

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математического моделирования в механике

Л.В. Степанова, М.Е. Федина

## **СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ТРЕЩИН**

*Утверждено Редакционно-издательским советом  
в качестве учебного пособия*

Издательство «Самарский университет»  
2006

УДК 531  
ББК 22.251  
С 794

Рецензент д-р. физ.-мат. наук, проф. В.П. Радченко  
Отв. редактор д-р физ.-мат. наук, проф. В.И. Астафьев

**Степанова, Л.В.**

С 794 **Связанные задачи механики трещин: учеб. пособие /**  
Л.В. Степанова, М.Е. Федина; Федер. агентство по образованию. – Самара:  
Изд-во «Самарский университет», 2006. – 92 с.

В учебном пособии приводится решение ряда связанных задач механики трещин в связке ползучесть – поврежденность.

Излагаются новые решения задач о стационарных и растущих трещинах в условиях ползучести в среде с поврежденностью. Акцент делается на исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины и на изучение конфигурации области полностью поврежденного материала.

Учебное пособие может быть полезно для студентов механико-математических факультетов университетов специальностей «Механика» и «Прикладная математика», специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.

УДК 531  
ББК 22.251

- © Степанова Л.В., Федина М.Е., 2006
- © Самарский государственный университет, 2006
- © Издательство «Самарский университет», 2006

## Введение

Внезапные разрушения ответственных конструкций, которые происходят при сравнительно невысоких расчетных напряжениях и в спокойных условиях, при сравнительно малых деформациях после длительного времени нормальной работы, выявили необходимость более глубокого подхода к анализу прочности, подчеркнули значение трещин и их роста в проблеме разрушения, необходимость введения новых характеристик прочности, учитывающих трещиностойкость (вязкость), способность противостоять начавшемуся разрушению. Современные экспериментальные данные убедительно свидетельствуют о постепенном развитии разрушения, о большой роли первичных дефектов, микротрещин в формировании картины разрушения. Трещины начинают развиваться задолго до полного разрушения. Конструкции из новых высокопрочных материалов, которые при стандартных испытаниях обнаруживают высокую прочность, при некоторых условиях разрушаются путем распространения трещины задолго до исчерпания расчетной несущей способности. Анализ хрупких разрушений конструкций показывает, что в очагах изломов всегда имеются начальные трещины. Разрушение не является единовременным актом, оно развивается с большей или меньшей скоростью и представляет собой некоторый, иногда длительный, процесс. Для оценки реальной прочности конструкций и пригодности тех или иных материалов, необходимо учитывать влияние трещин, определить связь между свойствами сплошного материала и его сопротивляемостью зарождению и развитию трещин, усовершенствовать на этой основе способы испытания материалов и прогнозирования долговечности элементов конструкций.

Разрушение (макроскопическое нарушение сплошности тела в результате воздействия на него внешнего окружения) обычно развивается параллельно с упругой или пластической деформацией твердого тела, или в условиях ползучести. Исследование скрытого разрушения (зарождение и развитие микродефектов, рассеянных по объему тела) осуществляется с помощью методов и теорий механики поврежденности – нового динамично развивающегося раздела механики деформируемого твердого тела.

Изменение со временем механических свойств материалов феноменологически нередко можно интерпретировать как некоторые процессы накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение. Трещинообразование начинается на самых ранних этапах деформации и связано с ростом имеющихся и возникновением новых суб- и микродефектов. В материале всегда имеется большое число различных дефектов, приводящих к высоким местным напряжениям. Повреждения можно разделить на рассеянные дефекты – малые по размерам и встречающиеся во множестве в единице объ-

ема, и крупные, магистральные трещины, появляющиеся обычно в финале процесса разрушения. Процесс накопления рассеянных повреждений можно описать путем введения некоторой априорной характеристики поврежденности, которая чаще всего трактуется как сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади составляющих его элементов, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов, и может быть установлена сравнением следствий теории с экспериментальными данными.

Уменьшение прочности (свойства тела сопротивляться воздействиям со стороны внешнего окружения) твердых тел часто может быть объяснено скрытым разрушением и микродефектной структурой тела. Таким образом, так как повреждения тела существенно влияют на характер его разрушения, то становится очевидным, что и механика разрушения и механика поврежденности призваны решить главную прикладную задачу об оценке запаса прочности твердого тела.

В простейшем варианте поврежденность можно описать некоторым скаляром, структурным параметром  $1 \geq \psi \geq 0$  (Л.М. Качанов [5]). В начальном состоянии при отсутствии поврежденности  $\psi = 1$ ; с течением времени функция  $\psi$  убывает. Функцию  $\psi$ , по сути дела, можно интерпретировать как сплошность.

Ю.Н. Работнов [7] ввел функцию  $\omega \geq 0$ , равную нулю в начальном состоянии и единице в момент разрушения, которую можно принять за меру охрупчивания. Функцию  $\omega$  естественно назвать поврежденностью<sup>1</sup> (в отличие от сплошности  $\psi$ ); можно считать, что  $\psi = 1 - \omega$ . Величина  $\omega$  может быть интерпретирована как относительная площадь поперечного сечения, занятая трещинами. Предполагается, что скорость изменения параметра  $\dot{\omega}$  зависит от напряжения и от  $\omega$ . Такое предположение позволяет считать  $\omega$  за один из структурных параметров. Простейшая гипотеза состоит в том, что  $\dot{\omega}$  есть степенная функция отношения  $\sigma/(1 - \omega)$ , это отношение может быть истолковано как среднее напряжение на площади поперечного сечения, свободной от трещин.

В соответствии с классической теорией Качанова – Работнова, текущее состояние внутренней поврежденности образца может быть представлено с помощью единственного скалярного параметра (параметра поврежденности)  $\omega$ , который представляет собой монотонно возрастающую функцию времени  $0 \leq \omega \leq 1$ .

Параметр поврежденности интерпретируется как относительное сокра-

<sup>1</sup>В русскоязычной литературе параметр поврежденности, как правило, обозначается буквой  $\omega$ , а в англоязычной –  $D$ .

щение вследствие распределенных внутри образца микродефектов эффективной, несущей нагрузку площади поперечного сечения. Дegrадация материала объясняется как постепенное уменьшение эффективной площади, которая реально несет растягивающую нагрузку и определяет сопротивляемость образца растяжению. В силу такой интерпретации несущая нагрузку площадь оказывается равной не  $S$ , а некоторому меньшему значению  $S^*$  и для параметра  $\omega$  имеет место следующее простое соотношение:

$$1 - \omega = \frac{S^*}{S}.$$

Определенный таким образом параметр поврежденности представляет собой чисто геометрическую характеристику текущего состояния поврежденности и его изменение определяется свойствами материала и историей внешнего нагружения.

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение площади, несущей растягивающую нагрузку, сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными поврежденностями. Действительно, наряду с напряжением

$$\sigma = \frac{P}{S},$$

очевидно, следует рассмотреть эффективное напряжение

$$\sigma^* = \frac{P}{S^*},$$

которое в силу определения параметра поврежденности можно также представить в виде

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 - \omega}.$$

Последняя формула выражает эффект повышения уровня напряжений в поврежденном материале, поскольку  $0 \leq \omega \leq 1$ .

Таким образом, можно представить вместо исходного образца другой, воображаемый неповрежденный образец, площадь поперечного сечения которого равна  $S^*$  и который растягивается той же самой силой  $P$  (рис. 1). Механическое состояние подобного образца полностью эквивалентно текущему состоянию поврежденного образца, а изменение геометрии полностью описывается параметром поврежденности  $\omega$ .

В процессе ползучести поврежденность с течением времени возрастает. Изменение сплошности  $\psi$  можно описать некоторым кинетическим уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, \dots),$$

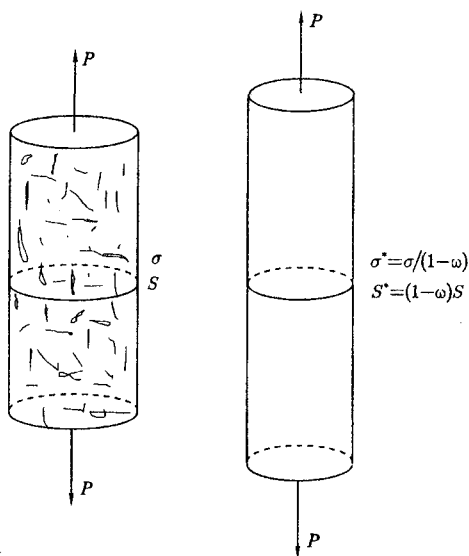


Рис. 1. Поврежденный и эквивалентный неповрежденный образец

где  $F$  зависит от  $\psi$  и некоторых других переменных, существенных для рассматриваемого процесса. Процесс разрушения прежде всего зависит от уровня напряженного состояния. В [5] скорость уменьшения сплошности (или скорость роста поврежденности) определяется эффективным напряжением  $\sigma/\psi$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma}{\psi} \right)^n,$$

где  $A > 0$ ,  $n \geq 0$  – постоянные ( $A$  – коэффициент,  $n$  – показатель трещинообразования).

Таким образом, система уравнений классической механики сплошной среды дополняется кинетическим уравнением, описывающим эволюцию введенного параметра – параметра сплошности или поврежденности. Необходимо отметить, что распределение сплошности (поврежденности) можно определить после решения задачи нахождения напряженно-деформированного состояния в теле путем интегрирования кинетического уравнения. Данный подход решения получил название "несвязанной постановки" задачи теории упругости, теории пластичности или теории ползучести с механикой поврежденности. В этом случае учитывается влияние напряженно-деформированного состояния на рост повреждений в теле. Однако в рамках данного подхода

не удастся описать взаимный процесс – процесс влияния поля повреждений на эволюцию напряженно-деформированного состояния в теле. Для учета взаимного влияния изменения напряженно-деформированного состояния и поля повреждений используется так называемая "связанная постановка" задачи, когда скалярный параметр сплошности входит в определяющие соотношения рассматриваемой задачи.

Проблемам определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины как стационарной, так и распространяющейся трещины в связанной постановке задач теории упругости, теории пластичности и теории ползучести с механикой поврежденности в последнее время посвящается большое количество исследований. Основным интерес представляет оценка влияния процесса накопления повреждений на распределение напряжений и деформаций (или скоростей деформаций ползучести). С практической точки зрения важно определить скорость докритического подрастания трещины.

Можно выделить характерные особенности, свойственные двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в бесконечном теле в связанной постановке (в связках упругость – поврежденность, ползучесть – поврежденность, пластичность – поврежденность и других более сложных связках).

В [1], [2], [27], [28] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в полном устранении особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо в значительном ослаблении сингулярности поля напряжений  $\sigma_{ij}(r, \varphi) = Ar^{-\alpha} f_{ij}(\varphi)$  (показатель степени  $\alpha$  в  $r^{-\alpha}$  уменьшается). В [1] установлено, что эффективные напряжения  $\sigma_{ij}/\psi$ , где  $\psi$  – параметр сплошности Качанова–Работнова, ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и сами компоненты тензора напряжений линейным образом уменьшаются до нуля при  $r \rightarrow 0$ . В [27] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для различных значений констант  $m$  и  $n$ , входящих в кинетическое уравнение, задающее степенной закон накопления повреждений, показало, что связанность постановки задачи приводит к слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений для малых значений  $m$  и  $n$ , тогда как при возрастании значений данных параметров особенность напряжений вообще исчезает.

Следующей характерной чертой, присущей этому типу задач, является наличие либо области активного накопления повреждений, либо области полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора на-

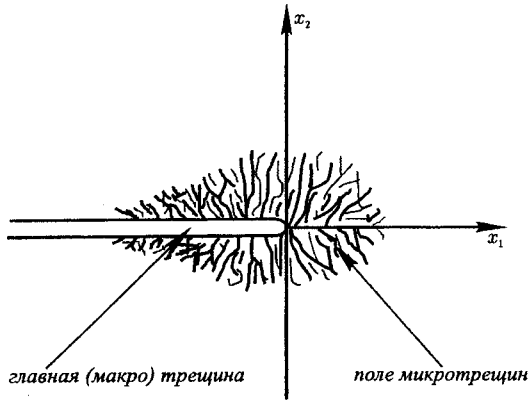


Рис. 2. Схематичное представление области полностью поврежденного материала

пряжений и сплошность обращаются в нуль (рис. 2). Полностью разрушенная область у берегов трещины может быть интерпретирована как область микроветвления, когда вдоль всей траектории развития магистральной трещины возникают ортогонально ориентированные к ней микротрещины. В [1], [2] при численном определении коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности (угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности) оказалось, что, начиная с некоторого значения полярного угла  $\varphi_d$  (значение  $\varphi = \pi$  соответствует верхнему берегу трещины,  $\varphi = 0$  – ее продолжению) (рис. 3), функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, начинает принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины. Данное обстоятельство привело к модифицированной постановке задачи, согласно которой решение разыскивалось для  $0 \leq \varphi \leq \varphi_d$ . Оставшаяся область  $\varphi_d \leq \varphi \leq \pi$ , локализованная в окрестности вершины распространяющейся трещины, есть полностью разрушенная зона, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю, на границе же введенных областей должны выполняться условия непрерывности функции сплошности и компонент тензора напряжений. В [27] авторы апеллируют к невозможности выполнения граничных условий на берегах трещины и переходят к модифицированной постановке задачи, вводя область полностью поврежденного материала, примыкающую к берегам трещины.

Необходимо отметить, что вместе с асимптотическим изучением полей в окрестности вершины трещины в связанной постановке использовались и



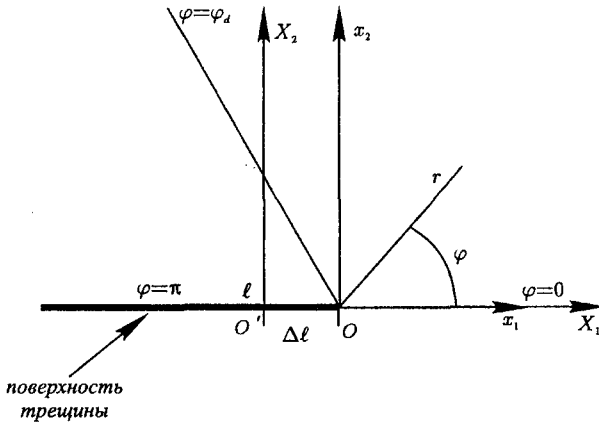


Рис. 3. Геометрия вершины растущей трещины:  $X_1O'X_2$  – неподвижная система координат,  $x_1Ox_2$  – движущаяся вместе с вершиной трещины система координат

иные методы. Например, для анализа растущей трещины антиплоского сдвига в [18] сделана попытка использования метода годографа. Однако авторы отказываются от проблемы интегрирования кинетического уравнения и оперируют с предполагаемым результатом интегрирования, полагая, что параметр сплошности (или поврежденности) есть функция лишь от напряжений, но не физических координат  $x_1, x_2$ , что, вообще говоря, неверно. Явная зависимость параметра сплошности от физических координат вносит сложности в процедуру метода годографа и ставит под сомнение возможность его использования для движущейся трещины.

В [18] представлены решения задач о неподвижной и растущей трещинах антиплоского сдвига в квазихрупком материале. В этой работе предполагается, что определяющие соотношения линейны до и после достижения некоторых двух характерных для этого материала значений интенсивности деформации. Для промежуточных значений справедлива степенная зависимость. С помощью метода годографа определены конфигурации каждой из трех областей, соответствующих трем различным определяющим зависимостям. Согласно предложенной модели введенные области отвечают а) неповрежденной области, б) области, в которой происходит процесс накопления повреждений, в) регион "насыщения", непосредственно охватывающий вершину трещины, в котором новые микродефекты уже не образуются. Показано, что данные области разделены окружностями с центром в вершине трещины (окружность, разделяющая область насыщения и зону активного накопления

повреждений) и с центром, смещенным вправо относительно вершины трещины (граница, разделяющая неповрежденную область и зону накопления повреждений).

В уже упомянутой работе [27] представлено асимптотическое исследование усталостного роста трещины нормального отрыва в упругой среде с поврежденностью. Показано, что у вершины трещины существует область процесса – зона, в которой происходит накопление рассеянных повреждений (в отличие от области полностью поврежденного материала). Для определения границы данной области использовано то обстоятельство, что кинетическое уравнение, задающее закон накопления рассеянных повреждений, имеет две "ветви", разделяющие два состояния материала, находящегося под действием усталостного нагружения: накопление повреждений в окрестности вершины трещины и отсутствие накопления повреждений.

В [22] исследованы асимптотики напряжений и параметра сплошности у вершины растущей трещины нормального отрыва. Авторы статьи, основываясь на экспериментальных данных, предполагают, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и прямые, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, можно определить асимптотические разложения компонент тензора напряжений и сплошности. Заметим, что авторы не определяют геометрию области процесса, а задают ее априори. Таким образом, задача нахождения конфигурации областей полностью поврежденного материала, либо области активного накопления повреждений у вершины трещины не является еще полностью исследованной и заслуживает особого внимания.

В [1], [2] рассмотрено докритическое подрастание трещины нормального отрыва и антиплоского сдвига в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. Установлено, что в окрестности вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Данная область примыкает к берегам трещины в окрестности вершины трещины и занимает область, определяемую соотношениями  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$  и  $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$ , где  $\varphi$  – полярный угол. Однако в рамках данного исследования не удастся найти конфигурацию этой области, поскольку результаты указывают лишь на существование вертикальной касательной к границе этой области при  $\varphi = 0$ . Геометрию этой области можно определить, находясь от вершины трещины на расстояниях, сравнимых с характерным линейным размером зоны полностью поврежденного материала или превышающих это расстояние.

К числу еще неразрешенных задач, требующих детального изучения, относится оценка скорости роста трещины в условиях ползучести в среде

с поврежденностью и связанная с данным вопросом проблема срачивания "ближнего поля" – решения, полученного в окрестности вершины трещины, с "дальним полем" – заданных граничных условий на бесконечности (в задачах о росте полубесконечной трещины в бесконечном теле). Стандартным приемом срачивания "ближнего" и "дальнего" полей является использование инвариантных интегралов механики разрушения:  $J$ -интеграла<sup>2</sup>,  $C^*$ -интеграла<sup>3</sup> и некоторых иных инвариантных интегралов, полученных обобщением упомянутых. Однако, такие параметры не обладают свойством инвариантности в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности.

Хорошо известно, что при изучении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины используется подход в стиле "теории пограничного слоя" [9] или "принцип микроскопа" [10], в рамках которых изучается непосредственная окрестность вершины трещины, и в такой постановке трещина предполагается полубесконечной, а истинные граничные условия заменяются условиями асимптотического сближения, например, с особым упругим решением при исследовании трещины в упругопластическом материале в предположении маломасштабного пластического течения [16]. В этом случае говорят, что конфигурация области пластического течения "полностью управляется" особым упругим решением. Аналогичный метод для решения задачи о росте трещины в упругопластических материалах применяется при формулировке граничного условия в бесконечно удаленной точке. В [15] аналогичный подход используется для описания переходного периода от состояния маломасштабной ползучести (когда рост трещины описывается коэффициентом интенсивности напряжений) до состояния развитых деформаций ползучести (когда рост трещины можно описать с помощью инвариантного  $C^*$  – интеграла установившейся ползучести). Первый предель-

<sup>2</sup>Для упругого тела с трещиной  $J$ -интеграл Эшелби – Черепанова – Райса представляет собой с точностью до знака скорость изменения его потенциальной энергии при увеличении длины трещины:

$$J = \int_C \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds,$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\epsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $s$  – длина дуги,  $T_i$  – усилия, действующие на тело, ограниченное кривой  $C$  и поверхностью трещины.

<sup>3</sup>Определяя зависимость нагрузка – скорость перемещения для двух идентичных образцов, с трещинами длины  $l$  и  $l + dl$ ,  $C^*$ -интеграл вычисляется дифференцированием по длине трещины площади под кривой нагрузка – скорость перемещения или по формуле

$$C^* = \int_C \left[ W^* dx_2 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} ds \right],$$

где

$$W^* = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$

ный случай требует выполнения условия асимптотического сближения искомого решения с особым упругим решением, тогда как второй предельный случай предполагает выполнение иного граничного условия в бесконечно удаленной точке – условия асимптотического сближения с решением HRR.

Формулировка граничного условия в бесконечно удаленной точке в стиле "теории пограничного слоя" используется и при решении задач механики трещин в связанной постановке. Так в [18], [27], [28] исследуется напряженно-деформированное состояние у вершины трещины антиплоского сдвига [18] и нормального отрыва [27], [28] в связанной постановке в связках "упругость – поврежденность" и "пластичность – поврежденность", где предполагается, что поле напряжений непосредственно у вершины трещины искажается вследствие процесса накопления повреждений, тогда как при удалении от вершины трещины, где материал является неповрежденным, можно считать, что поле напряжений полностью определяется сингулярным упругим решением. Таким образом, принимается гипотеза, согласно которой область накопления рассеянных повреждений полностью определяется особым упругим решением.

Подобный подход используется и при постановке граничного условия в бесконечно удаленной точке в упругом нелинейно-вязком материале [14], [15].

В настоящем учебном пособии рассматривается класс задач о стационарной и растущей трещинах в нелинейно-вязком материале, определяющие соотношения которого построены на основе степенного закона Нортона установившейся ползучести, в связанной постановке в связке ползучесть – поврежденность с использованием автомодельной переменной, предложенной Риделем [26] для данного типа определяющих соотношений, рассматриваемого кинетического уравнения и граничных условий. Однако решения каких-либо краевых задач с использованием установленного на основе анализа размерностей свойства автомодельности решения не было получено.

