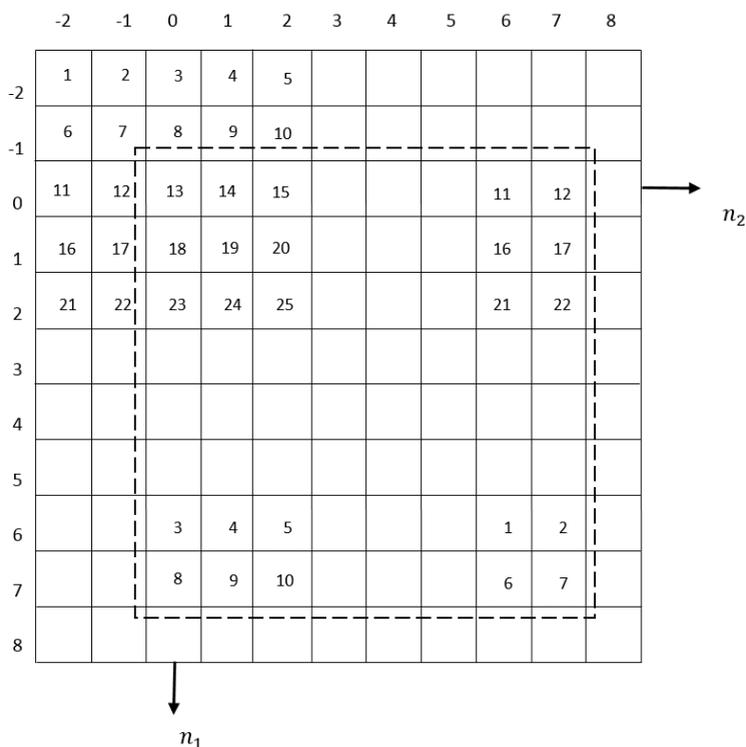


Рис. 6.11. Периодизация конечной двумерной импульсной характеристики. Для удобства представления отсчеты плоскости аргументов показаны квадратными площадками, ненулевые отсчеты импульсной характеристики пронумерованы по порядку. Пунктиром выделена область, для которой вычисляется двумерное ДПФ

Другие прикладные задачи, для решения которых применяется ДПФ, подробно описаны в разделе 3 настоящего учебного пособия применительно к преобразованию одномерных последовательностей. Их обобщение на двумерный случай предлагается выполнить самостоятельно.

6.7 Двумерное z -преобразование

Прямым z -преобразованием двумерной последовательности f называется комплексная функция

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}, \quad (6.41)$$

где z_1, z_2 – комплексные переменные. Ниже иногда будем использовать сокращенную запись (6.41) в форме

$$f(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F(z_1, z_2).$$

Естественно, данное «двумерное» z -преобразование имеет смысл только в своей области сходимости, то есть на множестве таких значений z_1 и z_2 , при которых сумма (6.41) существует и является конечной. Достаточным условием этого является абсолютная сходимость записанного двойного ряда:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left| f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \right| &= \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |f(n_1, n_2)| |z_1|^{-n_1} |z_2|^{-n_2} < \infty. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Из этой формулы следует важный вывод о том, что область сходимости определяется только абсолютными значениями комплексных переменных z_1, z_2 , а значит, может быть задана на плоскости в координатах $(|z_1|, |z_2|)$. Речь идет о внутренних точках области сходимости z -преобразования. На границах области

условие (6.42) может не выполняться, но ряд (6.41) сходиться неабсолютно (условно). Вопрос о существовании z -преобразования в каждой точке границы области должен исследоваться дополнительно для конкретного ряда. Рассмотрим частные случаи.

Пусть f – двумерная последовательность конечной длины, удовлетворяющая условию (6.7). Тогда ее z -преобразование будет вычисляться как сумма конечного числа слагаемых:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n_1=M_1}^{N_1} \sum_{n_2=M_2}^{N_2} f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}. \quad (6.43)$$

Очевидно, что область сходимости такого z -преобразования включает в себя те значения переменных z_1, z_2 , при которых все слагаемые в сумме (6.43) конечны, то есть все точки плоскости ($|z_1|, |z_2|$) за исключением, возможно, некоторых: точки $z_1 = 0$, если $N_1 > 0$, точки $|z_1| = \infty$, если $M_1 < 0$, точки $z_2 = 0$, если $N_2 > 0$ и точки $|z_2| = \infty$, если $M_2 < 0$.

Этот факт иллюстрирует рисунок 6.12а, на котором область сходимости z -преобразования отмечена штриховкой.

Пусть теперь двумерная последовательность f разделима (для нее выполняется условие (6.6)). При этом ее двумерное z -преобразование также является разделимым:

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} f_1(n_1) z_1^{-n_1} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f_2(n_2) z_2^{-n_2} = \\ &= F_1(z_1) F_2(z_2) \end{aligned}, \quad (6.44)$$

и, следовательно, область сходимости можно определить по каждой переменной. Известно что одномерное z -преобразование общего вида сходится в кольце, то есть для $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ области сходимости записываются соответственно в форме двойных неравенств:

$$\begin{cases} R_-^{(1)} < |z_1| < R_+^{(1)}, \\ R_-^{(2)} < |z_2| < R_+^{(2)}, \end{cases} \quad (6.45)$$

где $R_-^{(1)}$, $R_+^{(1)}$, $R_-^{(2)}$, $R_+^{(2)}$ – некоторые постоянные, характеризующие границы области сходимости. Система неравенств (6.45) определяет область сходимости разделимого двумерного z -преобразования (6.44). В общем случае эта область имеет прямоугольную форму, (см. рисунок 6.12б). С конкретизацией одномерных последовательностей, входящих в (6.6), конкретизируется и форма области сходимости z -преобразования. Так, если f_1 и f_2 – правосторонние последовательности (в частности, если ненулевые отсчеты f лежат в первом квадранте), то область сходимости двумерного z -преобразования (6.44) определяется системой неравенств

$$\begin{cases} |z_1| > R_-^{(1)}, \\ |z_2| > R_-^{(2)} \end{cases} \quad (6.46)$$

и, следовательно, имеет вид, показанный на рисунке 6.12в.

