

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

А.Н. ГУСЕВ

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТОМ

Учебное пособие

САМАРА 2004

УДК 697.7.05.001

**Гусев А.Н. Системы автоматического управления самолетом:**  
Учебное пособие/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2004. 138 с.

**ISBN 5-7883-0276-5**

В книге рассматриваются принцип действия, устройство и математические модели элементов систем автоматического управления самолетом, а также методы анализа и синтеза основных параметров структурных схем систем автоматического управления (САУ) самолетом. Анализ и расчет параметров САУ проводится при постановке задачи в линейной форме. Изложенные материалы доведены до простых, проверенных на практике расчетных формул.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 131000, но может быть полезно и для студентов других специальностей, изучающих системы автоматического управления летательными аппаратами. Работа подготовлена на кафедре динамики полета и систем управления.

Ил. 66. Библиогр.: 16 назв.

Печатается по решению редакционно – издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Б.А. Титов;  
д-р техн. наук, проф. А.И. Мантуров

**ISBN 5-7883-0276-5**

© А.Н. Гусев, 2004

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2004

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Системы автоматического управления полетом относятся в настоящее время к числу наиболее важных и стремительно развивающихся систем летательных аппаратов. Системы управления летательных аппаратов все в большей мере становятся комплексными, обеспечивающими все основные этапы полета. Эти системы в процессе функционирования объединяют многочисленные подсистемы, используют информацию разнообразных датчиков. Задачи рационального построения систем управления, обеспечения надежности и безопасности полета, необходимой точности управления являются сложными и требуют привлечения эффективных научных методов.

Основной задачей данного учебного пособия является изложение назначения, принципа действия, построения математической модели элементов систем автоматического управления летательными аппаратами, а также вопросов анализа и синтеза систем автоматического управления самолетом в целом.

Различные разделы учебного пособия требуют различных уровней подготовки читателя. Разделы, посвященные описанию устройства, принципа действия и математическому описанию элементов систем автоматического управления самолетом, требуют знаний теоретической механики, электротехники и высшей математики, в основном соответствующих уровню подобных курсов высших технических учебных заведений. Разделы, связанные с изучением методов анализа и синтеза систем автоматического управления самолетом, требуют также знания основ теории автоматического управления и динамики полета самолета.

Автор выражает благодарность профессору, доктору технических наук Б.А. Титову, взявшему на себя труд по рецензированию данной книги.

*А. Гусев*

# ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТОМ

## Глава 1. ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА АВТОПИЛОТОВ

Измерительные устройства автопилотов предназначены для оценки параметров полета или их отклонений от заданных значений. Основными параметрами полета самолета являются углы тангажа, крена, рыскания и их угловые скорости, а также скорость, ускорения и высота полета.

Любое измерительное устройство состоит из чувствительного элемента, воспринимающего физическую величину, и преобразователя, который преобразует перемещение чувствительного элемента в другую форму, удобную для дальнейшего использования, чаще всего в электрический сигнал.

В этой главе под измерительным устройством будем понимать чувствительный элемент. Преобразователи рассмотрим в главе 2.

В качестве измерителей углов и угловых скоростей используются гироскопические устройства и системы.

### 1.1. Основы теории гироскопических устройств

Гироскоп – это быстровращающееся тело с одной неподвижной точкой. Для придания гироскопу свободы вращения относительно неподвижной точки (точки подвеса) применяют карданов подвес (рис. 1.1).

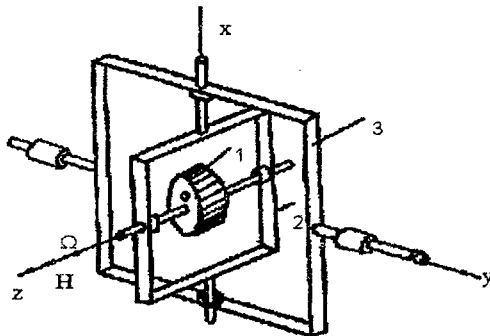


Рис. 1.1. Гироскоп с тремя степенями свободы

На рис.1.1 обозначено: 1 – ротор гироскопа, вращающийся с угловой скоростью  $\Omega$ ; 2 – внутренняя рамка карданова подвеса; 3 – внешняя рамка карданова подвеса.

Оси вращения ротора OZ, внутренней рамки OX и внешней рамки OY в исходном состоянии взаимно перпендикулярны. Неподвижной точкой является точка пересечения координатных осей O, которая называется точкой подвеса. Такой гироскоп имеет три степени свободы и называется трехстепенным. Ось вращения ротора OZ называется главной осью гироскопа, а конец главной оси, откуда вращение наблюдается против часовой стрелки, называется полюсом гироскопа. Оси вращения внутренней и внешней рамок называются экваториальными осями.

Гироскоп с тремя степенями свободы, у которого центр тяжести совпадает с точкой подвеса ротора, называется астатическим. Астатический гироскоп, на который не действуют моменты внешних сил, называется свободным гироскопом.

Основными параметрами гироскопа являются момент инерции и кинетический момент его ротора. Момент инерции твердого тела определяется выражением

$$J = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2, \quad (1.1)$$

где  $J$  – момент инерции;  $m_i$  – масса материальной точки;  $h_i$  – расстояние данной точки от оси вращения.

Момент инерции  $J_z$  относительно главной оси называют главным моментом инерции, а моменты  $J_x$  и  $J_y$  – экваториальными моментами.

Кинетическим моментом ротора гироскопа называется главный момент количества движения всех материальных точек ротора

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{h}_i \times m_i \vec{V}_i, \quad (1.2)$$

где  $H$  – кинетический момент,  $V_i$  – линейная скорость материальной точки. Известно, что

$$\vec{V}_i = \vec{\Omega} \times \vec{h}_i.$$

Подставив значение вектора линейной скорости материальной точки в (1.2), получим

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{h}_i \times m_i \vec{\Omega} \times \vec{h}_i = \vec{\Omega} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = J \vec{\Omega}, \quad (1.3)$$

так как  $\vec{\Omega} \times \vec{h}_i \perp \vec{h}_i$ .

Вектор кинетического момента совпадает с главной осью гироскопа и направлен в сторону, откуда вращение ротора наблюдается против часовой стрелки.

Определим производную от кинетического момента:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\bar{h}_i}{dt} \times m_i \bar{V}_i + \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \times m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}.$$

Так как  $\frac{d\bar{h}_i}{dt} = \bar{V}_i$ , а векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю, то первый член этого выражения равен нулю. В то же время  $\frac{d\bar{V}_i}{dt} = \bar{a}_i$ , где  $\bar{a}_i$  — ускорение материальной точки. Окончательно для производной от кинетического момента получим:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \times m_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}, \quad (1.4)$$

где  $\bar{M}$  — момент внешних сил.

Рассмотрим свободный гироскоп, т.е. гироскоп для которого  $\bar{M} = 0$ . В этом случае

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0.$$

Это означает, что свободный гироскоп сохраняет неизменным положение оси кинетического момента в инерциальном пространстве. Свободный гироскоп есть некоторая математическая идеализация реального гироскопа, на который всегда действуют определенные возмущающие моменты, например моменты трения в осях подвеса, момент небаланса сил из-за несовпадения точки подвеса с центром тяжести, моменты токоподводов и т.д. Если сделать эти моменты малыми, то можно сказать, что гироскоп с тремя степенями свободы с достаточной точностью сохраняет неизменным положение оси кинетического момента в инерциальном пространстве, что и позволяет использовать его для оценки углового положения летательного аппарата относительно созданной гироскопом базовой системы координат.

Производная от вектора есть линейная скорость конца этого вектора, т.е.

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{V}. \quad (1.5)$$

Сравнивая (1.5) и (1.4) можно сделать вывод, что  $\bar{V} = \bar{M}$ , т.е. линейная скорость конца вектора кинетического момента равна вектору момента внешних сил, приложенных к ротору гироскопа. Рассмотрим рисунок, причем для упрощения в дальнейшем на рисунках будем изображать гироскоп только в виде ротора с соответствующими осями. Пусть относительно оси  $Ox$  внутренней рамки приложен момент  $M_x$  (рис.1.2). Тогда, в полном соответствии с сделанным выше выводом, главная ось гироскопа будет поворачиваться отно-

сительно оси внешней рамки  $OY$  так, чтобы совместить полюс гироскопа с вектором внешнего момента, двигаясь по кратчайшему пути.

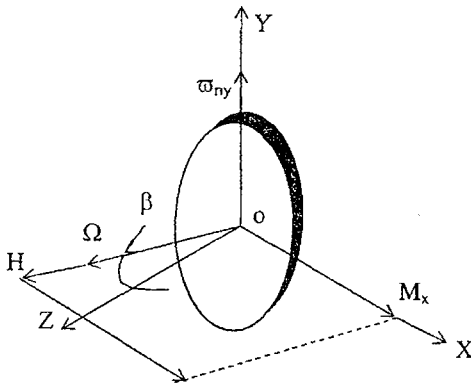


Рис.1.2. Прецессия гироскопа

Движение ротора гироскопа под воздействием внешнего момента относительно экваториальной оси, перпендикулярной оси приложенного момента, называется прецессией [9,14].

Линейная скорость конца вектора кинетического момента равна

$$\vec{V} = \vec{\omega}_{ny} \times \vec{H}, \quad (1.6)$$

где  $\omega_n$  – угловая скорость прецессии относительно оси  $OY$ .

Тогда можно записать

$$\vec{M}_x = \vec{\omega}_{ny} \times \vec{H} = \omega_{ny} H \sin(90^\circ - \beta) = \omega_{ny} H \cos \beta,$$

где  $\beta$  – угол между главной осью и осью прецессии. Для угловой скорости прецессии получим

$$\omega_{ny} = \frac{M_x}{H \cos \beta}. \quad (1.7)$$

Если угол  $\beta=0$ , что будет при взаимной перпендикулярности рамок, то

$$\omega_{ny} = \frac{M_x}{H}.$$

Если приложить момент относительно оси внешней рамки, то получим аналогичное выражение для угловой скорости прецессии относительно оси  $OX$ . Полученные результаты свидетельствуют о том, что свойство прецессии можно использовать для установления оси кинетического момента в требуемое положение.

Известно, что при сложном движении тела возникает ускорение Кариолиса

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega} \times V.$$

Рассмотрим гироскоп, относительно оси внутренней рамки которого действует момент  $M_x$  (рис.1.3). Для точек, расположенных выше оси OX, ускорение Кариолиса направлено на нас, для точек ниже оси OX – от нас.

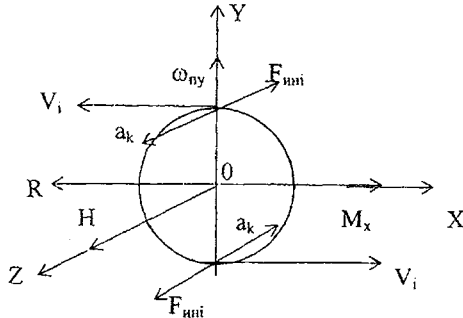


Рис.1.3. Гироскопический момент

Ускорение Кариолиса вызывает появление сил инерции  $F_{ини}$ , которые, в свою очередь, создают момент  $R$  относительно оси OX, направленный противоположно моменту внешних сил. Этот момент называется гироскопическим. Определим величину этого момента.

$$\bar{F}_{ини} = -m_i \bar{a}_k = 2m_i \bar{\omega}_{ny} \times \bar{V}_i;$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i \times \bar{F}_{ини} = -\sum_{i=1}^n 2m_i \bar{h}_i \times \bar{\omega}_{ny} \times \bar{V}_i.$$

Учитывая, что  $\bar{V}_i = \bar{\Omega} \times \bar{h}_i$  и  $-\bar{\omega}_{ny} \times \bar{\Omega} = \bar{\Omega} \times \bar{\omega}_{ny}$ , из последнего выражения получим

$$\bar{R} = 2J_y \bar{\Omega} \times \bar{\omega}_{ny} = \bar{H} \times \bar{\omega}_{ny}, \quad (1.8)$$

так как обычно  $J_y = 0.5J_z$ .

Сравнивая полученный результат с выражением (1.7), можно сделать вывод о том, что гироскопический момент равен по величине внешнему моменту и противоположно ему направлен. Именно поэтому в рассматриваемом случае гироскоп относительно оси OX сохраняет неизменным положение в пространстве. Если к гироскопу приложить момент  $M_y$  относительно оси внешней рамки, то возникнет гироскопический момент, компенсирующий внешний момент относительно этой оси. Гироскопический момент появляется сразу с появлением внешнего момента, и в этом смысле гироскоп является безинерционным звеном.



В заключение отметим, что выражения для гироскопического момента мы получили для постоянного по величине внешнего момента.

