МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. РОМАНЕНКО

СИСТЕМЫ И СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 23.03 01 Технология транспортных процессов

САМАРА
Издательство Самарского университета
2021

УДК 338(075)
ББК 39.18я7
Р 691

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. М. И. Г е р а с ь к и н;
д-р экон. наук, проф. В. А. Х а й т б а е в

Романенко, Владимир Алексеевич
Р 691 **Системы и сети массового обслуживания:** учебное пособие / *В.А. Романенко*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 68 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1631-4

В пособии рассмотрены типы марковских систем массового обслуживания, получивших широкое применение при решении задач транспорта, в том числе, воздушного. Более детально описаны системы с отказами и с ожиданием в очереди, как ограниченной, так и неограниченной, длины. Обзорно даны системы с «взаимопомощью» между каналами, замкнутые системы, а также экспоненциальные сети массового обслуживания. Предварительно изложены модели входящих в обслуживающие системы потоков требований и процесса обслуживания.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 23.03.01 Технология транспортных процессов (уровень бакалавриата).

Подготовлено на кафедре организации и управления перевозками на транспорте Самарского университета.

УДК 338(075)
ББК 39.18я7

ISBN 978-5-7883-1631-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Системы и сети массового обслуживания являются объектами изучения теории массового обслуживания (ТМО) – одного из бурно развивающихся разделов теории вероятностей. В качестве систем массового обслуживания (СМО) и состоящих из них сетей массового обслуживания (СеМО) рассматриваются разнообразные системы, предназначенные для обслуживания массового потока требований случайного характера. К настоящему времени разработаны относительно простые математические модели, позволяющие изучать многие внешне различающиеся реально протекающие процессы обслуживания на транспорте, в промышленном производстве, образовании, медицине, военном деле, торговле, телефонии, компьютерных сетях и т.д. Конечная цель развиваемых в ТМО методов состоит в отыскании рациональных структуры и параметров обслуживающей системы, организации обслуживания, обеспечивающих заданное его качество.

Становление ТМО было вызвано интересом к математическим задачам телефонии датского инженера А. К. Эрланга, первые публикации которого относятся к началу 20 века. Теоретической базой ТМО послужила теория случайных процессов, основоположником которой явился А. А. Марков. В середине 20 века ТМО получила дальнейшее развитие в работах К. Пальма, Ф. Поллачека, А. Я. Хинчина, которому принадлежит сам термин «ТМО». Значительный вклад в изучение СМО и СеМО внесли Б. В. Гнеденко, Д. Кендэлл, А. А. Боровков и другие.

В пособии рассмотрены типы марковских СМО, получивших широкое применение при решении задач транспорта, в том числе, воздушного. Более детально описаны СМО с отказами и с ожиданием в очереди, как ограниченной, так и неограниченной, длины. Обзорно даны СМО с «взаимопомощью» между каналами, замкнутые СМО, а также экспоненциальные СеМО. Предварительно рассмотрены модели входящих в СМО потоков требований и процесса обслуживания.

Содержание пособия соответствует требованиям рабочей программы по дисциплине «Теория массового обслуживания», которая изучается студентами, обучающимися по направлению подготовки 23.03.01 Технология транспортных процессов.

1 ВВЕДЕНИЕ В ТМО

1.1 Основные понятия ТМО

ТМО – раздел теории вероятностей, изучающий СМО.

СМО – системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы на выполнение каких-либо видов услуг, а, с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов.

Каждая СМО включает некоторое число обслуживающих устройств – ***каналов (приборов, линий) обслуживания***.

На вход СМО поступает один или несколько ***потоков запросов*** (заявок, требований, клиентов), требующих однотипного обслуживания.

Основные элементы СМО:

1) входящий поток требований;

2) очередь;

3) каналы обслуживания;

4) выходящий поток обслуженных требований.

Структурная схема СМО представлена на рис. 1.

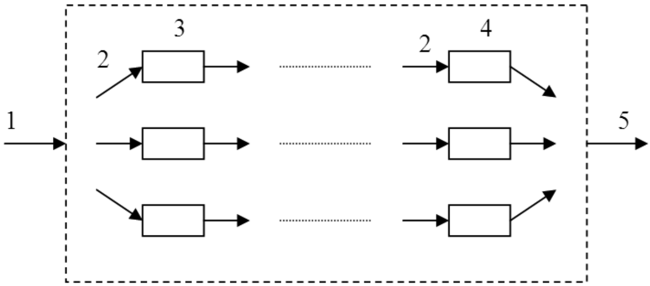

Рис. 1. Схема СМО:
1 – входящий поток; 2 – очереди на обслуживание;
3 – обслуживающие аппараты 1-й фазы;
4 – обслуживающие аппараты n-й фазы; 5 – выходящий поток

Если часть требований, поступивших в систему, по каким-либо причинам не проходят обслуживания, то они образуют выходящий поток необслуженных требований.

Как правило, момент поступления очередного требования и длительность его обслуживания точно не заданы и представляют собой случайные величины.

Случайный характер потока требований и времени их обслуживания приводит к неравномерной загрузке каналов и образованию очередей.

Период от момента поступления требования в СМО и до начала обслуживания называется ***временем ожидания обслуживания***.

Время ожидания обслуживания в совокупности с временем обслуживания составляет ***время пребывания требования в системе***.

Примеры СМО:

1. Функционирование аэропорта; требования – прилетающие и убывающие пассажиры.

2. Функционирование ВПП аэродрома, требования – воздушные суда, требующие посадки или взлета.

3. Автоматизированные информационные системы; требования – запросы на получение информации.

4. Агентства по продаже билетов; требования – пассажиры.

5. Справочная телефонная служба; требования – запросы на получение справочной информации.

6. Работа ЭВМ в режиме разделения времени; требования – программы, обрабатываемые ЭВМ.

Для ***полного описания СМО*** необходимо задать:

1) Модель входящего потока требований, включающую вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и количество требований в каждом очередном поступлении (могут поступать как единичные, так и групповые требования).

2) Дисциплину обслуживания – принцип, в соответствии с которым поступающие в систему требования выбираются из очереди для обслуживания. Например:

– первым пришел – первым обслужился;

– последним пришел – первым обслужился;

– случайный отбор заявок;

– отбор заявок по критерию приоритетности;

– ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания.

3) Механизм обслуживания, включающий вероятностное распределение продолжительности обслуживания, количество одновременно обслуживаемых требований, вероятность выхода из строя обслуживающего аппарата и т.п.

СМО обладает определенной эффективностью функционирования, позволяющей ей справляться с потоком заявок. Эффективность зависит от параметров СМО:

– характера потока заявок,

– числа каналов обслуживания,

– производительности каналов обслуживания,

– правил организации работы.

Цель ТМО – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Для достижения этой цели ставятся задачи ТМО, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее параметров.

1.2 Показатели эффективности функционирования СМО

В качестве характеристик эффективности функционирования СМО используются показатели, распределенные по трем группам.

1. Показатели эффективности использования СМО.

   1.1. Абсолютная пропускная способность СМО – среднее число требований, которое СМО может обслужить в единицу времени.

   1.2. Относительная пропускная способность СМО – отношение среднего числа требований, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу требований, поступивших за это же время.

   1.3. Коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием требований, и т.п.

2. Показатели качества обслуживания требований.

   2.1. Среднее время ожидания требованием в очереди.

   2.2. Среднее время пребывания требования в СМО.

   2.3. Вероятность отказа требованию в обслуживании.

2.4. Вероятность того, что поступившее требование немедленно будет принято к обслуживанию.

2.5. Закон распределения времени ожидания требования в очереди.

2.6. Закон распределения времени пребывания требования в СМО.

2.7. Среднее число требований, находящихся в очереди.

2.8. Среднее число требований, находящихся в СМО, и т.п.

3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО-потребитель», где «потребитель» – вся совокупность заявок или некий их источник. Например, доходы или прибыль от использования СМО.

1.3 Классификация СМО

СМО классифицируются по следующим признакам:

1) число фаз обслуживания:

– однофазовые;

– многофазовые.

2) число каналов обслуживания:

– одноканальные;

– многоканальные. В свою очередь подразделяются на:

– полнодоступные – имеющие однородные (с одинаковыми характеристиками) каналы;

– неполнодоступные – имеющие неоднородные каналы.

3) тип входящего потока требований:

– с простейшим (пуассоновским) потоком;

– с входящим потоком иного типа.

4) вероятностные характеристики времени обслуживания:

– со случайным временем обслуживания;

– с фиксированным постоянным временем обслуживания.

5) характер случайного процесса, происходящего в СМО:

– Марковские – СМО, в которых входящий поток требований является пуассоновским и время обслуживания подчинено показательному закону (позволяют легко описать и построить математическую модель, имеют простые решения)

– Немарковские СМО – как правило, требуют применения статистического моделирования с использованием ЭВМ.

6) наличие возможности ожидания обслуживания:

– с отказами, в которых заявка, поступившая в СМО в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает очередь;

– с ожиданием, в которых заявка становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов. В свою очередь подразделяются на СМО с:

– ограниченным ожиданием. Ограничения по длине очереди или по времени ожидания в очереди;

– неограниченным ожиданием.

7) наличие приоритетов обслуживания:

– без приоритетов;

– с приоритетами.

8) наличие ограничений потока требований:

– замкнутые – СМО с ограниченным потоком требований, в которых обслуженные требования могут возвращаться в СМО;

– открытые.

Используется ***система обозначений СМО***, введенная ***Д. Кендэллом***, в соответствии с которой СМО обозначаются как

$$A\ /\ B\ /\ n\ /\ R,$$

где A – распределение интервалов времени между требованиями, B – распределение времени обслуживания, n – число каналов, R – предельное число требований в очереди или в системе (если $R \to \infty$, то R не указывают).

Обозначения некоторых типов распределений:

M – показательное;

E_k – эрланговское порядка k;

D – детерминированное (постоянное).

Пример. $M\ /\ M\ /\ 1$ – одноканальная СМО с простейшим входящим потоком, показательно распределенным временем обслуживания и неограниченной очередью.

2 ВХОДЯЩИЕ ПОТОКИ ТРЕБОВАНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

2.1 Входящий поток требований. Типы потоков

Математическое описание любой СМО начинается с описания потока требований, который рассматривается как поток событий.

Поток событий – последовательность однородных событий, следующих одно за другим через какие-то, вообще говоря, случайные интервалы времени. ***Однородные события*** – события, различающиеся только моментами появления. Примеры потоков событий: последовательность вызовов на телефонной станции, последовательность ВС, входящих в воздушное пространство диспетчерского пункта, поток прибывающих в аэропорт пассажиров, поток неисправностей в ЭВМ.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ – моменты наступления событий, $t_k \geq t_{k-1}$, $k \geq 1$. Поток событий считается заданным, если задана последовательность интервалов времени между последовательными моментами наступления событий – $\{T_k = t_k - t_{k-1},\ k \geq 1,\ t_0 = 0\}$.

Регулярный поток – поток, в пределах которого события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени: $T_k = const$, $\forall k \geq 1$.

Физически самый простой поток (пример, движение заготовок по конвейеру). Сложен для математического исследования.

Простейший поток – поток, удовлетворяющий требованиям стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Поток ***стационарный***, если вероятность попадания некоторого числа событий на участок времени Δt зависит только от длины участка и не зависит от его расположения на оси временной оси:

$$P_k(t, t+\Delta t) = P_k(\Delta t),$$

где $P_k(\Delta t)$ – вероятность попадания k событий на интервал Δt.

Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным. Реальные потоки событий являются в действительности стационарными лишь на ограниченных участках времени.

Поток ***ординарный***, если вероятность попадания на элементарный участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события

$$P_{k>1}(t,t+\Delta t) << P_{k=1}(t,t+\Delta t).$$

Ординарность означает, что события в потоке поступают поодиночке, а не группами.

Отсутствие последействия – свойство потока, состоящее в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени. Это свойство означает, что события появляются независимо друг от друга.

Нестационарный пуассоновский поток – поток ординарный, без последействия, но не стационарный.