Проведенные исследования (отраженные в первой и четвертой главах настоящего учебного пособия) инициировали новый класс задач о растущей трещине в связанной постановке, решения которых были получены с помощью асимптотических разложений искомых величин на больших расстояниях от вершины трещины (исследовалась так называемая асимптотика дальнего поля повреждений – асимптотика на расстояниях, много больших характерного линейного размера области полностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером тела) (вторая и третья главы настоящего учебного пособия).

# 1 Автомодельное решение задачи о трещине типа III в связанной постановке (связка ползучесть – поврежденность)

## 1. Автомодельная переменная в задаче о росте трещины в среде с поврежденностью

Рассмотрим полубесконечную трещину в бесконечном теле в материале с определяющими соотношениями связанной задачи теории ползучести и механики поврежденности, построенных на основе степенной связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями [8]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \tag{1.1}$$

где  $\psi$  – параметр сплошности ( $\omega = 1 - \psi$  – параметр поврежденности);  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $s_{ij}$  – компоненты дивергатора напряжений;  $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$  – интенсивность напряжений;  $B, n$  – константы материала.

Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t = 0) = \left( \frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \tag{1.2}$$

где  $C^*$  – инвариантный интеграл теории установившейся ползучести,  $I_n$  – функция, зависящая от  $n$  и определяемая как безразмерный  $C^*$ -интеграл<sup>4</sup>,  $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  – функции, известные из решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена (HRR) [17], [24];  $r, \varphi$  – полярные координаты с полюсом в вершине трещины.

<sup>4</sup>В случае степенного закона ползучести все компоненты тензора напряжений в любой точке тела возрастают пропорционально приложенной нагрузке, а компоненты тензора скоростей деформаций увеличиваются пропорционально  $n$ -ой степени нагрузки. В конфигурациях, симметричных относительно плоскости трещины, удобно ввести напряжение в нетто-сечении  $\sigma_{net}$ , определяемое как нагрузка, отнесенная к плоскости неповрежденного сечения образца впереди трещины. Тогда "масштабные" свойства рассматриваемого определяющего соотношения могут быть представлены как

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_k; l, L, P, n) &= \sigma_{net} \bar{\sigma}_{ij}(x_k/l; l/L, n), \\ \dot{\epsilon}_{ij}(x_k; l, L, P, n, B) &= B \sigma_{net}^n \bar{\epsilon}_{ij}(x_k/l; l/L, n), \\ \dot{u}_i(x_k; l, L, P, n, B) &= l B \sigma_{net}^n \bar{u}_i(x_k/l; l/L, n), \end{aligned}$$

где  $P$  – приложенная нагрузка,  $L$  – характерный линейный размер тела,  $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, \bar{u}_i$  – безразмерные функции, зависящие только от безразмерных параметров  $l/L$  и  $n$ , но не от нагрузки и материального параметра  $B$ . Подставляя последние представления для напряжений, скоростей деформаций и скоростей перемещений в определение  $C^*$  – интеграла, можно получить [3], [6]

$$C^* = l B \sigma_{net}^{n+1} I_n(l/L, n),$$

Асимптотическое условие при  $r \rightarrow \infty$  определяется решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений ( $\psi \equiv 1$ ):

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) = \left( \frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (1.3)$$

Заметим, что начальное условие при  $t = 0$  (1.2) и граничное условие в бесконечно удаленной точке (1.3) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для  $\psi \equiv 1$ .

Следует подчеркнуть, что асимптотическое условие (1.3) есть гипотеза о том, что вдали от вершины трещины поле напряжений совпадает с полем напряжений у вершины стационарной трещины в материале со степенными определяющими соотношениями (с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена). Однако отметим, что (1.3) – гипотеза, справедливость или несправедливость которой должна быть установлена в ходе решения задачи.

В [26] установлено, что для определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3) существует автомодельная переменная

$$R = \frac{r}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}, \quad (1.4)$$

где  $k(n) = C^*/(BI_n)$ ;  $A, m$  – постоянные кинетического уравнения [13]

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (1.5)$$

или в декартовой системе координат

$$X_1 = \frac{x_1}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}, \quad X_2 = \frac{x_2}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}. \quad (1.6)$$

Выражение (1.4) и само существование автомодельной переменной  $R$  без труда обосновывается с помощью анализа размерностей.

Действительно, перейдем к безразмерным величинам согласно формулам

$$\hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}}, \quad (1.7)$$

где

$$I_n(l/L, n) = \int_C \left[ \bar{W}^* d\bar{x}_2 - \bar{\sigma}_{ij} n_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_1} d\bar{s} \right],$$

$$\bar{W}^* = \int \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \bar{x}_i = x_i/l, \quad d\bar{s} = ds/l.$$

где  $L$  — некоторая характерная длина,  $T$  — характерное время. Характерные длина и время могут быть связаны с помощью анализа кинетического уравнения накопления повреждений (1.5), позволяющего установить

$$T = \frac{1}{A} \left( \frac{k(n)}{L} \right)^{-m/(n+1)} \quad (1.8)$$

В этом случае безразмерные напряжения  $\hat{\sigma}_{ij}$  как функции от безразмерных переменных запишутся в следующей форме

$$\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r}, \varphi, \hat{t}) = \frac{1}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}} \sigma_{ij} \left( r/L, \varphi, tA (k(n)/L)^{\frac{n}{n+1}} \right). \quad (1.9)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче отсутствует характерный линейный размер  $L$ , то необходимо его исключить из аргументов функции  $\hat{\sigma}_{ij}$ , что достигается с помощью введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r/L}{\left[ tA (k(n)/L)^{m/(n+1)} \right]^{(n+1)/m}}. \quad (1.10)$$

В результате имеем автомодельную переменную (1.4).

В этом случае напряжения, параметр сплошности и скорости деформации ползучести представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \varphi, t) &= (At)^{(n+1)/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi), & \psi(r, \varphi, t) &= \hat{\psi}(R, \varphi), \\ \dot{\epsilon}_{ij}(r, \varphi, t) &= (At)^{n(n+1)/m} \hat{\epsilon}_{ij}(R, \varphi), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $\hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi)$ ,  $\hat{\epsilon}_{ij}(R, \varphi)$  и  $\hat{\psi}(R, \varphi)$  являются безразмерными функциями безразмерных переменных  $R, \varphi$  и подлежат определению в ходе решения конкретных краевых задач.

## 2. Автомодельное решение связанной задачи антиплоского сдвига пространства с полубесконечной трещиной

В механике деформируемого твердого тела часто оказывается целесообразным начинать изучение явления с наиболее простой с математической точки зрения задачи антиплоского сдвига. Поэтому сначала рассматривается задача о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью. На основе результатов исследований [1], [2] принимается, что у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R} (R\hat{\tau}_{Rz}) + \frac{\partial \hat{\tau}_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0; \quad (1.12)$$

условия совместности, сформулированного для скоростей деформаций ползучести  $\hat{\gamma}_{\varphi z}$  и  $\hat{\gamma}_{Rz}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial R} (R\hat{\gamma}_{\varphi z}) = \frac{\partial \hat{\gamma}_{Rz}}{\partial \varphi}, \quad (1.13)$$

где

$$\hat{\gamma}_{Rz} = \left( \frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{\tau}_{Rz}}{\hat{\psi}}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \left( \frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{\tau}_{\varphi z}}{\hat{\psi}}, \quad (1.14)$$

$$\hat{\gamma}_{ij}(R, \varphi) = \frac{2\gamma_{ij}(r, \varphi, t)}{3B} (At)^{n(n+1)/m}; \quad \tau = \sqrt{\hat{\tau}_{Rz}^2 + \hat{\tau}_{\varphi z}^2}$$

кинетического уравнения

$$R \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R} = -sm \left( \frac{\hat{\tau}}{\hat{\psi}} \right)^m, \quad (1.15)$$

где  $s = -1/(n+1)$ .

Решение системы уравнений (1.12) – (1.15) должно удовлетворять граничным условиям:

условиям отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$\hat{\tau}_{\varphi z}(R, \varphi = \pi) = 0 \quad (1.16)$$



и условию симметрии на ее продолжении

$$\hat{\tau}_{Rz}(R, \varphi = 0) = 0. \quad (1.17)$$

Асимптотическое условие сближения разыскиваемого решения с распределением HRR при  $R \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\hat{\tau}_{ij}(R, \varphi) = R^{-1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n) \quad (1.18)$$

(граничное условие в бесконечно удаленной точке).

Решение системы уравнений (1.12) – (1.15), подчиняющееся граничным условиям (1.16) – (1.18), разыскивается во всей плоскости за исключением полностью поврежденной зоны, внутри которой материал не удовлетворяет сформулированной системе уравнений. Предполагается, что внутри области полностью поврежденного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе введенной области разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям непрерывности:

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\tau}_{ij} = 0. \quad (1.19)$$

В дальнейшем знак  $\hat{\phantom{x}}$  опускается.

### 3. Метод разложения по собственным функциям (при больших значениях $R$ ).

Построим асимптотические разложения компонент тензора эффективных напряжений и параметра сплошности при больших  $R$  (при больших  $R$  по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но малых по сравнению с характерным линейным размером рассматриваемого тела, по сравнению с длиной трещины). Поскольку полностью поврежденная зона, в которой параметр сплошности и все компоненты тензора напряжений равны нулю, образуется у вершины трещины, то в непосредственной окрестности вершины трещины невозможно разыскивать асимптотические разложения напряжений и параметра сплошности. Следовательно, можно попытаться исследовать конфигурацию области полностью поврежденного материала, приближаясь к ней от бесконечной удаленной точки. Для этого главные члены асимптотических разложений естественно разыскивать в виде

$$\tau_{ij}(R, \varphi) = R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi), \quad \psi(R, \varphi) = 1 \quad (R \rightarrow \infty, s < 0). \quad (1.20)$$

Подстановка соотношений (1.20) в уравнение равновесия (1.12) и условие сплошности (1.13) приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_{Rz}^{(0)}(\varphi)$  и  $f_{\varphi z}^{(0)}(\varphi)$ :

$$\frac{df_{\varphi z}^{(0)}}{d\varphi} + (s+1)f_{Rz}^{(0)} = 0, \quad \frac{d}{d\varphi} \left( f^{n-1} f_{Rz}^{(0)} \right) = (sn+1)f^{n-1} f_{\varphi z}^{(0)}, \quad (1.21)$$

$$\text{где } f = \sqrt{\left( f_{Rz}^{(0)} \right)^2 + \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)^2}.$$

Решение системы уравнений (1.21) должно удовлетворять граничному условию на верхнем берегу трещины и условию симметрии на ее продолжении:

$$f_{\varphi z}^{(0)}(\varphi = \pi) = 0, \quad f_{Rz}^{(0)}(\varphi = 0) = 0. \quad (1.22)$$

В силу однородности системы уравнений (1.21) функции  $\kappa f_{ij}^{(0)}(\varphi)$ , где  $\kappa$  - произвольный множитель, являются решением рассматриваемой системы уравнений, если функции  $f_{ij}^{(0)}(\varphi)$  есть решение системы (1.21). Поэтому может быть сформулировано условие нормировки решения

$$f_{\varphi z}^{(0)}(0) = 1. \quad (1.23)$$

Поэтому угловые распределения главных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений при больших  $R$  определяются как

решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{df_{Rz}^{(0)}}{d\varphi} = f_{\varphi z}^{(0)} \frac{(sn + 1)f^2 + (n - 1)(s + 1) \left(f_{Rz}^{(0)}\right)^2}{(n - 1) \left(f_{Rz}^{(0)}\right)^2 + f^2}, \quad (1.24)$$

$$\frac{df_{\varphi z}^{(0)}}{d\varphi} = -(s + 1)f_{Rz}^{(0)},$$

которая должна быть решена с учетом граничных условий

$$f_{Rz}^{(0)}(0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(0)}(0) = 1. \quad (1.25)$$

Следует отметить, что последняя система уравнений хорошо известна в нелинейной механике разрушения, поскольку ее решение, соответствующее собственному числу  $s = -1/(n + 1)$ , есть угловое распределение в решении Хатчинсона – Райса – Розенгрена [24].

Поскольку граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как требование асимптотического сближения с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена, то для выполнения этого условия следует положить  $s = -1/(n + 1)$  и считать функции  $f_{ij}^{(0)}(\varphi)$  совпадающими с угловыми распределениями решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена.

Анализ кинетического уравнения (1.15) позволяет найти второй член асимптотического разложения параметра сплошности: подстановка известного главного члена асимптотического разложения интенсивности напряжений

$$\frac{\tau}{\psi}(R, \varphi) = R^s f(\varphi) \quad (1.26)$$

в кинетическое уравнение (1.15) приводит к уравнению

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -smR^{sm} f^m, \quad (1.27)$$

которое может быть проинтегрировано по  $R$ . Интегрирование кинетического уравнения по  $R$  и учет условия в бесконечно удаленной точке дает двучленное асимптотическое разложение параметра сплошности

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^{sm} f^m(\varphi), \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.28)$$

Полученные два члена асимптотического разложения параметра сплошности позволяют найти конфигурацию области полностью поврежденного

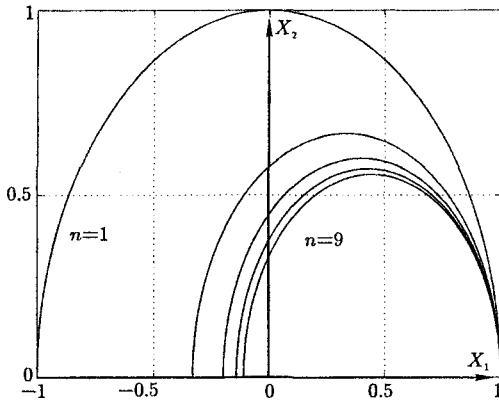


Рис. 4. Геометрия области полностью поврежденного материала, моделируемая в окрестности вершины трещины, для  $n = 1, 3, 5, 7, 9$ ,  $m = 0, 7n$

материала, в которой параметр сплошности обращается в нуль. Граница этой области определяется уравнением

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^{sm} f^m(\varphi) = 0, \quad (1.29)$$

откуда

$$R = R(\varphi) = (f(\varphi))^{-1/s}. \quad (1.30)$$

Границы областей полностью поврежденного материала для различных значений показателя  $n$  ( $n = 1, 3, 5, 7, 9$ ) и  $m = 0.7n$  приведены на рис. 4.

С целью уточнения полученного решения найдем следующие члены асимптотических разложений компонент тензора эффективных напряжений и параметра сплошности.

Будем разыскивать двучленное асимптотическое разложение компонент тензора эффективных напряжений в виде

$$\frac{\tau_{ij}}{\psi}(R, \varphi) = R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\varphi) + o(R^{s_1}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.31)$$

Так как двучленное асимптотическое разложение параметра сплошности имеет вид (1.28), то двучленное асимптотическое разложение компонент тензора напряжений определяется посредством формулы

$$\tau_{ij}(R, \varphi) = \left( R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\varphi) \right) \psi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\varphi) \right) (1 - R^{sm} f^m(\varphi)) = \quad (1.32) \\
 &= R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\varphi) - R^{s+sm} f_{ij}^{(0)}(\varphi) f^m(\varphi).
 \end{aligned}$$

Сравнение последних двух слагаемых в полученном асимптотическом разложении (1.32) приводит к предположению о равенстве порядка их малости (так как слагаемое  $R^{s+sm} f_{ij}^{(0)}(\varphi) f^m(\varphi)$  не содержит новых неизвестных функций, то степень  $s + sm$  не может быть меньше, чем  $s_1$ , поэтому  $s + sm \geq s_1$ ; предположение о том, что  $s + sm = s_1$  позволяет учесть в уравнении равновесия все имеющиеся слагаемые). Таким образом,  $s + sm = s_1$ .

Окончательное выражение для двучленного асимптотического разложения компонент тензора напряжений имеет вид

$$\tau_{ij}(R, \varphi) = R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} \left( f_{ij}^{(1)}(\varphi) - f_{ij}^{(0)}(\varphi) f^m(\varphi) \right) + o(R^{s_1}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (1.33)$$

Для дальнейшего полезными будут следующие асимптотические разложения: интенсивности эффективных напряжений

$$\frac{T}{\psi}(R, \varphi) = R^s f(\varphi) + R^{s_1} \left( f_{Rz}^{(0)}(\varphi) f_{Rz}^{(1)}(\varphi) + f_{\varphi z}^{(0)}(\varphi) f_{\varphi z}^{(1)}(\varphi) \right) / f, \quad (1.34)$$

скоростей деформаций ползучести

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{ij}(R, \varphi) &= R^{sn} f^{n-1} f_{ij}^{(0)} + \quad (1.35) \\
 &+ R^{sn+s_1-s} f^{n-1} \left( f_{ij}^{(1)} + (n-1) \frac{f_{Rz}^{(0)} f_{Rz}^{(1)} + f_{\varphi z}^{(0)} f_{\varphi z}^{(1)}}{f^2} f_{ij}^{(0)} \right) + o(R^{s_1}), \quad R \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Подстановка асимптотических разложений компонент тензоров напряжений (1.33) и скоростей деформаций ползучести и (1.35) в уравнение равновесия (1.12) и условие совместности деформаций (1.13) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $R$  приводит к системам уравнений для определения главного члена асимптотического разложения (1.24) и второго члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 \left( f_{\varphi z}^{(1)} \right)' &= \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)' f^m + m f_{\varphi z}^{(0)} f^{m-2} \left( f_{Rz}^{(0)} \left( f_{Rz}^{(0)} \right)' + f_{\varphi z}^{(0)} \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)' \right) - \\
 &\quad - (s_1 + 1) \left( f_{Rz}^{(1)} - f_{Rz}^{(0)} f^m \right), \\
 \left( f_{Rz}^{(1)} \right)' &= -(n-1) f_{Rz}^{(0)} \left( \left( f_{Rz}^{(0)} \right)' f_{Rz}^{(1)} + \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)' f_{\varphi z}^{(1)} + \left( f_{\varphi z}^{(1)} \right)' f_{\varphi z}^{(0)} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(n-1) \left( f_{Rz}^{(0)} \left( f_{Rz}^{(0)} \right)' + f_{\varphi z}^{(0)} \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)' \right) \left( f_{Rz}^{(1)} + (n-1) f_{Rz}^{(0)} f_1 / f^2 \right) - \quad (1.36) \\
& - 2(n-1) f_1 f_{Rz}^{(0)} \left( f_{Rz}^{(0)} \left( f_{Rz}^{(0)} \right)' + f_{\varphi z}^{(0)} \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)' \right) / f^2 + \\
& + (sn + s_1 - s + 1) \left( f^2 f_{\varphi z}^{(1)} + (n-1) f_{\varphi z}^{(0)} \right) - \\
& - (n-1) f_1 \left( f_{Rz}^{(0)} \right)',
\end{aligned}$$

где  $f_1 = f_1(\varphi) = f_{Rz}^{(0)} f_{Rz}^{(1)} + f_{\varphi z}^{(0)} f_{\varphi z}^{(1)}$ , с граничными условиями

$$f_{Rz}^{(1)}(\varphi = 0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(1)}(\varphi = \pi) = 0. \quad (1.37)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.36) разыскивалось численно с помощью процедуры метода Рунге – Кутты – Фельберга в сочетании с методом пристрелки. Действительно, для реализации метода Рунге – Кутты – Фельберга необходимо сформулировать условия при  $\varphi = 0$  для всех искомых функций:

$$f_{Rz}^{(1)}(\varphi = 0) = 0, \quad f_{\varphi z}^{(1)}(\varphi = 0) = c, \quad (1.38)$$

где  $c$  – неизвестная константа. Таким образом, в ходе построения численного решения подбиралось значение константы  $c$  для выполнения оставшегося граничного условия на верхнем берегу трещины (второе условие в (1.37)). Результаты численного счета для различных значений констант степенного закона ползучести и кинетического уравнения приведены на рис. 5, 6.