Если f – двумерная неразделимая бесконечная последовательность, то область сходимости ее z -преобразования уже не выражается независимо по переменным $|z_1|$ и $|z_2|$. Так, можно показать, что, если ненулевые отсчеты последовательности сосредоточены только в первом квадранте плоскости аргументов (то есть при $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$), то область сходимости z -преобразования опять задается системой неравенств типа (6.46), однако граница области по каждой переменной зависит от другой переменной:

$$\begin{cases} |z_1| > R_-^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| > R_-^{(2)}(|z_1|). \end{cases} \quad (6.47)$$

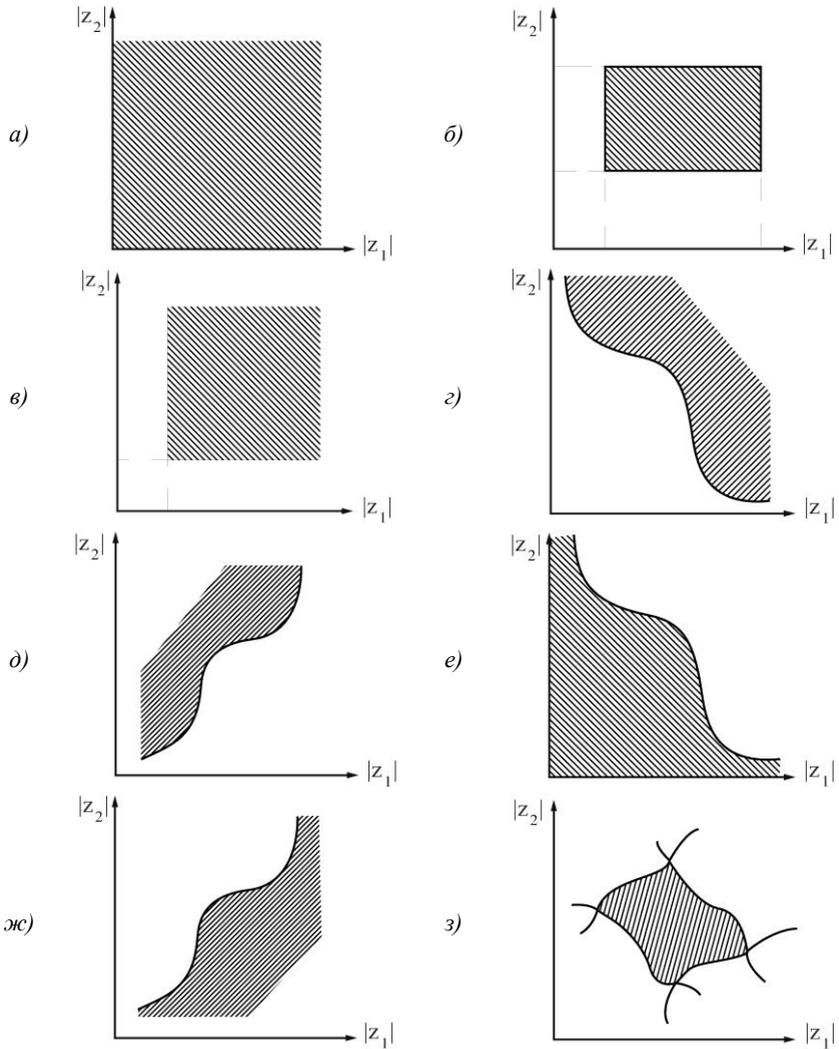


Рис. 6.12. Формы области сходимости двумерного z -преобразования для последовательности конечной длины (ПКД) и бесконечных последовательностей (БП): а) ПКД, б) разделимая БП (общий случай); в) разделимая БП (правосторонние составляющие); г) произвольная БП первого квадранта; д) произвольная БП второго квадранта; е) произвольная БП третьего квадранта; ж) произвольная БП четвертого квадранта; з) последовательность, отличная от нуля на всей плоскости аргументов

Функции $R_-^{(1)}(\cdot)$ и $R_-^{(2)}(\cdot)$ здесь являются взаимнообратными, они определяют границу области сходимости в плоскости $(|z_1|, |z_2|)$. В соответствии с (6.47) эта граница не может иметь участков с положительным наклоном, то есть ограничивает область сходимости снизу и слева (см. рисунок 6.12г). Здесь и далее условие взаимнообратности позволяет на практике ограничиться использованием любого одного из двух записанных неравенств.

Аналогично, для бесконечной последовательности с ненулевыми отсчетами во втором квадранте (при $n_1 \leq 0, n_2 \geq 0$) область сходимости определяется системой неравенств

$$\begin{cases} |z_1| < R_+^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| > R_-^{(2)}(|z_1|). \end{cases} \quad (6.48)$$

при взаимнообратных функциях $R_+^{(1)}(\cdot)$ и $R_-^{(2)}(\cdot)$. Здесь граница области сходимости имеет неотрицательный наклон и ограничивает область снизу и справа (см. рисунок 6.12д).