Поток Эрланга – поток, образующийся путем просеивания простейшего потока. Если в простейшем потоке сохранить каждую k-ю точку, удалив все остальные, то образуется поток Эрланга.

Большинство простых аналитических моделей СМО получено при наличии простейшего потока требований.

2.2 Вероятностное распределение числа требований в простейшем потоке

Найдем для простейшего потока ***распределение вероятностей поступления в СМО того или иного числа*** $X(t)$ ***требований за некоторый интервал времени t***.

Обозначим $P\{X(t)=k\}=V_k(t)$, где $k=0,1,2,\ldots$. Здесь $V_k(t)$ – вероятность того, что за промежуток времени $(0,t)$ при $t>0$ поступит k требований. Таким образом, необходимо найти систему функций $V_0(t), V_1(t), V_2(t), \ldots$.

Введем малый промежуток времени Δt, такой, что вероятности попадания двух и более требований на Δt ничтожно малы:

$$V_k(\Delta t) \approx 0, \quad k=2,3,\ldots.$$

Вероятность отсутствия требований в течение Δt определяется в силу условия нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} V_k(\Delta t)=1$, как

$$V_0(\Delta t) \approx 1-V_1(\Delta t). \qquad (2.2.1)$$

Чтобы найти вероятность $V_1(\Delta t)$ попадания одного требования на Δt, используем следующую теорему.

Теорема (о вероятности поступления одного требования на элементарный интервал времени для стационарного потока). Для любого стационарного потока существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_1(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda > 0,$$

где λ – параметр потока (интенсивность потока, т.е. число требований в единицу времени). Откуда

$$V_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t. \tag{2.2.2}$$

Найдем величины $V_k(t+\Delta t), \quad k = 0,1,2,...$.

Для определения $V_0(t+\Delta t)$ используем теорему умножения вероятностей независимых событий, приведенную в приложении 1. В течение времени $t+\Delta t$ не поступит ни одно требование, если ни одно требование не поступит ни в течение *t*, ни в течение Δt:

$$V_0(t+\Delta t) = V_0(t)V_0(\Delta t) \approx V_0(t)(1-\lambda\Delta t). \tag{2.2.3}$$

Для определения $V_k(t+\Delta t),\ k>0$ используем теорему полной вероятности, формулировка которой также приведена в приложении 1. Напомним, что в соответствии с этой теоремой, если имеется полная группа несовместных случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, то для любого случайного события *B*, которое может произойти с одним из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, справедлива формула

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

В нашем случае: событие *B* – за время $t+\Delta t$ в СМО поступило *k* требований; событие A_i – за время *t* в СМО поступило *i* требований $0<i<k$. Тогда с учетом (2.2.1) и (2.2.2):

$$\begin{aligned} V_k(t+\Delta t) &= V_k(t)V_0(\Delta t) + V_{k-1}(t)V_1(\Delta t) + V_{k-2}(t)V_2(\Delta t) + \ldots \approx \\ &\approx V_k(t)(1-\lambda\Delta t) + V_{k-1}(t)\lambda\Delta t. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Разделим (2.2.3) и (2.2.4) на Δt и преобразуем их к виду:

$$\frac{V_0(t+\Delta t)-V_0(t)}{\Delta t}\approx -\lambda V_0(t),$$

$$\frac{V_k(t+\Delta t)-V_k(t)}{\Delta t}\approx -\lambda V_k(t)+\lambda V_{k-1}(t), \quad k\geq 1.$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем:

$$\frac{dV_0(t)}{dt}=-\lambda V_0(t), \tag{2.2.5}$$

$$\frac{dV_k(t)}{dt}=-\lambda V_k(t)+\lambda V_{k-1}(t), \quad k\geq 1. \tag{2.2.6}$$

Пусть к начальному моменту $t=0$ не поступило ни одного требования:

$$V_0(0)=1, \tag{2.2.7}$$

$$V_k(0)=0, \quad k=1,2,\ldots. \tag{2.2.8}$$

Решим СДУ (2.2.5), (2.2.6) с учетом начальных условий (2.2.7), (2.2.8). Для уравнения (2.2.5) разделим переменные и проинтегрируем, учитывая начальное условие (2.2.7). Подробно запишем выкладки:

$$\frac{dV_0(t)}{V_0(t)}=-\lambda dt, \qquad \int_1^{V_0}\frac{dV_0(t)}{V_0(t)}=-\lambda\int_0^t dt, \qquad \ln V_0-\ln 1=-\lambda t, \qquad \ln V_0=-\lambda t.$$

В результате получаем решение уравнения (2.2.5) в виде

$$V_0(t)=e^{-\lambda t}. \tag{2.2.9}$$

Для решения уравнений (2.2.6) используем подстановку

$$V_k(t)=a(t)b(t). \tag{2.2.10}$$

Возьмем производную (2.2.10) по *t*:

$$\frac{dV_k(t)}{dt}=\frac{da(t)}{dt}b(t)+a(t)\frac{db(t)}{dt}. \tag{2.2.11}$$

Из уравнения (2.2.6) с учетом (2.2.10) и (2.2.11) получим

$$\frac{da(t)}{dt}b(t)+a\left(\frac{db(t)}{dt}+\lambda b(t)\right)=\lambda V_{k-1}(t). \qquad (2.2.12)$$

Пусть $b(t)$ такое, что

$$\frac{db(t)}{dt}+\lambda b(t)=0, \qquad (2.2.13)$$

тогда, решая (2.2.13), последовательно получаем

$$\frac{db(t)}{b(t)}=-\lambda dt, \quad \int\frac{db(t)}{b(t)}=-\lambda\int dt, \quad \ln b(t)=-\lambda t+\ln C_1, \quad b(t)=C_1e^{-\lambda t}.$$

Пусть C_1=1 (при этом условие (2.2.13) выполняется), тогда

$$b(t)=e^{-\lambda t}. \qquad (2.2.14)$$

Подставим (2.2.13) и (2.2.14) в (2.2.12), получим

$$\frac{da(t)}{dt}e^{-\lambda t}=\lambda V_{k-1}(t), \qquad \int da(t)=\int_0^t e^{\lambda t}\lambda V_{k-1}(t)dt,$$

откуда

$$a(t)=\lambda\int_0^t e^{\lambda t}V_{k-1}(t)dt+C_2. \qquad (2.2.15)$$

Подставим (2.2.14) и (2.2.15) в (2.2.10). Будем считать $C_2=0$, для того чтобы выполнялось начальное условие (2.2.8). Получим

$$V_k(t)=a(t)b(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda t}V_{k-1}(t)dt. \qquad (2.2.16)$$

Последовательно решая соотношение (2.2.16) для $k=1,2,\ldots$ находим:

$$V_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda t}V_0(t)dt=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda t}e^{-\lambda t}dt=\lambda te^{-\lambda t},$$

$$V_2(t)=\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}, \qquad V_3(t)=\frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{6}, \quad \ldots$$

$$V_k(t)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \qquad (2.2.17)$$

Итак, для простейшего потока вероятность поступления того или иного числа требований подчиняется закону Пуассона.

2.3 Проверка потока требований на принадлежность к простейшим

Большинство моделей ТМО справедливы только в случае простейшего входящего потока требований, поэтому перед использованием этих моделей необходимо проверить поток на его принадлежность к простейшим. Для выполнения проверки может быть использован, например, критерий согласия Пирсона χ^2. Проверка по этому критерию выполняется следующим образом.

Интервал времени, в течение которого поток предполагается стационарным, разбивается на промежутки Δt и подсчитывается число требований, фактически поступивших в каждый промежуток. Подсчитывается фактическое число промежутков n_k с одинаковым количеством требований, равным k, и общее число промежутков $n=\sum_k n_k$. По полученным данным определяется приближенное (выборочное) значение интенсивности потока:

$$\lambda^* = \frac{1}{n\Delta t}\sum_k k n_k .$$

По закону Пуассона вычисляется вероятность числа требований k в течение Δt:

$$P_k(\Delta t)=\frac{(\lambda^*\Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda^*\Delta t} .$$

С использованием теоретического числа промежутков nP_k, соответствующего закону Пуассона, вычисляется величина χ^2:

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(n_k - nP_k)^2}{nP_k}.$$

Величина χ^2 сравнивается с критическим значением квантиля χ^2-распределения – $K^{-1}(p,m)$. Если $\chi^2 < K^{-1}(p,m)$ – гипотеза принимается. В случае $\chi^2 \ge K^{-1}(p,m)$ гипотеза отвергается. $K^{-1}(p,m)$ определяется по таблице квантилей χ^2-распределения (табл. П1.1) в зависимости от доверительной вероятности *p* и числа степеней свободы *m*. Для определения *m* используется формула

$$m = l - r - 1,$$

где *l* – количество величин *k* (классов), *r* – число параметров распределения. Распределение Пуассона полностью определяется одним параметром, поэтому $r = 1$. Значением вероятности *p* задаются. Как правило, принимают $p = 0.99,\ \ 0.95$ и 0.9 (наиболее жесткое).

2.4 Вероятностное распределение промежутка времени между требованиями в простейшем потоке

Формула (2.2.17) позволяет получить ***распределение вероятностей промежутка времени T между двумя последовательными моментами поступления требований***.

При $k = 0$ вероятность $V_0(t)$ по определению равна вероятности $P(T > t)$ того, что СВ *T* превзойдет *t*:

$$V_0(t) \equiv P(T > t).$$

Откуда функция распределения вероятностей промежутка *T*

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P(T > t) = 1 - V_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Плотность распределения вероятностей

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Таким образом, длительность интервала между двумя последовательными моментами поступлений требований в простейшем потоке имеет показательное распределение.

3 ПРОЦЕСС ОБСЛУЖИВАНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

3.1 Характеристики механизма обслуживания

Основные характеристики обслуживания:

1) ***Дисциплина обслуживания*** – принцип, определяющий порядок выбора требований для обслуживания из совокупности требований, уже поступивших и находящихся в очереди. Примеры дисциплин обслуживания приведены в п.1.1.

2) ***Пропускная способность СМО*** – максимальное число требований, которые могут обслуживаться одновременно. Например, для n-канальной СМО пропускная способность равна n.

3) ***Доступность обслуживания*** – ограничения, снижающие число требований, которые могут обслуживаться одновременно, по сравнению с полной пропускной способностью системы. СМО может быть не полностью доступна, если некоторые из каналов периодически отключаются, или работают не так как другие.

4) ***Длительность обслуживания*** – промежуток времени, затраченный на обслуживание отдельного требования $t_{об}$. Используемые вероятностные распределения $t_{об}$:

а) постоянная длительность обслуживания: $t_{об} = const$.

б) показательное распределение $t_{об}$

Если плотность распределения $t_{об}$ можно с достаточной точностью описать функцией вида

$$f\left(t_{об}\right) = \nu e^{-\nu t_{об}},$$

то это приводит к значительному упрощению моделей СМО.

Для показательного распределения

$$M\left[t_{об}\right] = \frac{1}{\nu},$$

где ν – параметр распределения, смысл которого определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{M\left[t_{об}\right]}.$$

Таким образом ν – интенсивность обслуживания.

Показательное распределение используется в случаях, когда с ростом времени обслуживания, доля заявок, требующих таких затрат времени, снижается.

в) распределение Эрланга.

Используется, когда процесс обслуживания можно разбить (пусть условно) на несколько этапов, продолжительность каждого из которых подчинена показательному распределению.

3.2 Вероятностные характеристики времени обслуживания

Показательно распределенное время обслуживания обладает одним важным свойством. Докажем, что при показательном законе распределения времени обслуживания закон распределения оставшейся части времени обслуживания не зависит от того, сколько оно уже длится.

Введем следующие обозначения:

$F(t) = P(t_{об} < t)$ – функция распределения времени обслуживания $t_{об}$.

$P_0(t) = P(t_{об} \geq t)$ – вероятность того, что время обслуживания $t_{об}$ будет не меньше *t*.