## 1.2. Уравнения движения гироскопа

Свяжем с гироскопом систему координат  $OX_r Y_r Z_r$ , совместив ось  $OZ_r$  с полярной (главной) осью ротора и расположив оси  $OX_r, OY_r$  в экваториальной плоскости так, чтобы они не принимали участия в собственном вращении ротора. Такая система осей носит название осей Резаля.

Пусть основание, на котором установлен гироскоп, вращается с угловой скоростью  $\omega$ , причем  $\omega \ll \Omega$ . В начальный момент времени оси Резаля совпадают с соответствующими осями объекта  $OXYZ$ , на котором установлен гироскоп. Ось вращения внешней рамки гироскопа установлена в подшипниках, наружные кольца которых жестко соединены с объектом (рис.1.4).

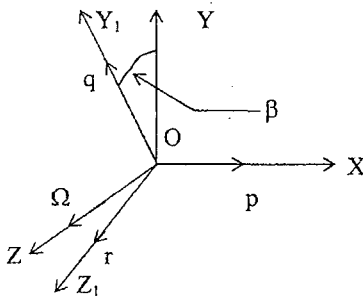


Рис. 1.4. Взаимное положение осей Резаля и объекта

При повороте объекта вокруг оси  $OX$  гироскоп сохранит неизменным положение оси кинетического момента. Наблюдатель, находящийся на объекте, увидит как бы вращение ротора относительно оси внутренней рамки. Это движение называется видимым движением гироскопа. Так как ось внешней рамки вместе с подшипниками повернется на тот же угол, то она по-прежнему будет совпадать с осью объекта, занявшей положение  $OY_1$ . Нарушится взаимная перпендикулярность оси внешней рамки и оси кинетического момента. При повороте объекта относительно оси внешней рамки гироскоп, стремясь сохранить неизменным положение кинетического момента, совершит видимое движение в противоположную сторону. Вместе с внешней рамкой повернется и внутренняя, так что взаимная перпендикулярность рамок не нарушится.

Выражение для угловой скорости объекта в проекциях на оси Резаля запишется в следующем виде:

$$\vec{\omega} = p\vec{x}_0 + q\vec{y}_0 + r\vec{z}_0,$$

где  $\bar{x}_0$ ,  $\bar{y}_0$ ,  $\bar{z}_0$  - орты координатных осей.

Угловая скорость ротора гироскопа в проекциях на оси Резаля будет равна

$$\bar{\Omega}_1 = p\bar{x}_0 + q\bar{y}_0 + (r \cos\beta + \Omega)\bar{z}_0.$$

Полное выражение для кинетического момента ротора гироскопа примет вид

$$\bar{G} = J_z (\Omega + r \cos\beta)\bar{z}_0 + J_x p\bar{x}_0 + J_y q\bar{y}_0.$$

Так как  $\omega \ll \Omega$ , то величиной  $r$  по сравнению с собственной угловой скоростью ротора гироскопа можно пренебречь. Найдем производную от выражения для кинетического момента:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & J_z \frac{d\Omega}{dt} \bar{z}_0 + J_x \frac{dp}{dt} \bar{x}_0 + J_y \frac{dq}{dt} \bar{y}_0 + \\ & + J_z \Omega \frac{d\bar{z}_0}{dt} + J_x p \frac{d\bar{x}_0}{dt} + J_y q \frac{d\bar{y}_0}{dt}. \end{aligned}$$

Производные от ортов координатных осей найдем из соображений, что все эти производные будут скоростями концов этих ортов, которые могут быть получены лишь за счет вращения ортов вокруг осей, не совпадающих с ним. Это означает, что производная от любого орта равна сумме угловых скоростей других ортов, векторно умноженной на сам орт:

$$\frac{d\bar{z}_0}{dt} = (p\bar{x}_0 + q\bar{y}_0) \times \bar{z}_0 = -p\bar{y}_0 + q \cos\beta \bar{x}_0,$$

$$\frac{d\bar{x}_0}{dt} = (r\bar{z}_0 + q\bar{y}_0) \times \bar{x}_0 = r \cos\beta \bar{y}_0 - q\bar{z}_0,$$

$$\frac{d\bar{y}_0}{dt} = (r\bar{z}_0 + p\bar{x}_0) \times \bar{y}_0 = -r \cos\beta \bar{x}_0 + p\bar{z}_0.$$

Подставим полученные соотношения в уравнение для производной от кинетического момента, разложим  $\bar{M}$  на составляющие по осям Резаля, получим, приравняв коэффициенты при одинаковых ортах, следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= J_x \frac{dp}{dt} + J_z \Omega q \cos\beta - J_y q r \cos\beta, \\ M_y &= J_y \frac{dq}{dt} - J_z \Omega p + J_x p r \cos\beta, \\ M_z &= J_z \frac{d\Omega}{dt} - J_x p q + J_y q p. \end{aligned} \right\}$$

Пренебрегая произведениями малых угловых скоростей и учитывая, что  $\Omega = \text{const}$  и  $J_z \Omega = H$ , получим систему уравнений гироскопа с тремя степенями свободы

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{dp}{dt} + Hq \cos \beta &= M_x, \\ J_y \frac{dq}{dt} - Hp &= M_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

### 1.3. Движение гироскопа под действием экваториального момента

Экваториальные моменты имеют различную природу. Прежде всего, эти моменты могут быть корректирующими, которые создаются по известным законам с целью придать оси кинетического момента определенное направление в пространстве. Экваториальные моменты могут быть возмущающими, приводящими к уходу оси кинетического момента от заданного направления. Среди возмущающих моментов, относящихся собственно к гироскопу, прежде всего необходимо отметить моменты трения в осях подвеса. Момент трения содержит две составляющие:

$$M_T = n_T \omega + M_T^* \text{sign} \omega. \quad (1.10)$$

Составляющая  $n_T \omega$  зависит от скорости поворота относительно оси подвеса и называется моментом “жидкостного” трения. Вторая составляющая постоянна по абсолютной величине ( $M_T^* = \text{const}$ ) и зависит только от знака угловой скорости. Эта составляющая носит название момента “сухого” трения.

Возмущающий момент относительно оси подвеса может быть вызван небалансом масс, когда центр тяжести не совпадает с точкой подвеса. Кроме того, возмущающие моменты возникают вследствие наличия токопроводов, обеспечивающих подачу энергии для раскрутки ротора и съем информации с преобразующих устройств.

Рассмотрим решение уравнений движения гироскопа в линейной постановке, т.е. при малых значениях угла  $\beta$ , таких, что можно считать  $\cos \beta = 1$ . Будем полагать, что на гироскоп действует только экваториальный момент  $M_y = M_y^* = \text{const}$ . Учтем также момент жидкого трения относительно оси внешней рамки подвеса. Момент жидкого трения относительно внутренней рамки подвеса существенно меньше и им будем пренебрегать. Будем рассматривать собственное движение гироскопа при неподвижном основании. В этом случае  $p = \dot{\beta}$ ,  $q = \dot{\alpha}$ . Будем считать также, что в начальный момент времени оси гироскопа взаимно перпендикулярны, т.е. начальные условия нулевые ( $\beta(0) = 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ ). Система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} J_x \frac{d^2 \beta}{dt^2} + H \dot{\alpha} &= 0, \\ J_y \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + n_y \dot{\alpha} - H \dot{\beta} &= M_y^* \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (1.11) и получим

$$J_x \dot{\beta} = -H \alpha.$$

Отсюда

$$\dot{\beta} = -\frac{H}{J_x} \alpha.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы (1.11) и получим линейное дифференциальное уравнение относительно угла поворота вокруг оси наружной рамки гироскопа.

$$J_y \ddot{\alpha} + n_y \dot{\alpha} + \frac{H^2}{J_x} \alpha = M_y^*. \quad (1.12)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (1.12), при  $H \gg n_y$ , определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j \omega_n,$$

$$\text{где } h = -\frac{n_y}{J_y}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{H^2}{J_x J_y} - \frac{n_y^2}{4J_y^2}}.$$

При нулевых начальных условиях решение дифференциального уравнения (1.12) будет

$$\alpha(t) = \frac{M_y^* J_x}{H^2} \left( 1 - e^{-ht} \left( \frac{h}{\omega_n} \sin \omega_n t + \cos \omega_n t \right) \right). \quad (1.13)$$

Из решения (1.13) следует, что при действии постоянного момента, например момента сухого трения, гироскоп совершает затухающие колебания с частотой  $\omega_n$ . Эти колебания называются нутационными. Установившееся значение угла  $\alpha$ , равное частному решению уравнения (1.12)

$\alpha_n = \frac{M_y^* J_x}{H^2} = \text{const}$ , называется нутационным броском. Решение по угловой

скорости относительно оси внутренней рамки подвеса примет вид

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{M_y^*}{H} \left( 1 - e^{-ht} \left( \frac{h}{\omega_n} \sin \omega_n t + \cos \omega_n t \right) \right). \quad (1.14)$$

После затухания нутационных колебаний гироскоп прецессирует относительно оси внутренней рамки с угловой скоростью

$$\dot{\beta}(t) = -\frac{M_y^*}{H}. \quad (1.15)$$

Сделаем выводы.

1. При действии момента относительно оси наружной рамки гироскоп сохраняет положение относительно оси этой рамки с ошибкой, не превышающей значения нутационного броска. Величина нутационного броска тем меньше, чем больше кинетический момент гироскопа.

2. Относительно оси внутренней рамки гироскоп прецессирует с угловой скоростью (1.15) и эта угловая скорость также тем меньше, чем больше кинетический момент гироскопа.

3. Нутационные колебания имеют очень малую амплитуду и являются затухающими. Это позволяет в технических приложениях ими пренебрегать, что означает неучет инерционных членов, и рассматривать так называемые прецессионные уравнения движения гироскопа (при  $\beta=0$ )

$$\left. \begin{aligned} Hq &= M_x, \\ -Hp &= M_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

4. Момент жидкого трения является не возмущающим, а демпфирующим для одноименной оси, но можно показать, что для перекрестной оси он является возмущающим и вызывает незначительную прецессию относительно этой оси. Момент сухого трения вызывает уходы гироскопа от заданного положения.

Выше мы рассмотрели движение гироскопа в случае постоянного по величине возмущающего момента.

Рассмотрим более общий случай, когда возмущающий момент  $M_y$  является некоторой функцией времени. Для упрощения задачи моментами трения будем пренебрегать. Из первого уравнения системы (1.9) при  $M_x=0$  получим

$$\dot{\alpha} = -\frac{J_x}{H \cos \beta} \ddot{\beta}.$$

Так как  $M_x=0$ , то можно считать, что и  $\ddot{\alpha} = 0$ . Тогда из второго уравнения системы (9) можно получить

$$\dot{\beta} = -\frac{M_y(t)}{H}.$$

Продифференцировав это выражение и подставив результат в предыдущую формулу, получим

$$\dot{\alpha} = -\frac{J_x}{H^2 \cos \beta} \frac{d}{dt} (M_y(t)). \quad (1.17)$$

Анализ полученных выше результатов и формулы (1.17) показывает, что гироскоп с тремя степенями свободы в реальных условиях не может с абсолютной точностью сохранять неизменным положение оси кинетического момента в инерциальном пространстве. При постоянном значении возмущающего момента точность ориентации относительно оси наружной рамки определяется величиной нутационного броска, а при переменном возмущающем моменте скорость ухода гироскопа от заданного положения является функцией производной от этого момента.

Точность сохранения заданного положения оси кинетического момента в инерциальном пространстве тем выше, чем больше кинетический момент гироскопа. Большое значение кинетического момента обеспечивается высокой скоростью вращения ротора гироскопа и специальной его конструкцией, когда статор располагается внутри ротора, т.е. ротор обкатывается вокруг статора. Это увеличивает массу и момент инерции ротора. Для увеличения угловой скорости вращения ротора гироскопы запитываются током повышенной частоты (400-1000Гц). Точность ориентации также зависит от угла  $\beta$  между полярной осью и осью наружной рамки, т.е. от степени взаимной перпендикулярности внутренней и наружной рамок. Для обеспечения высокой точности ориентации необходимо принимать меры для уменьшения возмущающих моментов, в частности моментов трения. Уменьшение моментов трения достигается применением в осях подвеса специальных трехколесных подшипников с вращающимися в разных направлениях промежуточными кольцами и использованием поплавковых гироскопов.

#### 1.4. Гироскоп с тремя степенями свободы на подвижном основании

Основное содержание теории авиационных гироскопических приборов сводится к определению законов установления гироскопа в положение устойчивого равновесия в той или иной системе земных координатных осей. Знание этих законов позволит определить условия, при которых гироскоп способен обозначить направление указанных земных координатных осей или определять скорость вращения самолета относительно этих осей.