Для последовательности, расположенной в третьем квадранте (при $n_1 \leq 0, n_2 \leq 0$), имеем

$$\begin{cases} |z_1| < R_+^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| < R_+^{(2)}(|z_1|). \end{cases} \quad (6.49)$$

при взаимнообратных $R_+^{(1)}(\cdot)$ и $R_+^{(2)}(\cdot)$, область сходимости ограничена сверху и справа (см. рисунок 6.12е).

Для последовательности в четвертом квадранте (при $n_1 \geq 0, n_2 \leq 0$)

$$\begin{cases} |z_1| > R_-^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| < R_+^{(2)}(|z_1|). \end{cases} \quad (6.50)$$

при взаимнообратных $R_-^{(1)}(\cdot)$ и $R_+^{(2)}(\cdot)$, область сходимости ограничена сверху и слева (см. рисунок 6.12ж).

В самом общем случае, когда двумерная последовательность f рассматривается как отличная от нуля на всей плоскости аргументов, ее всегда можно представить в виде четырех составляющих:

$$f(n_1, n_2) = f_1(n_1, n_2) + f_2(n_1, n_2) + f_3(n_1, n_2) + f_4(n_1, n_2), \quad (6.51)$$

где f_i – последовательности с ненулевыми отсчетами только в i -м квадранте ($i = 1, 2, 3, 4$). Слагаемые в (6.44) имеют z -преобразования с областями сходимости (6.40) – (6.43). Если эти области имеют общее пересечение, то существует и z -преобразование всей последовательности f , область сходимости которого может быть записана в виде обобщения системы двойных неравенств (6.52):

$$\begin{cases} R_-^{(1)}(|z_2|) < |z_1| < R_+^{(1)}(|z_2|), \\ R_-^{(2)}(|z_1|) < |z_2| < R_+^{(2)}(|z_1|). \end{cases} \quad (6.52)$$

В соответствии с (6.52), любое сечение области сходимости при $|z_1| = \text{const}$ или $|z_2| = \text{const}$ является односвязным, граница области в общем случае замкнута и состоит из четырех сегментов, два из которых имеют неотрицательный наклон, а два – неположительный. Возможный вид такой области дан на рисунке 6.9з. Для иллюстрации к сказанному рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 6.1. Вычислим z -преобразование двумерной экспоненты первого квадранта (6.4):

$$f(n_1, n_2) = a^{n_1} b^{n_2} u(n_1, n_2).$$

Данная двумерная последовательность является разделимой, соотношение (6.6) для нее выполняется при

$$f_1(n_1) = a^{n_1} u(n_1), \quad f_2(n_2) = b^{n_2} u(n_2).$$

Известно, что z -преобразования и области сходимости приведенных одновременных последовательностей записываются в виде (см. таблицу в п. 1.6.1):

$$F_1(z_1) = \frac{1}{1 - az_1^{-1}}, \quad |z_1| > |a|,$$

$$F_2(z_2) = \frac{1}{1 - bz_2^{-1}}, \quad |z_2| > |b|.$$

В соответствии с (6.44), для рассматриваемой двумерной последовательности получаем

$$F(z_1, z_2) = F_1(z_1)F_2(z_2) = \frac{1}{(1 - az_1^{-1})(1 - bz_2^{-1})}.$$

Область сходимости этого двумерного z -преобразования:

$$\begin{cases} |z_1| > |a|, \\ |z_2| > |b|, \end{cases}$$

она имеет вид, показанный на рисунке 6.12в.

Конец примера.

Пример 6.2. Вычислим z -преобразование двумерной последовательности

$$f(n_1, n_2) = a^{n_1} u(n_1) \delta(n_1 - n_2),$$

(a – постоянная), представляющей собой «одномерную» экспоненту, расположенную на биссектрисе первого квадранта (см. рисунок 6.13а). Очевидно, данная последовательность не является разделимой, поэтому произведем вычисления по общей формуле (6.41):

$$\begin{aligned}
 F(z_1, z_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} a^{n_1} u(n_1) \delta(n_1 - n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} = \\
 &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} a^{n_1} u(n_1) z_1^{-n_1} z_2^{-n_1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(a z_1^{-1} z_2^{-1} \right)^{n_1}.
 \end{aligned}$$

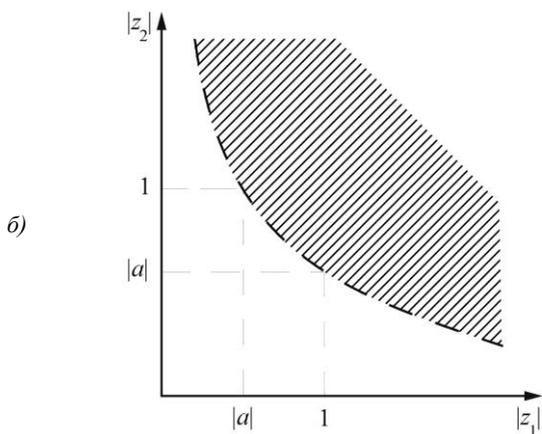
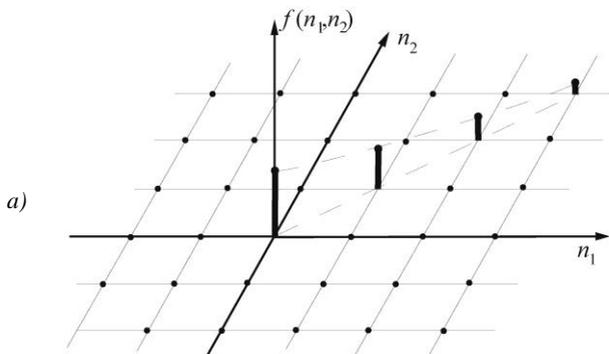


Рис. 6.13. Импульсная характеристика и область сходимости её двумерного z-преобразования: а) одномерная экспонента, расположенная по биссектрисе первого квадранта; б) область сходимости двумерного z-преобразования одномерной экспоненты

Если полученный ряд (сумма геометрической прогрессии) сходится, то

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - az_1^{-1} z_2^{-1}}.$$

Условие сходимости ряда:

$$\left| az_1^{-1} z_2^{-1} \right| < 1,$$

его можно переписать в форме неравенств (6.47):

$$\begin{cases} |z_1| > |a|/|z_2|, \\ |z_2| > |a|/|z_1|. \end{cases}$$

Вид этой области сходимости в плоскости $(|z_1|, |z_2|)$ показан на рисунке 6.13б.