Очевидно $P(t_{об} < t) + P(t_{об} \geq t) = 1$, поэтому

$$P_0(t) = 1 - P(t_{об} < t) = 1 - F(t). \qquad (3.2.1)$$

Для показательного закона времени обслуживания

$$F(t) = 1 - e^{-\nu t}.$$

Из (3.2.1) с учетом последней формулы имеем

$$P_0(t) = e^{-\nu t}. \qquad (3.2.2)$$

Введем $P_T(t)$ – вероятность того, что обслуживание, которое уже длилось в течение времени *T*, продлится еще не менее *t* (условная вероятность).

По теореме умножения вероятностей, вероятность того, что обслуживание продлится не меньше чем *T* + *t*, равна произведению вероятности того, что обслуживание продлится не меньше чем *T*, умноженной на вероятность того, что оно продлится не менее *t*, при условии, что оно уже длится в течение *T*, т.е.

$$P_0(T+t) = P_0(T) P_T(t). \tag{3.2.3}$$

С другой стороны в соответствии с (3.2.2)

$$P_0(T+t) = e^{-\nu(T+t)}. \tag{3.2.4}$$

Приравняем правые части (3.2.3) и (3.2.4):

$$P_0(T) P_T(t) = e^{-\nu(T+t)},$$

откуда получаем

$$P_T(t) = \frac{1}{P_0(T)} e^{-\nu(T+t)} = \frac{1}{e^{-\nu T}} e^{-\nu(T+t)} = e^{\nu T} e^{-\nu(T+t)} = e^{-\nu t}.$$

Таким образом $P_T(t) = P_0(t)$, следовательно закон распределения не зависит от длины промежутка времени $(0, T)$, в течение которого уже длится обслуживание данного требования.

4 СИСТЕМА С ОТКАЗАМИ

4.1 Вероятности состояний СМО с отказами

СМО с отказами (или потерями) – системы, в которых требования, поступившие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ, покидают систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвуют. Рассматривается СМО из n однотипных аппаратов с отказами (примеры: автоматическая телефонная станция, камера хранения аэровокзала). Каждый аппарат может одновременно обслуживать только одно требование. Время обслуживания одного требования одним аппаратом подчинено показательному закону с параметром ν, т.е. вероятность того, что время обслуживания $t_{об}$ меньше t, равна

$$P(t_{об} < t) = F(t) = 1 - e^{-\nu t}\ .$$

В СМО поступает пуассоновский (не обязательно простейший) поток требований с параметром λ – математическим ожиданием числа требований за единицу времени.

Основные показатели функционирования СМО с отказами:

– вероятность отказа, т. е. вероятность того, что в момент поступления очередного требования все обслуживающие аппараты заняты. Характеризует полноту обслуживания входящего потока;

– среднее число аппаратов, занятых обслуживанием. Характеризует степень загрузки обслуживающей системы.

Цель – вывод формул для вычисления основных показателей функционирования СМО.

СМО с отказами может находиться в одном из $n + 1$ состояний, обозначаемых S_i:

S_0 – все приборы свободны, требований в системе нет;

S_1 – один прибор занят обслуживанием требования, остальные свободны;

S_k – k приборов заняты, остальные свободны;

S_n – все n приборов заняты обслуживанием.

В других состояниях система находиться не может, т.к. они предполагают наличие очереди.

Для анализа СМО используется ***граф состояний*** – геометрическая схема, изображающая все возможные состояния СМО и ее вероятностные переходы из одного состояния в другое. По размеченному графу состояний можно составить СДУ, описывающих вероятности этих состояний – уравнения Колмогорова.

Граф состояний СМО с отказами изображен на рис. 2.

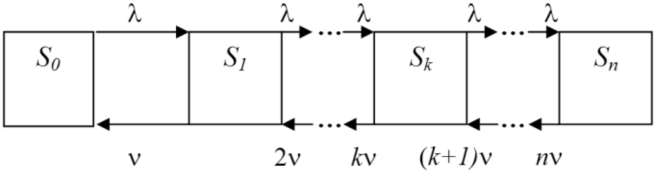

Рис. 2. Граф состояний СМО с отказами

В графе квадраты – возможные состояния СМО, стрелки – направления возможных переходов.

СМО не может «перескакивать» через одно и более состояний т.к. входящий поток ординарный, т.е. требования появляются в СМО и покидают ее поодиночке.

Интенсивность входящего потока требований равна λ для всех переходов СМО из одного состояния в другое.

Интенсивность обслуживания равна величине ν, умноженной на число занятых приборов. Предельное значение интенсивности обслуживания $n\nu$.

Число уравнений, описывающих вероятности состояний СМО (уравнений Колмогорова), равно числу состояний СМО.

В левой части каждого уравнения записывается производная вероятности состояния по времени.

Правая часть уравнения содержит столько членов, сколько стрелок переходов связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член правой части уравнения имеет знак минус. Если стрелка направлена в состояние, то – знак плюс.

Каждый член правой части уравнения равен произведению интенсивности потока или интенсивности обслуживания, соответствующих данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний СМО с отказами в соответствии с графом записывается в виде:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - (\lambda + \nu)P_1(t) + 2\nu P_2(t);$$

. . . .

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + \nu k)P_k(t) + \nu(k+1)P_{k+1}(t), \qquad (4.1.1)$$

. . . .

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \nu n P_n(t).$$

Сократим запись:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t),$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + \nu k)P_k(t) + \nu(k+1)P_{k+1}(t), \quad 1 \le k \le n-1, \qquad (4.1.2)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \nu n P_n(t).$$

Таким образом получена СДУ Колмогорова (Эрланга).

Начальные условия для интегрирования этой системы линейных дифференциальных уравнений при $t = 0$:

$$P_0(0) = 1; \quad P_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.1.3)$$

Найти аналитическое решение этой системы в явном виде при большом n невозможно. Исследование поведения СМО с отказами проводится на ЭВМ путем численного решения системы уравнений (4.1.2) с начальными условиями (4.1.3). Однако этот метод требует длительных машинных расчетов и неудобен для качественного анализа поведения СМО.

4.2 Формулы Эрланга для стационарного режима СМО с отказами

Для вывода аналитического решения уравнений Колмогорова рассмотрим простейший частный случай. Пусть $n = 2$, $\lambda = 2$, $\nu = 1$, в этом случае СДУ Колмогорова (Эрланга) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P_0(t) = -2P_0(t) + P_1(t),\\
&\frac{d}{dt}P_1(t) = 2P_0 - 3P_1(t) + 2P_2(t),\\
&\frac{d}{dt}P_2(t) = 2P_1(t) - 2P_2(t).
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Учитывая, что $P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)=1$ и, следовательно $P_2(t)=1-P_0(t)-P_1(t)$, исключим из второго уравнения (4.2.1) P_2 и отбросим третье уравнение:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P_0(t) = -2P_0(t) + P_1(t),\\
&\frac{d}{dt}P_1(t) = -5P_1(t) + 2.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Решение (4.2.2):

$$\begin{aligned}
&P_0(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t},\\
&P_1(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t},\\
&P_2(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{4}{15}e^{-5t}.
\end{aligned}$$

Графики полученных временных зависимостей представлены на рис. 3.

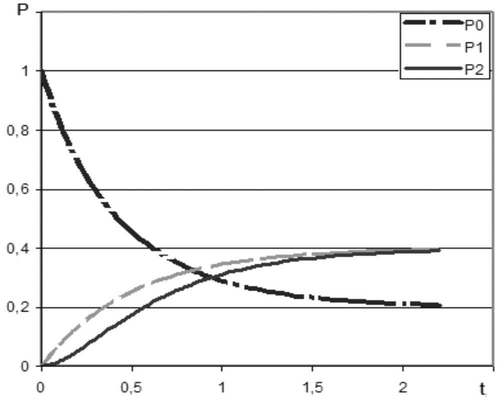

Рис. 3. Временные зависимости вероятностей состояний СМО с отказами

Как следует из полученных зависимостей и хорошо видно на графиках, с момента времени t = 1.8 … 2.0 устанавливается стационарный режим, для которого

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{1}{5}; \quad p_1 = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{2}{5}; \quad p_2 = \lim_{t\to\infty} P_2(t) = \frac{2}{5}. \tag{4.2.3}$$

Решение (4.2.3) – стационарное решение системы (4.2.1), которое соответствует состоянию равновесия СМО, характеризуемому постоянством во времени всех вероятностей ее состояний. Далее вероятности состояний, соответствующие стационарному режиму, принимаются не зависящими от времени и обозначаются строчными буквами $p_0,\ p_1,\ p_2, \ldots$ (в отличие от вероятностей – функций времени $P_0(t),\ P_1(t),\ P_2(t), \ldots$).

Система уравнений Колмогорова (Эрланга) при произвольном n может быть решена аналитически для стационарного состояния, т.е. для случая

$$p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t) = const, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

При этом

$$\frac{d}{dt} P_k(t) = 0.$$

В этом случае СДУ (4.1.2) преобразуется в алгебраическую систему:

$$
\begin{gathered}
0=-\lambda p_0+\nu p_1\,,\\
0=\lambda p_{k-1}-(\lambda+\nu k)p_k+\nu(k+1)p_{k+1},\quad 1\le k\le n-1\,,\\
0=\lambda p_{n-1}-\nu n p_n\,.
\end{gathered}
\tag{4.2.4}
$$

Для упрощения записи разделим каждое уравнение (4.2.4) на ν и обозначим $\alpha=\dfrac{\lambda}{\nu}$, получим

$$
\begin{gathered}
0=-\alpha p_0+p_1\,,\\
0=\alpha p_{k-1}-(\alpha+k)p_k+(k+1)p_{k+1}\,,\\
1\le k\le n-1,\\
0=\alpha p_{n-1}-n p_n\,.
\end{gathered}
\tag{4.2.5}
$$

Выразим все вероятности состояний, последовательно используя уравнения системы (4.2.5), в предположении, что p_0 известно:

$$
\begin{aligned}
&0=-\alpha p_0+p_1,\\
&0=\alpha p_0-(\alpha+1)p_1+2p_2 \quad (k=1),\\
&0=\alpha p_1-(\alpha+2)p_2+3p_3 \quad (k=2),\\
&....,
\end{aligned}
$$

откуда соответственно

$$
\begin{aligned}
&p_1=\alpha p_0,\\
&p_2=\frac{1}{2}\left[-\alpha p_0+(\alpha+1)p_1\right]=\frac{\alpha^2 p_0}{2},\\
&p_3=\frac{1}{3}\left[-\alpha p_1+(\alpha+2)p_2\right]=\frac{\alpha^3 p_0}{6}=\frac{\alpha^3 p_0}{3!},\\
&.\;.\\
&p_k=\frac{\alpha^k p_0}{k!},\qquad k\le n.
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

Для определения p_0 используется условие нормировки:

$$
\sum_{k=0}^{n} p_k=1.
\tag{4.2.7}
$$

Подставляя в (4.2.7) последнее соотношение (4.2.6), получаем:

$$p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}. \tag{4.2.8}$$

Окончательно из (4.2.6) и (4.2.8):

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!}}, \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{4.2.9}$$

Формулы (4.2.9) называются формулами Эрланга. Они дают явное аналитическое решение для стационарного распределения числа требований на обслуживании в СМО с отказами. Формулы Эрланга широко используются при решении задач исследования и оптимизации систем, которые могут рассматриваться как СМО с отказами: аэродромов с одной или несколькими ВПП, телефонных и компьютерных сетей, систем мест стоянки ВС в аэропорту и др.

4.3 Показатели эффективности функционирования СМО с отказами

Показатели качества обслуживания требований:

1. Вероятность отказа очередному требованию в обслуживании, т.е. вероятность того, что в момент поступления очередного требования на обслуживания все приборы будут заняты:

$$p_{отк} = p_n = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}} = p_0 \frac{\alpha^n}{n!}. \tag{4.3.1}$$

2. Вероятность обслуживания очередного требования:

$$p_{об} = 1 - p_{отк}.$$

3. Среднее количество требований, обслуживаемых ($K_{об}$) и находящихся в СМО с отказами (K_C):

$$K_{об} = K_C = N,$$

где N – среднее число занятых обслуживанием приборов.