В любом случае для решения сформулированной задачи потребуется перейти от уравнений движения относительно осей Резаля к уравнениям движения относительно земных осей.

Возьмем систему земных координатных осей  $O\xi\eta\zeta$  (рис.1.5). Одну из этих осей, например  $O\xi$ , совместим с направлением, которое должно быть определено при помощи данного гироскопа. Назовем эту ось главной земной осью. Со второй какой-нибудь осью, например с осью  $O\eta$ , совместим ось вращения внешней рамки карданова подвеса. Направление третьей оси определится согласно правой системе координат.

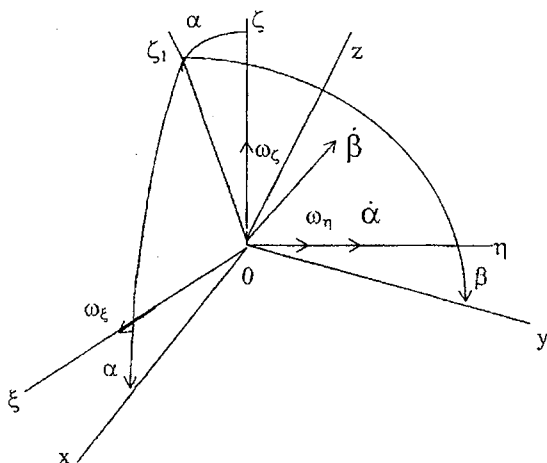


Рис.1.5. Углы Эйлера

Совместим с началом координат  $O\xi\eta\zeta$  начало системы координат  $OXYZ$ . Ось  $OZ$  этой системы совмещена с полярной осью ротора, оси  $OX$  и  $OY$  являются осями внутренней и внешней рамок гироскопа. Положение гироскопической системы координат относительно земной определяется углами Эйлера -  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $\alpha$  - угол поворота гироскопа относительно оси внешней рамки с угловой скоростью  $\dot{\alpha}$ , а  $\beta$  - угол поворота гироскопа относительно оси внутренней рамки с угловой скоростью  $\dot{\beta}$ .

Система координат  $O\xi\eta\zeta$  всегда участвует во вращении Земли и, кроме того, может получить дополнительные вращения за счет перемещения самолета относительно земной поверхности. Пусть в совокупности угловые скорости всех этих вращений дают проекции на оси земной системы координат равные  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$  и  $\omega_\zeta$  соответственно. Установим порядок поворотов: первый поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $O\eta$ , второй поворот вокруг оси  $OX$  на угол  $\beta$ . Тогда абсолютные угловые скорости вращения гироскопа  $p$  и  $q$  относительно осей  $OX$  и  $OY$  определяются выражениями

$$p = -\dot{\beta} + \omega_\xi \cos \alpha - \omega_\zeta \sin \alpha, \quad (1.18)$$

$$q = \dot{\alpha} + \omega_\eta \cos \beta - \omega_\xi \sin \alpha \sin \beta - \omega_\zeta \cos \alpha \sin \beta. \quad (1.19)$$

Для малых значений углов  $\alpha$  и  $\beta$ , с которыми мы преимущественно и будем иметь дело, выражения (1.18) и (1.19) примут вид

$$p = -\dot{\beta} + \omega_\xi - \omega_\zeta \alpha, \quad (1.20)$$

$$q = \dot{\alpha} + \omega_\eta - \omega_\zeta \beta. \quad (1.21)$$

Оценим теперь зависимость угловой скорости  $\omega$  ( $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ ) от угловой скорости вращения Земли и движения ЛА относительно земной поверхности при различной ориентации оси кинетического момента. Рассмотрим географическую систему координат, ось  $OZ$  которой совпадает с истинной вертикалью места, а оси, находящиеся в плоскости горизонта, ориентированы по линиям Север – Юг и Восток – Запад соответственно (рис. 1.6).

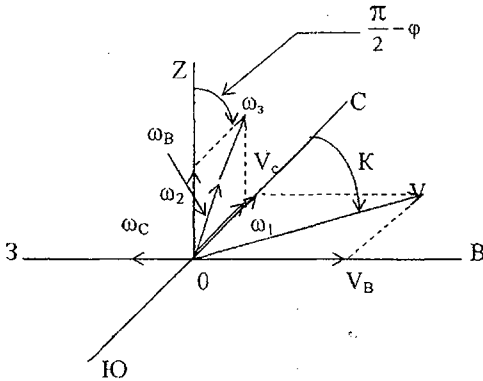


Рис. 1.6. Составляющие угловой скорости

На рис.1.6 обозначено:  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  – широта места,  $V$  – скорость ЛА,  $K$  – путевой угол (курс) ЛА.

Так как вектор угловой скорости Земли лежит в плоскости, проходящей через истинную вертикаль места и линию Север – Юг (местный меридиан), то проекции угловой скорости Земли на эти оси будут

$\omega_1 = \omega_3 \cos \varphi$  – горизонтальная составляющая земного вращения,

$\omega_2 = \omega_3 \sin \varphi$  – вертикальная составляющая земного вращения.

Разложив скорость самолета  $V$  на составляющие по меридиану  $V_c = V \cos K$  и по параллели  $V_b = V \sin K$ , получим возможность трактовать результат полета самолета как дополнительное вращение плоскости горизонта,

во-первых, вокруг оси вращения Земли с угловой скоростью  $\omega_B = \frac{V_b}{R \cos \varphi}$  и,

во-вторых, с угловой скоростью  $\omega_C = \frac{V_c}{R}$  вокруг экваториального диаметра

Земли, перпендикулярного плоскости меридиана данного места. Здесь  $R$  – это расстояние от центра Земли до самолета.



### 1.4.1. Вертикальное расположение главной оси гироскопа

В этом случае главная ось  $O\xi$  системы координат  $O\xi\eta\zeta$  совмещается с истинной вертикалью места (рис.1.7). Ось  $O\eta$ , с которой совмещена ось вращения внешней рамки, либо совпадает с направлением вектора скорости самолета, либо будет ей перпендикулярна, в зависимости от того, является ли ось вращения внешней рамки параллельной продольной оси самолета или его поперечной оси. Угол скольжения самолета считаем равным нулю. Очевидно, что если взять за основу первый случай, то второй случай получим из первого увеличением курса самолета на угол 90 градусов.

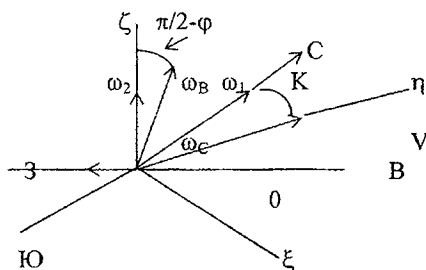


Рис.1.7. Абсолютные угловые скорости при вертикальном расположении главной оси гироскопа

Проектируя соответствующие составляющие на оси системы  $O\xi\eta\zeta$  для случая параллельности оси внешней рамки и продольной оси самолета, получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= -\omega_1 \sin K - \omega_B \cos \varphi \sin K - \omega_C \cos K, \\ \omega_{\eta} &= \omega_1 \cos K + \omega_B \cos \varphi \cos K - \omega_C \sin K, \\ \omega_{\zeta} &= \omega_2 + \omega_B \sin \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Подставив сюда выражения для угловых скоростей  $\omega_C$ ,  $\omega_B$ , а также линейных скоростей  $V_C$  и  $V_B$ , можно получить

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= -\omega_1 \sin K - \frac{V}{R}, \\ \omega_{\eta} &= \omega_1 \cos K, \\ \omega_{\zeta} &= \omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\}$$

С учетом выражений (1.20) и (1.21) для абсолютных угловых скоростей вращения гироскопа получим

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\beta} - \left(\omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi\right) \alpha - \omega_1 \sin K - \frac{V}{R}, \\ q &= \dot{\alpha} - \left(\omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi\right) \beta + \omega_1 \cos K. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Если ось внешней рамки гироскопа параллельна поперечной оси самолета, то с учетом вышесказанного можно записать

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\beta} - \left(\omega_2 + \frac{V}{R} \cos K \operatorname{tg} \varphi\right) \alpha - \omega_1 \cos K - \frac{V}{R}, \\ q &= \dot{\alpha} - \left(\omega_2 - \frac{V}{R} \cos K \operatorname{tg} \varphi\right) \beta - \omega_1 \sin K. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

#### 1.4.2. Горизонтальное расположение главной оси гироскопа

Ось  $O\xi$  системы координат  $O\xi\eta\zeta$  совместим с меридианом. Ось вращения внешней рамки гироскопа  $O\eta$  расположим параллельно нормальной оси самолета. В случае горизонтального полета самолета, который и будем рассматривать, эта ось совпадает с истинной вертикалью места (рис. 1.8).

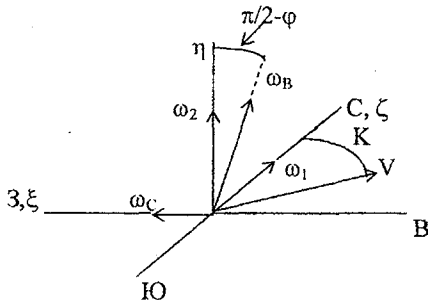


Рис. 1.8. Абсолютные угловые скорости при горизонтальном расположении главной оси гироскопа

Проектируя составляющие вращения на оси системы  $O\xi\eta\zeta$  для рассматриваемого их положения, получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= \omega_C = \frac{V}{R} \cos K, \\ \omega_\eta &= \omega_2 + \omega_B \sin \varphi = \omega_2 + \frac{V \sin K}{R \cos \varphi} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \omega_1 + \omega_B \cos \varphi = \omega_1 + \frac{V}{R} \sin K. \end{aligned} \right\}$$

В этом случае для абсолютных угловых скоростей вращения гироскопа получим

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\beta} - \left(\omega_1 + \frac{V}{R} \sin K\right) \alpha + \frac{V}{R} \cos K, \\ q &= \dot{\alpha} - \left(\omega_1 + \frac{V}{R} \sin K\right) \beta + \left(\omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi\right). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

При такой ориентации осей гироскопа создается возможность использовать его для оценки путевого угла самолета.

Возможен случай, когда оси гироскопа ориентируются в связанной системе координат. При горизонтальном расположении главной оси гироскопа такая ориентация может служить для индикации отклонения ЛА от некоторой заданной вертикальной плоскости полета. Если главная ось гироскопа параллельна продольной оси ЛА (продольная установка), то приняв за положительное направление оси внутренней рамки параллельное правому крылу, для абсолютных угловых скоростей гироскопа получим

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\beta} - (\omega_1 \cos K) \alpha + \omega_1 \sin K, \\ q &= \dot{\alpha} - (\omega_1 \cos K) \beta + \left(\omega_2 + \frac{V \sin K}{R} \operatorname{tg} \varphi\right). \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Если главная ось гироскопа параллельна поперечной оси самолета, то для получения выражений для абсолютных угловых скоростей во втором и третьем членах первого уравнения и во втором члене второго уравнения системы (1.25) необходимо вместо курса самолета  $K$  подставить  $K+90^\circ$ .

## 1.5. Погрешности гироскопа с тремя степенями свободы

С методической точки зрения погрешности трехстепенных гироскопов, используемых в системах ориентации, можно разделить на инструментальные, кинематические, скоростные и геометрические (карданные).

**Инструментальные погрешности** возникают из-за несовершенства элементов прибора, вследствие чего на гироскоп действуют возмущающие моменты трения, моменты от статической несбалансированности, неравножесткости конструкции и т.п. Под действием этих моментов ось кинетического момента прецессирует в инерциальном пространстве, отклоняясь от заданного направления, что приводит к появлению инструментальных погрешностей при определении углового положения летательного аппарата.

**Кинематические погрешности** возникают вследствие конического движения измерительных осей гироскопа в инерциальном пространстве. Такое коническое движение имеет место в результате действия инерционных моментов от рамок карданова подвеса или моментов сухого трения, которые возникают вследствие угловых колебаний летательного аппарата или угловых вибраций основания.

**Скоростные погрешности** возникают вследствие движения опорной системы координат в инерциальном пространстве. Например, если в качестве опорной системы координат выбран географический трехгранник в точке старта летательного аппарата (ЛА), то скоростные погрешности определяются угловой скоростью вращения Земли. Для некорректируемых гироскопов скоростные погрешности находятся из кинематических соотношений и могут быть учтены в бортовом вычислительном устройстве.

Инструментальные и кинематические погрешности приводят к отклонению оси кинетического момента от заданного направления, возникает так называемый дрейф гироскопа, который численно характеризуют угловой скоростью дрейфа.