В силу (1.34) справедливо

$$\left( \frac{\tau}{\psi} \right)^m = R^{ms} f^m (1 + R^{s_1-s} m f_1 / f^2) \quad (1.39)$$

и кинетическое уравнение (1.15) может быть представлено как

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -sm (R^{sm} f^m + m R^{2sm} f^{m-2} f_1), \quad (1.40)$$

интегрирование которого по  $R$  приводит к трехчленному асимптотическому разложению скалярного параметра сплошности

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1 / 2. \quad (1.41)$$

Последнее выражение для параметра сплошности позволяет найти следующее приближение для границы области полностью поврежденного материала посредством выделения геометрического места точек, для которого

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^{sm} f^m - m R^{2sm} f^{m-2} f_1 / 2 = 0. \quad (1.42)$$

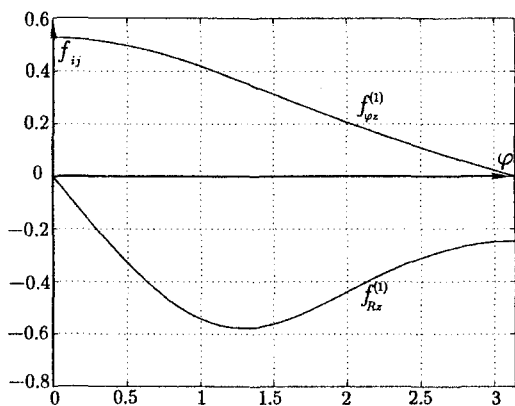


Рис. 5. Угловые распределения второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений  $f_{ij}^{(1)}(\varphi)$  для  $n = 3, m = 0, 7n$

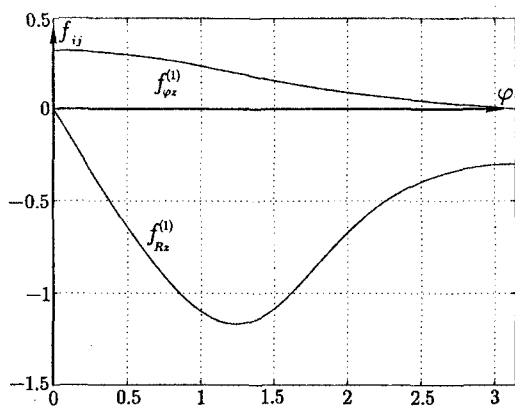


Рис. 6. Угловые распределения второго члена асимптотических разложений компонент тензора напряжений  $f_{ij}^{(1)}(\varphi)$  для  $n = 7, m = 0, 7n$

С математической точки зрения определение геометрического места точек  $R = R(\varphi)$ , для которого справедливо (1.42), сводится к решению квадратного уравнения. Действительно, вводя обозначения  $R^{-sm} = z$ , уравнение (1.42) преобразуется к виду

$$z^2 - z f^m - m f^{m-1} f_1 / 2 = 0. \quad (1.43)$$

Поэтому граница области полностью поврежденного материала определяется зависимостью

$$R = R(\varphi) = \left[ \left( f^m + \sqrt{f^{2m} + 2m f^{m-2} f_1} \right) / 2 \right]^{-1/(sm)}. \quad (1.44)$$

Геометрия области полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант показана на рис. 7, 8. Из приведенных графиков можно заключить, что характерный линейный размер области полностью поврежденного материала (значение  $R(0)$ ) существенно увеличивается по сравнению с первой оценкой размера этой зоны, даваемой двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности, и, следовательно, главным членом асимптотического разложения компонент тензора напряжений. Таким образом, необходимо построить третий член асимптотического разложения компонент тензора напряжений и четырехчленное асимптотическое разложение параметра сплошности, а затем получить следующую оценку границы области полностью поврежденного материала.

Трехчленное асимптотическое разложение компонент тензора эффективных напряжений разыскивается в форме

$$\frac{\tau_{ij}}{\psi}(R, \varphi) = R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} f_{ij}^{(1)}(\varphi) + R^{s_2} f_{ij}^{(2)}(\varphi). \quad (1.45)$$

Учитывая, что для параметра сплошности справедливо представление

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^{sm} f^m(\varphi) - m R^{2sm} f^{m-2}(\varphi) f_1(\varphi), \quad (1.46)$$

можно найти, повторяя проведенные ранее рассуждения, что  $s_2 = s + 2sm$ , и трехчленное асимптотическое разложение компонент тензора напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(R, \varphi) = & R^s f_{ij}^{(0)}(\varphi) + R^{s+sm} \left( f_{ij}^{(1)}(\varphi) - f_{ij}^{(0)}(\varphi) f^m(\varphi) \right) + \\ & + R^{s+2sm} \left( f_{ij}^{(2)}(\varphi) - f_{ij}^{(1)}(\varphi) f^m(\varphi) - m f_{ij}^{(0)}(\varphi) f^{m-2}(\varphi) f_1(\varphi) \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Для дальнейшего анализа будут полезными асимптотические разложения интенсивности эффективных напряжений

$$\frac{\tau}{\psi}(R, \varphi) = R^s f \left( 1 + R^{sm} f_1 / f^2 + R^{2sm} f_2 / (2f^2) \right), \quad (1.48)$$



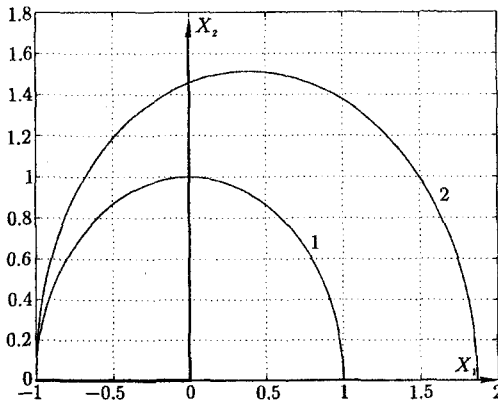


Рис. 7. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = m = 1$ : 1 – конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 – конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности

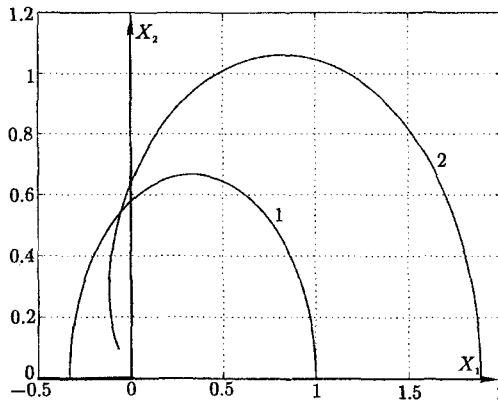


Рис. 8. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3, m = 0, 7n$ : 1 – конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 – конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности

где

$$f_2 = f_2(\varphi) = \left(f_{Rz}^{(1)}\right)^2 + \left(f_{\varphi z}^{(1)}\right)^2 + 2\left(f_{Rz}^{(0)}f_{Rz}^{(0)} + f_{\varphi z}^{(0)}f_{\varphi z}^{(0)}\right), \quad (1.49)$$

и компонент тензора скоростей деформаций сдвига

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} = R^{sn} f^{n-1} & \left[ f_{ij}^{(0)} + \right. \\ & + R^{sm} \left( f_{ij}^{(1)} + (n-1)f_{ij}^{(0)} f_1/f^2 \right) + \\ & \left. + R^{2sm} \left( f_{ij}^{(2)} + (n-1)f_{ij}^{(1)} f_1/f^2 + (n-1)f_{ij}^{(0)} f_2/(2f^2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Подстановка асимптотических разложений (1.45), (1.47) и (1.48) в систему уравнений равновесия и сплошности приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_{ij}^{(2)}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \left(f_{\varphi z}^{(2)}\right)' & = \left(f_{\varphi z}^{(1)}\right)' f^m + m f_{\varphi z}^{(1)} f^{m-2} \left( f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' \right) + \\ & + m f_{\varphi z}^{(0)} f^{m-2} \left[ \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' f_{Rz}^{(1)} + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(1)}\right)' + \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' f_{\varphi z}^{(1)} + f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(1)}\right)' \right] / 2 + \\ & + m(m-2) f_{\varphi z}^{(0)} f^{m-4} f_1 \left( f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' \right) / 2 - \\ & - (s + 2sm + 1) \left( f_{Rz}^{(2)} - f_{Rz}^{(1)} f^m - m f_{Rz}^{(0)} f^{m-2} f_1 / 2 \right) + \\ & + m \left( f_{\varphi z}^{(0)} \right)' f^{m-2} f_1 / 2, \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \left(f_{Rz}^{(2)}\right)' & = \left\{ (sn + 2sm + 1) f^2 \left( (n-1) f_{\varphi z}^{(1)} f_1 / f^2 + (n-1) f_{\varphi z}^{(0)} f_2 / (2f^2) + \right. \right. \\ & + f_{\varphi z}^{(2)} - (n-1) f_{Rz}^{(0)} \left[ f_{Rz}^{(1)} \left(f_{Rz}^{(1)}\right)' + f_{\varphi z}^{(1)} \left(f_{\varphi z}^{(1)}\right)' + \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' f_{Rz}^{(2)} + \right. \\ & + \left. \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' f_{\varphi z}^{(2)} + f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(2)}\right)' \right] - (n-1) \left( f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' + f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' \right) \times \\ & \times \left( f_{Rz}^{(2)} + (n-1) f_{Rz}^{(1)} f_1 / f^2 + (n-1) f_{Rz}^{(0)} f_2 / (2f^2) \right) - (n-1) \left( f_{Rz}^{(1)} \right)' f_1 + \\ & + (n-1) f_{Rz}^{(1)} \left( \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' f_{Rz}^{(1)} + f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(1)}\right)' + \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' f_{\varphi z}^{(1)} + f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(1)}\right)' \right) + \\ & + 2(n-1) f_{Rz}^{(1)} f_1 \left( f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' + f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' \right) / f^2 - (n-1) \left( f_{Rz}^{(0)} \right)' f_2 / 2 - \\ & \left. - (n-1) f_{Rz}^{(0)} f_2 \left( f_{Rz}^{(0)} \left(f_{Rz}^{(0)}\right)' + f_{\varphi z}^{(0)} \left(f_{\varphi z}^{(0)}\right)' \right) / f^2 \right\} / \left( f^2 + (n-1) \left(f_{Rz}^{(0)}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Граничные условия, накладываемые на искомые функции  $f_{Rz}^{(2)}(\varphi) = 0$  и  $f_{\varphi z}^{(2)}(\varphi)$ , есть условия отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины  $f_{\varphi z}^{(2)}(\varphi = \pi)$  и условие симметрии на ее продолжении  $f_{Rz}^{(2)}(\varphi = 0) = 0$ . Вновь, как и при исследовании угловых распределений второго члена асимптотического разложения компонент тензора эффективных напряжений, решение системы дифференциальных уравнений (1.51) разыскивалось с помощью метода Рунге – Кутты – Фельберга в сочетании с методом пристрелки: граничное условие на верхнем берегу трещины заменялось условием  $f_{\varphi z}^{(2)}(\varphi = 0) = c_1$ , где  $c_1$  - неизвестная константа, подбираемая таким образом, чтобы выполнялось граничное условие при  $\varphi = \pi$ . Численное решение сформулированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений показало, что ни при каком значении искомой константы  $c_1$  не удастся выполнить граничное условие при  $\varphi = \pi$  для  $n = m = 1$ . Этот случай представляет интерес, поскольку при данных значениях материальных констант удастся построить аналитическое решение: можно построить аналитическим способом асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности. Аналитическое решение подтверждает результаты численного эксперимента. Аналитическое решение для данных значений материальных констант показывает принципиальную невозможность удовлетворения граничного условия на верхнем берегу трещины. Граничное условие при  $\varphi = \pi$  для второго члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений выполнилось лишь по счастливой случайности. Для остальных значений материальной константы  $n$  и связанной с ней константы кинетического уравнения  $m = 0, 7n$  удастся удовлетворить граничному условию на берегу трещины.

Кинетическое уравнение с учетом третьего члена асимптотического разложения интенсивности эффективного напряжения может быть представлено в форме

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -smR^{sm} f^m (1 + mR^{sm} f_1/f^2 + mR^{2sm} f_2/(2f^2)), \quad (1.52)$$

интегрирование которого по автомодельной переменной  $R$  приводит к четвертому члену асимптотического разложения параметра сплошности

$$\psi = 1 - R^{sm} f^m - mR^{2sm} f^{m-2} f_1/2 - mR^{3sm} f^{m-2} f_2/6. \quad (1.53)$$

Используя полученное разложение, можно найти уравнение, определяющее границу области полностью поврежденного материала

$$\psi = 1 - R^{sm} f^m - mR^{2sm} f^{m-2} f_1/2 - mR^{3sm} f^{m-2} f_2/6 = 0. \quad (1.54)$$

Обозначение  $z = R^{-sm}$  приводит к алгебраическому уравнению третьей степени относительно  $z$ :

$$z^3 - z^2 f^m - m z f^{m-2} f_1/2 - m f^{m-2} f_2/6 = 0, \quad (1.55)$$

решение которого для различных значений материальных констант разыскивалось численно. Оказалось, что корней этого кубического уравнения, отвечающих физическому смыслу задачи не существует (установлено, что для всех исследуемых значений материальных констант  $n$  последнее уравнение имеет один отрицательный действительный корень и два комплексно сопряженных).

Таким образом, принятая гипотеза о том, что решение Хатчинсона – Райса – Розенгрена определяет геометрию области полностью поврежденного материала вблизи трещины, не является верной. Поэтому примем граничное условие в бесконечно удаленной точке (а, следовательно, и начальное условие исходной задачи) в более общей форме:

$$\sigma_{ij}(R, \varphi) = \tilde{C} R^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (1.56)$$

и найдем ту асимптотику поля напряжений, которая определяет геометрию области полностью поврежденного материала. Основным критерием выбора собственного числа  $s$  (разумеется, при выполнении всех уравнений задачи и граничных условий) является близость границ областей полностью поврежденного материала, получаемых при уточнении асимптотического разложения (каждое следующее слагаемое в асимптотическом разложении должно быть малым по сравнению с предыдущим, и, как следствие, характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, вычисленный с помощью  $k + 1$  слагаемого, не должен сильно отличаться от оценки этого размера при рассмотрении  $k$ -членного асимптотического разложения).

Следует отметить, что введение автомодельной переменной для граничного условия в бесконечно удаленной точке (1.56) осуществляется способом, аналогичным ранее изложенному, и основан на анализе размерностей величин, входящих в задачу. Действительно, для степенных определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями в бесконечно удаленной точке

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi) \quad (1.57)$$

существует автомодельная переменная вида

$$R = \frac{r}{[t A \tilde{C}^m]^{-1/(sm)}} \quad (1.58)$$

Таблица 1. Значения собственного чила  $s$ 

$n = m = 1$	$s = -1.5$
$n = 2, m = 0,7n$	$s = -1.2303$
$n = 3, m = 0,7n$	$s = -1.1830$
$n = 4, m = 0,7n$	$s = -1.1648$
$n = 5, m = 0,7n$	$s = -1.1553$
$n = 6, m = 0,7n$	$s = -1.1495$
$n = 7, m = 0,7n$	$s = -1.1455$
$n = 8, m = 0,7n$	$s = -1.1425$
$n = 9, m = 0,7n$	$s = -1.1405$
$n = 10, m = 0,7n$	$s = -1.1390$

или

$$R = \frac{r}{k} t^{1/(sm)}, \quad (1.59)$$

где  $k = (A\tilde{C}^m)^{-1/(sm)}$ . Тогда напряжения представляются в виде

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = \tilde{C} k^s t^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi). \quad (1.60)$$

Введение автомодельной переменной (1.59) не вызывает изменение системы уравнений, состоящей из уравнения равновесия, условия совместности и кинетического уравнения. Изменение претерпевает граничное условие в бесконечно удаленной точке, что приводит к проблеме определения нового собственного числа  $s$ , отличного от  $-1/(n+1)$ . В силу этого необходимо проанализировать системы дифференциальных уравнений (1.24), (1.36) и (1.51) с прежними граничными условиями.

Значения собственного числа  $s$ , найденные посредством вычислительного эксперимента, приводящие к разложениям компонент тензора напряжений и параметра сплошности по собственным функциям, которые дают сходящиеся (к некоторому предельному контуру) контуры областей полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант, приводятся в таблице 1.

На рис. 9 – 11 изображена конфигурация областей полностью поврежденного материала для различных констант определяющего соотношения и кинетического уравнения.

Делая вывод, можно заключить, что асимптотика Хатчинсона – Райса – Розенгрена не определяет конфигурацию области полностью поврежденного материала. Установлена новая асимптотика дальнего поля напряжений

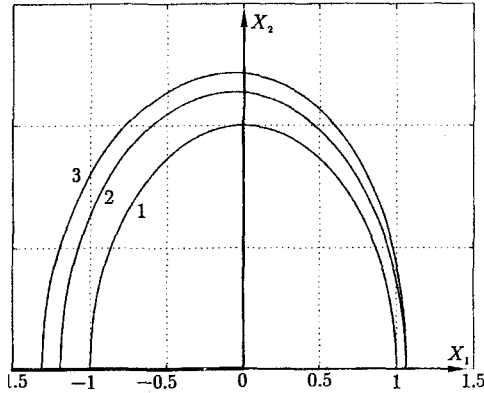


Рис. 9. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = m = 1$ : 1 – конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 – конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 3 – конфигурация области, определяемая четырехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности

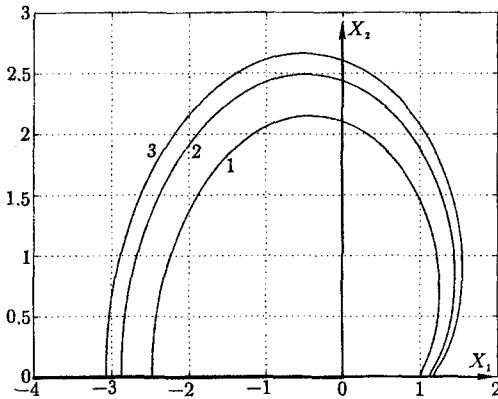


Рис. 10. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 5, m = 0, 7n$ : 1 – конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 – конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 3 – конфигурация области, определяемая четырехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности

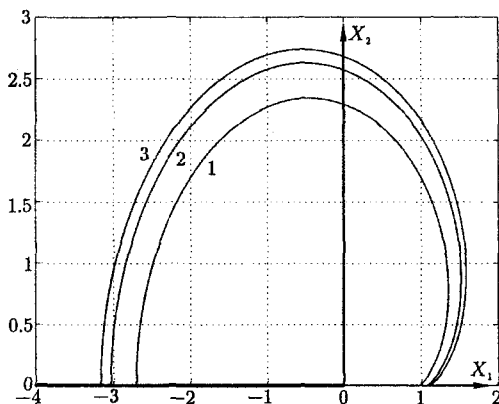


Рис. 11. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 9$ ,  $m = 0,7n$ : 1 – конфигурация области, определяемая двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 2 – конфигурация области, определяемая трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности; 3 – конфигурация области, определяемая четырехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности

в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. Показано, что именно такая асимптотика поля напряжений и параметра сплошности ведет к сходящимся границам областей полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант определяющего соотношения и кинетического уравнения.

## 2 Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью

### 1. Основные уравнения

Рассмотрим растущую полубесконечную трещину антиплоского сдвига (типа III) в условиях ползучести в среде с поврежденностью. Определяющие соотношения теории ползучести для среды с поврежденностью имеют в случае антиплоского сдвига следующий вид:

$$\gamma_\alpha = B \left( \frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_\alpha}{\psi}, \quad (2.1)$$

где  $\alpha = 1, 2$ ,  $\gamma_\alpha$  – скорости деформации сдвига,  $\tau = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2}$  – интенсивность касательных напряжений;  $B$ ,  $n$  – константы материала. Будем считать, что упругими деформациями и деформациями ползучести, накопленными на первой стадии, можно пренебречь.

Параметр сплошности материала  $\psi = 1 - \omega$  изменяется в соответствии с кинетическим уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\tau}{\psi} \right)^m, \quad (2.2)$$

где  $d/dt$  – материальная производная по времени;  $A$ ,  $m$  – константы материала. В первоначальном неповрежденном состоянии  $\psi = 1$ , распределение напряжений известно и имеет вид [17], [24]

$$\tau_\alpha(r, \varphi, t = 0) = \left( \frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\tau}_\alpha(\varphi, n), \quad (2.3)$$

где  $r$ ,  $\varphi$  – полярные координаты с центром в вершине трещины,  $C^*$  – не зависящий от контура инвариантный интеграл теории установившейся ползучести,  $I_n$  – значение безразмерного  $C^*$  – интеграла для степенного закона связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями, зависящее только от  $n$ , функции  $\bar{\tau}_\alpha(\varphi, n)$  определяются численно из решения задачи Хатчинсона – Райса – Розенгрена (HRR) [3], [27] для задачи антиплоского сдвига. В случае трещины, движущейся со скоростью  $v(t)$  в направлении оси  $x$  ( $x_1 O x_2$  – прямоугольная декартова система координат с центром в вершине



трещины), материальная производная по времени  $t$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (2.4)$$

Начальное распределение напряжений (2.3) примем в качестве граничных условий на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) для любого  $t > 0$ . Граничные условия на берегу трещины и на ее продолжении имеют вид

$$\tau_\varphi(r, \varphi = \pi) = 0, \quad \tau_r(r, \varphi = 0) = 0. \quad (2.5)$$

Анализ размерностей величин позволяет представить решение в виде

$$\tau_\alpha = \left( \frac{AC^*}{vBI_n} \right)^{1/(n+1-m)} \Sigma_\alpha(R, \varphi, T), \quad (2.6)$$

$$\psi = \psi(R, \varphi, T), \quad (2.7)$$

где  $\Sigma_\alpha$  и  $\psi$  – безразмерные функции от безразмерных переменных  $R = r/r_0$  и  $T = tv/r_0$ ,

$$r_0 = \left( \frac{C^*}{BI_n} \right)^{p/(p-1)} \left( \frac{A}{v} \right)^{1/(p-1)} \quad (p = m/(n+1) < 1). \quad (2.8)$$

Уравнения равновесия, условие совместности, записанное в напряжениях, кинетическое уравнение, граничное условие на бесконечности, условия отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины и на ее продолжении в безразмерных переменных будут иметь вид

$$\frac{\partial \Sigma_R}{\partial R} + \frac{\Sigma_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Sigma_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Sigma^{n-1} \Sigma_R}{\psi^n} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{R \Sigma^{n-1} \Sigma_\varphi}{\psi^n} \right) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} - \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = - \left( \frac{\Sigma}{\psi} \right)^m, \quad (2.11)$$

$$\Sigma_\alpha = \frac{1}{R^{1/(n+1)}} \bar{\tau}_\alpha(\varphi, n) \quad (R \rightarrow \infty), \quad (2.12)$$

$$\Sigma_\varphi(R, \varphi = \pi) = 0, \quad \Sigma_R(R, \varphi = 0) = 0, \quad (2.13)$$

где  $\Sigma = (\Sigma_R^2 + \Sigma_\varphi^2)^{1/2}$ .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая установившегося роста трещины, когда  $\partial \psi / \partial T = 0$ .