4. Среднее время пребывания требования в СМО с отказами:

$$T_C = \frac{1}{\lambda} K_C . \qquad (4.3.2)$$

Формула (2.3.2) – формула Литтла, связывающая в предельном установившемся режиме среднее число требований в СМО и среднее время их пребывания в СМО.

Показатели эффективности использования СМО:

5. Среднее число занятых обслуживанием приборов:

$$N = \sum_{k=1}^{n} k p_k = \left[\begin{array}{l}\text{учтем, что из}(4.2.6):\\ p_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} p_0\end{array}\right] = p_0 \sum_{k=1}^{n} k \frac{\alpha^k}{k!} =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{учтем, что}\\ \dfrac{k}{k!} = \dfrac{k}{k \cdot (k-1)!} = \dfrac{1}{(k-1)!}\end{array}\right] = p_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} =$$

$$= p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^{k+1}}{k!} = p_0 \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} = p_0 \alpha \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} - \frac{\alpha^n}{n!} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{учтем, что из }(4.2.8)\text{ и }(4.3.1)\text{, соответственно}:\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{1}{p_0} \quad и \quad p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0\end{array}\right] =$$

$$= p_0 \alpha \left(\frac{1}{p_0} - \frac{p_n}{p_0} \right) = \alpha (1 - p_n).$$

6. Относительная (q) и абсолютная (A) пропускные способности СМО:

$$q = p_{об} = 1 - p_{отк}, \qquad A = \lambda q.$$

7. Коэффициент занятости приборов:

$$\theta_З = \frac{N}{n}.$$

8. Коэффициент простоя приборов:

$$\theta_{пр} = 1 - K_З .$$

Показатель экономической эффективности.

В общем случае величина экономического эффекта E определяется как разность между доходами от использования системы и издержками $G_П$, связанными с ее функционированием. Таким образом, для СМО любого типа:

$$E = p_{об}\lambda cT - G_П , \tag{4.3.1}$$

где c – средний экономический эффект, полученный при обслуживании одного требования, T – рассматриваемый интервал времени, $G_П$ – величина потерь в системе.

В СМО с отказами потери включают:

– расходы на эксплуатацию системы,

– убытки из-за уходов необслуженных заявок из системы,

– потери из-за вынужденных простоев аппаратов.

Таким образом, для СМО с отказами:

$$G_П = \left(q_К N + q_У p_{отк}\lambda + q_{ПК} N_{св}\right)T ,$$

где $q_К$ – стоимость эксплуатации одного прибора в единицу времени, $q_У$ – стоимость убытков в результате ухода требований из СМО в единицу времени, $q_{ПК}$ – стоимость единицы времени простоя прибора, $N_{св}$ – среднее количество свободных приборов:

$$N_{св} = n - N .$$

5 СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ В ОЧЕРЕДИ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ

5.1 Вероятности состояний СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

Рассматривается СМО из n однотипных обслуживающих аппаратов, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования прибором подчиняется показательному закону с параметром ν. Требование, поступившее в СМО в момент, когда все аппараты заняты, не покидает ее, а «становится» в очередь и ждет пока его не обслужит один из освободившихся аппаратов. Число требований, ожидающих обслуживания, ограничено величиной m. Время ожидания не ограничено. На рис. 4 размеченный граф состояний СМО.

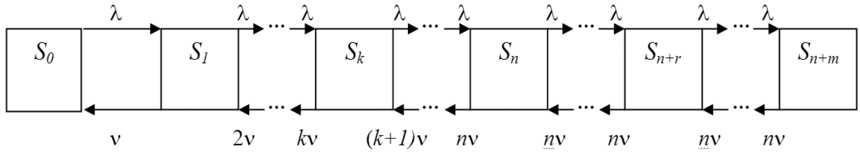

Рис. 4. Граф состояний СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

Состояния СМО:
S_0 – все аппараты свободны;
S_1 – один аппарат занят обслуживанием, остальные свободны;
S_k – k аппаратов заняты, остальные свободны;
S_n – все n аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет;
S_{n+r} – все аппараты заняты, очередь из r требований;
S_{n+m} – все аппараты заняты, m требований в очереди.
СДУ Колмогорова для рассматриваемой СМО:

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t),$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \nu)P_1(t) + 2\nu P_2(t),$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}P_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + (k+1)\nu P_{k+1}(t),$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + n\nu)P_n(t) + n\nu P_{n+1}(t),$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}P_{n+r}(t) = \lambda P_{n+r-1}(t) - (\lambda + n\nu)P_{n+r}(t) + n\nu P_{n+r+1}(t),$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}P_{n+m}(t) = \lambda P_{n+m-1}(t) - n\nu P_{n+m}(t).$$

Сократим запись, обозначив индексом k любое состояние СМО:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t);$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + (k+1)\nu P_{k+1}(t), \quad 1 \le k < n;$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\nu)P_k(t) + n\nu P_{k+1}(t), \qquad n \le k \le n+m\text{-}1; \tag{5.1.1}$$

$$\frac{d}{dt}P_{n+m}(t) = \lambda P_{n+m-1}(t) - n\nu P_{n+m}(t).$$

Начальные условия для интегрирования СДУ Колмогорова при $t = 0$:

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k = 1,\, 2, \ldots, n+m \ .$$

5.2 Стационарное решение уравнений Колмогорова для СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

Найдем аналитическое решение СДУ Колмогорова в предельном установившемся режиме, для которого

$$\lambda(t) = const; \quad \nu(t) = const; \quad n(t) = const \ ,$$

и

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k = const\,, \quad k = 0,1,2,\ldots,n+m\,.$$

В этом режиме СДУ преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&0 = -\lambda p_0 + \nu p_1;\\
&0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\nu)p_k + (k+1)\nu p_{k+1}, \quad 1 \le k < n;\\
&0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\nu)p_k + n\nu p_{k+1}, \qquad n \le k \le n+m\text{-}1;\\
&0 = \lambda p_{n+m-1} - n\nu p_{n+m}.
\end{aligned} \qquad (5.2.1)$$

Уравнения (5.2.1) совместно с нормировочным условием

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1\,, \qquad (5.2.2)$$

позволяют вычислить предельные вероятности, выразив их через p_0.

Перепишем 2-е и 3-е уравнения (5.2.1) в виде:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda p_{k-1} - \lambda p_k - k\nu p_k + (k+1)\nu p_{k+1} =\\
&= [\lambda p_{k-1} - k\nu p_k] - [\lambda p_k - (k+1)\nu p_{k+1}], \quad 1 \le k < n;
\end{aligned} \qquad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda p_{k-1} - \lambda p_k - n\nu p_k + n\nu p_{k+1} =\\
&= [\lambda p_{k-1} - n\nu p_k] - [\lambda p_k - n\nu p_{k+1}], \qquad n \le k \le n+m\text{-}1.
\end{aligned} \qquad (5.2.4)$$

Обозначим в (5.2.3) $z_k = \lambda p_{k-1} - k\nu p_k$ (первые квадратные скобки), тогда $z_{k+1} = \lambda p_k - (k+1)\nu p_{k+1}$ (вторые квадратные скобки).

Аналогично, в (5.2.4) $z_k = \lambda p_{k-1} - n\nu p_k$ (первые квадратные скобки), тогда $z_{k+1} = \lambda p_k - n\nu p_{k+1}$ (вторые квадратные скобки).

Используя обозначения

$$z_k = \lambda p_{k-1} - k\nu p_k\,, \quad 1 \le k \le n\,, \qquad (5.2.5)$$

$$z_k = \lambda p_{k-1} - n\nu p_k\,, \quad n \le k \le n+m\,, \qquad (5.2.6)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\nu}\,,$$

преобразуем (5.2.1).

С учетом (5.2.5) при $k=1$ первое уравнение (5.2.1) запишется как

$$z_1 = \lambda p_0 - \nu p_1 = 0 .$$

С учетом (5.2.5) уравнения (5.2.1) для $1 \le k < n$ запишутся в виде

$$z_k - z_{k+1} = 0 , \qquad 1 \le k < n .$$

С учетом (5.2.6) уравнения (5.2.1) для $n \le k \le n+m-1$ запишутся в виде

$$z_k - z_{k+1} = 0 , \qquad n \le k \le n+m-1 .$$

С учетом (5.2.6) при $k = n+m$ последнее уравнение (5.2.1) запишется как

$$z_{n+m} = 0 .$$

Таким образом, система (5.2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} & z_1 = \lambda p_0 - \nu p_1 = 0 , \\ & z_k - z_{k+1} = 0 , \\ & 1 \le k \le n+m-1 , \\ & z_{n+m} = 0 . \end{aligned}$$

Найдем отсюда z_k при любом *k*. Пусть, например, $z_1 = 0$ и $z_1 - z_2 = 0$, тогда $z_2 = 0$ и т.д. Следовательно, $z_k = 0$ при любом *k*.

Таким образом, из выражения (5.2.5) получаем равенство

$$\lambda p_{k-1} = k \nu p_k \quad \text{для} \quad 1 \le k \le n , \tag{5.2.7}$$

а из выражения из (5.2.6) – равенство

$$\lambda p_{k-1} = n \nu p_k \quad \text{для} \quad n \le k \le n+m . \tag{5.2.8}$$

Из (5.2.7) получаем

$$p_1 = \frac{\lambda}{\nu} p_0 = \alpha p_0 ,$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\nu} p_1 = \frac{\alpha}{2} p_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{3\nu} p_2 = \frac{\alpha}{3} p_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\alpha^3 p_0 \text{ и т.д.}$$

То есть при $1 \le k \le n$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0. \tag{5.2.9}$$

Из (5.2.8) следует, что при $n \le k \le n+m$

$$p_k = \frac{\lambda}{n\nu} p_{k-1} = \frac{\alpha}{n} p_{k-1}.$$

Откуда получаем для $k = n+1$, $k = n+2$, $k = n+3$ и т.д., соответственно:

$$p_{n+1} = \frac{\alpha}{n} p_n,$$

$$p_{n+2} = \frac{\alpha}{n} p_{n+1} = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 p_n,$$

$$p_{n+3} = \frac{\alpha}{n} p_{n+2} = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^3 p_n \quad \text{и. д.}$$

Значит, при $k \ge n$

$$p_k = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} p_n. \tag{5.2.10}$$

Учитывая, что согласно (5.2.9)

$$p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0,$$

формулу (5.2.10) запишем в виде

$$p_k = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} \frac{\alpha^n}{n!} p_0 = \frac{\alpha^k}{n!\,n^{k-n}} p_0. \tag{5.2.11}$$

Итак, искомое решение уравнений Колмогорова для СМО с очередью ограниченной длины имеет вид:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha^k}{k!} p_0, & 1 \le k \le n, \\ \dfrac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} p_0, & n \le k \le n+m. \end{cases}$$

Вероятность p_0 определяется подстановкой (5.2.9) и (5.2.10) в нормировочное условие (5.2.2):

$$p_0 \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^{k-n} \right] = 1. \qquad (5.2.12)$$

Откуда

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^{k-n}}. \qquad (5.2.13)$$

5.3 Показатели эффективности СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины

Показатели качества обслуживания требований:

1. Вероятность отказа очередному требованию в обслуживании:

$$p_{отк} = p_{n+m}. \qquad (5.3.1)$$

2. Средняя длина очереди, которая определяется как математическое ожидание числа требований, составляющих очередь, в тех случаях, когда она наблюдается, т.е. когда $n \le k \le n+m$. Предельные вероятности таких случаев равны p_k, $k = n+1, n+2, \ldots, n+m,$ поэтому:

$$K_{ож} = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n) p_k .$$

3. Среднее число требований в СМО равно сумме средней длины очереди $K_{ож}$ и среднего числа занятых каналов N :

$$K_C = K_{ож} + N .$$

4. Среднее время ожидания требования обслуживания в очереди:

$$T_{ож} = \frac{1}{\lambda} K_{ож} . \qquad (5.3.2)$$

5. Среднее время пребывания требования в СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины T_C может быть определено как сумма среднего времени обслуживания $M[t_{об}]$ и среднего времени ожидания в очереди $T_{ож}$:

$$T_C = M\left[t_C\right] = M[t_{об}] + T_{ож} ,$$

либо с помощью одной из формул Литтла как

$$T_C = \frac{1}{\lambda} K_C . \qquad (5.3.3)$$

Формулы (5.3.2), (5.3.3) – формулы Литтла, связывающие в предельном установившемся режиме среднее число требований в СМО и среднее число требований, ожидающих обслуживания в очереди, со средним временем пребывания требований в СМО и среднем временем ожидания в очереди.