Сравнительно грубые гироскопы на обычных шарикоподшипниковых опорах с кинетическим моментом  $H=0.1 \div 0.4$  Н·м·с имеют скорость дрейфа, равную 10-100 град/ч. Применение в опорах трехколесных подшипников с вращающимися по определенному закону промежуточными опорами снижает величину угловой скорости дрейфа в 2-3 раза. Наиболее значительное снижение угловой скорости дрейфа достигается в поплавковых гироскопах – 1-3град/ч.

**Геометрические (карданные) погрешности** возникают вследствие несовпадения осей гироскопа, относительно которых отсчитываются углы  $\alpha$  и  $\beta$  с направлением осей отсчета углов, определяющих угловое положение ЛА относительно базовой (опорной) системы координат. Рассмотрим методику определения карданных ошибок.

Рассматриваются только ошибки измерения угловых координат ЛА, связанные с геометрией карданова подвеса. Вращение Земли и движение ЛА не учитываются.

Пусть в некоторый момент времени оси СГ (оси Резаля) ориентированы следующим образом: ось внешней рамки подвеса  $OY_{\Gamma}$  направлена по связанной оси  $OY$ , ось внутренней рамки  $OX_{\Gamma}$  - по связанной оси  $OX$ , ось кинетического момента - по связанной с ЛА оси  $OZ$ . Такой СГ предназначен для измерения углов рыскания  $\psi$  и крена  $\gamma$ . Примем следующий порядок поворотов: первый поворот - на угол рыскания относительно оси  $OY$ , второй поворот - на угол крена относительно оси  $OX$  (рис.1.9).

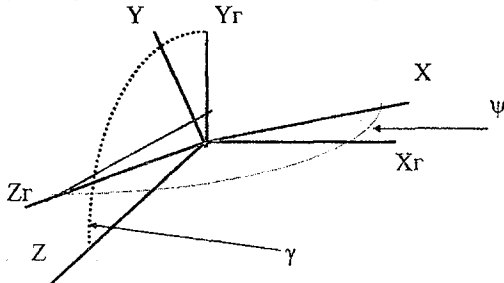


Рис.1.9. Определение карданных ошибок

Из рисунка следует, что в данном случае СГ измеряет не угол крена относительно оси  $OX$ , а некоторый другой угол относительно оси  $OX_1$ . Допустив обратный порядок поворотов, получим аналогичный вывод относительно угла рыскания.

Таким образом, угол рыскания измеряется СГ точно, только если угол крена равен нулю, а угол крена может быть измерен точно, только если угол рыскания равен нулю. В общем случае направления осей связанной системы координат не совпадают с направлением осей системы координат, созданной СГ. Это несовпадение осей, обусловленное геометрией карданова подвеса, является причиной возникновения карданных ошибок СГ.

Аналитические методы вычисления ошибок СГ связаны с необходимостью определения параметров некоторого вектора в системе координат, повернутой относительно исходной на определенные углы. Эта задача решается применением векторно-матричных методов преобразования пространства. Задачу вычисления карданных ошибок разобьем на две задачи, связанные между собой: -задачу изучения методики получения выражений для матриц взаимных поворотов и задачу получения выражений для собственно карданных ошибок СГ.

### 1.5.1. Матрицы взаимных поворотов

Взаимная ориентация осей СГ и связанной системы координат в некоторый момент времени определяется углами тангажа, рыскания и крена. Для определенности допустим следующий порядок поворотов: - 1-й поворот - на угол тангажа  $\nu$ , 2-й поворот - на угол рыскания  $\psi$ , 3-й поворот - на угол крена  $\gamma$ . В системе координат, сохраняемой СГ, определим положение некоторого вектора  $H(h_{x_2}, h_{y_2}, h_{z_2})$ . Определим проекции этого вектора на оси связанной системы координат. Первый поворот на угол тангажа совершим относительно оси  $OZ_1$  (рис.1.10).

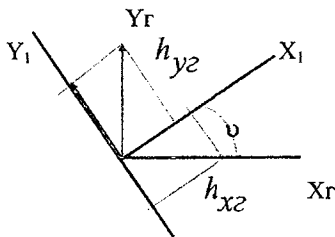


Рис.1.10. Поворот относительно оси  $OZ_1$ .

Уравнения для проекций вектора  $H$  на оси  $OX_1$  и  $OY_1$  примут вид

$$\begin{aligned} h_{x_1} &= h_{x_2} \cos \nu + h_{y_2} \sin \nu, \\ h_{y_1} &= -h_{x_2} \sin \nu + h_{y_2} \cos \nu, \\ h_{z_1} &= h_{z_2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Эту систему уравнений в матричной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} h_{x1} \\ h_{y1} \\ h_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{x2} \\ h_{y2} \\ h_{z2} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

В этом выражении матрица  $A\nu = \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  является матрицей

одного поворота, в рассматриваемом случае на угол тангажа.

Второй поворот совершим на угол  $\psi$  относительно промежуточной оси  $OY_1$  (рис.1.11).

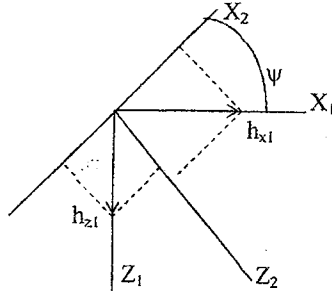


Рис.1.11. Поворот относительно оси  $OY_1$

Из рисунка следует:

$$\begin{aligned} h_{x2} &= h_{x1} \cos \psi + h_{z1} \sin \psi, \\ h_{y2} &= h_{y1}, \\ h_{z2} &= h_{x1} \sin \psi + h_{z1} \cos \psi. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Теперь можно записать

$$\begin{pmatrix} h_{x2} \\ h_{y2} \\ h_{z2} \end{pmatrix} = A\psi \begin{pmatrix} h_{x1} \\ h_{y1} \\ h_{z1} \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

где  $A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}$  - матрица поворота на угол рыскания.

Третий поворот произведем на угол крена вокруг оси  $OX_2$ .

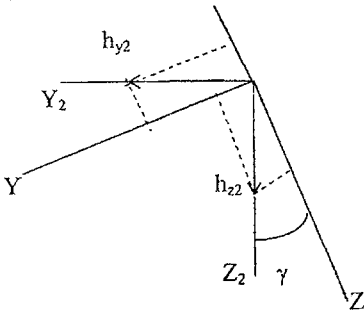


Рис.1.12. Поворот относительно оси  $OX_2$

Аналогично предыдущему получим

$$\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = A_\gamma \begin{bmatrix} h_{x2} \\ h_{y2} \\ h_{z2} \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

где  $A_\gamma$  - матрица поворота на угол крена.

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Подставим в (1.30) значения вектора  $(h_{x2}, h_{y2}, h_{z2})^T$  из (1.29), а в полученное выражение вектор  $(h_{x1}, h_{y1}, h_{z1})^T$  из (1.27), получим

$$\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_{xГ} \\ h_{yГ} \\ h_{zГ} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

В этом выражении  $A = A_\gamma A_\psi A_\nu$  — матрица трех поворотов.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \nu & \cos \psi \sin \nu & -\sin \psi \\ \cos \nu \sin \psi \sin \gamma & \sin \nu \sin \psi \sin \gamma + \cos \nu \cos \gamma & \sin \gamma \cos \psi \\ -\sin \nu \cos \gamma & \cos \nu \cos \gamma & \\ \cos \nu \cos \gamma \sin \psi + \sin \nu \sin \gamma & \cos \gamma \sin \psi \sin \nu - \sin \gamma \cos \nu & \cos \gamma \cos \psi \end{pmatrix}.$$

### 1.5.2. Методика определения карданных ошибок гироскопа

Знание матрицы трех поворотов позволяет определить проекции кинетического момента  $H$  на оси связанной системы координат. Так как проекции вектора кинетического момента на оси Резаля есть  $(0, 0, H)^T$ , то его проекции на связанные оси примут вид

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin \gamma \cos \psi \\ \cos \gamma \cos \psi \end{pmatrix} H. \quad (1.33)$$

Представим теперь, что относительно связанной поворачивается система координат гироскопа на углы  $\alpha$  и  $\beta$  относительно осей внешней и внутренней рамок соответственно в отрицательном направлении так, чтобы проекции вектора кинетического момента на оси связанной системы координат были равны уже полученным. Проекции некоторого вектора  $X(x, y, z)$ , заданного в связанной системе, на оси гироскопической системы координат можно определить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \\ z_z \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$



Здесь  $A_1 = A_\beta A_\alpha$  — матрица двух поворотов. Определим обратную матрицу

$A_1^{-1} = A_\alpha^{-1} A_\beta^{-1}$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Выражения для матрицы двух поворотов получают аналогично предыдущему.

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad A_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Для проекций вектора кинетического момента на оси связанной системы получим

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} H. \quad (1.36)$$

Приравнявая (1.33) и (1.36), получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \sin \psi, \\ \sin \beta &= \sin \gamma \cos \psi, \\ \cos \alpha \cos \beta &= \cos \gamma \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Разделив первое уравнение системы на третье, будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \psi / \cos \gamma.$$

Выражения для карданных ошибок примут вид

$$\left. \begin{aligned} \delta\psi &= \alpha - \psi = \arctg(\operatorname{tg}\psi / \cos\gamma) - \psi, \\ \delta\gamma &= \beta - \gamma = \arcsin(\sin\gamma \cos\psi) - \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Анализ погрешностей гироскопа с тремя степенями свободы, в особенности при действии возмущающих моментов, изменяющихся во времени, показывает, что такой гироскоп для целей ориентации ЛА может иметь ограниченное применение. Ниже мы рассмотрим один из возможных вариантов применения гироскопа с тремя степенями свободы для определения курса самолета.

## 1.6. Гироскопические указатели курса

Гироскоп с тремя степенями свободы не имеет собственного направляющего момента, и для измерения курса самолета необходимо ось его кинетического момента ориентировать в направлении на Север (Nord), т.е. установить ее в плоскость меридиана. Различные способы такой ориентации и определили названия и принцип действия различных гироскопических указателей курса.

### 1.6.1. Гироскоп

В этом случае направляющий момент создается за счет смещения центра тяжести относительно точки подвеса по отрицательной полуоси ОУ (рис. 1.13).

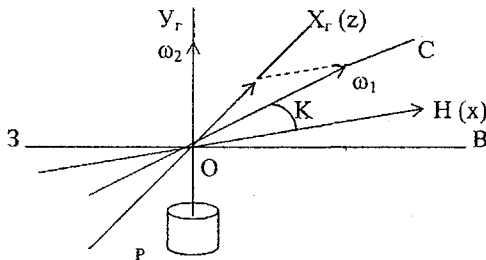


Рис. 1.13. Создание направляющего момента

Смещение центра тяжести обеспечивается дополнительным грузом Р с плечом  $l$ . Вначале кратко рассмотрим физику происходящих процессов при неподвижном ЛА. Положим, что в начальный момент времени ось внешней рамки совпадает со связанной нормальной осью самолета и истинной вертикалью места. Ось кинетического момента направлена по продольной оси самолета, т.е. начальная ошибка направления главной оси гироскопа в данный момент равна курсу самолета. За счет горизонтальной составляющей угловой скорости Земли появится угловая скорость  $\omega_1 \sin K$  относительно оси

внутренней рамки и, стремясь сохранить неизменным положение главной оси, гироскоп повернется относительно оси  $OX_1$  на некоторый угол  $\beta$ . Это вызовет появление момента  $Pl\sin\beta$  относительно оси внутренней рамки и гироскоп начнет прецессионное движение относительно оси внешней рамки, которое будет продолжаться до выполнения условия  $\alpha(0)=K=0$ . Таким образом, момент, создаваемый грузом  $P$ , действительно является направляющим, и за счет него главная ось гироскопа устанавливается в плоскость меридиана места. Если в начальный момент шкала регистрации курса установлена на ноль, то после окончания приведения оси кинетического момента в плоскость меридиана она покажет истинный курс ЛА.

Смещение центра тяжести гироскопа относительно точки подвеса вызывает эффект маятника, что, в свою очередь, вызовет колебания главной оси относительно установившегося положения. Для быстрого успокоения этих колебаний вводят дополнительное демпфирование относительно экваториальных осей гироскопа.