Конец примера.

Пример 6.3. Вычислим z -преобразование двумерной последовательности

$$f(n_1, n_2) = \begin{cases} a^{|n_1|} & \text{при } |n_1| = |n_2|, \\ 0 & \text{при } |n_1| \neq |n_2|, \end{cases}$$

где a – постоянная ($|a| < 1$). Данная неразделимая последовательность представляет собой «крест» из одинаковых экспонент, «разбегающихся» по биссектрисам четырех квадрантов (рисунок 6.11а). Запишем ее через функции единичных импульсов и скачков в виде четырех составляющих по квадрантам:

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2) = & a^{n_1} u(n_1) \delta(n_1 - n_2) + a^{-n_1} u(-n_1 - 1) \delta(n_1 + n_2) + \\ & + a^{-n_1} u(-n_1 - 1) \delta(n_1 - n_2) + a^{n_1} u(n_1 - 1) \delta(n_1 + n_2). \end{aligned}$$

Для первой составляющей мы уже вычислили z -преобразование в предыдущем примере:

$$a^{n_1} u(n_1) \delta(n_1 - n_2) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - a z_1^{-1} z_2^{-1}}, \quad \begin{cases} |z_1| > |a|/|z_2|, \\ |z_2| > |a|/|z_1|. \end{cases}$$

Производя аналогичные вычисления для остальных слагаемых, несложно получить:

$$a^{-n_1} u(-n_1 - 1) \delta(n_1 + n_2) \xrightarrow{z} \frac{a z_1 z_2^{-1}}{1 - a z_1 z_2^{-1}}, \quad \begin{cases} |z_1| < |z_2|/|a|, \\ |z_2| > |a||z_1|; \end{cases}$$

$$a^{-n_1} u(-n_1 - 1) \delta(n_1 - n_2) \xrightarrow{z} \frac{a z_1 z_2}{1 - a z_1 z_2}, \quad \begin{cases} |z_1| < 1/|a||z_2|, \\ |z_2| < 1/|a||z_1|; \end{cases}$$

$$a^{n_1} u(n_1 - 1) \delta(n_1 + n_2) \xrightarrow{z} \frac{a z_1^{-1} z_2}{1 - a z_1^{-1} z_2}, \quad \begin{cases} |z_1| > |a||z_2|, \\ |z_2| < |z_1|/|a|. \end{cases}$$

Для точек пересечения областей сходимости этих z -преобразований можно записать

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2) &= \frac{1}{1 - a z_1^{-1} z_2^{-1}} + \frac{a z_1 z_2^{-1}}{1 - a z_1 z_2^{-1}} + \frac{a z_1 z_2}{1 - a z_1 z_2} + \frac{a z_1^{-1} z_2}{1 - a z_1^{-1} z_2} = \\ &= \frac{(1 + a^2)(1 - 3a^2) + 2a^3(z_1^{-1} + z_1)(z_2^{-1} + z_2) - a^2(z_1^{-2} + z_1^2 + z_2^{-2} + z_2^2)}{(1 + a^2)^2 - a(1 + a^2)(z_1^{-1} + z_1)(z_2^{-1} + z_2) + a^2(z_1^{-2} + z_1^2 + z_2^{-2} + z_2^2)}. \end{aligned}$$

Указанное пересечение (область сходимости искомого z -преобразования) существует при $|a| < 1$ и может быть представлено в виде системы неравенств (6.52), в которой

$$R_-^{(1)}(|z_2|) = \begin{cases} \frac{|a|}{|z_2|} & \text{при } |a| < |z_2| \leq 1, \\ |a||z_2| & \text{при } 1 < |z_2| < 1/|a|, \end{cases}$$

$$R_+^{(1)}(|z_2|) = \begin{cases} \frac{|z_2|}{|a|} & \text{при } |a| < |z_2| \leq 1, \\ \frac{1}{|a||z_2|} & \text{при } 1 < |z_2| < 1/|a|, \end{cases}$$

$$R_-^{(2)}(|z_1|) = \begin{cases} \frac{|a|}{|z_1|} & \text{при } |a| < |z_1| \leq 1, \\ |a||z_1| & \text{при } 1 < |z_1| < 1/|a|, \end{cases}$$

$$R_+^{(2)}(|z_1|) = \begin{cases} \frac{|z_1|}{|a|} & \text{при } |a| < |z_1| \leq 1, \\ \frac{1}{|a||z_1|} & \text{при } 1 < |z_1| < 1/|a|. \end{cases}$$

Форму данной области иллюстрирует рисунок 6.14б.

Если двумерное z -преобразование сходится при $|z_1| = |z_2| = 1$, то, положив

$$z_1 = e^{i\omega_1}, \quad z_2 = e^{i\omega_2}$$

при вещественных ω_1, ω_2 , из формулы (6.41) получаем спектр Фурье (6.25) двумерной последовательности. Таким образом, как и в одномерном случае, преобразование Фурье есть частный случай z -преобразования, который находит применение при анализе двумерных абсолютно суммируемых сигналов и устойчивых ЛИС-систем (при выполнении условий (6.27) и (6.17)). Само же z -преобразование является более общим средством двумерных последовательностей и применяется значительно шире.