Показатели эффективности использования СМО:

6. Относительная (q) и абсолютная (A) пропускные способности СМО:

$$q = p_{об} = 1 - p_{отк}, \qquad A = \lambda q.$$

7. Среднее число свободных от обслуживания приборов. Рассматриваются те состояния СМО, при которых имеются свободные приборы:

$$N_{св} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k .$$

8. Среднее число занятых обслуживанием приборов:

$$N = n - N_{св} .$$

9. Коэффициент занятости приборов:

$$\theta_З = \frac{N}{n} .$$

10. Коэффициент простоя приборов:

$$\theta_{пр} = 1 - \theta_З .$$

Показатель экономической эффективности СМО.

Экономический эффект от использования в течение заданного промежутка времени T СМО с ожиданием определяется по формуле (4.3.1), как и для СМО любого другого типа.

В СМО рассматриваемого типа потери связаны с:

– затратами на эксплуатацию;

– убытками от простоя требований;

– убытками от простоя приборов;

– убытками от потерь требований.

Таким образом, величина $G_П$ потерь в СМО:

$$G_П = \left(q_К N + q_{ож} K_{ож} + q_У p_{отк} \lambda + q_{ПК} N_{св}\right) T ,$$

где $q_{ож}$ – стоимость убытков, связанных с простоем требований в очереди в единицу времени. Величины $q_К$, $q_{ПК}$, $q_У$ были введены в п.2.3 при описании СМО с отказами.

6 СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДИ

6.1 Уравнения Колмогорова и их стационарное решение для СМО с ожиданием в неограниченной очереди

Рассматривается СМО, состоящая из n однотипных обслуживающих аппаратов, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания каждого требования каждым прибором подчиняется показательному закону с параметром ν. Требование, поступившее в СМО в момент, когда все обслуживающие аппараты заняты, не покидает ее, а «становится» в очередь и ждет пока его не обслужит один из освободившихся аппаратов. Число требований, ожидающих обслуживания, и время ожидания не ограничены. Размеченный граф состояний СМО на рис. 5. СДУ Колмогорова для СМО с ожиданием в неограниченной очереди, записанная по ее графу состояний, имеет вид, близкий к виду первых трех уравнений (5.1.1):

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t);$$
$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + (k+1)\nu P_{k+1}(t), \quad 1 \le k < n;$$
$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\nu)P_k(t) + n\nu P_{k+1}(t), \quad k \ge n.$$

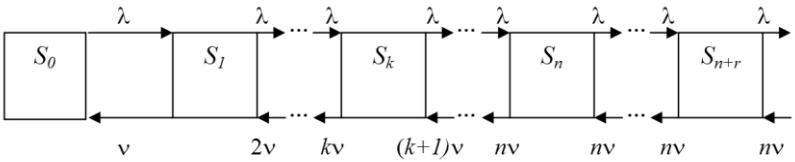

Рис. 5. Граф состояний СМО с ожиданием в очереди неограниченной длины

Начальные условия для интегрирования СДУ Колмогорова при $t = 0$ аналогичны рассмотренным выше для других СМО:

$$P_0(0)=1, \quad P_k(0)=0, \quad k=1,\ 2,\dots\ .$$

Найдем аналитическое решение СДУ Колмогорова в предельном установившемся режиме, при котором, как известно,

$$\lambda(t)=const; \quad \nu(\mathrm{t})=const; \quad n(t)=const$$

и

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t)=p_k, \quad k=0,1,2,\dots .$$

С этой целью используем полученное в п. 5.2 решение СДУ Колмогорова для СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, включающее выражения (5.2.9), (5.2.11) и (5.2.13).

Для СМО с ожиданием в очереди неограниченной (бесконечной) длины формула (5.2.13) для p_0 преобразуется к виду

$$p_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n}}. \tag{6.1.1}$$

Упростим выражение для суммы $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n}$. Запишем ее как

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k},$$

и используем разложение в ряд $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$, справедливое при $|x|<1$. Примем $x=\frac{\alpha}{n}$. Тогда, если выполняется условие

$$\frac{\lambda}{\nu}<n \quad \text{или} \quad \alpha<n, \tag{6.1.2}$$

то условие $|x|<1$ также выполняется. В этом случае сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k}$ может быть представлена просто как дробь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}} = \frac{n}{n-\alpha}. \qquad (6.1.3)$$

Подставляя (6.1.3) в (6.1.1), получаем выражение для вероятности p_0, в котором нет суммы с бесконечным числом слагаемых:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{n}{n-\alpha}}. \qquad (6.1.4)$$

Невыполнение условия (6.1.2) означает, что СМО не справляется с обслуживанием, и очередь неограниченно возрастает. В этом случае формулы (6.1.3) и (6.1.4) неприменимы.

6.2 Вероятностные характеристики времени ожидания в СМО с неограниченной очередью

Важным показателем работы СМО с ожиданием является время пребывания требования в очереди или время ожидания начала обслуживания τ. Примем без вывода и распишем подробно известную формулу для распределения τ в СМО с неограниченной очередью в установившемся режиме:

$$P(\tau > t) = \begin{cases} \pi e^{-(n\nu-\lambda)t}, & t \ge 0, \\ 1, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \pi e^{-(n\nu-\lambda)t}, & t > 0, \\ \pi, & t = 0, \\ 1, & t < 0, \end{cases} \qquad (6.2.1)$$

где $P(\tau > t)$ – вероятность того, что время ожидания начала обслуживания τ больше произвольного отрезка времени t. График зависимости $P(\tau > t)$ от t приведен на рис. 6; π – вероятность занятости всех обслуживающих аппаратов вне зависимости от наличия у них очереди. Формулой (6.2.1) выражается очевидный факт, состоящий в том, что для отрицательных значений t превышение временем ожидания τ заранее заданного отрицательного значения t является событием достоверным. При $t = 0$ функция $P(\tau > t)$ терпит разрыв типа скачка. Величина скачка равна $1-\pi$ и представляет собой вероятность того, что не менее одного обслуживающего аппарата свободно, т.е. поступившее в этот момент требование ждать обслуживания не будет.

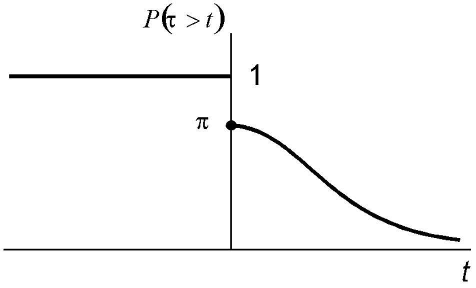

Рис. 6.

Получим на основании (6.2.1) формулу для функции распределения $F_\tau(t)$ времени ожидания начала обслуживания τ, то есть вероятности того, что время ожидания начала обслуживания τ будет меньше некоторого наперед заданного *t*:

$$F_\tau(t) = P(\tau < t).$$

Представим выражение для $F_\tau(t)$ в виде

$$F_\tau(t) = P(\tau < t) = P(\tau \le t) - P(\tau = t). \qquad (6.2.2)$$

С использованием (6.2.1) входящая в (6.2.2) вероятность $P(\tau \le t)$ определяется как

$$P(\tau \le t) = 1 - P(\tau > t) = \begin{cases} 1 - \pi e^{-(n\nu - \lambda)t}, & t > 0, \\ 1 - \pi, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \qquad (6.2.3)$$

График этой зависимости приведен на рис. 7.

Вероятность $P(\tau = t)$, входящая в (6.2.2), имеет смысл только при $t = 0$, в этом случае она принимает значение $P(\tau = t) = 1 - \pi$, и значит

$$P(\tau = t) = \begin{cases} 1-\pi, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \qquad (6.2.4)$$

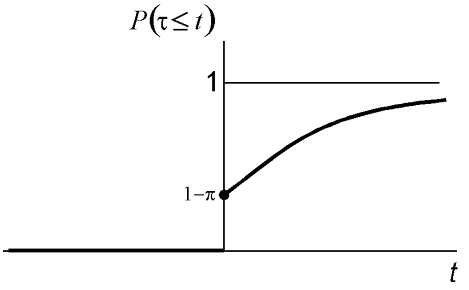

Рис. 7.

Таким образом, подставляя (6.2.3) и (6.2.4) в (6.2.2), получаем искомое выражение для функции распределения $F_\tau(t)$:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 1-\pi e^{-(n\nu-\lambda)t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-\pi e^{-(n\nu-\lambda)t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \qquad (6.2.5)$$

График функции распределения времени ожидания начала обслуживания в СМО с ожиданием приведен на рис. 8.

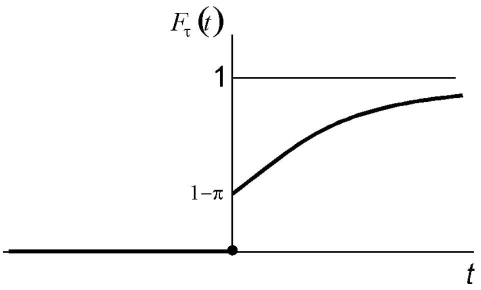

Рис. 8. Функция распределения времени ожидания

Получим формулу для вероятности π занятости всех обслуживающих аппаратов. Все аппараты заняты, когда в СМО находятся n или $n + 1$ или $n + 2$ и т.д. требований. Эти события независимы, поэтому вероятность занятости всех аппаратов π определяется как сумма вероятностей:

$$\pi = \sum_{k=n}^{n+\infty} p_k = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \ .$$

Используем формулу (5.2.11) для СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины, согласно одному из вариантов записи которой при $n \le k \le n+m$ $\quad p_k = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} \frac{\alpha^n}{n!} p_0$, и значит

$$\pi = \frac{\alpha^n}{n!} p_0 \sum_{k=n}^{n+m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} .$$

Для СМО с ожиданием в очереди неограниченной длины записанная формула принимает вид:

$$\pi = \frac{\alpha^n}{n!} p_0 \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} .$$

Сумма $\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n}$ при условии $\alpha < n$ была определена в п. 6.1 как

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} = \frac{n}{n-\alpha} .$$

Поэтому искомое выражение для π запишется как

$$\pi = \frac{\alpha^n}{n!} p_0 \frac{n}{(n-\alpha)} = \frac{\alpha^n p_0}{(n-1)!(n-\alpha)} .$$

6.3 Среднее время ожидания начала обслуживания в СМО с неограниченной очередью

Выражение (6.2.5) позволяет определить среднее время ожидания начала обслуживания $T_{ож} = M[\tau]$. Величина τ является СВ смешанного типа (не дискретной и не непрерывной), поскольку ее функция распределения терпит разрыв. Для определения математического ожидания СВ такого типа необходимо использовать формулы как для дискретной, так и для непрерывной СВ. В общем виде математическое ожидание для дискретной СВ $X^{дискр}$ и для непрерывной СВ $X^{непр}$ определяется, соответственно, по следующим формулам:

$$M\left[X^{дискр}\right] = \sum_i x_i p_i \,;$$

$$M\left[X^{непр}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx\,, \qquad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Таким образом для смешанной СВ X оно в общем виде определяется как

$$M[X] = \sum_i x_i p_i + \int_{(непр)} x \frac{dF(x)}{dx} dx\,, \qquad (6.3.1)$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции, а интеграл – на все участки ее непрерывности.