В рамках прецессионной теории при неподвижном ЛА ( $V=0$ ), с учетом выражений для абсолютных угловых скоростей (1.24), уравнения движения гироскопа можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} H(\dot{\alpha} - \omega_1\beta + \omega_2) &= m_x \dot{\beta} + Pl\beta, \\ -H(-\dot{\beta} - \omega_1\alpha) &= m_y \dot{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

В уравнениях (1.39) не учтены моменты трения, так как их влияние на положение главной оси относительно меридиана места, в силу того что  $Pl\beta \gg M_{y\text{тр}}$ , незначительно. Разделим обе части уравнений на  $H$ , обозначим

$\lambda = \frac{Pl}{H}$  и перейдя к изображениям по Лапласу, получим

$$\left. \begin{aligned} s\alpha(s) - \left(\frac{m_x}{H}s + (\omega_1 + \lambda)\right)\beta &= \alpha(0) - \frac{m_x}{H}\beta(0) - \frac{\omega_2}{s}, \\ \left(\frac{m_y}{H}s + \omega_1\right)\alpha(s) + s\beta(s) &= \frac{m_y}{H}\alpha(0) + \beta(0). \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Здесь учтено, что при  $V=0$  вертикальная составляющая угловой скорости Земли постоянна. Величины  $m_x$  и  $m_y$  – коэффициенты демпфирования.

Решив систему (1.40) для изображений углов поворота гироскопа относительно экваториальных осей, получим

$$\alpha(s) = \frac{1}{D(s)} \left[ s\alpha(0) - \frac{m_x s}{H}\beta(0) - \omega_2 + \frac{m_x m_y}{H^2} s\alpha(0) + \frac{m_y}{H}(\omega_1 + \lambda)\alpha(0) + \frac{m_x s}{H}\beta(0) + (\omega_1 + \lambda)\beta(0) \right],$$

$$\beta(s) = \frac{1}{D(s)} \left[ \left( 1 + \frac{m_x m_y}{H^2} \right) s \beta(0) + \frac{m_y}{H} \omega_2 - \omega_1 \alpha(0) + \right. \\ \left. + \frac{m_x \omega_1}{H} \beta(0) + \frac{\omega_1 \omega_2}{s} \right].$$

В полученных выражениях  $D(s)$  – характеристический определитель системы. Характеристическое уравнение имеет вид

$$D(s) = \left( 1 + \frac{m_x m_y}{H^2} \right) s^2 + \left( \frac{m_x}{H} \omega_1 + \frac{m_y}{H} (\omega_1 + \lambda) \right) s + \omega_1 (\omega_1 + \lambda) = 0.$$

Все коэффициенты этого уравнения положительны, что для системы второго порядка соответствует выполнению необходимого и достаточного условия устойчивости. Система устойчива и ее решением являются затухающие гармонические колебания.

В соответствии с теоремой о конечном значении оригинала для установившихся значений углов получим

$$\alpha_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \alpha(s) = 0, \\ \beta_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \beta(s) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \lambda}. \quad (1.41)$$

Таким образом, демпфированный гироскоп (ГК) при произвольных начальных условиях на неподвижном ЛА устанавливается в плоскости меридиана с превышением оси кинетического момента над плоскостью горизонта равным  $\beta_{уст}$ .

Рассмотрим влияние скорости и ускорения ЛА на ГК.

Из уравнений, определяющих проекции угловых скоростей за счет вращения Земли и движения ЛА на оси гироскопической системы координат, пренебрегая величиной  $\frac{V \sin K}{R}$  по сравнению с  $\omega_1$  и величиной  $\frac{V \sin K}{R \cos \varphi}$  по сравнению с  $\omega_2$ , получим

$$p = -\dot{\beta} - \omega_1 \alpha + \frac{V}{R} \cos K, \\ q = \dot{\alpha} - \omega_1 \beta + \omega_2.$$

В этом случае уравнения ГК примут вид

$$\left. \begin{aligned} H(\dot{\alpha} + \omega_2 - \omega_1 \beta) - m_x \dot{\beta} &= Pl\beta + \frac{Pl}{g} \dot{V} \cos K - \omega_2, \\ H(\dot{\beta} + \omega_1 \alpha - \frac{V}{R} \cos K) + m_y \dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

При движении ЛА угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  становятся функциями времени и найти изображения произведений  $\omega_1 \alpha$  и  $\omega_1 \beta$  можно только при известных функциях  $\omega_1(t)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ . Для упрощения анализа будем рассматривать короткий участок полета такой, который дает возможность считать угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  постоянными. Это допущение тем более справедливо, что мы рассматриваем линеаризованные уравнения гироскопа, считая углы  $\alpha$  и  $\beta$  малыми.

Разделим оба уравнения на  $H$ , и перейдя к изображениям по Лапласу, получим

$$\left. \begin{aligned} s\alpha(s) - \left(\frac{m_x s}{H} + (\omega_1 + \lambda)\right)\beta(s) &= \alpha(0) - \frac{m_x}{H}\beta(0) + \frac{\lambda}{g}\dot{V} \cos K - \frac{\omega_2}{s}, \\ \left(\frac{m_y s}{H} + \omega_1\right)\alpha(s) + s\beta(s) &= \frac{m_y}{H}\alpha(0) + \beta(0) + \frac{V(s)}{R} \cos K. \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение системы (1.41) будет таким же, как и ранее, и оно определяет затухающее собственное движение. Будем считать, что до начала полета отработка начальных условий произведена и ось кинетического момента ГК заняла положение, определяемое выражениями (1.41). Шкала прибора установлена так, что ее показания на этот момент времени соответствуют истинному курсу.

Пусть  $\dot{V} = 0$ . Определим частное решение по воздействию  $\frac{V}{R} \cos K$  и вертикальной составляющей вращения Земли, которая при движении самолета становится переменной величиной. Записав замещенные определители и разделив их на характеристический полином, при  $V = \text{const} \rightarrow \frac{V}{s}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha(s) &= \frac{1}{D(s)} \left( \frac{V m_x}{RH} \cos K + \frac{V}{Rs} (\omega_1 + \lambda) \cos K \right), \\ \beta(s) &= \frac{1}{D(s)} \frac{V}{R} \cos K. \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Используя теорему о конечном значении оригинала, получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ycm} &= \frac{V}{R\omega_1} \cos K, \\ \beta_{ycm} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Таким образом, возвышение оси кинетического момента над плоскостью горизонта останется прежним, а в показания курса будет внесена ошибка, равная  $\alpha_{уст}$ . Эта ошибка называется девиацией гирокомпы. При курсах  $K=90^\circ$  и  $K=270^\circ$  девиация равна нулю. При отличных от этих курсов девиация зависит от широты места и курса. Учитывая малость угловой скорости  $\omega_1$ , можно сделать вывод, что при определенных условиях девиация ГК может принимать большие значения.

Рассмотрим теперь случай, когда имеется ускорение  $V'$ , а курс является постоянным. Уравнения ГК в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{m_x}{H} \dot{\beta} + (\omega_1 + \lambda) \beta - \omega_2 + \frac{\lambda}{g} \dot{V} \cos K, \\ \dot{\beta} &= -\omega_1 \alpha - \frac{m_y}{H} \dot{\alpha} + \frac{V}{R} \cos K. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Найдем условие, при котором установившиеся значения угловых отклонений являются частными решениями системы уравнений (1.44). Подставив  $\alpha_{уст}$  из (1.43) и  $\beta_{уст}$  из (1.41), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{V'}{R\omega_1} \cos K &= (\omega_1 + \lambda) \frac{\omega_2}{\omega_1 + \lambda} - \omega_2 + \frac{\lambda}{g} V' \cos K, \\ 0 &= -\omega_1 \frac{V}{\omega_1 R} + \frac{V}{R} \cos K. \end{aligned} \right\}$$

Во втором уравнении пренебрегаем величиной  $\frac{m_y}{H} \dot{\alpha}$ , и оно становится тождественно равным нулю. Из первого уравнения последней системы следует условие невозмущаемости ГК ускорением при движении постоянным курсом:

$$\lambda \omega_1 = \frac{g}{R} \cdot \lambda \omega_1 = \frac{g}{R}. \quad (1.45)$$

Если это условие выполняется, то ГК никаких девиаций, кроме скоростных, иметь не будет. Период собственных колебаний, как следует из характеристического уравнения системы, равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1(\omega_1 + \lambda)}} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda \omega_1}}.$$

При выполнении условия невозмущаемости

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84.4 \text{ мин.}$$

Значительным будет и время затухания колебаний. В связи с этим требуется достаточно большое время, пока после запуска ГК придет в положение равновесия. Это обстоятельство, а также большие значения курсовых девиаций допускают применение ГК только на объектах с малой скоростью и практически исключают его применение в авиации.

### 1.6.2. Гирополукомпас

Гирополукомпасом (ГПК) называется курсовой гироскоп, внешняя рамка которого имеет постоянную прецессию, предназначенную для компенсации влияния вращения Земли, а внутренняя рамка имеет радиальную коррекцию, осуществляемую по положению относительно внешней рамки.

До начала движения ЛА ГПК в заарретированном состоянии устанавливается так, что показания на шкале прибора становятся равными курсу самолета, т.е. совпадают с показаниями магнитного компаса. Уравнения ГПК после его разарретирования при неподвижном ЛА имеют вид уравнений (1.40), в которых отсутствует член, определяющий направляющий момент за счет смещения центра тяжести,  $\lambda=0$ . В силу способности сохранять неизменным направление главной оси в течение ограниченного промежутка времени порядка 10-15 мин ГПК будет с известной степенью точности обозначать курс самолета. По истечении этого времени необходимо корректировать показания ГПК. Для компенсации влияния вертикальной составляющей Земли относительно оси внутренней рамки создается некоторый управляющий момент  $M_y$ . С целью обеспечения взаимной перпендикулярности рамок гироскопа используется система межрамочной коррекции – МРК. Эта система состоит из датчика угла поворота гироскопа относительно оси внутренней рамки ( $DU_B$ ), усилителя и датчика момента относительно оси внешней рамки. Общая схема ГПК показана на рис. 1.14.

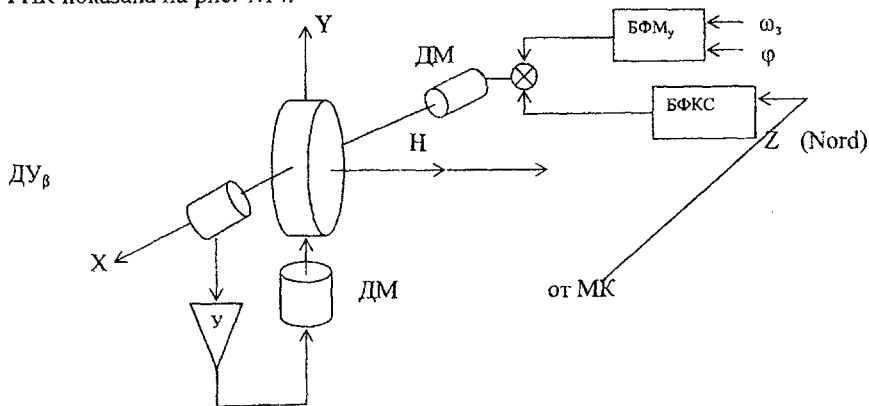


Рис.1.14. Общая схема ГПК

На рисунке обозначено: БФМ<sub>у</sub> – блок формирования управляющего момента, БФКС – блок формирования корректирующего сигнала.