В [1], [2] показано, что у вершины растущей трещины существует область полностью поврежденного материала, где все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Поэтому для построения приближенного решения нельзя разыскивать асимптотические разложения в непосредственной окрестности вершины трещины, поскольку там сформулированная система уравнений не является справедливой. В силу этого будем разыскивать асимптотическое решение задачи для больших расстояний от вершины трещины и попытаемся оценить геометрию области полностью поврежденного материала, приближаясь к ней от бесконечно удаленной точки.

## 2. Асимптотическое решение задачи

Асимптотическое решение краевой задачи (2.9) – (2.13) при  $R \rightarrow \infty$  (для больших расстояний от вершины трещины) можно найти, положив

$$\psi = 1 - R^\gamma g(\varphi, T) + o(R^\gamma), \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\psi} = R^s f_\alpha(\varphi, T) + o(R^s), \quad (2.14)$$

где неизвестные показатели  $s$  и  $\gamma$  связаны соотношением  $\gamma = 1 + sm$ , полученным из кинетического уравнения (2.11). Следует отметить, что для выполнения граничного условия (2.12) в бесконечно удаленной точке, необходимо потребовать, чтобы  $s = -1/(n+1)$ . Откуда вытекает, что  $\gamma = 1 - m/(n+1) > 0$ , что противоречит граничному условию для скалярного параметра сплошности в бесконечно удаленной точке  $\psi = 1$  (показатель степени  $\gamma$  в асимптотическом разложении (2.14) должен быть отрицательным). Следовательно, в силу кинетического уравнения (2.11) граничное условие в бесконечно удаленной точке должно быть сформулировано в более общей форме, чем (2.12)

$$\Sigma_\alpha = R^s \bar{\tau}_\alpha(\varphi, n) \quad (R \rightarrow \infty), \quad (2.15)$$

где показатель  $s$  подлежит определению. Граничное условие (2.12) представляет собой требование асимптотического сближения искомого решения с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена, однако как показывает анализ показателей степеней асимптотических разложений (2.14), невозможно формулировать граничное условия в бесконечно удаленной точке в форме (2.12). Подстановка асимптотических разложений (2.14) для функции сплошности и (2.15) для компонент тензора напряжений в уравнения (2.9) – (2.13) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df_R}{d\varphi} = f_\varphi \frac{(sn+1)f^2 + (n-1)(s+1)f_R^2}{(n-1)f_R^2 + f^2}, \quad (2.16)$$

$$\frac{df_\varphi}{d\varphi} = -(s+1)f_R, \quad (2.17)$$

$$\frac{dg}{d\varphi} = \frac{f^m + \gamma \cos \varphi g}{\sin \varphi}, \quad (2.18)$$

где  $f = (f_R^2 + f_\varphi^2)^{1/2}$ . Данная система уравнений должна быть решена с учетом граничных условий на верхнем берегу трещины и ее продолжении

$$f_\varphi(\varphi = \pi) = 0, \quad f_R(\varphi = 0) = 0, \quad (2.19)$$

а также условие регулярности решения

$$g(\varphi = 0) = -f^m(\varphi = 0)/\gamma. \quad (2.20)$$

Таблица 2. Собственные числа  $s$  для различных значений констант материала  $n$  и  $m$ 

$n$	$m$	$s$
1	1	-1,5
2	0,7n	-1,2303
3	0,7n	-1,1830
4	0,7n	-1,1648
5	0,7n	-1,1553
6	0,7n	-1,1493
7	0,7n	-1,1455
8	0,7n	-1,1425
9	0,7n	-1,1405
10	0,7n	-1,1390

Система уравнений (2.16), (2.17) с граничными условиями (2.19) приводит к задаче на собственные значения: найти такое собственное число  $s$ , чтобы данная система уравнений с однородными граничными условиями имела ненулевое решение. Из однородности системы (2.16) – (2.18) следует, что наряду с функциями  $f_R(\varphi)$ ,  $f_\varphi(\varphi)$  и  $g(\varphi)$  функции  $\kappa(T)f_R(\varphi)$ ,  $\kappa(T)f_\varphi(\varphi)$  и  $\kappa^m(T)g(\varphi)$ , где  $\kappa(T)$  – масштабирующий множитель, также являются решением. Поэтому может быть сформулировано условие нормировки

$$f_\varphi(\varphi = 0) = 1. \quad (2.21)$$

Система уравнений (2.16), (2.17) с граничными условиями (2.21) и вторым из условий (2.19) представляет собой задачу Коши и может быть проинтегрирована численно при любом значении  $s$ . Численное решение задачи Коши осуществлялось с помощью стандартной процедуры метода Рунге – Кутты. В ходе численного эксперимента необходимо было найти значение  $s$ , удовлетворяющее условию  $\gamma = 1 + sm < 0$  (отличное от  $-1/(n+1)$ ) и ведущее к выполнению граничного условия на верхнем берегу трещины. Значения  $s$ , приводящие к выполнению всех перечисленных требований для различных значений материальных констант, приведены в таблице 2.

Полученное поле напряжений позволяет определить два члена асимптотического разложения скалярного параметра сплошности. Конфигурация области полностью поврежденного материала может быть найдена из уравнения

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R'g(\varphi, T) = 0. \quad (2.22)$$

Поэтому граница области полностью поврежденного материала определяется

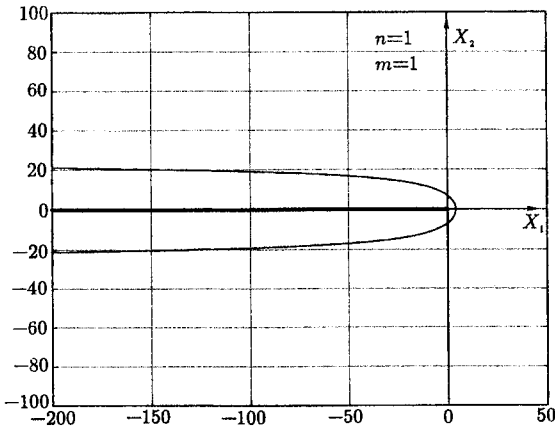


Рис. 12. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 1$ ,  $m = 1$

соотношением

$$R(\varphi) = (g(\varphi))^{-1/\gamma}. \quad (2.23)$$

Кривые, построенные в соответствии с последним уравнением, показаны на рис. (12) – (18). На рис. (14) – (16) изображена геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 5$ ,  $m = 0,7n$  (в неподвижной системе координат  $X_1 O X_2$ ), наблюдаемая с различных расстояний от вершины трещины, начиная с наибольшего (где  $-120 \leq X_1 \leq 40$ ), и заканчивая непосредственной окрестностью вершины (где  $-15 \leq X_1 \leq 5$ ).

Делая вывод, можно заключить, что найдены главные члены асимптотических разложений эффективных напряжений и скалярного параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины. Показано, что распределение HRR не может быть использовано в качестве асимптотического граничного условия задачи на бесконечности. Установлено, магистральная трещина (главная трещина) в процессе ее распространения окружена областью полностью поврежденного материала и процесс роста трещины следует представлять как продвижение целой области (рис. (12) – (18)) полностью поврежденного материала.

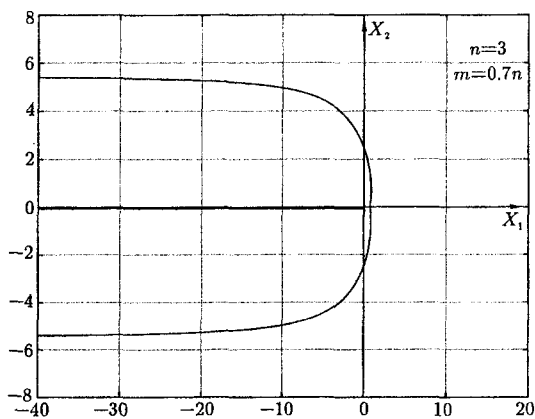


Рис. 13. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 3$ ,  $m = 0,7n$

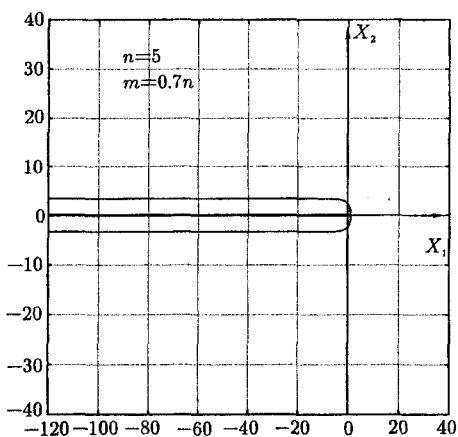


Рис. 14. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 5$ ,  $m = 0,7n$

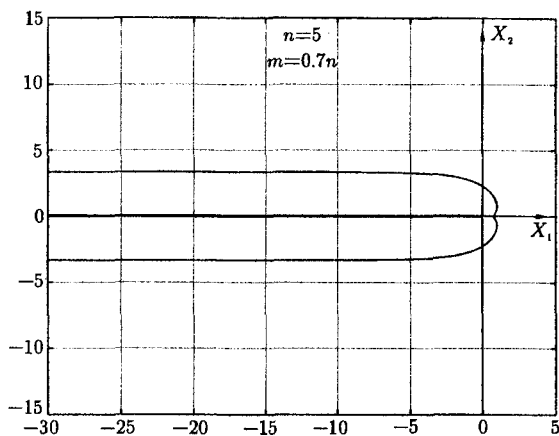


Рис. 15. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 5$ ,  $m = 0,7n$

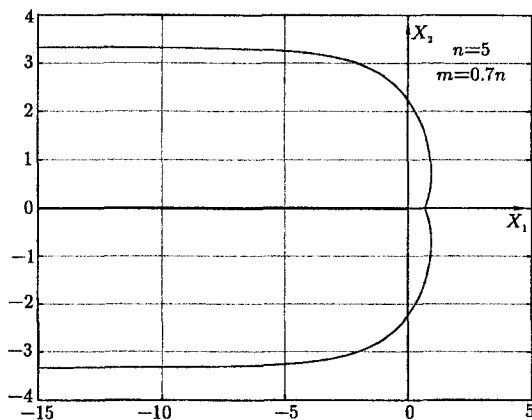


Рис. 16. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 5$ ,  $m = 0,7n$

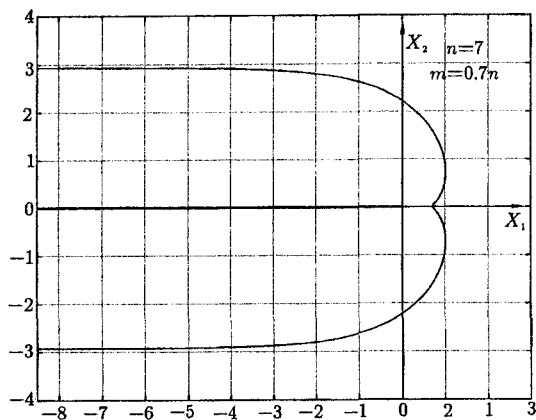


Рис. 17. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 7$ ,  $m = 0,7n$

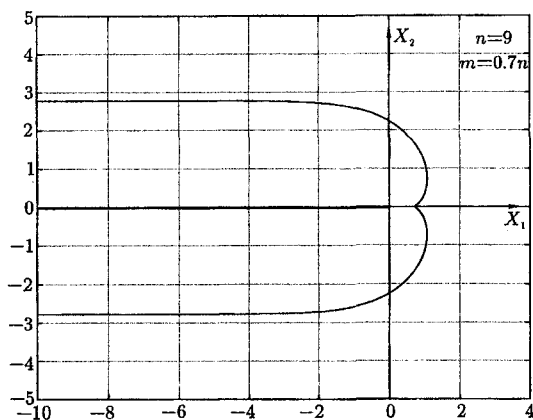


Рис. 18. Геометрия области полностью поврежденного материала, охватывающей магистральную трещину, для  $n = 9$ ,  $m = 0,7n$



### 3 Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины нормального отрыва в условиях ползучести в среде с поврежденностью

#### 1. Основные уравнения

Рассмотрим растущую полубесконечную трещину в неограниченном теле. Пусть определяющие соотношения исследуемого материала построены на основе степенной зависимости Нортона между скоростями деформаций ползучести и напряжениями:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (3.1)$$

где  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $B$ ,  $n$  – константы материала;  $\sigma_e$  – интенсивность напряжений: в случае плоского деформированного состояния  $\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{r\varphi}^2$ , в случае плоского напряженного состояния  $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2$ , где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 1$ ) – параметр сплошности Качанова ( $\omega = 1 - \psi$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) – параметр поврежденности Работнова);  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$  – компоненты девиатора напряжений: в случае плоского деформированного состояния  $s_{rr} = -s_{\varphi\varphi} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/2$ , в случае плоского напряженного состояния  $s_{rr} = (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/3$ ,  $s_{\varphi\varphi} = (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})/3$ .

Изучим поля напряжений, скоростей деформаций ползучести и скалярный параметр сплошности на значительном удалении от вершины распространяющейся трещины типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Напряженно-деформированное состояние в непосредственной окрестности вершины движущейся трещины в материале с определяющими соотношениями вида (3.1) в среде с поврежденностью было предметом многочисленных исследований [1], [2], [22]. В [1], [2] показано, что вблизи берегов трещины и ее вершины существует область полностью поврежденного материала или (и) зона активного накопления повреждений (микрорпор, микротрещин, микродефектов), иногда называемая зоной процесса. В силу этого традиционные для механики сплошных сред уравнения не могут быть сформулированы в непосредственной окрестности вершины продвигающейся трещины. Поэтому примем, что вблизи вершины дефекта существует зона полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. Пусть разрешающая система уравнений (уравнения равновесия, условие совместности деформа-

ций, кинетическое уравнение накопления повреждений) исследуется на значительном удалении от вершины дефекта, что позволяет найти асимптотику дальнего поля напряжений и определить конфигурацию области полностью поврежденного материала.

Итак, необходимо найти решение системы уравнений, сформулированной в полярной системе координат с полюсом в вершине подвижной трещины, состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0; \quad (3.2)$$

соотношений Коши, связывающих перемещения и деформации,

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad (3.3)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций,  $u_i$  – перемещения; условия совместности деформаций, сформулированного для скоростей деформаций ползучести,

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}; \quad (3.4)$$

кинетического уравнения, постулирующего степенной закон накопления повреждений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (3.5)$$

где  $A$ ,  $m$  – константы материала;  $t$  – время;

$$\sigma_{eqv} = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_e + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{kk}$$

– эквивалентное напряжение, где  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение,  $\sigma_{kk}$  – гидростатическое напряжение, константы  $\alpha$  и  $\beta$  находятся экспериментально. В случае трещины, движущейся с некоторой скоростью  $v(t)$  в направлении оси  $x_1$ , материальная производная по времени  $t$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Ограничиваясь в дальнейшем изучением установившегося роста трещины, когда нет явной зависимости искомых величин от времени, производную по времени будем определять соотношением

$$\frac{d}{dt} = -v \frac{\partial}{\partial x_1} = -v \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Тогда кинетическое уравнение (3.5) приобретает вид

$$-v \left( \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) = -A \left( \frac{\sigma_{equ}}{\psi} \right)^m. \quad (3.6)$$

Определяющие соотношения (3.1) представляются в форме:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{4} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (3.8)$$

в случае плоского напряженного состояния.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0. \quad (3.9)$$

Граничное условие в бесконечно удаленной точке имеет форму

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (3.10)$$

где значения  $s$  находятся в процессе решения задачи;  $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  – функции, подлежащие определению.

Следует отметить, что граничное условие (3.10) для рассматриваемых определяющих соотношений (3.1) в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано как

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi) = \left( \frac{C^*}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (3.11)$$

поскольку в бесконечно удаленной точке  $\psi = 1$  и двучленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины разыскивается в форме

$$\psi(r, \varphi) = 1 - r^\gamma g^{(1)}(\varphi) + o(r^\gamma), \quad \gamma < 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

В этом случае определяющие уравнения (3.1) сводятся к обычным соотношениям степенного закона установившейся ползучести. Однако, как будет показано ниже, из кинетического уравнения накопления повреждений (3.5) вытекает соотношение  $\gamma = 1 - m/(n+1)$  и так как  $m = 0,7n$  [4], то  $\gamma > 0$ , что противоречит условию  $\gamma < 0$  в (3.12). Следовательно, граничное условие (3.11) принимается в более общем виде (3.10). Величина  $\tilde{C}$  может быть найдена путем решения задачи с истинными граничными условиями для реального элемента конструкции, находящегося под действием определенной системы нагрузок.

Решение краевой задачи (3.2) – (3.8) с граничными условиями (3.9), (3.10) является функцией следующего множества переменных и материальных параметров задачи:  $r, \varphi, A, m, v, \tilde{C}, B, n$ .

Анализ размерностей показывает, что можно перейти к следующим безразмерным функциям:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \varphi) &= \left[ \tilde{C} \left( \frac{v}{A} \right)^s \right]^{\frac{1}{sm+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\bar{r}, \varphi), \\ \dot{\epsilon}_{ij}(r, \varphi) &= 3B \tilde{\epsilon}_{ij}(\bar{r}, \varphi)/2, \\ \psi(r, \varphi) &= \tilde{\psi}(\bar{r}, \varphi),\end{aligned}\tag{3.13}$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}$  и  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  – безразмерные функции от безразмерных переменных  $\varphi$  и  $\bar{r} = r/r_0$ ,

$$r_0 = \left[ \tilde{C}^{-m} \frac{v}{A} \right]^{\frac{1}{sm+1}}.$$

Далее знак  $\tilde{\phantom{x}}$  опускается.

Уравнения равновесия, условие совместности после введения безразмерных величин сохраняют свой вид. Кинетическое уравнение будет иметь следующую форму

$$\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m.\tag{3.14}$$

Определяющие соотношения (3.7) и (3.8) представляются в безразмерных переменных в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{rr} &= -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi}\end{aligned}\tag{3.15}$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\
 \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \\
 \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

в случае плоского напряженного состояния.

Граничные условия в бесконечно удаленной точке в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi) \rightarrow r^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \tag{3.17}$$

Таким образом, далее строится приближенное решение системы уравнений (3.2) – (3.4), (4.6), (3.8), (3.14) с граничными условиями (3.17) и

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi) = 0. \tag{3.18}$$

## 2. Асимптотическое решение задачи

Компоненты тензора напряжений представляются с помощью функции напряжений Эри  $F(r, \varphi)$  как

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \quad (3.19)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

– оператор Лапласа.

Решение сформулированной системы уравнений будем разыскивать в форме степенных разложений по параметру  $r$

$$F(r, \varphi) = r^\lambda f^{(0)}(\varphi) + r^{\lambda_1} f^{(1)}(\varphi) + o(r^{\lambda_1}), \quad (\lambda < 0, \lambda_j < 0), \quad (3.20)$$

$$\psi(r, \varphi) = 1 - r^\gamma g^{(1)}(\varphi) + o(r^\gamma), \quad (\gamma < 0)$$

при  $r \rightarrow \infty$ , двигаясь от бесконечно удаленной точки к окрестности вершины трещины; собственные функции  $f^{(j)}(\varphi)$ ,  $g^{(1)}(\varphi)$  и собственные значения  $\lambda$ ,  $\lambda_j$ ,  $\gamma$  подлежат определению.