Для τ формула (6.3.1) с учетом (6.2.5) принимает вид

$$M[\tau] = 0 \cdot (1 - \pi) + \int_0^{\infty} t \frac{dF_\tau(t)}{dt} dt = \pi \int_0^{\infty} t (n\nu - \lambda) e^{-(n\nu - \lambda)t} dt\,.$$

Можно вычислять интеграл по частям или использовать табличный интеграл

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)\,.$$

Обозначив $a = -(n\nu - \lambda)$, получим в результате интегрирования

$$\pi\int_0^\infty t(n\nu-\lambda)e^{-(n\nu-\lambda)t}dt = -\pi a\frac{e^{at}}{a^2}(at-1)\Big|_0^\infty = \pi\frac{e^{at}}{a}(1-at)\Big|_0^\infty = \\ = \pi\frac{e^{at}}{a}\Big|_0^\infty - \pi e^{at}t\Big|_0^\infty. \tag{6.3.2}$$

После подстановки a в первое слагаемое (3.6.2) получим

$$\pi\frac{e^{at}}{a}\Big|_0^\infty = -\pi\frac{e^{-(n\nu-\lambda)t}}{(n\nu-\lambda)}\Big|_0^\infty = -\frac{\pi}{(n\nu-\lambda)}[0-1] = \frac{\pi}{n\nu-\lambda}.$$

После подстановки a во второе слагаемое (6.3.2):

$$\pi e^{at}t\Big|_0^\infty = \pi e^{-(n\nu-\lambda)t}t\Big|_0^\infty = \pi\lim_{t\to\infty} e^{-(n\nu-\lambda)t}t - 0.$$

Покажем, что при $n\nu > \lambda$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{(n\nu-\lambda)t}} = 0.$$

Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, возникающую в функции $\frac{t}{e^{(n\nu-\lambda)t}}$ при $t\to\infty$, применим правило Лопиталя, представляющее собой метод нахождения пределов функций, раскрывающий неопределенности вида $0/0$, ∞/∞. Правило Лопиталя гласит, что, если некоторые функции $g(x)$ и $h(x)$ при $x\to\infty$ (или $x\to x_0$) стремятся к нулю или к бесконечности, и отношение их производных имеет предел, то отношение самих функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т.е.

$$\lim\frac{g(x)}{h(x)} = \lim\frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

В соответствии с правилом Лопиталя продифференцируем числитель и знаменатель дроби $\frac{t}{e^{(n\nu-\lambda)t}}$, получим

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{(n\nu-\lambda)t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(n\nu-\lambda)e^{(n\nu-\lambda)t}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0\ .$$

Таким образом, второе слагаемое (6.3.2) равно нулю и, следовательно,

$$T_{ож}=\frac{\pi}{n\nu-\lambda}\ . \qquad (6.3.3)$$

Следует помнить, что для СМО с ожиданием важное значение имеют как $T_{ож}$, так и $P(\tau>t)$. При удовлетворительном среднем времени ожидания, время пребывания в очереди некоторых заявок может достигать неприемлемых величин. Поэтому, помимо $T_{ож}$, необходимо контролировать $P(\tau>t)$. При больших t величина $P(\tau>t)$ должна быть достаточно малой.

6.4 Средняя длина очереди в СМО с неограниченной очередью

Для определения средней длины очереди в СМО с ожиданием в неограниченной очереди используем формулу средней длины очереди в СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины, полученную ранее в п. 5.3 и имеющую вид:

$$K_{ож}=\sum_{k=n+1}^{n+m}(k-n)p_k\ .$$

В случае допустимости неограниченного нарастания очереди формула должна быть преобразована так

$$K_{ож}=\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)p_k\ .$$

Для облегчения вывода аналитической формулы $K_{ож}$ суммирование начнем не с $k = n + 1$, а с $k = n$. На результат это не повлияет, т.к. первое слагаемое будет равно нулю ($(n-n)p_n=0$):

$$K_{ож}=\sum_{k=n}^{\infty}(k-n)p_k\ . \qquad (6.4.1)$$

Формула (5.2.9) для p_k при $k \geq n$ была получена ранее, она имеет вид

$$p_k = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} p_n . \tag{6.4.2}$$

Подставим (6.4.2) в (6.4.1), получим

$$K_{ож} = p_n \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{k-n} . \tag{6.4.3}$$

Введем обозначения $i = k - n$ и $x = \frac{\alpha}{n}$ и перепишем (6.4.3) как

$$K_{ож} = p_n \sum_{i=0}^{\infty} i x^i . \tag{6.4.4}$$

Воспользуемся рассмотренным ранее в п. 5.1 разложением в ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i , \tag{6.4.5}$$

справедливым при $|x| < 1$. В нашем случае условие $|x| < 1$ выполняется, т.к. в установившемся режиме $\alpha < n$.

Продифференцируем выражение (6.4.5), получим

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} . \tag{6.4.6}$$

Теперь умножим выражение (6.4.6) на x, получим

$$\frac{x}{(1-x)^2} = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} i x^i . \tag{6.4.7}$$

Заменим в (6.4.7) x на $\frac{\alpha}{n}$ и подставим (6.4.7) в (6.4.4):

$$K_{ож} = p_n \frac{\alpha}{n} \frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^2} = \frac{p_n \alpha}{n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^2}.$$

Получена искомая расчетная формула для определения среднего числа требований, ожидающих обслуживания в СМО с неограниченной очередью.

6.5 Показатели эффективности СМО с ожиданием в неограниченной очереди

Показатели качества обслуживания требований:

1. Средняя длина очереди:

$$K_{ож} = \frac{p_n \alpha}{n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^2}.$$

2. Среднее число требований в СМО:

$$K_C = K_{ож} + N.$$

3. Среднее время ожидания в очереди:

$$T_{ож} = \frac{\pi}{n\nu - \lambda}.$$

4. Среднее время пребывания требования в СМО:

$$T_C = M[t_C] = M[t_{об}] + T_{ож}.$$

Для $T_{ож}$ и $M[t_C]$ в установившемся режиме используются также формулы Литтла:

$$T_{ож} = \frac{1}{\lambda} K_{ож}, \qquad T_C = \frac{1}{\lambda} K_C.$$

5. Закон распределения времени ожидания требования:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 1 - \pi e^{-(n\nu-\lambda)t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Показатели эффективности использования СМО:

6. Относительная (q) и абсолютная (A) пропускные способности СМО:

$$q = 1, \qquad A = \lambda.$$

7. Среднее число свободных от обслуживания приборов (как и для СМО с очередью ограниченной длины, см.п. 5.3):

$$N_{св} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k \ .$$

8. Среднее число занятых обслуживанием приборов:

$$N = n - N_{св} \ .$$

9. Коэффициент занятости приборов:

$$\theta_З = \frac{N}{n} \ .$$

10. Коэффициент простоя приборов:

$$\theta_{пр} = 1 - \theta_З \ .$$

Показатель экономической эффективности СМО.

Экономический эффект от использования в течение заданного времени T СМО с ожиданием в неограниченной очереди определяется по формуле (4.3.1), как и для СМО любого другого типа.

Для рассматриваемой СМО потери связаны с:

– затратами на эксплуатацию;

– убытками от простоя требований;

– убытками от простоя приборов.

Таким образом, величина $G_П$ потерь в СМО:

$$G_П = \left(q_К N + q_{ож} К_{ож} + q_{ПК} N_{св}\right) T \ .$$

Все входящие в формулу параметры были введены ранее в пп. 4.3 и 5.3.

7 СИСТЕМЫ СО «ВЗАИМОПОМОЩЬЮ» МЕЖДУ КАНАЛАМИ

7.1 СМО с дисциплиной взаимопомощи «все как один»

СМО со «взаимопомощью» между каналами – СМО, в которых одна и та же заявка может одновременно обслуживаться двумя и более каналами. Здесь рассматриваются системы, в которых увеличение числа одновременно работающих над обслуживанием требования каналов приводит к пропорциональному увеличению скорости обслуживания. Используется понятие «дисциплина взаимопомощи», т.е. принцип, определяющий когда и как несколько каналов берут на себя обслуживание одного и того же требования. Рассмотрим два случая этой дисциплины, условно названные «все как один» и «равномерная взаимопомощь».

Дисциплина «все как один» означает, что при появлении одной заявки ее начинают обслуживать все каналы сразу и остаются занятыми, пока не закончится обслуживание этой заявки; затем все каналы переключаются на обслуживание другой заявки (если она есть) или ждут ее появления, если ее нет, и т. д. Очевидно, в этом случае все каналов работают как один, СМО становится одноканальной, но с более высокой интенсивностью обслуживания.

Дисциплина «равномерная взаимопомощь»: если требование приходит в момент, когда все каналы свободны, то все они принимаются за ее обслуживание; если, в момент обслуживания заявки, приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание и т. д., до тех пор, пока не окажутся занятыми все каналы СМО; если это так, вновь пришедшая заявка получает отказ (в СМО с отказами) или становится в очередь (в СМО с ожиданием).

Рассматривается ***СМО с взаимопомощью «все как один»***, состоящая из n однотипных обслуживающих аппаратов, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования одним прибором подчиняется показательному закону с параметром ν. Поскольку в случае взаимопомощи «все как один» все n каналов работают как единственный канал с увеличившейся в n раз интенсивностью обслуживания требования, то для анализа таких СМО могут использоваться модели одноканальной СМО без взаимопомощи. При этом если СМО с взаимопомощью относится к классу СМО с отказами, то следует пользоваться моделью, рассмотренной в разделе 4 пособия. Если же СМО с взаимопомощью принадлежит классу СМО с ожиданием, то могут быть использованы модели одноканальных СМО с ограниченной (раздел 5) и неограниченной (раздел 6) очередями. В этих моделях в качестве интенсивности обслуживания должен использоваться параметр $\nu^* = n\nu$. Моделирование показывает, что переход к использованию взаимопомощи «все как один» в ***СМО с отказами*** приводит к снижению пропускной способности СМО, что объясняется увеличением вероятности отказа: за то время, пока все каналы заняты обслуживанием одной заявки, могут прийти другие заявки, и, естественно, получить отказ. Среднее время пребывания заявки в СМО уменьшается. Внедрение взаимопомощи типа «все как один» в работу ***СМО с ожиданием*** в неограниченной очереди не влияет на ее пропускную способность СМО, так как при любых условиях обслужены будут все пришедшие заявки. Зато ухудшаются другие характеристики обслуживания. Простой каналов в таких СМО минимален: если в системе имеется хотя бы одна заявка, все каналы работают.

7.2 СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью

Рассматривается n-канальная ***СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью***, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования прибором подчиняется показательному закону с параметром ν.

Размеченный граф состояний СМО на рис. 9.

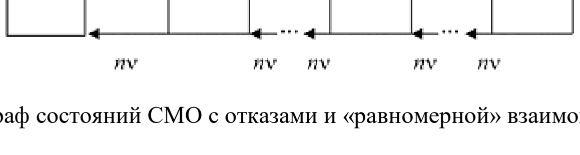

Рис. 9. Граф состояний СМО с отказами и «равномерной» взаимопомощью

Состояния СМО, пронумерованные по числу заявок, находящихся на обслуживании:

S_0 – СМО свободна;

S_1 –одно требование обслуживается всеми n каналами;

S_k – k требований обслуживается всеми n каналами;

S_n – все n аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет.

Легко видеть, что граф состояний рассматриваемой СМО совпадает с графом состояний одноканальной СМО с ожиданием, в которой длина очереди ограничена $n-1$ местами, а интенсивность обслуживания заявок единственным каналом равна $\nu^* = n\nu$.

Чтобы получить выражения для расчета вероятности отказа $p_{отк}$, относительной q и абсолютной A пропускных способностей воспользуемся формулами, приведенными в пп.3.2 и 3.3 для СМО с очередью ограниченной длины, в которой число каналов принято равным 1, а длина очереди $n-1$.