Конец примера.

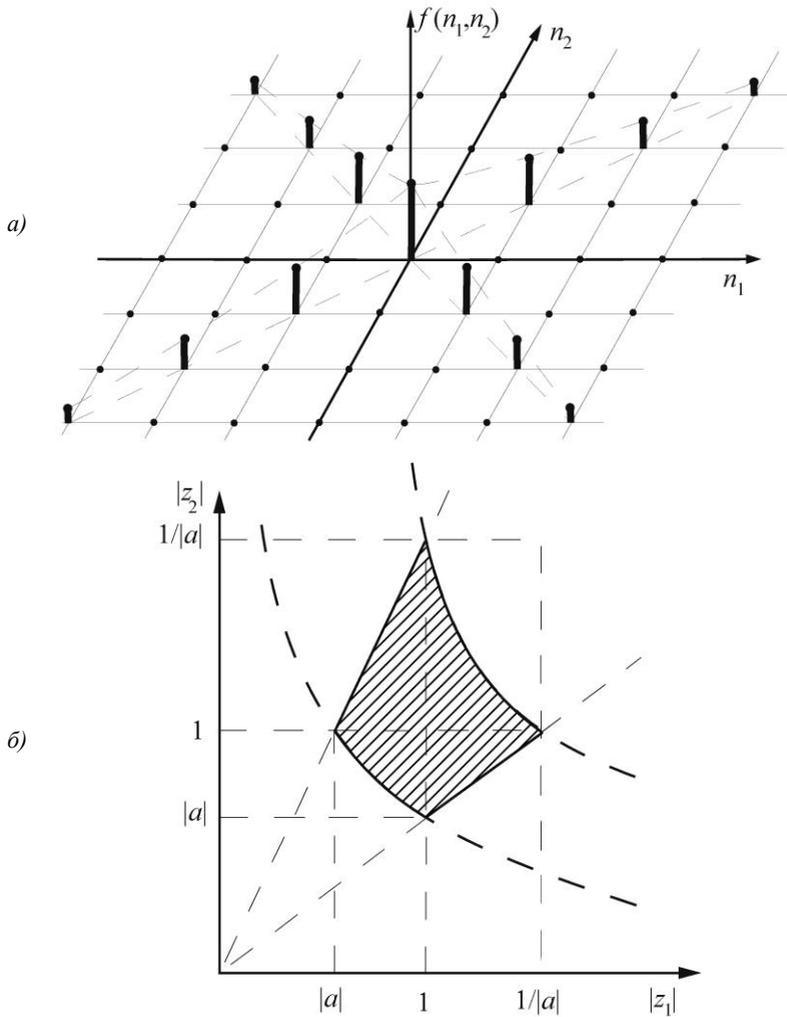


Рис. 6.14. Импульсная характеристика и область сходимости ее двумерного z -преобразования: а) иллюстрация «креста» из экспонент по биссектрисам квадрантов; б) область сходимости двумерного z -преобразования

Важный класс двумерных z -преобразований образуют дробно-рациональные функции двух переменных, представляющие собой отношения полиномов от z_1 и z_2 . Если использовать запись по-

линомов по отрицательным степеням переменных, то двумерное дробно-рациональное z -преобразование имеет общий вид

$$F(z_1, z_2) = \frac{\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} b_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}}{\sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} C_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}}. \quad (6.53)$$

В одномерном случае подобные z -преобразования было удобно описывать своими нулями и полюсами, которые определялись в результате разложения полиномов числителя и знаменателя на простые множители. Такое разложение опиралось на основную теорему алгебры, согласно которой степенной полином одной переменной всегда может быть представлен через свои корни. Однако для полинома от нескольких переменных аналогичной теоремы в общем случае не существует, и подобное разложение невыполнимо. Многомерный полином, как правило, не имеет конечного числа корней, он равен нулю на непрерывных множествах значений переменных. В этом заключается главное качественное отличие многомерных (в частности, двумерных) сигналов и систем от одномерных, серьезно усложняющее их анализ.

6.8 Основные свойства двумерного z -преобразования

При работе с двумерным z -преобразованием полезно учитывать его свойства, которые перечисляются ниже. Некоторые из них достаточно очевидны или легко доказываются, другие – уже обсуждались в предыдущем параграфе.

Свойство 1. Если z -преобразование двумерной последовательности f существует, то ряд (6.41) абсолютно сходится во внутренних точках односвязной области сходимости, в общем случае определяемой системой двойных неравенств (6.45). В точках границы области ряд, соответствующий z -преобразованию, может как

сходиться, так и расходиться. Область дробно-рационального двумерного z -преобразования всегда является открытой (не включает границы).

Свойство 2. Двумерное z -преобразование линейно, то есть если

$$f_1(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F_1(z_1, z_2), \quad f_2(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F_2(z_1, z_2),$$

то при любых постоянных a, b

$$a f_1(n_1, n_2) + b f_2(n_1, n_2) \xrightarrow{z} a F_1(z_1, z_2) + b F_2(z_1, z_2).$$

Областью сходимости этого суммарного z -преобразования в общем случае является пересечение областей сходимости слагаемых.