В силу (3.19) и (3.20) двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений, интенсивности напряжений и эквивалентного напряжения определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \varphi) &= r^s [\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})''] + r^{s_1} [\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})''] \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= r^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + r^{s_1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\sigma_{r\varphi}(r, \varphi) = r^s (1 - \lambda) (f^{(0)})' + r^{s_1} (1 - \lambda_1) (f^{(1)})'$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \varphi) &= r^s f_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1} f_{rr}^{(1)}(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= r^s f_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1} f_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) &= r^s f_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1} f_{r\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ s &= \lambda - 2, \quad s_1 = \lambda_1 - 2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$f_{rr}^{(j)}(\varphi) = \lambda_j f^{(j)} + (f^{(j)})'', \quad f_{\varphi\varphi}^{(j)}(\varphi) = \lambda_j (\lambda_j - 1) f^{(j)}, \quad f_{r\varphi}^{(j)} = (1 - \lambda_j) (f^{(j)})' \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_e(r, \varphi) &= r^s \sigma_e^{(0)}(\varphi) + r^{s_1} \sigma_e^{(1)}(\varphi), \\ \sigma_{equ}(r, \varphi) &= r^s \sigma_{equ}^{(0)}(\varphi) + r^{s_1} \sigma_{equ}^{(1)}(\varphi), \end{aligned}$$

где в случае плоской деформации

$$\left(\sigma_e^{(0)}\right)^2 = \frac{3}{4} \left\{ \lambda^2(\lambda - 2)^2 \left(f^{(0)}\right)^2 + 4(\lambda - 1)^2 \left[\left(f^{(0)}\right)'\right]^2 - 2\lambda s f^{(0)} \left(f^{(0)}\right)'' + \left[\left(f^{(0)}\right)''\right]^2 \right\},$$

$$\sigma_e^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \left[ \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} - \left(f^{(0)}\right)'' \right] \left[ \lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} - \left(f^{(1)}\right)'' \right] + 4(1 - \lambda)(1 - \lambda_1) \left(f^{(0)}\right)' \left(f^{(1)}\right)' \right\} / \left(2/\sigma_e^{(0)}\sqrt{3}\right)$$

и в случае плоского напряженного состояния

$$\left(\sigma_e^{(0)}\right)^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3) \left(f^{(0)}\right)^2 + 3(\lambda - 1)^2 \left[\left(f^{(0)}\right)'\right]^2 + \lambda(3 - \lambda)f^{(0)} \left(f^{(0)}\right)'' + \left[\left(f^{(0)}\right)''\right]^2,$$

$$\sigma_e^{(1)} = \left\{ \left( \lambda f^{(0)} + \left(f^{(0)}\right)'' \right) \left( \lambda_1 f^{(1)} + \left(f^{(1)}\right)'' \right) + \lambda(\lambda - 1)\lambda_1(\lambda_1 - 1)f^{(0)}f^{(1)} - \left[ \left( \lambda f^{(0)} + \left(f^{(0)}\right)'' \right) \lambda_1(\lambda_1 - 1)f^{(1)} + \left( \lambda_1 f^{(1)} + \left(f^{(1)}\right)'' \right) \lambda(\lambda - 1)f^{(0)} \right] + 3(1 - \lambda)(1 - \lambda_1) \left(f^{(0)}\right)' \left(f^{(1)}\right)' \right\} / \sigma_e^{(0)};$$

$$\sigma_{equiv}^{(0)}(\varphi) = \alpha \sigma_1^{(0)}(\varphi) + \beta \sigma_e^{(0)}(\varphi) + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{kk}^{(0)}(\varphi). \quad (3.24)$$

Постоянная  $\gamma$  определяется посредством асимптотического анализа кинетического уравнения (3.14). Подставляя асимптотические разложения (3.20) в кинетическое уравнение (3.14), можно получить

$$\gamma \cos \varphi r^{\gamma-1} g^{(1)}(\varphi) - \sin \varphi r^{\gamma-1} \left(g^{(1)}(\varphi)\right)' = -r^{(\lambda-2)m} \left(\sigma_{equiv}^{(0)}(\varphi)\right)^m. \quad (3.25)$$

Откуда следует, после принятия гипотезы о совпадении порядков величин при  $r \rightarrow \infty$ , фигурирующих в левой и правой частях последнего уравнения, что справедливы равенства  $\gamma - 1 = (\lambda - 2)m$  или  $\gamma = 1 + sm$  и

$$\sin \varphi \left(g^{(1)}(\varphi)\right)' - \gamma \cos \varphi g^{(1)}(\varphi) = \left(\sigma_{equiv}^{(0)}(\varphi)\right)^m. \quad (3.26)$$

Двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений (3.22) и параметра сплошности (второе выражение в (3.20)) позволяют найти двучленные асимптотические разложения компонент тензора скоростей деформаций ползучести. Подстановка (3.22) и второго асимптотического разложения из (3.20) в (3.15) и в (3.16) приводит к двучленным асимптотическим разложениям скоростей деформаций ползучести (при  $r \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr} &= -\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = r^{sn} \varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^{sn+s_1-s} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= r^{sn} \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{sn+s_1-s} \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi),\end{aligned}\quad (3.27)$$

где

$$\varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left( f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)} \right), \quad \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) = \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} f_{r\varphi}^{(0)}, \quad (3.28)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ f_{rr}^{(1)} - f_{\varphi\varphi}^{(1)} + \left( f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) \left[ ng^{(1)} + (n-1) \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \right] \right\} \quad (3.29)$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) = \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ f_{r\varphi}^{(1)} + f_{r\varphi}^{(0)} \left[ ng^{(1)} + (n-1) \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \right] \right\},$$

для случая плоского деформированного состояния;

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr} &= r^{sn} \varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^{sn+s_1-s} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= r^{sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{sn+s_1-s} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= r^{sn} \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^{sn+s_1-s} \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi),\end{aligned}\quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(0)}(\varphi) &= \frac{1}{3} \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left( 2f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) &= \frac{1}{3} \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left( 2f_{\varphi\varphi}^{(0)} - f_{rr}^{(0)} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) &= \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} f_{r\varphi}^{(0)},\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)}(\varphi) &= \frac{1}{3} \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ 2f_{rr}^{(1)} - f_{\varphi\varphi}^{(1)} + \left( 2f_{rr}^{(0)} - f_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) \left[ ng^{(1)} + (n-1) \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \right] \right\}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) &= \frac{1}{3} \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ 2f_{\varphi\varphi}^{(1)} - f_{rr}^{(1)} + \left( 2f_{\varphi\varphi}^{(0)} - f_{rr}^{(0)} \right) \left[ ng^{(1)} + (n-1) \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \right] \right\} \quad (3.32) \\ \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) &= \left( \sigma_e^{(0)} \right)^{n-1} \left\{ f_{r\varphi}^{(1)} + f_{r\varphi}^{(0)} \left[ ng^{(1)} + (n-1) \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \right] \right\}\end{aligned}$$



для случая плоского напряженного состояния.

При выводе второго члена асимптотического разложения скоростей деформаций ползучести (3.29) и (3.32) учтено, что  $s_1 = s + \gamma$ . Это равенство следует из сравнения порядков слагаемых, фигурирующих в двучленном асимптотическом разложении скоростей деформаций:  $r^{s_1-s}$  и  $r^\gamma$ . Только при совпадении этих порядков процесс построения членов асимптотического разложения может быть продолжен сколь угодно долго и на каждом шаге будет получено обыкновенное дифференциальное уравнение для новой неизвестной функции (либо для  $f^{(k)}$ , либо  $g^{(k)}$ ) и будут отсутствовать ничем "неуравновешенные" слагаемые в условии совместности. Таким образом, показатели степеней в асимптотическом разложении компонент тензора напряжений  $s_k$  определяются следующим образом: собственное значение  $s$  находится численно (процедура описана ниже),  $s_k$ ,  $k > 0$  устанавливается с помощью асимптотического анализа  $k + 1$ -членного разложения скоростей деформаций ползучести. Показатели  $\gamma_k$  разыскиваются посредством асимптотического анализа кинетического уравнения накопления повреждений.

Следует отметить, что главный член асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести (3.28) и (3.31) определяется полностью функцией  $f^{(0)}(\varphi)$  в силу (3.23) и (3.27) – (3.31), что дает возможность определить сначала эту неизвестную функцию  $f^{(0)}(\varphi)$  из условия совместности деформаций без определения функции  $g^{(1)}(\varphi)$ . Таким образом, изначально связанная задача "развязывается". Действительно, подстановка (3.27) в условие совместности деформаций и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $r$  позволяет получить два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$2(sn + 1) \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - sn(sn + 2) \varepsilon_{rr}^{(0)}, \quad (3.33)$$

$$2[sn + s_1 - s + 1] \frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - (sn + s_1 - s)[sn + s_1 - s + 2] \varepsilon_{rr}^{(1)} \quad (3.34)$$

для плоского деформированного состояния и

$$2(sn + 1) \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - sn \varepsilon_{rr}^{(0)} + (sn + 1) sn \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad (3.35)$$

$$2[sn + s_1 - s + 1] \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - (sn + s_1 - s) \varepsilon_{rr}^{(1)} + [sn + s_1 - s + 1] sn \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} \quad (3.36)$$

для плоского напряженного состояния.

Уравнения (3.33) и (3.35) являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка относительно функции  $f^{(0)}(\varphi)$  для случаев плоского деформированного и плоского напряженного состояний соответственно. Поэтому сначала определяется функция  $f^{(0)}(\varphi)$ , а затем исследуется уравнение (3.26) как неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $g^{(1)}(\varphi)$  с правой частью, определяемой функцией  $f^{(0)}(\varphi)$ . После определения функции  $g^{(1)}(\varphi)$  можно отыскать численное решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.34), которое является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно функции  $f^{(1)}(\varphi)$  (в это уравнение входят функции  $f^{(0)}(\varphi)$  и  $g^{(1)}(\varphi)$ , но на данном шаге построения асимптотических разложений они являются уже известными функциями). Последовательность этих действий может быть продолжена. Таким образом, в настоящем учебном пособии предложен алгоритм "развязывания" системы уравнений связанной задачи. На каждом этапе определяется либо функция  $f^{(j)}(\varphi)$  по найденным функциям  $f^{(0)}, \dots, f^{(j-1)}$  и  $g^{(1)}, \dots, g^{(j)}$ , либо функция  $g^{(j)}(\varphi)$  по найденным функциям  $f^{(0)}, \dots, f^{(j-1)}$  и  $g^{(1)}, \dots, g^{(j-1)}$  ( $j \geq 1$ ).

В настоящем пособии строятся одночленное разложение функции напряжений Эри и двучленное разложение параметра сплошности, поскольку, уже имея их, можно оценить конфигурацию области полностью поврежденного материала, охватывающую вершину трещины и примыкающую к ее берегам.

Подстановка выражений (3.28) и (3.31) в дифференциальные уравнения (3.33) и (3.35) приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям четвертого порядка относительно функции  $f^{(0)}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} (f^{(0)})^{IV} N(\varphi) = & 4(sn+1)(1-\lambda) \left[ (n-1)K(\varphi) (f^{(0)})' + h^2 (f^{(0)})'' \right] + \\ & + h^2 \left[ (s\lambda + sn(sn+2)) (f^{(0)})'' - sn(sn+2)(2-\lambda)\lambda f^{(0)} \right] - \\ & - (n-1)(n-3) (K(\varphi)/h)^2 \left[ (f^{(0)})'' - s\lambda f^{(0)} \right] - (3.37) \\ & - 2(n-1)K(\varphi) \left[ (f^{(0)})''' - s\lambda (f^{(0)})' \right] - \\ & - (n-1)M(\varphi) \left[ (f^{(0)})'' - s\lambda f^{(0)} \right], \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения

$$K(\varphi) = \left[ (f^{(0)})'' - s\lambda f^{(0)} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \left( f^{(0)} \right)''' - s\lambda \left( f^{(0)} \right)' \right] + 4(1 - \lambda)^2 \left( f^{(0)} \right)' \left( f^{(0)} \right)'' , \\ M(\varphi) &= - \left[ \left( f^{(0)} \right)'' - s\lambda f^{(0)} \right] \lambda s \left( f^{(0)} \right)'' + \\ & + \left[ -s\lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 \left( f^{(0)} \right)' \left( f^{(0)} \right)'' , \\ N(\varphi) &= n \left[ \left( f^{(0)} \right)'' - s\lambda f^{(0)} \left( f^{(0)} \right)'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 \left[ \left( f^{(0)} \right)' \right]^2 \\ \\ h(\varphi) &= \sqrt{\left[ \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 \left( \left( f^{(0)} \right)' \right)^2} , \end{aligned}$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned} \left( f^{(0)} \right)^{IV} N(\varphi) &= 6(sn + 1)(1 - \lambda) \left[ (n - 1)K(\varphi) + h^2 \left( f^{(0)} \right)'' \right] - \\ - \left[ (n - 3) \left( K(\varphi)/h \right)^2 + (n - 1)M(\varphi) \right] &\left[ \lambda(3 - \lambda)f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right] - \\ - 2(n - 1)K(\varphi) \left[ \lambda(3 - \lambda) \left( f^{(0)} \right)' + 2 \left( f^{(0)} \right)''' \right] &- \quad (3.38) \\ - h^2 \lambda sn (sn + 1)(2\lambda - 3) - 3 + \lambda) f^{(0)} - & \\ - h^2 (\lambda(3 - \lambda) - sn(sn + 1)) \left( f^{(0)} \right)'' , & \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right) + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 f^{(0)} \left( f^{(0)} \right)' + \\ & + 3(1 - \lambda)^2 \left( f^{(0)} \right)' \left( f^{(0)} \right)'' - \lambda(1 - \lambda) \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right) f^{(0)}/2 - \\ & - \lambda(1 - \lambda) \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) \left( f^{(0)} \right)' / 2, \\ M(\varphi) &= \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right)^2 + \lambda(3 - \lambda) \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) \left( f^{(0)} \right)'' + \\ & + \lambda^2 (1 - \lambda)^2 \left( \left( f^{(0)} \right)' \right)^2 + \lambda^2 (\lambda - 1)(2\lambda - 3) f^{(0)} \left( f^{(0)} \right)'' / 2 + \\ & + 3(1 - \lambda)^2 \left( \left( f^{(0)} \right)'' \right)^2 + 3(1 - \lambda)^2 \left( f^{(0)} \right)' \left( f^{(0)} \right)''' - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda(\lambda - 1) \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right) \left( f^{(0)} \right)', \\
 N(\varphi) &= (n - 1) \left( \lambda(3 - \lambda) f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right)^2 / 2 + 2h^2, \\
 h &= \left[ \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right)^2 + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \left( f^{(0)} \right)^2 - \right. \\
 & \left. - \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} - 3(1 - \lambda)^2 \left( \left( f^{(0)} \right)' \right)^2 \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

в случае плоского напряженного состояния, которые должны удовлетворять граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f^{(0)}(\pi) = 0, \quad \left( f^{(0)} \right)'(\pi) = 0 \quad (3.39)$$

и условиям симметрии на ее продолжении

$$\left( f^{(0)} \right)'(0) = 0, \quad \left( f^{(0)} \right)'''(0) = 0. \quad (3.40)$$

Уравнения (3.37), (3.38) являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка, для нахождения численного решения которых удобно использовать метод Рунге - Кутта - Фельберга пятого порядка в сочетании с методом пристрелки. Поэтому решение краевых задач (3.37) и (3.38) с граничными условиями (3.39), (3.40) сводится к исследованию задач Коши. Для этого граничные условия при  $\varphi = \pi$  заменяются начальными  $f^{(0)}(0) = c_1$ ,  $\left( f^{(0)} \right)''(0) = c_2$  при  $\varphi = 0$ . В силу однородности уравнений (3.37) и (3.38) можно принять условие нормировки  $f^{(0)}(0) = 1$ . Таким образом, начальные условия имеют вид

$$f^{(0)}(0) = 1, \quad \left( f^{(0)} \right)'(0) = 0, \quad \left( f^{(0)} \right)''(0) = c_2, \quad \left( f^{(0)} \right)'''(0) = 0. \quad (3.41)$$

Исследуя системы уравнений (3.37) и (3.38) с условиями (3.41) как задачи на собственные значения методом Рунге - Кутта - Фельберга, можно найти численное решение задачи.

В ходе отыскания численного решения систем уравнений (3.37) и (3.38) определяются такие собственные значения  $s$  и постоянная  $c_2$  для разных  $n$ , чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины при  $\varphi = \pi$ :  $f^{(0)}(\pi) = 0$  и  $\left( f^{(0)} \right)'(\pi) = 0$ . При определении констант  $s$  и  $c_2$  проверяется выполнение условия  $\left( f^{(0)} \right)^2(\pi) + \left( \left( f^{(0)} \right)'(\pi) \right)^2 \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Собственные значения  $s$  и значения второй производной функции  $f^{(0)}(\varphi)$  на линии, продолжающей трещину  $\varphi = 0$ , приводятся в таблицах 3 и 4 для случая плоского деформированного и плоского напряженного состояний соответственно.

Таблица 3. Собственные числа  $s$  и значения  $f''(0)$  в случае плоского деформированного состояния

$n$	$m$	$s$	$f''(0)$
1	1	-1,5	-0,75
2	0,7n	-1,0	-0,5
3	0,7n	-0,771694	-0,43724
4	0,7n	-0,668489	-0,409203
5	0,7n	-0,617909	-0,398556
6	0,7n	-0,590124	-0,395027
7	0,7n	-0,573245	-0,394371
8	0,7n	-0,562138	-0,394869
9	0,7n	-0,554369	-0,395813

Таблица 4. Собственные числа  $s$  и значения  $f''(0)$  в случае плоского напряженного состояния

$n$	$m$	$s$	$f''(0)$
1	1	-1,5	-0,75
2	0,7n	-1,154032	-0,5686
3	0,7n	-1,0	-0,5
4	0,7n	-0,913383	-0,465842
5	0,7n	-0,858016	-0,442866
6	0,7n	-0,819798	-0,426159
7	0,7n	-0,7919591	-0,413462
8	0,7n	-0,770842	-0,403501
9	0,7n	-0,754321	-0,395546

Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла для трещины нормального отрыва в случае плоской деформации и плоского напряженного состояния при  $n = 1$  и  $n = 5$  приводятся на рис. 19, 20. Угловые распределения компонент тензора напряжений для остальных  $n$  имеют характер, сходный с показанным на рис. 20 за исключением случаев  $n = 2$

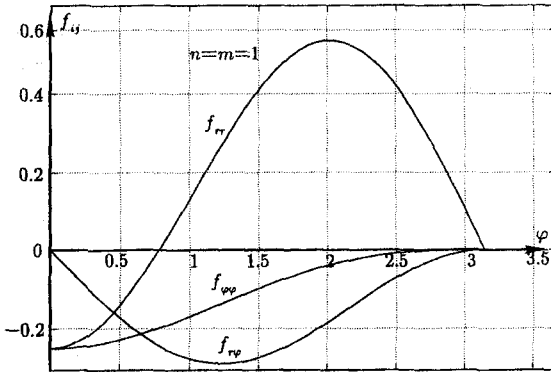


Рис. 19. График зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии для  $n = 1$  и  $m = 1$

для плоского деформированного случая и  $n = 3$  для плоского напряженного состояния, для которых  $\lambda = 1$ , поэтому в силу (3.22)  $\sigma_{ij} = \text{const}$  для всех  $i, j$ .

Подставляя асимптотическое разложение (3.20) в кинетическое уравнение (3.14) в предположении установившегося роста трещины, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\sin \varphi \left( g^{(1)}(\varphi) \right)' - \gamma \cos \varphi g^{(1)}(\varphi) = \left( \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) \right)^m, \quad (3.42)$$

где  $\gamma = 1 + sm$ . Значения показателя степени  $\gamma$  в разложении скалярного параметра сплошности описаны в таблицах 5 и 6 в случае плоской деформации и в случае плоского напряженного состояния соответственно. Двучленное асимптотическое разложение параметра сплошности позволяет оценить форму и размеры области полностью поврежденного материала. Используя найденные угловые распределения компонент тензора напряжений, можно отыскивать функцию  $g^{(1)}(\varphi)$ , исследуя численно обыкновенное дифференциальное уравнение (3.42) с условием регулярности его решения при  $\varphi = 0$   $g^{(1)}(0) = - \left( \sigma_{eqv}^{(0)}(0) \right)^m / \gamma$ .

Поскольку на границе данной зоны параметр сплошности обращается в нуль:  $\psi(r, \varphi) = 1 - r^\gamma g^{(1)}(\varphi, t) = 0$ , то уравнение границы области полностью поврежденного материала имеет вид:

$$r(\varphi) = \left[ g^{(1)}(\varphi) \right]^{-1/\gamma}.$$

Таблица 5. Значения показателя степени  $\gamma$  в разложении скалярного параметра сплошности в случае плоского деформированного состояния

$n$	$m$	$\gamma$
1	1	-0,5
2	$0,7n$	-0,4
3	$0,7n$	-0,6205574
4	$0,7n$	-0,8717692
5	$0,7n$	-1,1626815
6	$0,7n$	-1,4785224
7	$0,7n$	-1,8089005
8	$0,7n$	-2,1479728
9	$0,7n$	-2,4925247

Таблица 6. Значения показателя степени  $\gamma$  в разложении скалярного параметра сплошности в случае плоского напряженного состояния

$n$	$m$	$\gamma$
1	1	-0,5
2	$0,7n$	-0,6156448
3	$0,7n$	-1,1
4	$0,7n$	-1,5574724
5	$0,7n$	-2,003056
6	$0,7n$	-2,4431516
7	$0,7n$	-2,8805995
8	$0,7n$	-3,3167152
9	$0,7n$	-3,753287

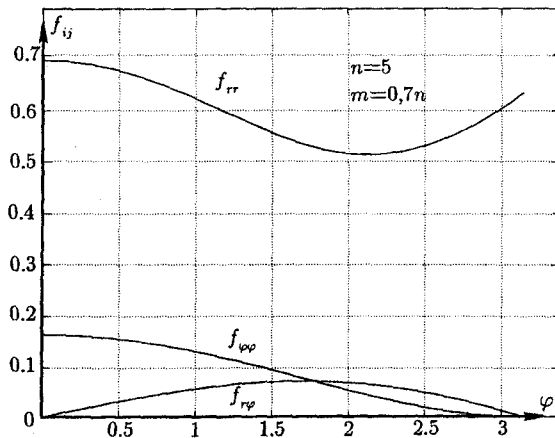


Рис. 20. График зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии для  $n = 5$  и  $m = 0,7n$

Конфигурация области полностью поврежденного материала представлена на рис. 21 – 23 для одного и того же  $n = 3$  ( $m = 0,7n$ ), но для наблюдателя, находящегося на разных расстояниях от вершины растущей трещины.