В одноканальной СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины вероятность отказа определяется, согласно (5.3.1) и (5.2.11), как

$$p_{отк} = p_{1+m} = \alpha^{1+m} \cdot p_0 ,$$

а вероятность отсутствия требований, в соответствии с (5.2.13), как:

$$p_0 = \frac{1}{1+\alpha \sum\limits_{k=1}^{1+m} \alpha^{k-1}} .$$

Записав знаменатель последней формулы в виде

$$1+\alpha \sum_{k=1}^{1+m} \alpha^{k-1} = 1+\alpha \cdot 1+\alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha^2 + \ldots + \alpha \cdot \alpha^m =$$
$$= 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{1+m},$$

заметим, что он представляет собой геометрическую прогрессию из $m+2$ членов с первым членом 1 и знаменателем α. Напомним, что сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем a равна:

$$S_N = \frac{b_1\left(1-a^N\right)}{\left(1-a\right)}.$$

Суммируя прогрессию, получаем формулы для определения сначала p_0, а затем и $p_{отк}$:

$$p_0 = \frac{1}{\left[\frac{1\cdot\left(1-\alpha^{m+2}\right)}{1-\alpha}\right]} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+2}}, \quad p_{отк} = \alpha^{1+m}\cdot p_0 = \frac{\alpha^{1+m}\left(1-\alpha\right)}{1-\alpha^{2+m}}. \quad (7.2.1)$$

Таким образом, формула $p_{отк}$ для n-канальной СМО с отказами и равномерной взаимопомощью получается в результате подстановки в (7.2.1) $m = n-1$ и замены $\alpha = \frac{\lambda}{\nu}$ на $\beta = \frac{\lambda}{\nu^*} = \frac{\lambda}{n\nu}$:

$$p_{отк} = \frac{\beta^n\left(1-\beta\right)}{1-\beta^{m+1}}.$$

С помощью полученного выражения и формул п.5.3 определяются величины относительной q и абсолютной A пропускных способностей n-канальной СМО с отказами и равномерной взаимопомощью.

7.3 СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью

Рассматривается n-канальная ***СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью***, в которую поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ, время обслуживания требования одним прибором подчиняется показательному закону с параметром ν. Число требований, ожидающих обслуживания, ограничено величиной m.

Размеченный граф состояний СМО изображен на рис. 10.

Состояния СМО, пронумерованные по числу находящихся на обслуживании требований:

S_0 – СМО свободна;

S_1 –одно требование обслуживается всеми n каналами;

S_k – k требований обслуживается всеми n каналами, очереди нет;

S_n – все n аппаратов заняты обслуживанием, очереди нет;

S_{n+r} – n требований обслуживаются всеми n аппаратами, r требований ожидают в очереди;

S_{n+m} – n требований обслуживаются всеми n аппаратами, m требований в очереди.

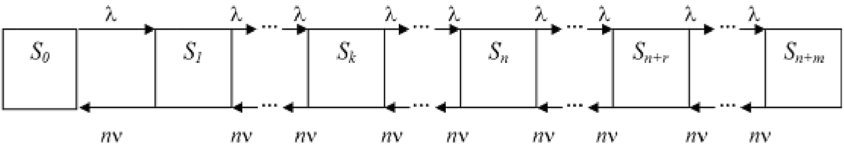

Рис. 10. Граф состояний СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и «равномерной» взаимопомощью

Получен граф того же вида, что и на рис. 9, но с числом состояний, увеличенными на m. Следовательно, необходимо воспользоваться теми же формулами пп. 5.2 и 5.3 для одноканальной СМО с интенсивностью обслуживания $\nu^* = n\nu$ и числом мест в очереди $n+m-1$. Используя тот же подход, что и предыдущем пункте, получаем вероятность отказа $p_{отк}$ в СМО с ожиданием в очереди ограниченной длины и равномерной взаимопомощью:

$$p_{отк} = \frac{\beta^{n+m}(1-\beta)}{1-\beta^{n+m+1}}.$$

Помимо вероятности отказа $p_{отк}$, относительной q и абсолютной A пропускных способностей основными параметрами рассматриваемой СМО являются среднее число требований в очереди $K_{ож}$, среднее время ожидания $T_{ож}$ и среднее время пребывания T_C требования в СМО.

8 ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ

Замкнутыми называются СМО, в которых источник требований находится внутри самой системы, и интенсивность потока требований зависит от ее состояния. Как правило потоком требований в такой СМО является поток отказов (неисправностей, сбоев) от группы работающих устройств. Пусть λ – интенсивность потока отказов одного устройства. Имеется m работающих устройств, которые могут выходить из строя из-за неисправностей, и n каналов обслуживания этих требований.

Состояния замкнутой СМО связывают с числом отказавших устройств:

S_0 – все устройства работоспособны, нет занятых ремонтом (обслуживанием) каналов;

S_1 – одно устройство вышло из строя и проходит ремонт, один канал занят;

S_n – n устройств вышли из строя, все каналы заняты;

S_m – все m устройств вышли из строя, все каналы заняты, n устройств проходят ремонт, остальные (m-n) ожидают ремонта.

Суммарная интенсивность потока отказов всей группы устройств зависит от числа уже отказавших устройств. Так, в состоянии S_0 с интенсивностью λ выходит из строя любое из работающих устройств, следовательно, суммарная интенсивность выхода из строя n устройств равна $n\lambda$. В состоянии S_1, в котором одно устройство уже ремонтируется, интенсивность выхода из строя оставшихся работоспособных устройств составляет (n - 1)λ и т.д. Граф состояний такой СМО изображен на рис. 11.

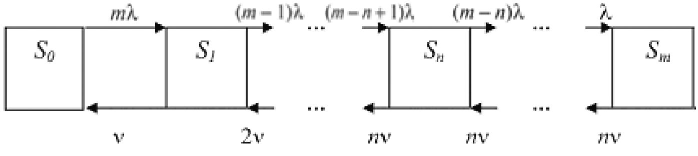

Рис. 11. Граф состояний замкнутой СМО

Вероятности состояний замкнутой СМО в предельном установившемся режиме определяются следующими зависимостями:

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i\,!}\alpha^i p_0, & i = 1,2,\ldots,n, \\ \dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n\,!\cdot n^{i-n}}\alpha^i p_0, & i = n+1,\, m+2,\ldots,m, \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{i\,!}\alpha^i + \sum\limits_{i=n+1}^{m}\dfrac{\prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)}{n\,!\cdot n^{i-n}}\alpha^i}, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\nu}.$$

В простейшем случае одноканальной (n = 1) замкнутой СМО представленные выражения существенно упрощаются:

$$p_1 = \frac{m\lambda}{\nu} p_0 = m\alpha p_0,$$

$$p_2 = (m-1)\frac{\lambda}{\nu} p_1 = m(m-1)\alpha^2 p_0,$$

$$p_3 = (m-2)\frac{\lambda}{\nu} p_2 = m(m-1)(m-2)\alpha^3 p_0,$$

$$p_m = [m-(m-1)]\frac{\lambda}{\nu} p_{m-1} = m(m-1)\ldots[m-(m-1)]\alpha^m p_0,$$

$$p_0 = \left[1 + m\alpha + m(m-1)\alpha^2 + \ldots + m(m-1)(m-2)\times\ldots\times 1\alpha^m\right]^{-1}.$$

9 СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

СеМО – совокупность СМО, в которой циркулируют требования, переходящие из одной СМО в другую.

Экспоненциальная СеМО – СеМО, во всех узлах которой длительности обслуживания распределены по экспоненциальному закону, и потоки, поступающие в СеМО, простейшие.

Входной поток заявок СеМО – поток заявок, приходящих на вход отдельной СМО, входящей в состав СеМО, из внешней среды СеМО, а не с выхода какой-либо СМО.

Переход заявок между узлами СеМО происходит мгновенно в соответствии с переходными вероятностями

$$p_{ij},\ i,\ j = 1,\ldots,S\ .$$

где p_{ij} – вероятность того, что заявка после обслуживания в узле i перейдет в узел j, S – число узлов СеМО. Если узлы непосредственно не связаны между собой, то $p_{ij} = 0$. Если из i-го узла переход только в один какой-либо узел j, то $p_{ij} = 1$.

Экспоненциальная СеМО задается следующими параметрами:

1) числом S СМО;

2) числом $n_1,\ldots,n_S$ каналов в СМО 1 ,…, S;

3) матрицей $P = \|p_{ij}\|$ переходных вероятностей, $i = 1,\ldots,S$, $j = 0,\ldots,S$;

4) интенсивностями $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_S$ входных потоков заявок;

5) средними временами обслуживания $T_{об1},\ldots,T_{обS}$ заявок в СМО 1 ,…, S.

Для представления СеМО используется граф, вершины которого (узлы) соответствуют отдельным СМО, а дуги отображают связи между узлами.

Пример. Граф СеМО задан в виде, представленном на рис. 12.

Заданы следующие значения параметров СеМО:

1) $S = 3$;

2) $n_1 = n_2 = 1, \quad n_3 = 2$;

3)

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left\Vert \begin{array}{cccc} 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\Vert \end{array};$$

4) $\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$;

5) $T_{об1} = 0.07, \quad T_{об2} = 0.06, \quad T_{об3} = 0.35$.

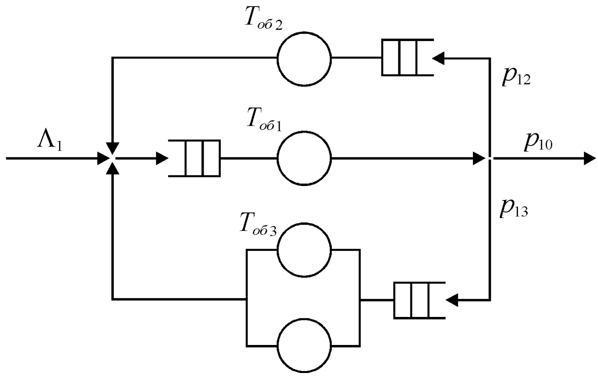

Рис. 12. СеМО

В СеМО поток заявок на входе СМО складывается из входного потока СеМО и потоков, поступающих с выходов СМО.

Для расчета характеристик СМО в заданной СеМО необходимо найти интенсивности $\lambda_1, \ldots, \lambda_S$ входящих потоков СМО. Указанные интенсивности определяются на основе уравнений баланса сети с учетом ***свойств слияния и разветвления потоков***:

1) при слиянии n потоков заявок с интенсивностями образуется поток, имеющий интенсивность $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

2) при ветвлении потока с интенсивностью λ на n направлений, вероятности перехода заявки в которые равны $p_1, \ldots, p_n$, образуется n потоков с интенсивностями $\lambda p_1, \ldots, \lambda p_n$ соответственно.

Уравнение баланса составляется в предположении, что в стационарной СеМО суммарная интенсивность входящих в любую фиксированную ее часть потоков равна суммарной интенсивности выходящих.

Пример (продолжение). Уравнение баланса (рис.13):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \Lambda_1 &= p_{10}\lambda_1, \\ \lambda_2 &= p_{12}\lambda_1, \\ \lambda_3 &= p_{13}\lambda_1. \end{aligned} \tag{9.1}$$

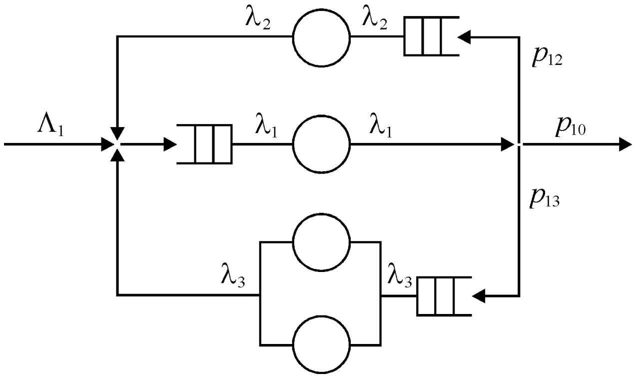

Рис. 13. Баланс интенсивностей

При известных $\Lambda_1 = 1$, $p_{10} = 0.1$, $p_{12} = 0.5$, $p_{13} = 0.4$ из последних трёх уравнений (9.1) находим $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 4$.

Среднее время пребывания заявки в СеМО – основная характеристика СеМО:

$$T_C = \frac{1}{\Lambda}\sum_{j=1}^{S}\lambda_j T_{C\,j} \,,$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_S$ – суммарная интенсивность входных потоков.