Свойство 3. Если двумерная последовательность разделима, то ее z -преобразование также является разделимым, то есть из соотношения

$$f(n_1, n_2) = f_1(n_1) f_2(n_2)$$

следует

$$F(z_1, z_2) = F_1(z_1) F_2(z_2).$$

Свойство 4. Сдвиг двумерной последовательности по каждой координате выражается в умножении ее z -преобразования на целую степень соответствующей переменной, а именно, если

$$f_2(n_1, n_2) = f_1(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

при целых k_1, k_2 , то

$$F_2(z_1, z_2) = z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} F_1(z_1, z_2). \quad (6.54)$$

При сдвиге последовательности область сходимости двумерного z -преобразования не меняется за исключением, возможно точек

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad |z_1| = \infty \quad \text{и} \quad |z_2| = \infty.$$

Свойство 5. Умножение двумерной последовательности на аргумент выражается в дифференцировании ее z -преобразования по соответствующей переменной, если, например,

$$f_2(n_1, n_2) = n_1 f_1(n_1, n_2),$$

то

$$F_2(z_1, z_2) = -z_1 \frac{\partial F_1(z_1, z_2)}{\partial z_1}. \quad (6.55)$$

При умножении последовательности на аргумент область сходимости двумерного z -преобразования не меняется за исключением, возможно, границ области.

Свойство 6. Умножение двумерной последовательности на экспоненту изменяет масштаб аргумента в z -преобразовании. Если

$$f_1(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F_1(z_1, z_2)$$

с областью сходимости общего вида (6.45), и

$$f_2(n_1, n_2) = a^{n_1} b^{n_2} f_1(n_1, n_2),$$

где a, b – произвольные постоянные, то

$$F_2(z_1, z_2) = F_1\left(\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right) \quad (6.56)$$

с областью сходимости, выражаемая системой неравенств

$$\begin{cases} |a|R_-^{(1)}\left(\frac{|z_2|}{|b|}\right) < |z_1| < |a|R_+^{(1)}\left(\frac{|z_2|}{|b|}\right), \\ |b|R_-^{(2)}\left(\frac{|z_1|}{|a|}\right) < |z_2| < |b|R_+^{(2)}\left(\frac{|z_1|}{|a|}\right). \end{cases}$$

Свойство 7. Инверсия (изменение знака) аргумента последовательности приводит к замене соответствующей переменной в z -преобразовании на обратную величину, если, например,

$$f_2(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F_1(z_1, z_2)$$

с областью сходимости общего вида (6.45), и

$$f_2(n_1, n_2) = f_1(-n_1, n_2) ,$$

то

$$F_2(z_1, z_2) = F_1(z_1^{-1}, z_2) \quad (6.57)$$

с областью сходимости, выражаемой системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{R_+^{(1)}(|z_2|)} < |z_1| < \frac{1}{R_-^{(1)}(|z_2|)} , \\ R_-^{(1)}\left(\frac{1}{|z_1|}\right) < |z_2| < R_+^{(2)}\left(\frac{1}{|z_1|}\right) . \end{cases}$$

Свойство 8. Свертка двумерных последовательностей соответствует произведению их z -преобразований. Если

$$g(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) ** f(n_1, n_2) ,$$

то

$$G(z_1, z_2) = H(z_1, z_2)F(z_1, z_2) . \quad (6.58)$$

Областью сходимости двумерного z -преобразования $G(z_1, z_2)$ является, как правило, пересечение областей сходимости $H(z_1, z_2)$ и $F(z_1, z_2)$.

6.9 Анализ и синтез двумерных ЛИС-систем с использованием z -преобразования

Введем понятие *передаточной функции* двумерной дискретной ЛИС-системы $H(z_1, z_2)$ – z -преобразования ее импульсной характеристики $h(n_1, n_2)$. Передаточная функция исчерпывающим образом описывает систему, так как с учетом свойства 8 (см. выше) однозначно определяет преобразование входной двумерной последовательности в выходную.

Передаточная функция может быть получена непосредственно из разностного уравнения, описывающего двумерную ЛИС-систему. Действительно, используя сформулированные в предыдущем параграфе свойства z -преобразования, уравнение (6.21) можно записать в преобразованной форме:

$$G(z_1, z_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in Q_g} \sum a_{m_1, m_2} G(z_1, z_2) z_1^{-m_1} z_2^{-m_2} + \sum_{(m_1, m_2) \in Q_f} \sum b_{m_1, m_2} F(z_1, z_2) z_1^{-m_1} z_2^{-m_2} .$$

Отсюда

$$G(z_1, z_2) = \frac{\sum_{(m_1, m_2) \in Q_f} \sum b_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}}{1 - \sum_{(m_1, m_2) \in Q_g} \sum a_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}} F(z_1, z_2) . \quad (6.59)$$

Сопоставляя выражения (6.59) и (6.58) видим, что

$$H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{(m_1, m_2) \in Q_f} \sum b_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}}{1 - \sum_{(m_1, m_2) \in Q_g} \sum a_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}} . \quad (6.60)$$

Аналогично, для каузальной ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением (6.22), имеем

$$H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} b_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}}{1 - \sum_{\substack{m_1=0 \\ (m_1, m_2) \neq (0,0)}}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} a_{m_1 m_2} z_1^{-m_1} z_2^{-m_2}} . \quad (6.61)$$

Передаточные функции (6.60), (6.61) представляют собой частные случаи записи выражения вида (6.60), то есть являются дробно-

рациональными. Несложно показать, что двумерные ЛИС-системы, представляемые разностными уравнениями конечного порядка, всегда имеют дробно-рациональные передаточные функции.

Важной для практики является и возможность обратного перехода от передаточных функций (6.60), (6.61) через соотношение (6.59) к разностным уравнениям (6.21), (6.22). Такой переход позволяет решить задачу синтеза и реализации двумерной ЛИС-системы с требуемой импульсной характеристикой.