Таким образом, можно сформулировать следующие выводы. Определена асимптотика напряжений дальнего поля для подвижной трещины типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Установлено, что асимптотика HRR – ставшая уже классической асимптотика компонент тензора напряжений у вершины трещины для степенной зависимости между компонентами тензора напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) – не может служить граничным условием в бесконечно удаленной точке в задаче о росте полубесконечной трещины в среде с поврежденностью для рассматриваемого типа определяющих соотношений. Невозможность формулировки граничного условия в бесконечно удаленной точке как требования асимптотического сближения искомого решения с решением HRR можно объяснить тем обстоятельством, что размеры области полностью поврежденного материала превосходят размеры зоны доминирования решения HRR, так что зона, где справедливо решение HRR частично или полностью охвачена областью полностью поврежденного материала и, следовательно, геометрия последней не может управляться асимптотикой HRR (рис. 24). Следует отметить, что спектр собственных значений данной задачи и характер сингулярности компонент тензора напряжений у вершины трещины исследовался в [20], где были получены собственные значения



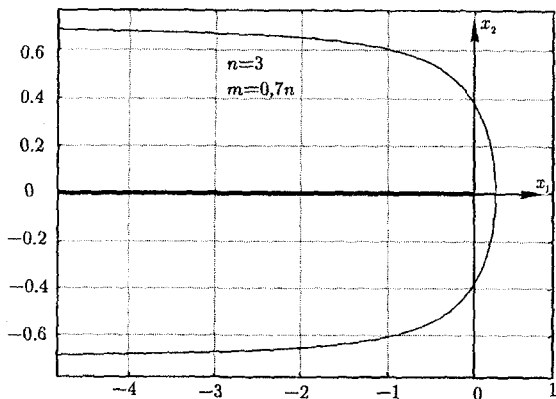


Рис. 21. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

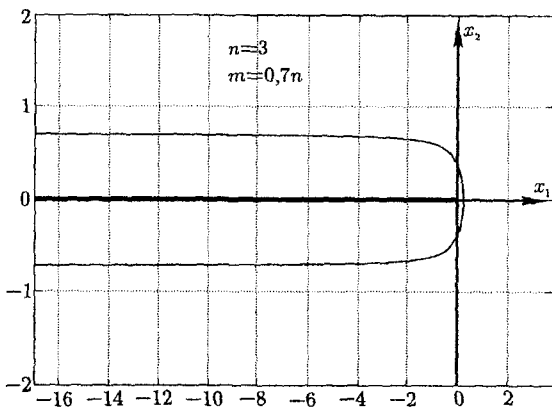


Рис. 22. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

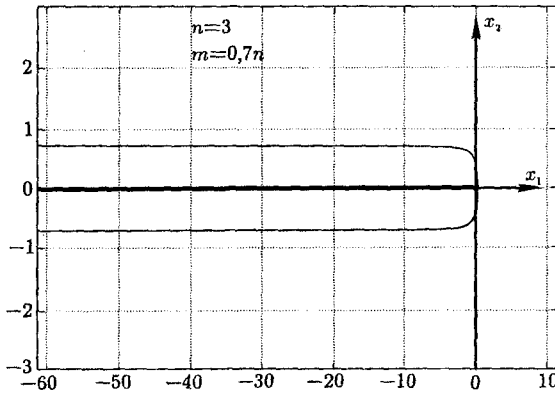


Рис. 23. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

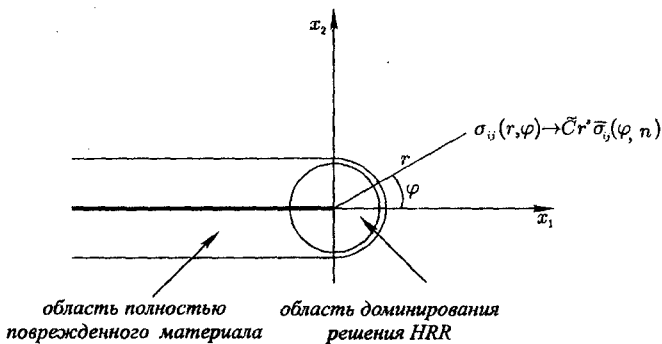


Рис. 24. Конфигурация области полностью поврежденного материала и зона преобладания решения HRR

лишь для отдельных показателей степенного закона установившейся ползучести ( $n = 1$ ,  $n = 3$ ,  $n = 5$ ). Полученные в настоящей работе собственные значения для всех важных с практической точки зрения показателей  $n$  (табл. 3 – 6) совпадают с собственными значениями, определенными в [20].

Сравнительно простой подход, продемонстрированный в настоящем пособии, дает возможность определить геометрию области полностью поврежденного материала у вершины трещины и ее берегов. Можно отметить, что во многих случаях исследователи задают границу области полностью поврежденного материала априори, опираясь, например, на экспериментальные наблюдения [22], где граница области перед вершиной трещины описывается дугой эллипса, а за ее вершиной доопределяется двумя прямыми, параллельными берегам трещины. В отличие от подхода, используемого в [22], в рамках настоящего исследования удастся единой зависимостью  $r = r(\varphi)$  найти границу области полностью поврежденного материала.

## 4 Автомодельное решение задачи о трещине типа I в связанной постановке (связка ползучесть – поврежденность)

### 1. Основные уравнения

Рассмотрим задачу о стационарной полубесконечной трещине типа I в неограниченном теле. Пусть определяющие соотношения исследуемого материала построены на основе степенного закона Нортона теории установившейся ползучести:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (4.1)$$

где  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $B, n$  – константы материала;  $\sigma_e$  – интенсивность напряжений: в случае плоского деформированного состояния  $\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{r\varphi}^2$ , в случае плоского напряженного состояния  $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2$ , где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\psi$  – параметр сплошности Качанова ( $\omega = 1 - \psi$  – параметр поврежденности Работнова);  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$  – компоненты девiatorа напряжений: в случае плоского деформированного состояния  $s_{rr} = -s_{\varphi\varphi} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/2$ , в случае плоского напряженного состояния  $s_{rr} = (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/3$ ,  $s_{\varphi\varphi} = (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})/3$ .

Уравнения равновесия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (4.2)$$

Условие совместности деформаций, сформулированное для скоростей деформаций ползучести, представляется в форме

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}. \quad (4.3)$$

Кинетическое уравнение, постулирующее степенной закон накопления повреждений, имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (4.4)$$

где  $A, m$  – константы материала;  $t$  – время;

$$\sigma_{eqv} = \alpha\sigma_e + \beta\sigma_1 + (1 - \alpha - \beta)\sigma_{kk} \quad (4.5)$$

– эквивалентное напряжение, где  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение,  $\sigma_{kk}$  – гидростатическое напряжение, константы  $\alpha$  и  $\beta$  находятся экспериментально. Определяющие соотношения (4.1) представляются в форме:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr} = -\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{4}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi}\end{aligned}\quad (4.6)$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{1}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi}\end{aligned}\quad (4.7)$$

в случае плоского напряженного состояния.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi, t) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi, t) = 0. \quad (4.8)$$

Граничное условие в бесконечно удаленной точке имеет форму

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) \rightarrow \tilde{C}r^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (4.9)$$

где значения  $s$  находятся в процессе решения задачи;  $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$  – функции, подлежащие определению.

Следует отметить, что граничное условие (4.9) для рассматриваемых определяющих соотношений (4.1) в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано как условие сближения с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (4.10)$$

поскольку в бесконечно удаленной точке  $\psi = 1$  и двучленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности на значительном расстоянии от вершины трещины разыскивается в форме

$$\psi(r, \varphi, t) = 1 - r^\gamma g(\varphi, t) + o(r^\gamma), \quad \gamma < 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

В этом случае из кинетического уравнения накопления повреждений (4.4) вытекает соотношение  $\gamma = 1 - m/(n+1)$  и так как  $m = 0,7n$ , то  $\gamma > 0$ ,

что противоречит условию  $\gamma < 0$  в (4.11). Следовательно, граничное условие (4.10) принимается в более общем виде (4.9) и  $s \neq -1/(n + 1)$ . Постоянная  $C$  может быть найдена путем решения задачи с истинными граничными условиями для реального элемента конструкции, находящегося под действием определенной системы нагрузок.

## 2. Автомодельное решение

На основе результатов ранее проведенных исследований принимается, что у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений: уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{R} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{R\varphi}}{R} = 0; \quad (4.12)$$

условия совместности

$$2 \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \dot{\epsilon}_{R\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{RR}}{\partial \varphi^2} - R \frac{\partial \dot{\epsilon}_{RR}}{\partial R} + R \frac{\partial^2 (R \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial R^2}; \quad (4.13)$$

кинетического уравнения

$$R \frac{\partial \psi}{\partial R} = -sm \left( \frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (4.14)$$

где скорости деформаций ползучести имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{RR} &= -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{3}{4} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{R\varphi} &= \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{R\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (4.15)$$

в случае плоской деформации

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{RR} &= \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{R\varphi} &= \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{R\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (4.16)$$

и в случае плоского напряженного состояния, интенсивность напряжений определяется следующими формулами: в случае плоского деформированного состояния

$$\sigma_e^2 = 3(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{R\varphi}^2,$$

в случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_e^2 = \sigma_{RR}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{RR}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{R\varphi}^2.$$

Решение этой системы уравнений должно удовлетворять граничным условиям:

условиям отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$\sigma_{R\varphi}(R, \varphi = \pi) = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(R, \varphi = \pi) = 0 \quad (4.17)$$

условиям симметрии на ее продолжении

$$\sigma_{R\varphi}(R, \varphi = 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}(R, \varphi = 0) = 0, \quad (4.18)$$

асимптотическому условию в бесконечно удаленной точке

$$\sigma_{ij}(R, \varphi) \rightarrow R^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (R \rightarrow \infty, s < 0). \quad (4.19)$$

Решение системы уравнений (4.12) – (4.16), подчиняющееся граничным условиям (4.17) – (4.19), разыскивается во всей плоскости за исключением полностью поврежденной зоны, примыкающей к вершине трещины и внутри которой материал не удовлетворяет сформулированной системе уравнений. Предполагается, что внутри области полностью поврежденного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе введенной области разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям

$$\psi = 0, \quad \sigma_{ij} = 0. \quad (4.20)$$



### 3. Асимптотическое решение задачи

#### 3.1. Плоское деформированное состояние

Двучленное асимптотическое разложение функции напряжений Эри и трехчленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности для больших расстояний от вершины трещины разыскиваются в виде:

$$\begin{aligned}
 F(R, \varphi) &= R^\lambda f^{(0)}(\varphi) + R^{\lambda_1} f^{(1)}(\varphi) + o(R^{\lambda_1}), \\
 \psi(R, \varphi) &= 1 - R^\gamma g^{(0)}(\varphi) - R^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) + o(R^{\gamma_1})
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

где  $\lambda, \lambda_1, f^{(0)}(\varphi), f^{(1)}(\varphi), \gamma, \gamma_1$  - неизвестные собственные значения и собственные функции соответственно.

Тогда двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений при  $R \rightarrow \infty$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \sigma_{RR}(R, \varphi) &= R^s \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) + R^{s_1} \left( \lambda_1 f^{(1)} + \left( f^{(1)} \right)'' \right) + o(R^{s_1}), \\
 \sigma_{\varphi\varphi}(R, \varphi) &= R^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + R^{s_1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} + o(R^{s_1}), \\
 \sigma_{R\varphi}(R, \varphi) &= R^s (1 - \lambda) \left( f^{(0)} \right)' + R^{s_1} (1 - \lambda_1) \left( f^{(1)} \right)' + o(R^{s_1}),
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

где  $s = \lambda - 2, s_1 = \lambda_1 - 2$ .

Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned}
 \sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi} &= R^s \left[ \lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right] + \\
 &+ R^{s_1} \left[ \lambda_1(2 - \lambda_1) f^{(1)} + \left( f^{(1)} \right)'' \right],
 \end{aligned}$$

можно найти квадрат интенсивности напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_e^2 &= (\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2 = \\
 &= \left\{ R^s \left[ \lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right] + R^{s_1} \left[ \lambda_1(2 - \lambda_1) f^{(1)} + \left( f^{(1)} \right)'' \right] \right\}^2 + \\
 &+ 4 \left\{ R^{2s} (1 - \lambda) \left( f^{(0)} \right)' + R^{2s_1} (1 - \lambda_1) \left( f^{(1)} \right)' \right\}^2 = \\
 &= R^{2s} (h(\varphi))^2 + 2R^{s+s_1} h_1(\varphi),
 \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения

$$h(\varphi) = \sqrt{\left[ \lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 \left( \left( f^{(0)} \right)' \right)^2}, \tag{4.23}$$

$$h_1(\varphi) = \left[ \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \left[ \lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] + \\ + 4(1 - \lambda)(1 - \lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})'. \quad (4.24)$$

Поэтому

$$\sigma_e^2 = R^{2s}h^2 + 2R^{s+s_1}h_1 = R^{2s}h^2 \left( 1 + 2R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right) \quad (4.25)$$

и двучленное асимптотическое разложение интенсивности напряжений имеет вид

$$\sigma_e = \sigma_e(R, \varphi) = R^s h \left( 1 + R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right). \quad (4.26)$$

Трехчленное асимптотическое разложение параметра сплошности разывается в форме

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^\gamma g^{(0)}(\varphi) - R^n g^{(1)}(\varphi) - o(R^n), \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

Асимптотический анализ кинетического уравнения позволяет найти, что  $\gamma = sm$ ,  $\gamma_1 = sm + s_1 - s$  (здесь принята гипотеза о совпадении порядков малости главных членов асимптотических разложений слагаемых, входящих в правую и левую части кинетического уравнения).

Определяющие соотношения задачи приводят к следующим асимптотическим разложениям скоростей деформаций ползучести на значительном расстоянии от вершины трещины, например, для  $\dot{\epsilon}_{RR}$

$$\dot{\epsilon}_{RR} = \frac{1}{2} R^{s(n-1)} h^{n-1} \left( 1 + (n-1) R^{sm} \frac{h_1}{h^2} \right) \left( 1 + n R^{sm} g^{(0)} \right) \times \\ \times \left\{ R^s \left[ \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[ \lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] \right\} = \\ = \frac{1}{2} R^{sn} h^{n-1} \left[ 1 + R^{sm} \left( (n-1) \frac{h_1}{h^2} + n g^{(0)} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \left[ \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1-s} \left[ \lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] \right\}.$$

Из последнего равенства вытекает, что главный член асимптотического разложения имеет порядок  $R^{sn}$ , а следующие за ним имеют порядки  $R^{sn+sm}$  и  $R^{sn+s_1-s}$ . Необходимо отметить, что, рассматривая коэффициенты при главных членах асимптотических разложений в условии совместности и законе накопления повреждений, можно прийти к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции  $f^{(0)}$ , а затем, к алгебраическому

уравнению, позволяющему найти функцию  $g^{(0)}$ . Исследуя слагаемые более высоких порядков малости, необходимо получать дифференциальные уравнения для нахождения функций  $f^{(i)}$  (в рассматриваемом случае удерживается лишь функция  $f^{(1)}$ , но нужно построить такие асимптотические разложения для скоростей деформаций ползучести, которые давали бы возможность получения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения для определения функции  $f^{(i)}$ , считая, что ранее определены функции  $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(i-1)}$  и  $g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(i-1)}$ ). Таким образом, необходимо гарантировать продолжения процесса построения асимптотических разложений и получения цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов этих разложений, что приводит к условию  $s_1 = s + sm$ , которое позволяет учесть все слагаемые в последнем асимптотическом разложении скорости деформации ползучести.

Окончательные выражения для двучленных асимптотических разложений скоростей деформаций ползучести принимают форму

$$\dot{\epsilon}_{RR} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = R^{sn}\epsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn}\epsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \tag{4.28}$$

$$\dot{\epsilon}_{R\varphi} = R^{sn}\epsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn}\epsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi),$$

или, учитывая, что  $s_1 - s = sm$ ,

$$\dot{\epsilon}_{RR} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = R^{sn}\epsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)}\epsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \tag{4.29}$$

$$\dot{\epsilon}_{R\varphi} = R^{sn}\epsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)}\epsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi),$$

где

$$\epsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) = h^{n-1} \left( \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right), \tag{4.30}$$

$$\epsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) = h^{n-1}(1 - \lambda) (f^{(0)})',$$

$$\epsilon_{RR}^{(1)}(\varphi) = h^{n-1} \left\{ \lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' + \omega^{(1)}(\varphi) \left[ \lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \right\}, \tag{4.31}$$

$$\epsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi) = h^{n-1} \left[ (1 - \lambda_1) (f^{(1)})' + \omega^{(1)}(\varphi)(1 - \lambda) (f^{(0)})' \right],$$

где  $\omega^{(1)}(\varphi) = (n - 1)\frac{h_1}{h^2} + ng^{(0)}$ .

Подстановка этих двучленных асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести в условие совместности приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, связывающим угловые коэффициенты главного и следующего за ним членов данных разложений соответственно:

$$2(sn + 1) \frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - sn(sn + 2) \varepsilon_{RR}^{(0)} \quad (4.32)$$

$$2[s(n + m) + 1] \frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - s(n + m)[s(n + m) + 2] \varepsilon_{RR}^{(1)} \quad (4.33)$$

Первое из полученных уравнений и выражения (4.31) приводят к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции  $f^{(0)}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} (f^{(0)})^{IV} N(\varphi) = & 4(sn + 1)(1 - \lambda) \left[ (n - 1)K(\varphi) (f^{(0)})' + h^2 (f^{(0)})'' \right] - \\ & - h^2 \left[ ((2 - \lambda)\lambda - sn(sn + 2)) (f^{(0)})'' - sn(sn + 2)(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} \right] - \\ & - (n - 1)(n - 3) (K(\varphi)/h)^2 \left[ (2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] - \\ & - 2(n - 1)K(\varphi) \left[ (2 - \lambda)\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right] - \\ & - (n - 1)M(\varphi) \left[ (2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

где

$$\begin{aligned} K(\varphi) = & \left[ (2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \times \\ & \times \left[ (2 - \lambda)\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right] + 4(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'', \\ M(\varphi) = & \left[ (2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \lambda(2 - \lambda) (f^{(0)})'' + \\ & + \left[ (2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'', \\ N(\varphi) = & n \left[ (2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 \left[ (f^{(0)})' \right]^2. \end{aligned}$$

Решение уравнения (4.34) должно удовлетворять граничным условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$f^{(0)}(\varphi = \pi) = 0, \quad (f^{(0)})'(\varphi = \pi) = 0, \quad (4.35)$$

и условиям симметрии на ее продолжении

$$(f^{(0)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (f^{(0)})'''(\varphi = 0) = 0. \quad (4.36)$$

Таким образом, для определения функции  $f^{(0)}(\varphi)$  сформулирована двухточечная краевая задача, решение которой разыскивалось численно с помощью метода Рунге – Кутта – Фельберга. Для реализации процедуры данного метода следует задать значения всех искомых функций (в рассматриваемом случае – функции  $f^{(0)}(\varphi)$  и ее трех производных на линии продолжения трещины  $\varphi = 0$ ). Необходимо отметить, что уравнение (4.34) является однородным: если функция  $f^{(0)}(\varphi)$  представляет собой решение этого уравнения, то любая функция вида  $Af^{(0)}(\varphi)$ , где  $A$  – произвольная константа, также является решением. Поэтому следует положить, что

$$f^{(0)}(\varphi = 0) = 1, \quad (4.37)$$

таким образом, принимается условие нормировки решения. Поэтому, для применения классической процедуры метода Рунге – Кутта – Фельберга необходимо подобрать две величины

$$(f^{(0)})''(\varphi = 0) = A_1 \quad (4.38)$$

и собственное число  $s$ , таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины (4.35).

Собственные числа  $s$ , значения  $(f^{(0)})''(0)$ ,  $f^{(1)}(0)$  и  $(f^{(2)})''(0)$  в случае плоского деформированного состояния, полученные в результате численного анализа, приведены в таблице 7.