При неподвижном ЛА и при отсутствии корректирующего сигнала система дифференциальных уравнений ГПК примет вид

$$\left. \begin{aligned} H(\dot{\alpha} + \omega_2 - \omega\beta) &= +m_x \dot{\beta} + M_y + M_{bx}(t), \\ H(\dot{\beta} + \omega_1 \alpha) &= -m_y \dot{\alpha} - k_\beta \beta + M_{by}(t). \end{aligned} \right\}$$

В этих уравнениях  $k_\beta$  – коэффициент передачи системы МРК,  $M_{bx}$  и  $M_{by}$  – возмущающие моменты. Выберем управляющий момент так, чтобы

$$\frac{M_y}{H} = \omega_2 = \omega_3 \sin \varphi.$$

Система уравнений ГПК в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях примет вид

$$\left. \begin{aligned} s\alpha - \left(\frac{m_x}{H}s + \omega_1\right)\beta &= M_{bx}(s), \\ \left(\frac{m_y}{H}s + \omega_1\right)\alpha + \left(s + \frac{k_\beta}{H}\right)\beta &= M_{by}(s). \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Характеристический полином системы (1.46), если пренебречь величиной произведения  $\frac{m_x m_y}{H^2}$ , запишется в виде

$$D(s) = s^2 + \frac{m_x \omega_1 + m_y \omega_1 + k_\beta}{H} s + \omega_1^2.$$

Найдем замещенные определители:

$$R_\alpha(s) = \left(s + \frac{k_\beta}{H}\right) \frac{M_{bx}(s)}{H} + \left(\frac{m_x}{H}s + \omega_1\right) \frac{M_{by}(s)}{H},$$

$$R_\beta(s) = \frac{sM_{by}(s)}{H} + \left(\frac{m_y}{H}s + \omega_1\right) \frac{M_{bx}(s)}{H}.$$

Так как  $(\omega_1)_{\max} = 7.2 \cdot 10^{-5}$  1/с, то величины  $\frac{m_x}{H} \omega_1 \ll \frac{k_\beta}{H}$  и  $\frac{m_y}{H} \omega_1 \ll \frac{k_\beta}{H}$  и ими можно пренебречь. По той же причине можно считать, что  $\omega_1^2 \approx 0$ . Тогда характеристический полином системы можно записать следующим образом:



$$D(s) = s\left(s + \frac{k_{\beta}}{H}\right).$$

Определим решения по углам собственного движения гироскопа.

$$\alpha(s) = \frac{R\alpha(s)}{D(s)} = \alpha_1(s) + \alpha_2(s) + \alpha_3(s) + \alpha_4(s),$$

$$\beta(s) = \frac{R\beta(s)}{D(s)} = \beta_1(s) + \beta_2(s) + \beta_3(s).$$

Считая возмущающие моменты постоянными величинами, что обозначено индексом "\*", и используя теорему о конечном значении оригинала, можно получить:

$$\alpha_{1уст} = \frac{M_{bx}^*}{k_{\beta}} \text{ — статическая ошибка за счет действия системы МРК;}$$

$$\alpha_{2уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_{\beta} M_{bx}^*}{s^2 H^2 \left(s + \frac{k_{\beta}}{H}\right)} = \infty, \text{ т.е. под действием момента } M_{bx}$$

гироскоп прецессирует с угловой скоростью  $\dot{\alpha}_{2уст} = \frac{M_{bx}^*}{H}$ ;

$$\alpha_{3уст} = \frac{m_x M_{by}^*}{k_{\beta} H} \text{ — нутационный бросок;}$$

$$\alpha_{4уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{M_{by}^*}{s^2 H \left(s + \frac{k_{\beta}}{H}\right)} = \infty, \text{ т.е. гироскоп уходит из заданного}$$

положения с угловой скоростью  $\dot{\alpha}_{4уст} = \frac{M_{by}^* \omega_1}{k_{\beta}}$ ;

$$\beta_{1уст} = \frac{M_{by}^*}{H} \text{ — статическая ошибка системы МРК;}$$

$$\beta_{2уст} = \frac{m_y M_{bx}^*}{k_{\beta} H} \text{ — нутационный бросок;}$$

$$\beta_{3\text{учт}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{M_{bx}^*}{Hs^2(s + \frac{k_\beta}{H})} = \infty, \text{ т.е. гироскоп совершает движение относи-}$$

тельно оси внутренней рамки с угловой скоростью  $\dot{\beta}_{3\text{учт}} = \frac{M_{bx}^* \omega_1}{k_\beta}$ .

При учете малости угловой скорости  $\omega_1$  и возмущающего момента за счет выбора коэффициента передачи системы МРК можно сделать величину  $\dot{\beta}_{3\text{учт}}$  пренебрежимо малой. Уходы ГПК относительно оси внешней рамки до начала полета могут периодически компенсироваться созданием момента относительно внутренней оси. Поэтому на момент начала полета начальные условия можно считать нулевыми.

Рассмотрим поведение ГПК на ЛА, который летит постоянным курсом с постоянной скоростью. Будем полагать, что в течение всего полета формируется управляющий момент  $M_y = \frac{\omega_z}{H} \sin \varphi$ , чем достигается компенсация влияния вертикальной составляющей вращения Земли. Дополнительно введем корректирующий момент

$$M_k = k_k(\psi^* - \psi) + k_u \int_0^t (\psi^* - \psi) dt = k_k \alpha + k_u \int_0^t \alpha dt.$$

В этом выражении  $\psi^*$  - истинный курс ЛА, а  $\psi$  - курс по ГПК.

В силу работы указанных моментов коррекции ( $M_y, M_k$ ) и системы МРК углы  $\alpha$  и  $\beta$  будут малыми. Так как величина  $(\omega_1 + \frac{V}{R} \sin K)$  мала, то ее произведения

на углы  $\alpha$  и  $\beta$  будут величинами более высокого порядка малости и ими можно пренебречь. Дифференциальные уравнения ГПК в этом случае примут вид

$$\left. \begin{aligned} H(\dot{\alpha} + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi) &= M_{xb} - k_k \alpha - k_u \int_0^t \alpha dt + m_x \dot{\beta}, \\ -H(-\dot{\beta} + \frac{V}{R} \cos K) &= M_{yb} + k_\beta \beta + m_y \dot{\alpha}. \end{aligned} \right\} (1.47)$$

Это уравнение запишем в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях и постоянных возмущающих моментах:

$$\left. \begin{aligned} (s + \frac{k_k s + k_u}{sH}) \alpha - \frac{m_x}{H} s \beta &= \frac{M_{xb}^*}{sH} - \frac{V}{R} \sin KL \{ \operatorname{tg} \varphi \}, \\ \frac{m_y}{H} s \alpha + (s + \frac{k_\beta}{H}) \beta &= \frac{M_{yb}^*}{sH} + \frac{V}{sR} \cos K. \end{aligned} \right\} (1.48)$$

Получить изображение по Лапласу от функции  $\operatorname{tg}\varphi$  непосредственно не представляется возможным. С целью получения приближенных количественных оценок влияния последнего члена первого уравнения полученной системы линеаризуем функцию  $\operatorname{tg}\varphi$  в окрестности некоторой широты  $\varphi_0$ .

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0 + \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} \Delta\varphi.$$

Величину отклонения  $\Delta\varphi$  при постоянной скорости и постоянном курсе можно определить следующим образом:

$$\Delta\varphi = \frac{V \cos K}{R} t.$$

Тогда  $L\{\operatorname{tg}\varphi\} = \left[ \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{s} + \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} \frac{V \cos K}{s^2 R} \right].$

С учетом этого выражения определим характеристический и замещенные определители системы (1.48).

$$D(s) = s^3 + \frac{k_k + k_\beta}{H} s^2 + \left( \frac{k_u}{H} + \frac{k_k}{H^2} \right) s + \frac{k_u k_\beta}{H^2}.$$

Это выражение справедливо, если пренебречь малой величиной  $\frac{m_x m_y}{H^2}$ .

Все коэффициенты характеристического полинома положительны, необходимое условие устойчивости выполняется. Легко получить, что в соответствии с критерием устойчивости Гурвица система устойчива, если выполняется условие

$$k_\beta^2 + k_u k_\beta + k_u H > 0. \quad (1.49)$$

Так как все величины этого неравенства положительны, то оно всегда выполняется.

$$R_\alpha(s) = \left( s + \frac{k_\beta}{H} \right) \left[ \frac{M_{yb}^*}{H} - \frac{sV \sin K}{R} \left( \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{s} + \frac{V \cos K}{s^2 R \cos^2 \varphi_0} \right) \right] + \frac{M_{yb}^* m_x}{H^2} + \frac{V m_x}{RH}.$$

$$R_\beta(s) = \left( s^2 + \frac{k_k}{H} s + \frac{k_u}{H} \right) \left( \frac{M_{yb}^*}{sH} + \frac{V \cos K}{sR} \right) - \frac{m_y}{H} s \left( \frac{M_{xb}^*}{H} - \frac{Vs \sin K}{R} \left( \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{s} + \frac{V \cos K}{s^2 R \cos^2 \varphi_0} \right) \right).$$

Используя теорему о конечном значении оригинала, получим

$$\alpha_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_{\alpha}(s)}{D(s)} = \frac{k_{\beta} V^2 \sin 2K}{2R^2 H \cos^2 \varphi_0},$$

$$\beta_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_{\beta}(s)}{D(s)} = \frac{VH \cos K}{k_{\beta} R}.$$

Оценим максимальные значения установившихся (статических) ошибок при полете постоянным курсом с постоянной скоростью для  $\varphi_0=52^{\circ}$  (широта Самары). Примем, что значение скорости  $V=300$  м/с. Для определения  $(\alpha_{уст})_{\max}$  выберем  $K=45^{\circ}$ . Получим, что  $(\alpha_{уст})_{\max} \approx 6 \cdot 10^{-4}$  град. Это величина несущественная.

При определении  $(\beta_{уст})_{\max}$  положим, что  $K=0^{\circ}$ . Получим  $(\beta_{уст})_{\max} = 9,7 \frac{H}{k_{\beta}}$ .

Для реальных значений кинетического момента ( $H=0,5$  Нмс) и коэффициента передачи системы МРК ( $k_{\beta}=5$  Нм/град)  $(\beta_{уст})_{\max} \approx 0,97^{\circ}$ . Величина также несущественная, которая не оказывает влияния на показания ГПК.

Если автоматическая коррекция осуществляется по показаниям магнитного компаса, то такой прибор носит название гиромагнитного полукомпа (ГМПК).

## 1.7. Гироскопы с двумя степенями свободы

### 1.7.1. Гироскопы с двумя степенями свободы на шариковых подшипниках

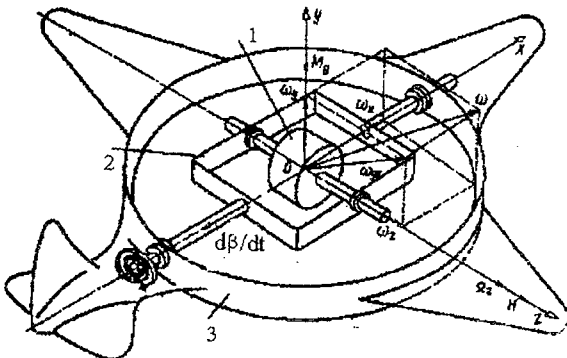


Рис. 1.15. Принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы

Действие ряда приборов, устанавливаемых на борту летательных аппаратов, основано на применении гироскопов с двумя степенями свободы. Принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы представлена на рис. 1.15.

Гироскоп с двумя степенями свободы состоит из ротора 1, рамки 2, основания 3, которое изображено в виде модели самолета. Ротор гироскопа имеет две степени движения относительно основания: вращение вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\Omega$  и вращение вместе с рамкой вокруг оси  $X$  с угловой скоростью  $\dot{\beta}$ . Измерительная ось  $OY$  направлена перпендикулярно плоскости  $XOZ$  так, чтобы трехгранник  $XYZ$  был правым. Пусть основание, на котором установлен прибор, вращается относительно некоторого направления с угловой скоростью  $\omega$ . Эта угловая скорость имеет проекции  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на оси избранной системы координат. В первом приближении будем считать, что основание 3 обладает столь большой массой, что гироскопические моменты, действующие на основание при поворотах гироскопа, не изменяют угловой скорости его вращения.

При вращении основания вокруг оси прецессии гироскопа возникает гироскопический момент  $M_x^z = H\omega_y$ . Если движение гироскопа вокруг оси  $X$  не ограничено, то угловую скорость  $\omega_y$  можно представить в виде  $\omega_y = \omega_{yz} \sin(H \wedge \omega_{yz})$  и, следовательно, гироскопический момент равен

$$M_x^z = H\omega_{yz} \sin(H \wedge \omega_{yz}). \quad (1.50)$$

Гироскопический момент  $M_x^z$  имеет такое направление, при котором ось кинетического момента ротора гироскопа стремится совместиться с направлением проекции  $\omega_{yz}$  вектора угловой скорости  $\omega$  по кратчайшему пути.

Уравнение гироскопа с двумя степенями свободы в первом приближении имеет вид

$$J_x \ddot{\beta} + H\omega_y = M_{bx}, \quad (1.51)$$

где  $M_{bx}$  - момент внешних сил, действующих относительно оси  $X$  гироскопа.

Если момент внешних сил  $M_{bx} = 0$ , решение дифференциального уравнения (1.51) относительно угловой скорости прецессии будет

$$\dot{\beta} = -\frac{H}{J_x} \int \omega_y(t) dt. \quad (1.52)$$

Интеграл в правой части (1.52) есть угол поворота  $\varphi$  гироскопа относительно измерительной оси  $Y$ . Решение для угла прецессии будет

$$\beta = -\frac{H}{J_x} \int \varphi(t) dt. \quad (1.53)$$

Полученные результаты говорят о том, что в первом приближении гироскоп с двумя степенями свободы интегрирует угол поворота  $\varphi$  основания вокруг

Используя теорему о конечном значении оригинала, получим

$$\alpha_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_\alpha(s)}{D(s)} = \frac{k_\beta V^2 \sin 2K}{2R^2 H \cos^2 \varphi_0},$$

$$\beta_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_\beta(s)}{D(s)} = \frac{VH \cos K}{k_\beta R}.$$

Оценим максимальные значения установившихся (статических) ошибок при полете постоянным курсом с постоянной скоростью для  $\varphi_0=52^\circ$  (широта Самары). Примем, что значение скорости  $V=300$  м/с. Для определения  $(\alpha_{уст})_{\max}$  выберем  $K=45^\circ$ . Получим, что  $(\alpha_{уст})_{\max} \approx 6 \cdot 10^{-4}$  град. Это величина несущественная.