Пример 6.4. Построим разностное уравнение для каузальной ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n_1, n_2) = u(n_1, n_2) - u(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Графическое изображение этой импульсной характеристики дано на рисунке 6.15а. Вычисление z -преобразования от представленной двумерной последовательности (переход к передаточной функции) дает:

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 - z_1^{-1} z_2^{-1}}{(1 - z_1^{-1})(1 - z_2^{-1})} = \frac{1 - z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - z_1^{-1} - z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1}}, \quad \begin{cases} |z_1| > 1, \\ |z_2| > 1. \end{cases}$$

Связь z -преобразований входного и выходного сигналов задается выражением:

$$G(z_1, z_2) = H(z_1, z_2)F(z_1, z_2) = \frac{1 - z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - z_1^{-1} - z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1}} F(z_1, z_2).$$

Отсюда получаем

$$(1 - z_1^{-1} - z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1})G(z_1, z_2) = (1 - z_1^{-1} z_2^{-1})F(z_1, z_2),$$

или

$$G(z_1, z_2) = z_1^{-1}G(z_1, z_2) + z_2^{-1}G(z_1, z_2) - z_1^{-1}z_2^{-1}G(z_1, z_2) + F(z_1, z_2) - z_1^{-1}z_2^{-1}F(z_1, z_2).$$

Последнему соотношению в области пространственных аргументов соответствует двумерное разностное уравнение

$$g(n_1, n_2) = g(n_1 - 1, n_2) + g(n_1, n_2 - 1) - g(n_1 - 1, n_2 - 1) + f(n_1, n_2) - f(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Построенная на базе этого уравнения схема вычисления отсчетов двумерного выходного сигнала представлена на рисунке 6.15б.

Конец примера.

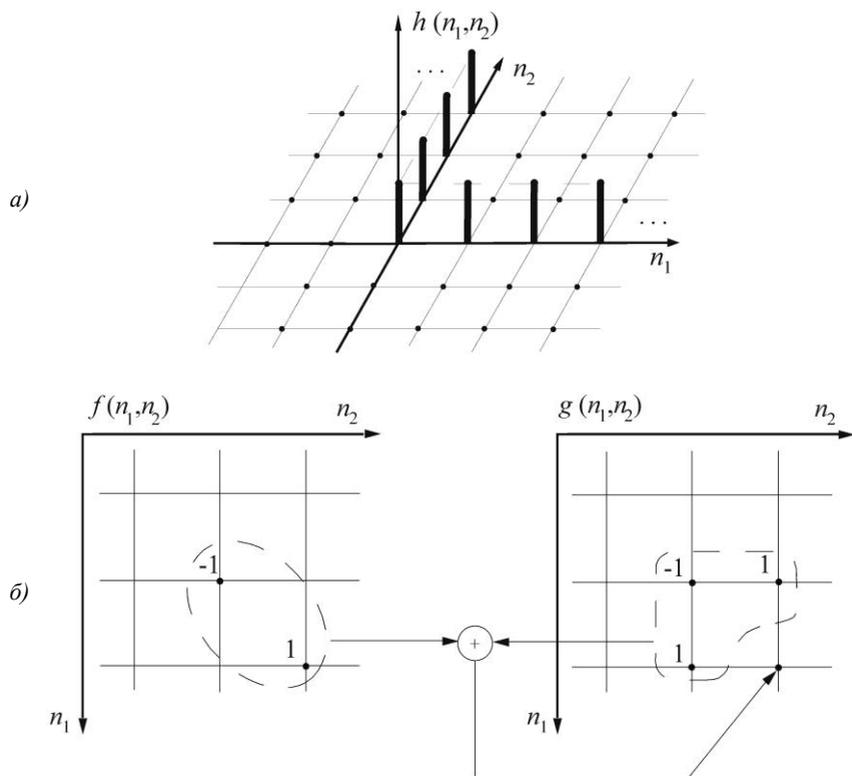


Рис. 6.15. Импульсная характеристика двумерной ЛИС-системы из примера 6.4 и соответствующая ей схема вычисления выходных отсчетов:
а) импульсная характеристика; б) схема вычисления

Аппарат z -преобразования весьма эффективен при решении задачи синтеза двумерной ЛИС-системы, осуществляющей заданное преобразование сигналов, то есть при конструировании передаточной функции системы по соотношению

$$H(z_1, z_2) = \frac{G(z_1, z_2)}{F(z_1, z_2)}. \quad (6.62)$$

Следует, однако, иметь в виду, что результатами такого синтеза удастся воспользоваться на практике только тогда, когда z -преобразования входного и выходного сигналов являются дробно-рациональными, поскольку только в этом случае ЛИС-системе соответствует разностное уравнение конечного порядка.

Пример 6.5. Построим разностное уравнение для каузальной ЛИС-системы, преобразующей последовательность

$$f(n_1, n_2) = u(n_1, n_2) - u(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

в единичный импульс:

$$g(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2).$$

Для z -преобразования входного сигнала имеем (см. предыдущий пример)

$$F(z_1, z_2) = \frac{1 - z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - z_1^{-1} - z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1}}, \quad \begin{cases} |z_1| > 1, \\ |z_2| > 1, \end{cases}$$

а для выходного сигнала

$$G(z_1, z_2) = 1 \text{ при любых } |z_1|, |z_2|.$$

Следовательно, по (6.62) можно записать

$$H(z_1, z_2) = \frac{1 - z_1^{-1} - z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1}}{1 - z_1^{-1} z_2^{-1}}$$

и далее перейти от передаточной функции к искомому разностному уравнению (см. рисунок 6.16)

$$g(n_1, n_2) = g(n_1 - 1, n_2 - 1) + f(n_1, n_2) - f(n_1 - 1, n_2) - f(n_1, n_2 - 1) + f(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