Следует отметить, что исследование нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (4.34) с начальными условиями (4.36) – (4.38) позволяет найти угловое распределение главного члена асимптотического разложения функции напряжений Эри (функцию  $f^{(0)}(\varphi)$ ), а, следовательно, и угловые распределения главных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений без помощи кинетического уравнения, поскольку главный член асимптотического разложения скалярного параметра сплошности тождественно равен единице (согласно (4.21)). После определения главного

члена асимптотического разложения функции напряжений Эри кинетическое уравнение позволяет найти двучленное разложение для скалярного параметра сплошности. Этот подход дает возможность в связанной задаче рассматривать на каждом шаге одно уравнение (либо для определения функции  $f^{(i)}(\varphi)$ , либо для нахождения функции  $g^{(i)}(\varphi)$ ). Действительно, для анализа кинетического уравнения (4.14) нужно предварительно найти двучленное асимптотическое разложение эквивалентного напряжения (4.5), которое для случая плоского деформированного состояния принимает вид

$$\sigma_{eqv} = (3 - 3\alpha - 2\beta)(\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi})/2 + (\sqrt{3}\alpha + \beta)\sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2}/2.$$

Учитывая следующее равенство

$$\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi} = R^s \left[ \lambda^2 f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[ \lambda_1^2 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right]$$

и соотношение (4.26), можно получить

$$\sigma_{eqv}(R, \varphi) = R^s \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} \sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi), \quad (4.39)$$

где

$$\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2}(3 - 3\alpha - 2\beta) \left[ \lambda^2 f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \beta)h(\varphi),$$

$$\sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2}(3 - 3\alpha - 2\beta) \left[ \lambda_1^2 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \beta)\frac{h_1(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

Тогда кинетическое уравнение (4.14) и подстановка в него асимптотических разложений (4.39) и (4.21) приводят к равенству

$$\gamma R^\gamma g^{(0)}(\varphi) + \gamma_1 R^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) = smR^{sm} \left( \sigma_{eqv}^{(0)} \right)^m \left[ 1 + mR^{sm} \left( \frac{\sigma_{eqv}^{(1)}}{\sigma_{eqv}^{(0)}} + g^{(0)} \right) \right],$$

откуда, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $R$ , можно найти коэффициенты трехчленного асимптотического разложения скалярного параметра сплошности

$$g^{(0)}(\varphi) = \left( \sigma_{eqv}^{(0)} \right)^m, \quad (4.40)$$

$$g^{(1)}(\varphi) = \frac{m}{2} \left( \sigma_{eqv}^{(0)} \right)^m \left( \frac{\sigma_{eqv}^{(1)}}{\sigma_{eqv}^{(0)}} + g^{(0)} \right).$$

Двучленное разложение параметра сплошности и условие совместности ведет к неоднородному линейному дифференциальному уравнению относительно функции  $f^{(1)}(\varphi)$  :

$$\begin{aligned}
 \left(f^{(1)}\right)^{IV} L(\varphi) = & 4[s(n+m)+1](n-1)K(\varphi) \left[ (1-\lambda_1) \left(f^{(1)}\right)' + B(\varphi) \right] + \\
 & + s(n+m)[s(n+m)+2]h^2 \left[ \lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + \left(f^{(1)}\right)'' + A(\varphi) \right] - \\
 & - (n-1)(n-3)K^2(\varphi) \left[ \lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + \left(f^{(1)}\right)'' + A(\varphi) \right] / h^2 - \\
 & - \lambda_1(2-\lambda_1)h^2 \left(f^{(1)}\right)'' - h^2G(\varphi) \left[ \lambda(2-\lambda)f^{(0)} + \left(f^{(0)}\right)'' \right] - \\
 & - 2(n-1)K(\varphi) \left[ \lambda_1(2-\lambda_1) \left(f^{(1)}\right)' + \left(f^{(1)}\right)''' + A'(\varphi) \right] - (4.41) \\
 & - (n-1)K'(\varphi) \left[ \lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + \left(f^{(1)}\right)'' + A(\varphi) \right] + \\
 & + 4[s(n+m)+1]h^2 \left[ (1-\lambda_1) \left(f^{(1)}\right)'' + B'(\varphi) \right] - \\
 & - 2\omega_1' \left[ \lambda(2-\lambda) \left(f^{(0)}\right)' + \left(f^{(0)}\right)''' \right] h^2 - \\
 & - \omega_1 \left[ \lambda(2-\lambda) \left(f^{(0)}\right)'' + \left(f^{(0)}\right)^{IV} \right] h^2,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 L(\varphi) = & n \left[ \lambda(2-\lambda)f^{(0)} + \left(f^{(0)}\right)'' \right]^2 + 4(1-\lambda)^2 \left( \left(f^{(0)}\right)' \right)^2, \\
 A(\varphi) = & \omega_1(\varphi) \left[ \lambda(2-\lambda)f^{(0)} + \left(f^{(0)}\right)'' \right], \\
 B(\varphi) = & \omega_1(\varphi)(1-\lambda) \left(f^{(0)}\right)',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\varphi) = & (n-1)D(\varphi)/h^2 + E(\varphi), \\
 D(\varphi) = & \left[ \lambda(2-\lambda)f^{(0)} + \left(f^{(0)}\right)'' \right] \lambda_1(2-\lambda_1) \left(f^{(1)}\right)'' + \\
 & + \left[ \lambda(2-\lambda) \left(f^{(0)}\right)'' + \left(f^{(0)}\right)^{IV} \right] \left[ \lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + \left(f^{(1)}\right)'' \right] + \\
 & + 2 \left[ \lambda(2-\lambda) \left(f^{(0)}\right)' + \left(f^{(0)}\right)''' \right] \left[ \lambda_1(2-\lambda_1) \left(f^{(1)}\right)' + \left(f^{(1)}\right)''' \right] +
 \end{aligned}$$

$$+4(1-\lambda)(1-\lambda_1) \left[ (f^{(0)})''' (f^{(1)})' + 2 (f^{(0)})'' (f^{(1)})'' + (f^{(0)})' (f^{(1)})''' \right],$$

$$E(\varphi) = (n-1) [8h_1(\varphi)K^2/h^6 - 4h_1'K/h^4 - 2h_1K'/h^4] + n (g^{(0)})'',$$

где функции  $g^{(0)}$ ,  $f^{(0)}$  известны. Далее уравнение (4.41) исследуется численно с учетом граничных условий на верхнем берегу трещины

$$f^{(1)}(\varphi = \pi) = 0, \quad (f^{(1)})'(\varphi = \pi) = 0, \quad (4.42)$$

и условиями на ее продолжении

$$(f^{(1)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (f^{(1)})'''(\varphi = 0) = 0. \quad (4.43)$$

Для реализации метода Рунге - Кутты - Фельберга необходимо сформулировать следующие начальные условия при  $\varphi = 0$ :

$$f^{(1)}(\varphi = 0) = A_2, \quad (f^{(1)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (4.44)$$

$$(f^{(1)})''(\varphi = 0) = A_3, \quad (f^{(1)})'''(\varphi = 0) = 0.$$

Постоянные  $A_2$  и  $A_3$  находятся из требования выполнения граничных условий (4.42). После определения функции  $f^{(1)}(\varphi)$ , а, следовательно, и  $\sigma_{eqv}^{(1)}$  можно найти функцию  $g^{(1)}(\varphi)$ , используя второе уравнение из системы равенств (4.40). Таким образом, конфигурация области полностью поврежденного материала определяется посредством соотношений

$$\psi = 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) = 0, \quad (4.45)$$

$$\psi = 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) - R^{2sm} g^{(1)}(\varphi) = 0,$$

или

$$R(\varphi) = (g^{(0)}(\varphi))^{-1/(sm)}, \quad (4.46)$$

$$R(\varphi) = \left( \frac{g^{(0)}(\varphi) + \sqrt{(g^{(0)}(\varphi))^2 + 4g^{(1)}(\varphi)}}{2} \right)^{-1/(sm)}, \quad (4.47)$$

причем первая зависимость позволяет найти область полностью поврежденного материала, определяемую двучленным асимптотическим разложением



Таблица 7. Собственные числа  $s$ , значения  $(f^{(0)})''(0)$ ,  $f^{(1)}(0)$  и  $(f^{(1)})''(0)$  в случае плоского деформированного состояния

$n$	$m$	$s$	$(f^{(0)})''(0)$	$f^{(1)}(0)$	$(f^{(1)})''(0)$
3	$0,7n$	-0,771694	-0,43724	0,115	-0,015
4	$0,7n$	-0,668489	-0,409203	0,035	-0,015
5	$0,7n$	-0,617909	-0,398556	0,01	-0,007
6	$0,7n$	-0,5901244	-0,395027	0,003	-0,0035
7	$0,7n$	-0,573245	-0,394371	0,0012	-0,006
8	$0,7n$	-0,562138	-0,394869	0,0005	0,00139
9	$0,7n$	-0,554369	-0,395813	0,0002	0,00142

параметра сплошности, тогда как второе равенство позволяет найти форму области полностью поврежденного материала, определяемую трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности. Граница области полностью поврежденного материала, найденная с помощью двучленного и трехчленного разложений параметра сплошности для различных значений констант материала, входящих в определяющие соотношения и кинетическое уравнение, представлена на рис. 25 – 27. Из представленных рисунков видно, что конфигурации области полностью поврежденного материала, определяемые двучленным (кривая 1) и трехчленным (кривая 2) асимптотическими разложениями параметра сплошности, являются близкими по своей форме и их характерные линейные размеры (например, их протяженность вдоль прямой, продолжающей трещину) практически совпадают. Потому можно заключить, что установленная асимптотика дальнего поля напряжений действительно "управляет" конфигурацией области полностью поврежденного материала, моделируемой в окрестности вершины трещины.

На рис. 28 – 30 приведены конфигурации областей полностью поврежденного материала, полученные для случая, когда граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как требование асимптотического сближения с решением HRR. Очевидно, что характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, соответствующий конфигурациям, построенным с помощью двучленного (кривая 1) и трехчленного (кривая 2) асимптотического разложения параметра сплошности соответственно, существенно различаются (в качестве характерного линейного размера можно принять протяженность области по оси ординат). Следовательно, граничное условие в бесконечно удаленной точке не может быть сформулировано как условие асимптотического сближения с решением HRR.

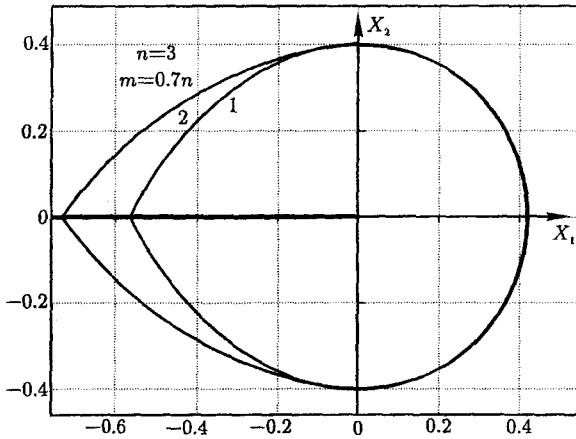


Рис. 25. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

### 3.2. Плоское напряженное состояние

В случае плоского напряженного состояния определяющие уравнения после введения автомодельной переменной принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{RR} &= \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{R\varphi} &= 3 \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{R\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Для определения двучленного асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций ползучести следует, как и в случае плоского деформированного состояния, предварительно найти двучленное асимптотическое разложение интенсивности напряжений. Поскольку

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \sigma_{RR}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{RR}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{R\varphi}^2 = \\ &= \left[ R^s \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) + R^{s_1} \left( \lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) \right]^2 + \\ &+ \left[ R^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + R^{s_1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} \right]^2 - \end{aligned}$$

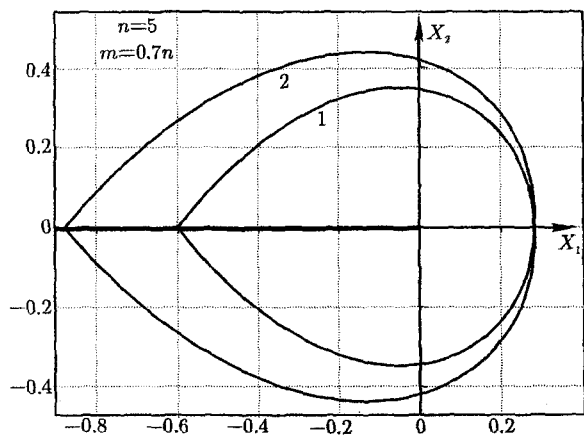


Рис. 26. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 5$  и  $m = 0,7n$

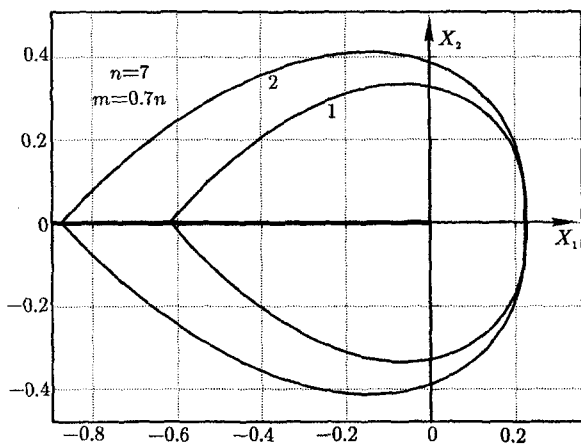


Рис. 27. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 7$  и  $m = 0,7n$

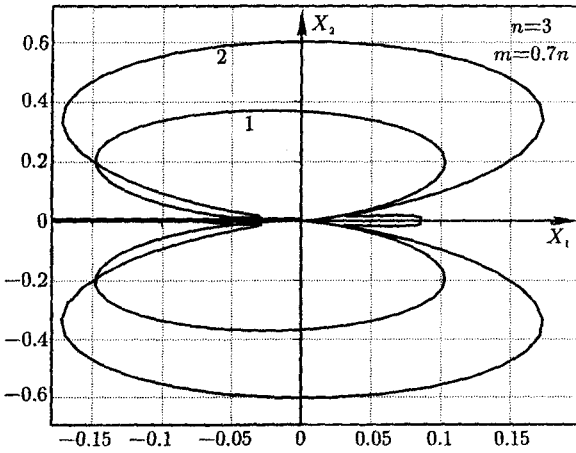


Рис. 28. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

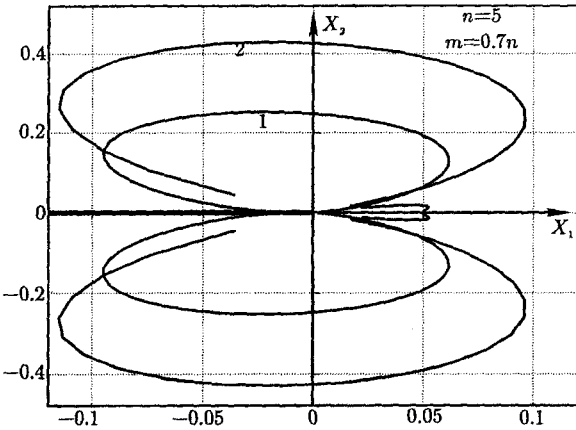


Рис. 29. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 5$  и  $m = 0,7n$

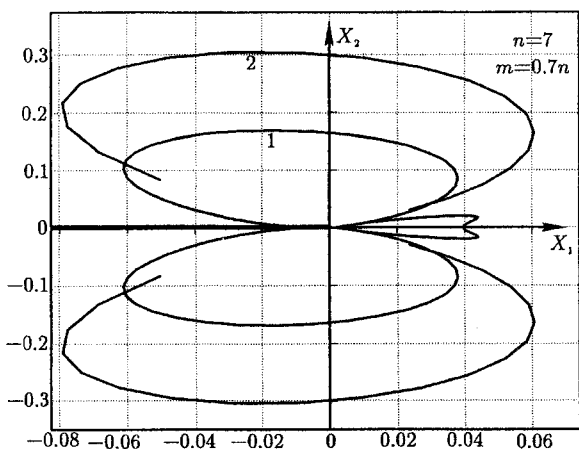


Рис. 30. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 7$  и  $m = 0,7n$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ R^s \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) + R^{s_1} \left( \lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) \right] \times \\
 & \quad \times \left[ R^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + R^{s_1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} \right] + \\
 & \quad + 3 \left[ R^s (1 - \lambda) (f^{(0)})' + R^{s_1} (1 - \lambda_1) (f^{(1)})' \right]^2,
 \end{aligned}$$

то, продолжая преобразования, можно получить

$$\begin{aligned}
 \sigma_e &= R^{2s} \left[ \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda (1 - \lambda) f^{(0)} + 3(1 - \lambda)^2 \left( (f^{(0)})' \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right)^2 + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 (f^{(0)})^2 \right] + \\
 & \quad + R^{2s+s_1} \left[ \lambda \lambda_1 (\lambda - 1) (\lambda_1 - 1) f^{(0)} f^{(1)} + 3(1 - \lambda) (1 - \lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})' + \right. \\
 & \quad + \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \left( \lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) - \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} / 2 - \\
 & \quad \left. - \left( \lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} / 2 \right] = \\
 & \quad = R^{2s} h^2 \left( 1 + 2R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right),
 \end{aligned}$$

и, легко установить, что двучленное асимптотическое разложение интенсивности напряжений представляется формулой

$$\sigma_e = \sigma_e(R, \varphi) = R^s h \left( 1 + R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right), \quad (4.49)$$

где введены следующие обозначения

$$h = \left[ \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right)^2 + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 (f^{(0)})^2 - \right. \\ \left. - \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} - 3(1 - \lambda)^2 \left( (f^{(0)})' \right)^2 \right]^{1/2}, \\ h_1 = \lambda \lambda_1 (\lambda - 1) (\lambda_1 - 1) f^{(0)} f^{(1)} + 3(1 - \lambda) (1 - \lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})' + \\ + \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \left( \lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) - \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} / 2 - \\ - \left( \lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} / 2.$$

Учитывая, что

$$2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi} = R^s \left[ \lambda(3 - \lambda) f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right] + \\ + R^{s_1} \left[ \lambda(3 - \lambda) f^{(1)} + 2 \left( f^{(1)} \right)'' \right], \\ 2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR} = R^s \left[ \lambda(2\lambda - 3) f^{(0)} - \left( f^{(0)} \right)'' \right] + \\ + R^{s_1} \left[ \lambda(2\lambda - 3) f^{(1)} - \left( f^{(1)} \right)'' \right],$$

можно получить следующие двучленные асимптотические разложения компонент тензора скоростей деформации ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{RR} = R^{sn} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1 - s + sn} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = R^{sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1 - s + sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{R\varphi} = R^{sn} \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1 - s + sn} \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi), \quad (4.50)$$

или, учитывая, что  $s_1 - s = sm$ ,

$$\dot{\varepsilon}_{RR} = R^{sn} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = R^{sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{R\varphi} = R^{sn} \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi), \quad (4.51)$$

где

$$\varepsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) = h^{n-1} \left( \lambda(3 - \lambda) f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi) &= h^{n-1} \left\{ \lambda(3 - \lambda)f^{(1)} + 2(f^{(1)})'' + \omega_1(\varphi) \left[ \lambda(3 - \lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right] \right\}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) &= h^{n-1} \left( \lambda(2\lambda - 3)f^{(0)} - (f^{(0)})'' \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) &= h^{n-1} \left\{ \lambda(2\lambda - 3)f^{(1)} - (f^{(1)})'' + \omega_1(\varphi) \left[ \lambda(2\lambda - 3)f^{(0)} - (f^{(0)})'' \right] \right\}, \\ \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) &= 3h^{n-1}(1 - \lambda)(f^{(0)})', \\ \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi) &= 3h^{n-1} \left[ (1 - \lambda_1)(f^{(1)})' + \omega_1(\varphi)(1 - \lambda)(f^{(0)})' \right], \end{aligned}$$

$$\omega^{(1)}(\varphi) = (n - 1) \frac{h_1}{h^2} + ng^{(0)}.$$

Путем подстановки полученных двучленных асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций в условие совместности скоростей деформаций и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $R$ , можно найти два нелинейных дифференциальных уравнения, позволяющих определить угловые распределения компонент тензора напряжений и скалярного параметра сплошности

$$2(sn + 1) \frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - sn\varepsilon_{RR}^{(0)} + (sn + 1)sn\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}, \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} 2[s(n + m) + 1] \frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - s(n + m)\varepsilon_{RR}^{(1)} + \\ &+ [s(n + m) + 1]sn\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}, \end{aligned} \tag{4.53}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (f^{(0)})^{IV} N(\varphi) &= 6(sn + 1)(1 - \lambda) \left[ (n - 1)K(\varphi) + h^2 (f^{(0)})'' \right] - \\ - \left[ (n - 3)(K(\varphi)/h)^2 + (n - 1)M(\varphi) \right] &\left[ \lambda(3 - \lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right] - \\ - 2(n - 1)K(\varphi) \left[ \lambda(3 - \lambda)(f^{(0)})' + 2(f^{(0)})''' \right] &- \\ - h^2 \lambda sn((sn + 1)(2\lambda - 3) - 3 + \lambda)f^{(0)} - & \\ - h^2 (\lambda(3 - \lambda) - sn(sn + 1))(f^{(0)})'' &, \end{aligned} \tag{4.54}$$

где

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'') (\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''') + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 f^{(0)} (f^{(0)})' + \\ &+ 3(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'' - \lambda(1 - \lambda) (\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''') f^{(0)}/2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda(1-\lambda) \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) (f^{(0)})' / 2, \\
 M(\varphi) = & \left( \lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right)^2 + \lambda(3-\lambda) \left( \lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) (f^{(0)})'' + \\
 & + \lambda^2(1-\lambda)^2 \left( (f^{(0)})' \right)^2 + \lambda^2(\lambda-1)(2\lambda-3) f^{(0)} (f^{(0)})'' / 2 + \\
 & + 3(1-\lambda)^2 \left( (f^{(0)})'' \right)^2 + 3(1-\lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})''' - \\
 & - \lambda(\lambda-1) \left( \lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right) (f^{(0)})', \\
 N(\varphi) = & (n-1) \left( \lambda(3-\lambda) f^{(0)} + 2 (f^{(0)})'' \right)^2 / 2 + 2h^2.
 \end{aligned}$$

Вновь для реализации процедуры метода Рунге – Кутта – Фельберга следует задать значения всех искомым функций (в рассматриваемом случае – функции  $f^{(0)}(\varphi)$  и ее трех производных на линии продолжения трещины  $\varphi = 0$ ). Необходимо отметить, что уравнение (4.54) является однородным, поэтому следует положить, что

$$f^{(0)}(\varphi = 0) = 1, \quad (4.55)$$

таким образом, принимается условие нормировки решения. Для применения классической процедуры метода Рунге – Кутта – Фельберга необходимо подобрать две величины

$$\left( f^{(0)} \right)'' (\varphi = 0) = A_1 \quad (4.56)$$

и собственное число  $s$ , таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины:

$$f^{(0)}(\varphi = \pi) = 0, \quad \left( f^{(0)} \right)' (\varphi = \pi) = 0. \quad (4.57)$$

Собственные числа  $s$ , значения  $\left( f^{(0)} \right)''(0)$ ,  $f^{(1)}(0)$  и  $\left( f^{(2)} \right)''(0)$  в случае плоского напряженного состояния, полученные в результате численного анализа, приведены в таблице 8.