При определении  $(\beta_{уст})_{\max}$  положим, что  $K=0^\circ$ . Получим  $(\beta_{уст})_{\max} = 9,7 \frac{H}{k_\beta}$ .

Для реальных значений кинетического момента ( $H=0,5$  Нмс) и коэффициента передачи системы МРК ( $k_\beta=5$  Нм/град)  $(\beta_{уст})_{\max} \approx 0,97^\circ$ . Величина также несущественная, которая не оказывает влияния на показания ГПК.

Если автоматическая коррекция осуществляется по показаниям магнитного компаса, то такой прибор носит название гиромагнитного полукомпыаса (ГМПК).

## 1.7. Гироскопы с двумя степенями свободы

### 1.7.1. Гироскопы с двумя степенями свободы на шариковых подшипниках

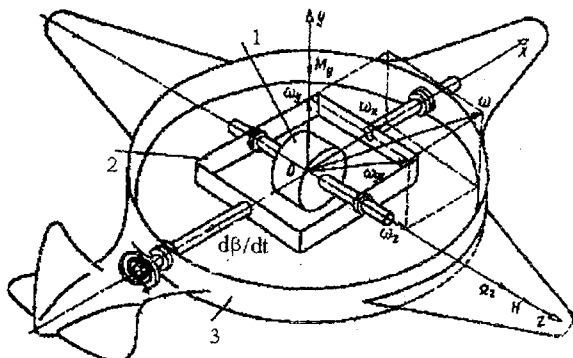


Рис. 1.15. Принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы

Действие ряда приборов, устанавливаемых на борту летательных аппаратов, основано на применении гироскопов с двумя степенями свободы. Принципиальная схема гироскопа с двумя степенями свободы представлена на рис. 1.15.

Гироскоп с двумя степенями свободы состоит из ротора 1, рамки 2, основания 3, которое изображено в виде модели самолета. Ротор гироскопа имеет две степени движения относительно основания: вращение вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\Omega$  и вращение вместе с рамкой вокруг оси  $X$  с угловой скоростью  $\dot{\beta}$ . Измерительная ось  $OY$  направлена перпендикулярно плоскости  $XOZ$  так, чтобы трехгранник  $XYZ$  был правым. Пусть основание, на котором установлен прибор, вращается относительно некоторого направления с угловой скоростью  $\omega$ . Эта угловая скорость имеет проекции  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на оси избранной системы координат. В первом приближении будем считать, что основание 3 обладает столь большой массой, что гироскопические моменты, действующие на основание при поворотах гироскопа, не изменяют угловой скорости его вращения.

При вращении основания вокруг оси прецессии гироскопа возникает гироскопический момент  $M_x^z = H\omega_y$ . Если движение гироскопа вокруг оси  $X$  не ограничено, то угловую скорость  $\omega_y$  можно представить в виде  $\omega_y = \omega_{yz} \sin(H \wedge \omega_{yz})$  и, следовательно, гироскопический момент равен

$$M_x^z = H\omega_{yz} \sin(H \wedge \omega_{yz}). \quad (1.50)$$

Гироскопический момент  $M_x^z$  имеет такое направление, при котором ось кинетического момента ротора гироскопа стремится совместиться с направлением проекции  $\omega_{yz}$  вектора угловой скорости  $\omega$  по кратчайшему пути.

Уравнение гироскопа с двумя степенями свободы в первом приближении имеет вид

$$J_x \ddot{\beta} + H\omega_y = M_{bx}, \quad (1.51)$$

где  $M_{bx}$  - момент внешних сил, действующих относительно оси  $X$  гироскопа.

Если момент внешних сил  $M_{bx} = 0$ , решение дифференциального уравнения (1.51) относительно угловой скорости прецессии будет

$$\dot{\beta} = \frac{H}{J_x} \int_0^t \omega_y(t) dt. \quad (1.52)$$

Интеграл в правой части (1.52) есть угол поворота  $\varphi$  гироскопа относительно измерительной оси  $Y$ . Решение для угла прецессии будет

$$\beta = -\frac{H}{J_x} \int_0^t \varphi(t) dt. \quad (1.53)$$

Полученные результаты говорят о том, что в первом приближении гироскоп с двумя степенями свободы интегрирует угол поворота  $\varphi$  основания вокруг

измерительной оси. Если  $M_{bx} \neq 0$ , то появится ошибка в показаниях прибора, вызванная дрейфом гироскопа относительно оси прецессии. Для рассматриваемых гироскопов этот дрейф имеет величину порядка 0,1 – 0,5 град/час.

### 1.7.2. Поплавковые интегрирующие гироскопы:

Поплавковые интегрирующие гироскопы (ПИГ) относятся к прецизионным гироскопическим приборам, предназначенным для измерения угла поворота стабилизируемого объекта. Принципиальная схема прибора в упрощенном варианте показана на рис.1.16.

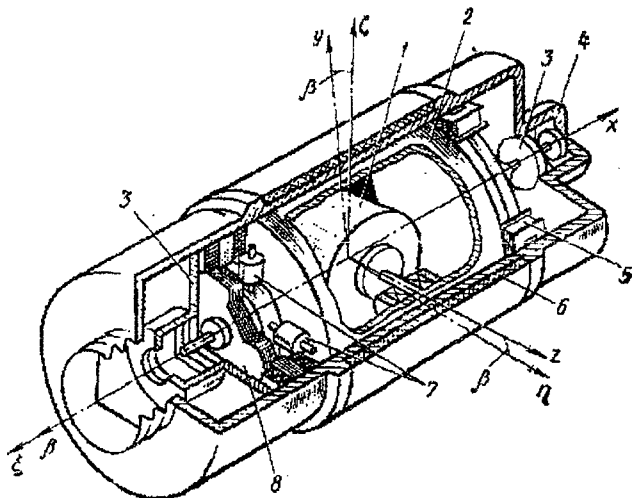


Рис. 1.16. Принципиальная схема поплавкового интегрирующего гироскопа

На схеме обозначено: 1 – гиромотор; 2 – поплавок; 3 – подшипники; 4 – корпус; 5 – датчик момента; 6 – обмотка датчика температуры; 7 – балансировочные гайки; 8 – датчик угла.

Повышение точности прибора, что и позволяет отнести его к прецизионным приборам, достигается за счет жидкости, которая, заполняя все свободное пространство между поплавком и корпусом, осуществляет гидростатическую разгрузку подшипников, что значительно уменьшает моменты трения. Вторая функция жидкости заключается в создании момента  $M_d$  демпфирования углового движения поплавка относительно оси X его прецессии:

$$M_d = m_x \dot{\beta}. \quad (1.54)$$



Благодаря действию этого момента прибор приобретает свойство интегрировать входную угловую скорость  $\omega_\zeta$ , являющуюся проекцией угловой скорости основания  $\omega$  на ось  $O\zeta$ .

Для малых углов прецессии  $\beta$  уравнение ПИГ можно записать в виде

$$J_x \ddot{\beta} + m_x \dot{\beta} + H\omega_\zeta = M_x.$$

Здесь  $M_x$  – сумма всех внешних неучтенных моментов, действующих на поплавок. Если считать, что  $M_x=0$ , то перейдя к изображениям по Лапласу, получим

$$s\left(\frac{J_x}{m_x}s + 1\right)\beta(s) = -\frac{H}{m_x}\omega_\zeta(s).$$

Величина  $\frac{J_x}{m_x} = T$  имеет размерность времени и является постоянной времени

прибора. Величину  $\frac{H}{m_x} = k$  назовем коэффициентом передачи ПИГ. Так как

постоянная времени очень мала ( $T=0,002 - 0,005$ с), то пренебрегая ею в первом приближении, получим

$$\beta(s) = -\frac{k}{s}\omega_\zeta(s).$$

В оригиналах можно записать

$$\beta(t) = -k \int_0^t \omega_\zeta(t) dt. \quad (1.55)$$

Так как  $\int_0^t \omega_\zeta(t) dt = \Phi(t)$ , где  $\Phi(t)$  – угол поворота основания, на котором установлен прибор, относительно измерительной оси  $O\zeta$ . Таким образом, используя поплавокый интегрирующий гироскоп с двумя степенями свободы, можно измерить угол поворота ЛА относительно некоторой измерительной оси. Учет момента внешних сил  $M_x$  показывает, что он вызывает уход ПИГ относительно оси прецессии с малой угловой скоростью  $\dot{\beta}$ . Эта угловая скорость имеет порядок 0,015 град/ч и достаточно длительное время не вносит существенных погрешностей в показания прибора.

### 1.7.3. Датчик угловой скорости

Датчик угловой скорости (ДУС) предназначен для измерения проекции абсолютной угловой скорости ЛА на связанную ось.

Датчик угловой скорости представляет собой гироскоп с двумя степенями свободы, у которого движение относительно оси прецессии  $OX$  ограничено пружинами и демпфером. Принципиальная схема ДУС представлена на рис. 1.17.

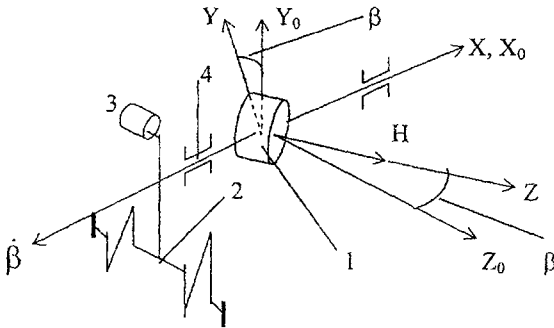


Рис. 1.17. Принципиальная схема датчика угловой скорости

На рисунке обозначено: 1 – гиروزел, включающий в себя ротор с внутренней рамкой; 2 – пружины; 3 – демпфер; 4 – подшипники;  $X_0Y_0Z_0$  – система координат, связанная с ЛА;  $XYZ$  – система координат, связанная с гиروزелом и выбранная так, что ось  $OX$  совпадает с осью прецессии, а ось  $OZ$  – с осью кинетического момента.

Если угол прецессии  $\beta=0$ , то обе системы координат совпадают. В общем случае ЛА вращается с угловой скоростью  $\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . При малых значениях угла прецессии  $\beta$  уравнение относительно оси прецессии имеет вид

$$J_x \ddot{\beta} - H \omega_y + m_x \dot{\beta} + C \beta = M_{xb}, \quad (1.56)$$

где  $m_x$  – коэффициент демпфирования,  $C$  – коэффициент жесткости пружины. Разделим обе части уравнения на  $C$  и перейдем к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$\left( \frac{J_x}{C} s^2 + \frac{m_x}{C} s + 1 \right) \beta(s) = \frac{H}{C} \omega_y + \frac{M_{xb}(s)}{C}.$$

Сделаем обозначения:

$$T = \sqrt{\frac{J_x}{C}} \text{ -- постоянная времени ДУС;}$$

$$\zeta = \frac{m_x}{2\sqrt{J_x C}} \text{ -- относительный показатель затухания ДУС;}$$

$$k_{\text{ДУС}} = \frac{H}{C} - \text{коэффициент передачи ДУС.}$$

Передаточная функция ДУС по задающему воздействию может быть записана в виде

$$W_{\text{ДУС}}(s) = \frac{\beta(s)}{\omega_y(s)} = \frac{k_{\text{ДУС}}}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}. \quad (1.57)$$

Величина постоянной времени очень мала, и в первом приближении можно записать

$$\beta(s) = k_{\text{ДУС}} \omega_y(s),$$

или в оригиналах

$$\beta(t) = k_{\text{ДУС}} \omega_y(t). \quad (1.58)$$

Следовательно, рассматриваемый прибор дает возможность измерять угловую скорость относительно оси недостающей степени свободы, которая называется измерительной осью.

Оценим погрешности измерения угловой скорости. Во-первых, при наличии угла прецессии прибор измеряет не требуемую угловую скорость  $\omega_{y0}$  относительно соответствующей оси ЛА, а угловую скорость

$$\omega_y = \omega_{y0} \cos \beta - \omega_{z0} \sin \beta.$$

Уменьшение погрешности связано с необходимостью обеспечения малости угла прецессии.