Пример (окончание). Среднее время пребывания заявки в СеМО, изображенной на рис. 12, 13:

$$T_C = \frac{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j T_{Cj}}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3} = \frac{10 \cdot 0.233 + 5 \cdot 0.086 + 4 \cdot 0.45}{1 + 0 + 0} = 4.56 \;.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы и модели ТМО широко применяются при решении задач анализа и оптимизации систем воздушного транспорта. Большинство производственных процессов в рассматриваемых системах может быть описано и формализовано как процессы массового обслуживания. К задачам массового обслуживания в авиатранспортной отрасли относятся: рациональная организация работы предприятий, занимающихся продажами перевозок; расчет систем регистрации пассажиров, обработки багажа и обеспечения безопасности в аэропортах; расчет пропускной способности взлетно-посадочных полос; расчет пропускной способности аэропортов с определением необходимых размеров перрона, производственных площадей и пассажирских помещений аэровокзала; определение необходимой численности перронных и аэровокзальных средств обслуживания пассажиров и багажа; оптимизация процессов обработки грузов на складах и грузовых аэровокзалах; оптимизация процессов обслуживания самолетов на перроне; определение оптимального фонда запасных агрегатов авиармонтных предприятий и служб и многие другие задачи. Применение ТМО в задачах проектирования авиатранспортных систем, в практике предприятий гражданской авиации способно дать значительный экономический эффект, повысить качество обслуживания пользователей, обеспечить необходимый уровень безопасности и регулярности воздушных перевозок.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
Справочные сведения из теории вероятностей

Случайное событие (обозначение: A, B, C...) – событие, которое может либо наступить при реализации определенного комплекса условий, либо не наступить .

Достоверное событие (U) – событие, которое наступает каждый раз при реализации определенного комплекса условий.

Невозможное событие ($\varnothing$) – событие, которое никогда не наступает при реализации определенного комплекса условий.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Пусть A и B – случайные события. Если A и B независимы, то вероятность того, что происходит и событие A и событие B:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

где $A \cap B$ – событие, состоящее в том, что происходит и A и B.

Теорема (формула) полной вероятности. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – случайные события, для которых

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = U \quad \text{и} \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

что означает, что обязательно происходит только одно из событий А. Тогда для любого случайного события B, которое может произойти с одним из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, справедлива формула

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B/A_i).$$

Случайная величина (СВ) – величина, которая в результате испытания (реализации определенного комплекса условий) может принять то или иное значение, причем до испытания неизвестно, какое именно.

Типы СВ:

– дискретная – СВ, имеющая конечное или счетное множество значений;

– непрерывная – СВ, множество значений которой представляет собой множество всех точек, принадлежащих какому-либо интервалу числовой оси;

– смешанного типа – СВ, для которой наряду с участками непрерывных значений имеются изолированные значения.

Закон распределения СВ – соотношение, задающее вероятность появления СВ в любом интервале. Закон распределения задается в форме ряда, функции, плотности распределения.

Ряд распределения – таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной СВ (x_i) и соответствующие им вероятности (P_i).

Функция распределения СВ X – функция аргумента x, равная вероятности того, что СВ X примет любое значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[a, b)$:

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a).$$

Функция распределения дискретной СВ: $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} P(x_i)$.

Функция распределения непрерывной СВ: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$,

где $f(x)$ – плотность распределения.

Плотность распределения $f(x)$ непрерывной СВ:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Вероятность попадания непрерывной СВ на участок $[a, b)$:

$$P(a \le x < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Математическое ожидание (МО) – теоретическая характеристика СВ.

МО дискретной СВ X: $M[X] = m_x = \bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P_i$,

где n – число возможных значений СВ X.

МО непрерывной СВ X: $M[X] = m_x = \bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$.

Дисперсия – МО квадрата отклонений СВ от своего МО:

$$D_x = \sigma_x^2 = M\left[(X - m_x)^2\right].$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Коэффициент вариации – относительная характеристика рассеивания: $V = \sigma_x / m_x$.

Законы распределения дискретных СВ.

А. ***Биномиальное распределение.*** Распределение числа *X* появления события *A* в серии из *n* опытов. В каждом опыте возможны два исхода: наступление или ненаступление события *A*. Пусть *p* – вероятность наступления события *A* в каждом опыте, тогда распределение числа появления события *A* определяется формулой Бернулли

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n,$$

где $P(X = x)$ – вероятность появления события <u>*A*</u> ровно *x* раз в серии из *n* испытаний.

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами: *p* и *n*. МО и дисперсия биномиально распределенной СВ:

$$M[X] = np, \quad D_x = np(1-p).$$

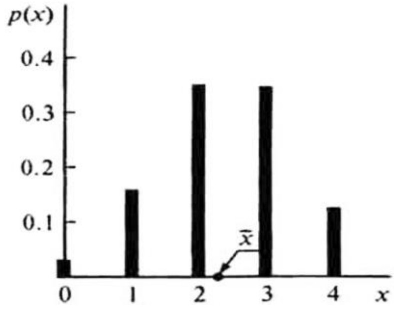

Рис. П1.1. Биномиальное распределение с параметрами $n = 4$, $p = 0.6$

Б. ***Распределение Пуассона.*** Пусть $n \to \infty$, $p \to 0$, тогда распределение вероятностей биномиального распределения выражается законом Пуассона:

$$P(X = x) = \frac{a^x}{x\,!} e^{-x}, \qquad x = 0,1,\ldots.$$

Распределение Пуассона определяется одним параметром – математическим ожиданием: $M[X] = a$.

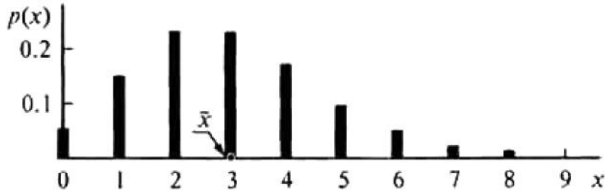

Рис. П1.2. Распределение Пуассона с параметром $a = 3$

Законы распределения непрерывных СВ.

В. ***Равномерное распределение*** на отрезке [α, β].

Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \le x \le \beta, \\ 0 & x > \beta,\ x < \alpha. \end{cases}$$

Равномерное распределение определяется двумя параметрами – левой α и правой β границами области возможных значений СВ.

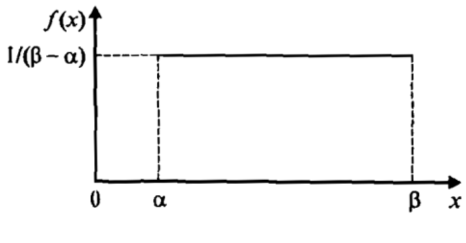

Рис. П1.3. Равномерное распределение с параметрами α, β

МО и дисперсия равномерно распределенной СВ X:

$$M[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad D_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

Г. ***Показательное распределение***.

Плотность и функция распределения:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \ge 0,\ \lambda > 0.$$

Показательное распределение определяется единственным параметром λ – интенсивностью СВ.

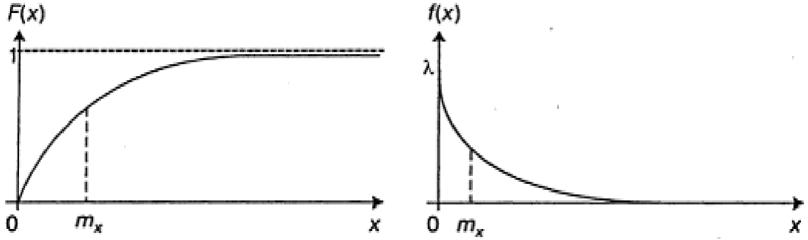

Рис. П1.4. Показательное распределение с параметром λ

МО и дисперсия показательно распределенной СВ X:

$$M[X] = m_x = \frac{1}{\lambda}, \qquad D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Д. ***Распределение Эрланга.***

Плотность распределения:

$$f_k(x) = \frac{\lambda \cdot (\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda x}, \qquad x \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots.$$

МО и дисперсия СВ X, распределенной по закону Эрланга:

$$M[X] = \frac{k}{\lambda}, \qquad D_x = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Закону Эрланга k-го порядка подчинена сумма независимых СВ, распределенных по показательному закону с параметром λ.

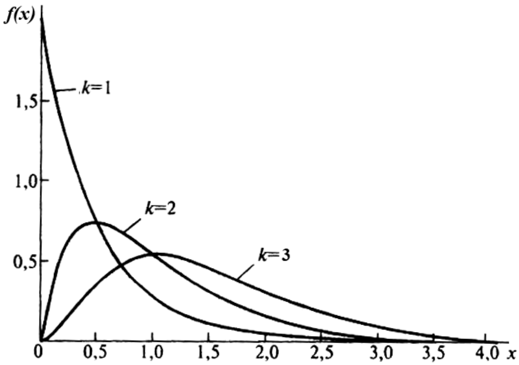

Рис. П1.5. Распределение Эрланга первого, второго и третьего порядка при $\lambda = 2$

Е. **Распределение χ^2 Пирсона**, приведенное в таблице П1.1, используется для доказательства статистических гипотез.

Таблица П1.1. Распределение χ^2 Пирсона

Квантили χ^2 - распределения $K^{-1}(p\,;\,m)$								
m	***p***							
	0.1	**0.3**	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**0.95**	**0.99**	**0.999**
1	0.016	0.148	0.455	1.074	2.706	3.841	6.635	10.827
2	0.211	0.713	1.386	2.408	4.605	5.991	9.210	13.815
3	0.584	1.424	2.366	3.665	6.251	7.815	11.345	16.266
4	1.064	2.195	3.357	4.878	7.779	9.488	13.277	18.466
5	1.610	3.000	4.351	6.064	9.236	11.070	15.086	20.515
6	2.204	3.828	5.348	7.231	10.645	12.592	16.812	22.457
7	2.833	4.671	6.346	8.383	12.017	14.067	18.475	24.321
8	3.490	5.527	7.344	9.524	13.362	15.507	20.090	26.124
9	4.168	6.393	8.343	10.656	14.684	16.919	21.666	27.877
10	4.865	7.267	9.342	11.781	15.987	18.307	23.209	29.588
11	5.578	8.148	10.341	12.899	17.275	19.675	24.725	31.264
12	6.304	9.034	11.340	14.011	18.549	21.026	26.217	32.909
13	7.041	9.926	12.340	15.119	19.812	22.362	27.688	34.527
14	7.790	10.821	13.339	16.222	21.064	23.685	29.141	36.124
15	8.547	11.721	14.339	17.322	22.307	24.996	30.578	37.698
16	9.312	12.624	15.338	18.418	23.542	26.296	32.000	39.252
17	10.085	13.531	16.338	19.511	24.769	27.587	33.409	40.791
18	10.865	14.440	17.338	20.601	25.989	28.869	34.805	42.312
19	11.651	15.352	18.338	21.689	27.204	30.144	36.191	43.819
20	12.443	16.266	19.337	22.775	28.412	31.410	37.566	45.314

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андронов, А.М.* Математические методы планирования и управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации / А.М. Андронов, А.Н. Хижняк. – Москва : «Транспорт», 1977. – 215 с.

2. *Бабешко, Л.О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере : учебное пособие / Л. Г. Лабскер, Л. О. Бабешко. – Москва : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

3. *Вадзинский, Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – Санкт-Петербург : Наука, 2001. – 295 с.

4. *Вентцель, Е.С.* Исследование операций / Е.С. Вентцель. – Москва : «Советское радио», 1972. – 552 с.

5. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей : учебник для студ. вузов / *Е.С. Вентцель*. – 10-е изд. – Москва : Издательский центр «Академия», 2005. – 576 с.

6. *Овчаров, Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания / Л.А. Овчаров. – Москва : Машиностроение, 1969. – 324 с.

7. *Саульев, В.К.* Математические модели теории массового обслуживания / В.К. Саульев. – Москва : Статистика, 1979. – 96 с.

8. Справочник по математике для экономистов : учебное пособие / [В.Е. Барбаумов др.]; под ред. проф. В.И. Ермакова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2009. – 464 с.

Учебное издание

Романенко Владимир Алексеевич

СИСТЕМЫ И СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная верстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 23.06.2021. Формат 64×80/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 4,25.
Тираж 25. Заказ . Арт. – 18(Р1У)/2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.