Для отыскания двучленного асимптотического разложения параметра сплошности необходимо отметить, что

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2}}{2}, \quad \sigma_{kk} = \sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi}.$$

После введения дополнительных обозначений

$$\sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2} = R^s p(\varphi) \left( 1 + R^{s-1} \frac{p_1(\varphi)}{p(\varphi)} \right),$$



$$p(\varphi) = \sqrt{\left[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})''\right]^2 + 4(1-\lambda)^2 \left((f^{(0)})'\right)^2},$$

$$p_1(\varphi) = \left[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})''\right] \left[\lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})''\right] +$$

$$+ 4(1-\lambda)(1-\lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})'$$

эквивалентное напряжение (4.5) представляется в виде

$$\sigma_{eqv}(R, \varphi) = R^s \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} \sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi), \quad (4.58)$$

где

$$\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) = \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2}\right) \left[\lambda^2 f^{(0)} + (f^{(0)})''\right] + \alpha h(\varphi) + \frac{\beta}{2} p(\varphi),$$

$$\sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi) = \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2}\right) \left[\lambda_1^2 f^{(1)} + (f^{(1)})''\right] + \alpha \frac{h_1(\varphi)}{h(\varphi)} + \frac{\beta}{2} \frac{p_1(\varphi)}{p(\varphi)}.$$

Повторяя ранее проведенные рассуждения, можно найти, что

$$g^{(0)}(\varphi) = \left(\sigma_{eqv}^{(0)}\right)^m, \quad (4.59)$$

$$g^{(1)}(\varphi) = \frac{m}{2} \left(\sigma_{eqv}^{(0)}\right)^m \left(\frac{\sigma_{eqv}^{(1)}}{\sigma_{eqv}^{(0)}} + g^{(0)}\right).$$

Поэтому в следующем линейном обыкновенном дифференциальном уравнении относительно функции  $f^{(1)}(\varphi)$  функция  $g^{(0)}$  – известная функция, наряду с определенной функцией  $f^{(0)}(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} (f^{(1)})^{IV} L(\varphi) = & 3[s(n+m)+1](n-1)K(\varphi) \left[ (1-\lambda_1) (f^{(1)})' + C(\varphi) \right] / h^2 - \\ & - [s(n+m)+1]s(n+m) \left[ \lambda_1(2\lambda_1-3)f^{(1)} - (f^{(1)})'' + B(\varphi) \right] / 2 - \\ & - [(n-1)(n-3)(K(\varphi)/h^2)^2 + (n-1)K'(\varphi)/h^2 - s(n+m)] \times \\ & \times \left[ \lambda_1(3-\lambda_1)f^{(1)} + 2(f^{(1)})'' + A(\varphi) \right] / 2 - \\ & - (n-1)K(\varphi) \left[ \lambda_1(3-\lambda_1) (f^{(1)})' + 2(f^{(1)})''' + A'(\varphi) \right] / h^2 + \\ & + 3[s(n+m)+1](1-\lambda_1) (f^{(1)})'' + C'(\varphi) - \\ & - \left[ \lambda_1(3-\lambda_1) (f^{(1)})'' + H(\varphi) \right] / 2, \end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$L(\varphi) = 1 + (n-1) \left[ \lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right]^2 / (4h^2),$$

$$A(\varphi) = \omega_1(\varphi) \left[ \lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right],$$

$$B(\varphi) = \omega_1(\varphi) \left[ \lambda(2\lambda-3)f^{(0)} - \left( f^{(0)} \right)'' \right],$$

$$C(\varphi) = \omega_1(\varphi)(1-\lambda) \left( f^{(0)} \right)',$$

$$H(\varphi) = G(\varphi) \left[ \lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \right] +$$

$$+ 2\omega_1' \left[ \lambda(3-\lambda) \left( f^{(0)} \right)' + 2 \left( f^{(0)} \right)'''] +$$

$$+ \omega_1 \left[ \lambda(3-\lambda) \left( f^{(0)} \right)'' + 2 \left( f^{(0)} \right)'''' \right],$$

$$G(\varphi) = E(\varphi) + (n-1)D(\varphi)/h^2,$$

$$E(\varphi) = (n-1) \left[ 8h_1(\varphi)K^2/h^6 - 4h_1'K/h^4 - 2h_1K'/h^4 \right] + n \left( g^{(0)} \right)'',$$

$$D(\varphi) = \lambda_1 \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) \left( f^{(1)} \right)'' +$$

$$+ \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)'' + \left( f^{(0)} \right)'''' \right) \left( \lambda_1 f^{(1)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) +$$

$$+ \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right) \left( \lambda_1 \left( f^{(1)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right) +$$

$$+ \lambda \lambda_1 (\lambda-1)(\lambda_1-1) \left[ \left( f^{(0)} \right)'' f^{(1)} + 2 \left( f^{(0)} \right)' \left( f^{(1)} \right)' + f^{(0)} \left( f^{(1)} \right)'' \right] -$$

$$- \lambda_1 (\lambda_1-1) f^{(1)} \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)'' + \left( f^{(0)} \right)'''' \right) / 2 - \lambda \lambda_1 (\lambda-1) f^{(0)} \left( f^{(1)} \right)' / 2 +$$

$$+ 3(\lambda-1)(\lambda_1-1) \left[ \left( f^{(0)} \right)''' \left( f^{(1)} \right)' + 2 \left( f^{(0)} \right)'' \left( f^{(1)} \right)'' + \left( f^{(0)} \right)' \left( f^{(1)} \right)''' \right] -$$

$$- \lambda_1 (\lambda_1-1) \left[ \left( f^{(1)} \right)' \left( \lambda \left( f^{(0)} \right)' + \left( f^{(0)} \right)''' \right) + \left( f^{(1)} \right)'' \left( \lambda f^{(0)} + \left( f^{(0)} \right)'' \right) \right] / 2 -$$

$$- \lambda (\lambda-1) \left[ \left( f^{(0)} \right)' \left( \lambda_1 \left( f^{(1)} \right)' + \left( f^{(1)} \right)''' \right) + \left( f^{(0)} \right)'' \left( \lambda_1 f^{(1)} + \left( f^{(1)} \right)'' \right) \right] / 2,$$

где функции  $g^{(0)}$ ,  $f^{(0)}$  известны. Далее уравнение дифференциальное уравнение относительно  $f^{(1)}(\varphi)$  исследуется численно с учетом граничных условий на верхнем берегу трещины

$$f^{(1)}(\varphi = \pi) = 0, \quad \left( f^{(1)} \right)'(\varphi = \pi) = 0, \quad (4.60)$$

и условиями на ее продолжении

$$\left( f^{(1)} \right)'(\varphi = 0) = 0, \quad \left( f^{(1)} \right)'''(\varphi = 0) = 0. \quad (4.61)$$

Для реализации метода Рунге – Кутты – Фельберга необходимо сформулировать следующие начальные условия при  $\varphi = 0$  :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\varphi = 0) &= A_2, & (f^{(1)})'(\varphi = 0) &= 0, \\ (f^{(1)})''(\varphi = 0) &= A_3, & (f^{(1)})'''(\varphi = 0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Постоянные  $A_2$  и  $A_3$  находятся из требования выполнения граничных условий (4.60). После определения функции  $f^{(1)}(\varphi)$ , а, следовательно, и  $\sigma_{\text{eqv}}^{(1)}$  можно найти функцию  $g^{(1)}(\varphi)$ , используя второе уравнение из системы равенств (4.59). Таким образом, конфигурация области полностью поврежденного материала определяется посредством соотношений

$$\psi = 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) = 0, \tag{4.63}$$

$$\psi = 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) - R^{2sm} g^{(1)}(\varphi) = 0,$$

или

$$R(\varphi) = (g^{(0)}(\varphi))^{-1/(sm)}, \tag{4.64}$$

$$R(\varphi) = \left( \frac{g^{(0)}(\varphi) + \sqrt{(g^{(0)}(\varphi))^2 + 4g^{(1)}(\varphi)}}{2} \right)^{-1/(sm)}, \tag{4.65}$$

причем первая зависимость вновь позволяет найти область полностью поврежденного материала, определяемую двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности, тогда как второе равенство позволяет найти форму области полностью поврежденного материала, определяемую трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности.

На рис. 31 – 34 приведены конфигурации областей полностью поврежденного материала, полученные с помощью двучленного (кривая 1) и трехчленного (кривая 2) асимптотических разложений параметра сплошности соответственно. Очевидно, что 1) формы областей, полученных с помощью двучленного и трехчленного разложений, близки; 2) характерные линейные размеры областей отличаются незначительно.

На рис. 35 – 36 приведены конфигурации областей полностью поврежденного материала, полученные для случая, когда граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как требование асимптотического сбли-

Таблица 8. Собственные числа  $s$ , значения  $(f^{(0)})''(0)$ ,  $f^{(1)}(0)$  и  $(f^{(1)})''(0)$  в случае плоского напряженного состояния

$n$	$m$	$s$	$(f^{(0)})''(0)$	$f^{(1)}(0)$	$(f^{(1)})''(0)$
3	$0,7n$	-1,0	-0,5	0,025	-0,0025
4	$0,7n$	-0,913383	-0,465842	0,0171	-0,007
5	$0,7n$	-0,858016	-0,442866	0,01172	-0,001
6	$0,7n$	-0,819798	-0,426159	0,0084	-0,001
7	$0,7n$	-0,7919591	-0,413462	0,006227	-0,00971
8	$0,7n$	-0,770842	-0,403501	0,004738	-0,0089
9	$0,7n$	-0,754321	-0,395546	0,00368	-0,00801

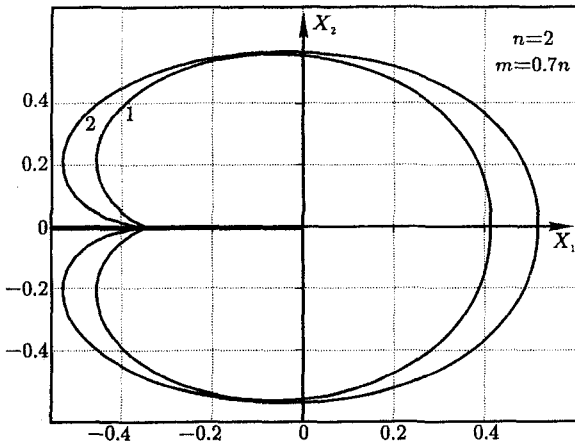


Рис. 31. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 2$  и  $m = 0,7n$

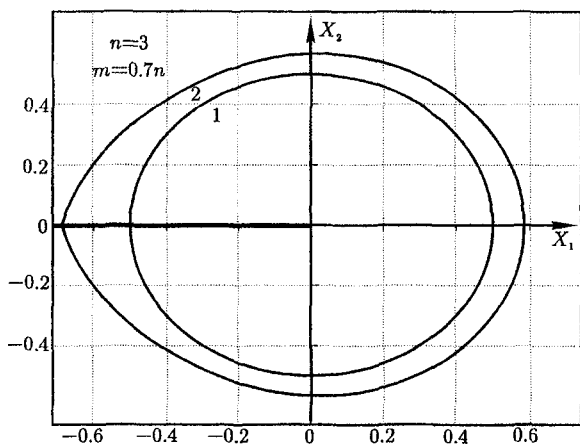


Рис. 32. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

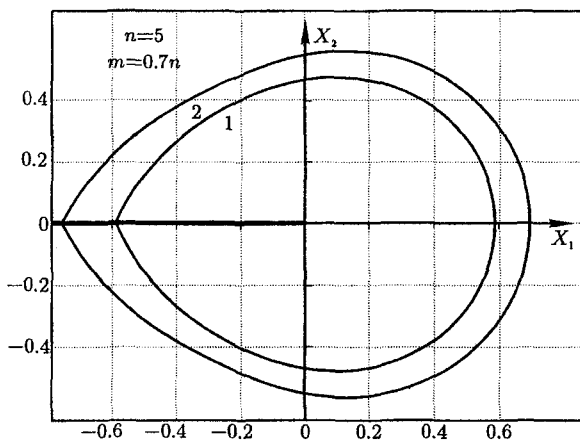


Рис. 33. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 5$  и  $m = 0,7n$

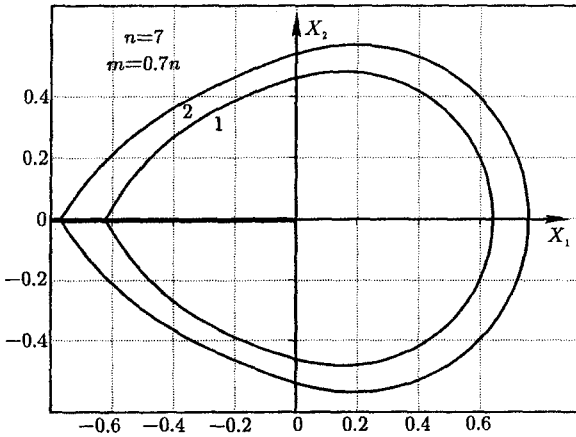


Рис. 34. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 7$  и  $m = 0,7n$

жения с решением HRR. Очевидно, что характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, соответствующий конфигурациям, построенным с помощью двучленного (кривая 1) и трехчленного (кривая 2) асимптотического разложения параметра сплошности соответственно, существенно различаются (в качестве характерного линейного размера можно принять протяженность области по линии, продолжающей трещину). Следовательно, граничное условие в бесконечно удаленной точке не может быть сформулировано как условие сближения с решением HRR.

Таким образом, в настоящей главе приведено асимптотическое исследование дальнего поля напряжений и поля повреждений в задаче о стационарной трещине нормального отрыва в рамках связанной постановки задачи в связке ползучесть – поврежденность. Решение задачи получено с помощью автомодельной переменной. Установлено, что в окрестности вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. Найдена конфигурация данной области для различных значений материальных констант материала и кинетического уравнения. Найдена новая асимптотика дальнего поля напряжений (отличная от асимптотики HRR), в действительности "управляющая" геометрией области полностью поврежденного материала.

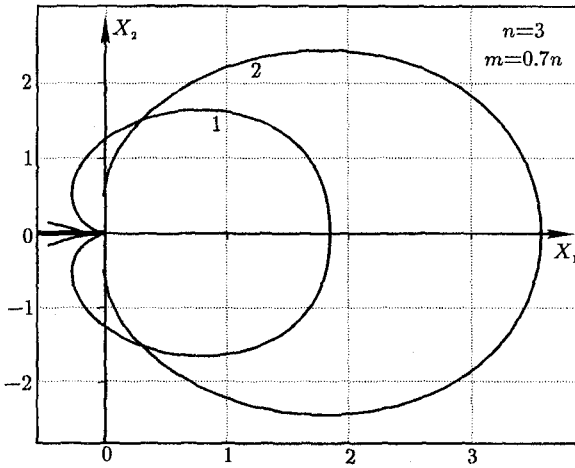


Рис. 35. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 3$  и  $m = 0,7n$

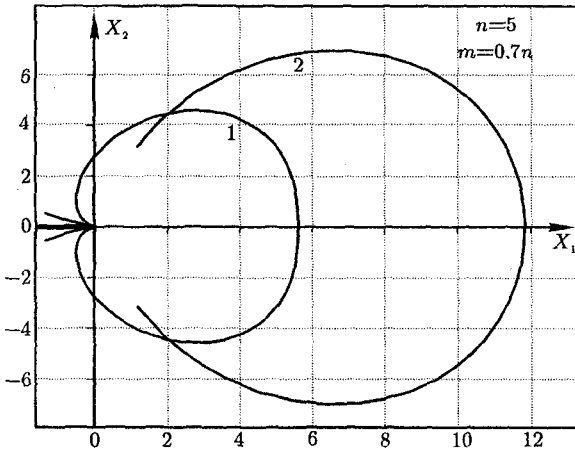


Рис. 36. Геометрия области полностью поврежденного материала для  $n = 5$  и  $m = 0,7n$

#### 4. Оценка скорости роста области полностью поврежденного материала

Возвращаясь к размерным переменным, можно оценить размеры области полностью поврежденного материала и найти закон, по которому эволюционирует граница области полностью поврежденного материала

$$r(t) = R(0)\tilde{C}^{-1/s}(At)^{-1/(sm)}. \quad (4.66)$$

Откуда следует, что  $r(t) \sim t^{-1/(sm)}$ . Можно отметить, что если бы условие в бесконечно удаленной точке формулировалось как условие сближения с решением HRR, то  $r \sim t^{(n+1)/m}$  (но не  $t^{-1/(sm)}$ ). Так как для найденных собственных значений  $|s| > 1/(n+1)$ , то полученное решение приводит к меньшей скорости роста области полностью поврежденного материала.

Ранее отмечалось, что после введения автомодельной переменной задачи о стационарной и растущей трещинах становятся неразличимыми и уравнение (4.66) позволяет оценить скорость распространения трещины в случае ее роста. Дифференцируя уравнение (4.66), можно получить, что выражение для скорости роста трещины принимает следующий вид:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{sm}R(0)\tilde{C}^{-1/s}A^{-1/(sm)}t^{-(1+1/(sm))}.$$

Откуда вытекает, что в начальный момент времени скорость роста области полностью поврежденного материала стремится к бесконечности, что соответствует мгновенному появлению описываемой области, а с течением времени уменьшается и в пределе ( $t \rightarrow \infty$ ) стремится к нулю, что легко объясняется, так как рассматриваемая трещина является стационарной.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Трещина является неподвижной до тех пор, пока на некотором расстоянии  $x_c$  от вершины трещины сплошность (поврежденность) не достигнет своего критического значения (в данном случае  $\psi = 0$ ), после чего трещина увеличит свою длину (прорастет) на расстояние, равное  $R(0)\tilde{C}^{-1/s}(At)^{-1/(sm)}$  в соотношении (4.66). Далее трещина останавливается, если не выполнено условие  $\psi = 0$  на расстоянии  $x_c$ .



**Библиографический список**

- [1] Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести// ФХММ. 1992. Т. 2. №. 1. С. 5-11.
- [2] Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1995. №. 3. С. 160-166.
- [3] Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. Самара.: Изд-во "Самарский Университет", 2001. 632 с.
- [4] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
- [5] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести//Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26-31.
- [6] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [7] Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения/ Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
- [8] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [9] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения/ Разрушение (под ред. Г. Либовица). Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 204-335.
- [10] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [11] Bui H. D. Mecanique de la Rupture Fragile. Paris: Masson, 1978. 216 pp.
- [12] Cherepanov G. P. Mechanics of brittle fracture. N. Y.: McGraw Hill, 1979. 950 p.
- [13] Hayhurst D. R., Leckie F. A. In: Mechanical Behavior of Materials, Proceeding of ICM4. J. Carlsson and Ohlson, Eds., Pergamon Press, Oxford. 1984. V. 2. P. 1195-1212.
- [14] Hui C. Y., Riedel H. The asymptotic stress and strain fields near the tip of a growing crack under creep conditions// Int. J. of Fracture. 1981. V. 17. P. 409-425.

- [15] Hui C. Y. The mechanics of self-similar crack growth in an elastic power-law creeping material// *Int. J. Solids Structures*. 1986. V. 22. No. 4. P. 357-372.
- [16] Hult J. A. H., McClintock F. Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear// *Proc. 9th Int. Congress on Applied Mechanics*. 1956. V. 8. P. 51-58.
- [17] Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material// *J. Mech. Phys. Solids*. 1968. V. 16. P. 13-31.
- [18] Jin Z. H., Batra R. C. Crack shielding and material deterioration in damaged materials: an antiplane shear fracture problem//*Arch. of Appl. Mech*. 1998. No. 68. P. 247-258.
- [19] Kachanov L. M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Dordrecht, Boston: Martinus Nijhoff, 1986. 135 pp.
- [20] Lu M., Lee S. B. Eigenspectra and order of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium // *Int. J. of Fracture*. 1998. V. 92. P. 55-70.
- [21] Murakami S. Mechanical modeling of material damage// *J. Appl. Mech*. 1988. V. 55. No. 2. P. 280-286.
- [22] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth// *Int. J. Solids Structures*. 2000. No. 37. P. 6203-6220.
- [23] Rice J. R. A Path Independent Integral and the Approximate of Strain Concentration by Notches and Cracks// *Trans. ASME. J. Appl. Mech*. 1968. No. 35. P. 379-386.
- [24] Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material// *J. Mech. Phys. Solids*. 1968. V. 16. P. 1-12.
- [25] Riedel H., Rice J. R. Tensile crack in creeping solids/ In: *Fracture Mechanics. Twelfth Conference ASTM STP 700*. 1980. P. 112-130.
- [26] Riedel H. *Fracture at High Temperature*. Berlin: Springer, 1987. 418 pp.
- [27] Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics// *Eng. Frac. Mech*, 1995. V. 50. No. 1. P. 131-141.
- [28] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage// *Int. J. of Fracture*. 2001. V. 108. P. 383-395.

## Оглавление

	Введение . . . . .	3
1	<b>Автомодельное решение задачи о трещине типа III в связанной постановке (связка ползучесть – поврежденность)</b>	13
1.	Автомодельная переменная в задаче о росте трещины в среде с поврежденностью . . . . .	13
2.	Автомодельное решение связанной задачи антиплоского сдвига пространства с полубесконечной трещиной . . . . .	16
3.	Метод разложения по собственным функциям (при больших значениях $R$ ). . . . .	18
2	<b>Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью</b>	32
1.	Основные уравнения . . . . .	32
2.	Асимптотическое решение задачи . . . . .	35
3	<b>Асимптотика дальнего поля напряжений в задаче о росте трещины нормального отрыва в условиях ползучести в среде с поврежденностью</b>	41
1.	Основные уравнения . . . . .	41
2.	Асимптотическое решение задачи . . . . .	46
4	<b>Автомодельное решение задачи о трещине типа I в связанной постановке (связка ползучесть – поврежденность)</b>	60
1.	Основные уравнения . . . . .	60
2.	Автомодельное решение . . . . .	63
3.	Асимптотическое решение задачи . . . . .	65
3.1.	Плоское деформированное состояние . . . . .	65
3.2.	Плоское напряженное состояние . . . . .	74
4.	Оценка скорости роста области полностью поврежденного материала . . . . .	88
	Библиографический список . . . . .	89

Научное издание

Степанова Лариса Валентиновна  
Федина Мария Ефимовна

**СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ  
МЕХАНИКИ ТРЕЩИН**

*Учебное пособие*

*Публикуется в авторской редакции*

Компьютерная верстка, макет М.Е. Фединой

Подписано в печать 02.03.06. Гарнитура «Times New Roman». Формат 60x84/16.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Объем 5,35 усл. печ. л., 5,75 уч. -изд. л. Тираж 100 экз. Заказ № 406.

Издательство «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Ак. Павлова, д.1.

Отпечатано ООО «Универс-групп»