При решении подобных задач, когда числитель и знаменатель дробно-рациональной функции меняются местами, возникает вопрос определения области сходимости z -преобразования. В рассмотренном примере ответ на него достаточно прост и однозначен. Область сходимости записанной дробно-рациональной передаточной функции ограничивается такими значениями z_1 , z_2 , при которых ее знаменатель обращается в нуль, то есть выполняется равенство

$$1 - z_1^{-1} z_2^{-1} = 0 \quad \text{или} \quad z_1 = \frac{1}{z_2}.$$

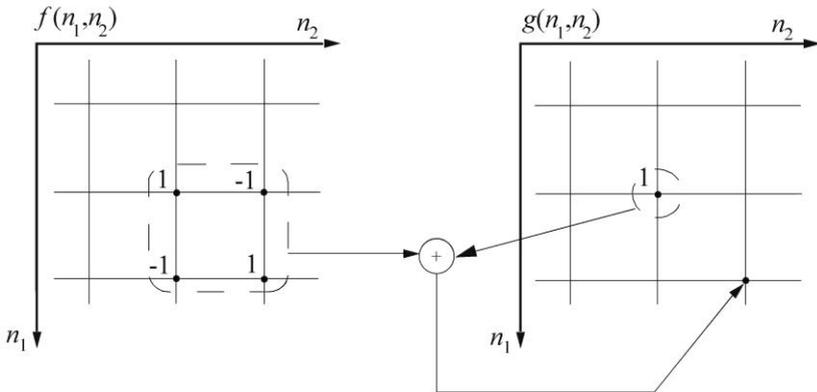


Рис. 6.16. Схема вычисления выходных отсчетов для ЛИС-системы, преобразующей последовательность вида $u(n_1, n_2) - u(n_1 - 1, n_2 - 1)$ в единичный импульс

Соответственно, для абсолютных значений комплексных переменных имеем

$$|z_1| = \frac{1}{|z_2|}.$$

Последнее соотношение задает гиперболическую границу области сходимости в координатах $(|z_1|, |z_2|)$. Форма границы позволяет рассматривать два варианта самой области:

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_1| > \frac{1}{|z_2|}, \\ |z_2| > \frac{1}{|z_1|}, \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} |z_1| < \frac{1}{|z_2|}, \\ |z_2| < \frac{1}{|z_1|}. \end{array} \right.$$

Поскольку ЛИС-система полагается каузальной (с импульсной характеристикой в первом квадранте), то необходимо принять первый вариант. Для нашего примера решение оказалось очевидным, однако в общем случае назначение области сходимости “синтезированному” двумерному z -преобразованию может оказаться сложной процедурой с неоднозначным ответом.

Конец примера.

Еще более сложным (а иногда и невозможным) является обратный переход от z -преобразования к исходной двумерной последовательности. Существует общий метод вычисления обратного двумерного z -преобразования, но он имеет весьма ограниченное применение из-за громоздкости вычислений, связанной, в частности, с невозможностью представления произвольных двумерных дробно-рациональных функций в виде суммы простых составляющих. Обычно реконструкция двумерной последовательности осуществима лишь тогда, когда z -преобразование с учетом его свойств удастся свести к совокупности “табличных” формул, для которых указанный переход заранее известен.

Как и в одномерном случае, важным применением z -преобразования к анализу двумерных ЛИС-систем является проверка устойчивости системы по передаточной функции. Из сравнения основного критерия устойчивости (6.17) с условием сходимости z -преобразования (6.42) следует, что для устойчивости дву-

мерной ЛИС-системы необходимо и достаточно, чтобы область сходимости передаточной функции включала в себя значения ее комплексных аргументов, для которых $|z_1|=1$, $|z_2|=1$. Это условие выглядит простым, однако его выполнение обычно трудно проверить на практике. Для анализируемой ЛИС-системы, как правило, известно разностное уравнение, по которому можно легко построить саму дробно-рациональную передаточную функцию, но чрезвычайно сложно в явном виде выразить ее область сходимости. По этой причине находят применение косвенные тесты устойчивости, не требующие определения всей области сходимости и проверки охвата ею точки $|z_1|=1$, $|z_2|=1$. Более подробное рассмотрение вопросов анализа устойчивости двумерных ЛИС-систем выходит за рамки данного учебного пособия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дауни, А.Б. Цифровая обработка сигналов на языке Python [Текст] / А.Б. Дауни. – Москва : ДМК Пресс. – 2017. – 160 с.
2. Землянухин, П.А. Теория сигналов : учебное пособие [Текст] / П.А. Землянухин. – Ростов-на-Дону; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. – 136 с.
3. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов [Текст] / Р. Лайонс. – Москва: Бином, 2015. – 656 с.
4. Магазинникова, А.Л. Основы цифровой обработки сигналов: учебное пособие [Текст] / А. Л. Магазинникова. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 132 с.
5. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – Москва : Техносфера, 2012. – 1048 с.
6. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А.Б. Сергиенко. – БХВ-Петербург, 2011.
7. Смит, С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников [Текст] / С. Смит. – Москва: ДМК Пресс, 2018. – 718 с.
8. Умняшкин, С.В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учебное пособие : [16+] [Текст] / С.В. Умняшкин. – Москва: Техносфера, 2019. – 550 с.

Учебное издание

*Денисова Анна Юрьевна,
Сергеев Владислав Викторович,
Чичева Марина Александровна,
Юзькив Руслан Романович*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ
СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ.
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ**

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 11,25

Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.

443086, Самара, Московское шоссе, 34.