Погрешности вызываются также действием возмущающего момента  $M_{xb}$ , который является суммой моментов трения в подшипниках, моментов небаланса и т.д. Если этот момент считать постоянным по величине, то на основании решения полученного дифференциального уравнения по возмущающему моменту

можно убедиться, что статическая ошибка измерения будет равна  $\frac{M_{xb}^*}{C}$ . Если

возмущающий момент непостоянен по величине, т.е. является некоторой функцией времени, то для угловой скорости ухода (дрейфа) гироскопа от требуемого положения в изображениях по Лапласу можно записать

$$\dot{\beta}(s) = \frac{sM_{xb}(s)}{C}.$$

Дрейф гироскопа с двумя степенями свободы на трехколенных шариковых подшипниках может составлять 5-10 град/ч. Для уменьшения этой величины вместо обычных цилиндрических пружин используют плоские пружины или торсионы. В этих случаях можно вообще избавиться от подшипников и тем самым снизить момент сухого трения. Недостатком таких конструкций являются значительные погрешности при действии линейных и вибрационных

перегрузок. Уменьшение дрейфа достигается также применением поплавковых ДУС, где подшипники разгружены и момент сухого трения невелик. Из-за вязкости жидкости увеличивается также коэффициент демпфирования и за счет этого возрастает относительный показатель затухания. Повышение точности прибора возможно также при применении электрических пружин.

## 1.8. Силовая гироскопическая стабилизация.

### Гиросtabilизированные платформы

#### 1.8.1. Понятие о силовой гироскопической стабилизации

Точность работы гироскопических приборов всецело зависит от значений возмущающих моментов, в частности, от моментов трения в подшипниках карданова подвеса. Допустим, что необходимо сохранять положение оси кинетического момента относительно оси внешней рамки, которая в этом случае называется осью стабилизации. Если внешний момент, действующий относительно этой оси, постоянен по величине, то как следует из формулы (1.7), он будет уравновешиваться гироскопическим моментом, возникающим за счет прецессии гиروزла относительно оси внутренней рамки. Теоретически, любой момент постоянной величины будет уравновешиваться гироскопическим моментом в течение всего времени прецессии, но это равновесие крайне ограничено по времени и это время ограничено величиной внешнего момента. Если внешний момент является некоторой функцией времени, то как следует из (1.17), появляется ошибка стабилизации за счет ухода гироскопа из заданного положения. Во всех случаях желательно уменьшить скорость прецессии и сделать угол прецессии  $\beta$  как можно меньшим.

Эта задача становится особенно важной, если внешняя рамка гироскопа предназначена для определенной ориентации каких-либо приборов и становится как бы платформой для установки указанных приборов. Величина моментов, действующих относительно оси стабилизации, значительно увеличивается, изменяется их характер, но при этом к точности требуемой ориентации предъявляются высокие требования и время ориентации может быть достаточно велико. Решение задачи реализуется использованием принципа силовой гироскопической стабилизации. Принципиальная схема одноосного силового гиросtabilизатора приведена на рис.1.18. На рисунке обозначено: 1 – внутренняя рамка гироскопа; 2 – платформа; 3 – датчик угла прецессии; 4 – усилитель; 5 – датчик момента.

Так как внешней рамкой является собственно платформа, то по отношению к ней гироскоп имеет две степени свободы. Допустим, что относительно оси стабилизации действует внешний момент  $M_y$ , стремящийся повернуть ее. Начнется прецессия относительно оси прецессии  $OX$  с угловой скоростью  $\dot{\beta}$ . Появится гироскопический момент  $M_y^g = H\dot{\beta}$ , который осуществит начальную компенсацию внешнего момента. Сигнал, пропорциона-

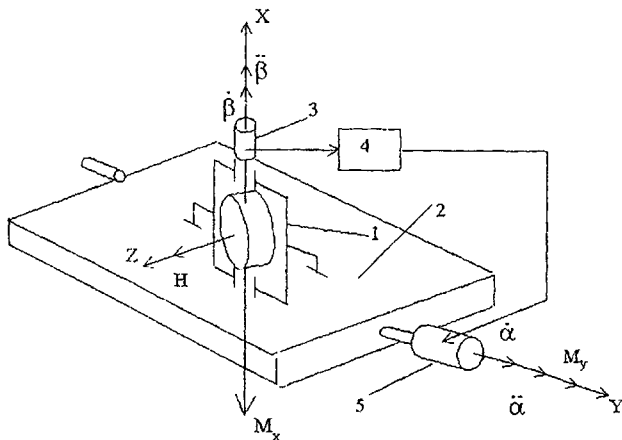


Рис. 1.18. Принципиальная схема одноосного силового гиросtabilизатора

льный углу прецессии, от датчика угла 3 через усилитель 4 поступит на датчик момента 5, который создаст момент разгрузки  $M_p = k_p \beta$ , за счет которого будет полностью компенсирован внешний момент, и угол прецессии станет близким к нулю. Достоинством такой стабилизации является то, что начальная стабилизация осуществляется за счет гироскопического момента, который появляется мгновенно, т.к. гироскоп является безинерционным звеном, а окончательно стабилизация реализуется моментом разгрузки. Такая схема обладает высоким быстродействием и высокой точностью.

Астатический гироскоп, ось ротора которого с помощью разгрузочного устройства удерживается на направлении перпендикуляра к плоскости наружной рамки карданова подвеса, называется одноосным гироскопическим стабилизатором.

### 1.8.2. Динамические характеристики одноосного силового гиросtabilизатора

Пусть основание, на котором установлена платформа с гироскопом, вращается в пространстве с угловой скоростью  $\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  и относительно оси стабилизации действует возмущающий момент  $M_y$ . Так как рассматривается вопрос стабилизации только относительно одной оси, то можно считать, что относительно оси прецессии действует только момент трения, который значительно меньше момента  $M_y$ , и им можно пренебречь. Так как ось стабилизации ОУ является осью платформы, то момент инерции относительно этой оси в дальнейшем будем обозначать  $J_{пл}$ . Учтем также

момент жидкого трения относительно оси стабилизации. Уравнения одноосного силового гиросtabilизатора при сделанных предположениях примут вид

$$\left. \begin{aligned} J_x(\ddot{\beta} + \dot{\omega}_x) + H(\dot{\alpha} + \omega_y) &= 0, \\ J_{nn}(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y) + m_y(\dot{\alpha} + \omega_y) - H(\dot{\beta} + \omega_x) - k_p\beta &= M_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

Перейдя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях и разделив оба уравнения на  $H$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_x}{H}s^2\beta(s) + s\alpha(s) &= -\frac{J_x}{H}s\omega_x(s) - \omega_y, \\ s\left(\frac{J_{nn}s + m_y}{H}\right)\alpha(s) - \left(s + \frac{k_p}{H}\right)\beta(s) &= -\frac{J_{nn}s + m_y}{H}\omega_y + \omega_x + \frac{M_y(s)}{H}. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Характеристический полином данной системы имеет вид

$$D(s) = sA(s) = s(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3),$$

где  $a_0 = \frac{J_x J_{nn}}{H^2}$ ;  $a_1 = \frac{J_x m_y}{H^2}$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = \frac{k_p}{H}$ .

Характеристический полином имеет один нулевой корень, т.е. соответствует нейтрально-устойчивой системе, что отражает свойство нейтральности гироскопа к выбору направления в инерциальном пространстве. Устойчивость рассматриваемого одноосного гиросtabilизатора оценивается корнями уравнения  $A(s)=0$ , и применив к данному уравнению критерий устойчивости Гурвица, получим условие устойчивости системы

$$m_y H > k_p J_{nn}. \quad (1.61)$$

Требования к параметрам гиросtabilизатора (ГС), определяемые условиями устойчивости и точности, – противоречивы. Для обеспечения высокой точности необходимо увеличивать коэффициент  $k_p$ . Для выполнения условия устойчивости и получения необходимых запасов устойчивости требуется одновременно увеличивать левую часть (1.61), но возможности увеличения кинетического момента ограничены, так как при этом возрастают габариты, масса и потребляемая мощность ГС. Искусственное увеличение  $m_y$  приводит к увеличению возмущающего момента при колебаниях основания. Противоречивые требования к выбору параметров ГС обычно удается разрешить путем введения цепей коррекции в контур стабилизации.

Рассмотрим решение системы (1.60) при избранном выше законе в цепи разгрузки. Вначале рассмотрим решение по возмущающему моменту. Замещенные определители по углам стабилизации и прецессии будут равны:

$$R_{\alpha}^{M_y}(s) = \frac{J_x s^2}{H^2} M_y(s);$$

$$R_{\beta}^{M_y}(s) = \frac{s}{H} M_y(s).$$

Теперь можно записать выражения для соответствующих передаточных функций

$$W_{\alpha}^{M_y}(s) = \frac{\alpha(s)}{M_y(s)} = \frac{J_x s}{H^2 A(s)};$$

$$W_{\beta}^{M_y}(s) = \frac{\beta(s)}{M_y(s)} = \frac{1}{HA(s)}.$$

Установившиеся значения углов (ошибок ориентации) при постоянном возмущающем моменте  $M_y = M_y^* = \text{const} \Rightarrow \frac{M_y^*}{s}$  определим в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала.

$$\alpha_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_{\alpha}^{M_y}(s)}{D(s)} = 0.$$

$$\beta_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_{\beta}^{M_y}(s)}{D(s)} = \frac{M_y^*}{k_p}.$$

Таким образом, постоянный возмущающий момент не приводит к ошибке стабилизации, но вызывает статическую ошибку относительно оси прецессии, которая тем меньше, чем больше коэффициент передачи цепи разгрузки.

Рассмотрим решения по угловым скоростям основания.

$$R_{\alpha}^{\omega_x}(s) = -\frac{J_x k_p}{H^2} s \omega_x(s);$$

$$R_{\alpha}^{\omega_y}(s) = -\left(\frac{J_x}{H^2} s^2 (J_{nn} s + m_y) + \left(s + \frac{k_p}{H}\right)\right) \omega_y(s);$$

$$R_{\beta}^{\omega_x}(s) = -s \left(\frac{J_x}{H} s \left(-\frac{J_{nn} s + m_y}{H}\right) + 1\right) \omega_x(s);$$

$$R_{\beta}^{\omega_y}(s) = 0.$$

Определим установившиеся значения углов по отношению к угловым скоростям основания, считая эти угловые скорости постоянными величинами.

$$\alpha_{cm}^{\omega_x} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_{\alpha}^{\omega_x}(s)}{D(s)} = \frac{J_x}{H} \omega_x^*. \quad (1.62)$$

Решение для угла  $\alpha$  по угловой скорости  $\omega_x$  будет

$$\alpha^{\omega_y}(s) = \frac{R_{\alpha}^{\omega_y}(s)}{sA(s)}.$$

Для изображения угловой скорости собственного движения и установившегося значения этой угловой скорости получим

$$\dot{\alpha}(s) = s\alpha(s) = \frac{R_{\alpha}^{\omega_y}(s)}{A(s)}.$$

$$\dot{\alpha}_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_{\alpha}^{\omega_y}(s)}{A(s)} = -\omega_y^*. \quad (1.63)$$

$$\beta_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{R_{\beta}^{\omega_x}(s)}{D(s)} + \frac{R_{\beta}^{\omega_y}(s)}{D(s)} \right) = \frac{H}{k_p} \omega_x^*. \quad (1.64)$$

Анализ полученных выражений показывает, что при сделанных допущениях по отношению к оси стабилизации ГС полностью компенсирует внешний момент и обрабатывает угловую скорость основания  $\omega_y$ . Статическая ошибка стабилизации определяется выражением (1.62) и зависит от угловой скорости  $\omega_x$ . Статические ошибки по отношению к углу прецессии также зависят от угловых скоростей основания, но они выбором коэффициента передачи цепи разгрузки могут быть сделаны малыми и не оказывают влияния на положение основания относительно оси стабилизации. Следовательно, рассмотренный одноосный силовой гиросtabilизатор по точности стабилизации чувствителен к поворотам основания относительно оси прецессии и главной причиной статической ошибки (1.62) является инерционный момент  $J_x \omega_x$ .

С целью ликвидации этой ошибки может использоваться двухгироскопный гиросtabilизатор, принципиальная схема которого показана на рис. 1.19. На рисунке обозначено: ДУ – датчик угла прецессии; ДМ – датчик момента разгрузки. В состав гироскопа, который иногда называют гироскопом, входят два гироскопа, имеющие равные и противоположно направленные кинетические моменты. По отношению к осям прецессии гироскопы механически связаны между собой, например, зубчатым зацеплением. При наличии угловой скорости основания  $\omega$  гироскопы, стремясь сохранить направление кинетических моментов, совершают видимое движение в противоположных направлениях, и зубчатое зацепление препятствует этому движению. В результате видимое движение гироскопов относительно оси прецессии отсутствует, инерционный момент  $J_x \omega_x$  равен нулю и статическая ошибка (1.62) исчезает. При наличии внешнего момента  $M_y$  гироскопы прецессируют в одном направлении и зубчатый сектор не мешает этому движению. В результате возникает момент разгрузки, который и компенсирует внешний момент относительно оси стабилизации.



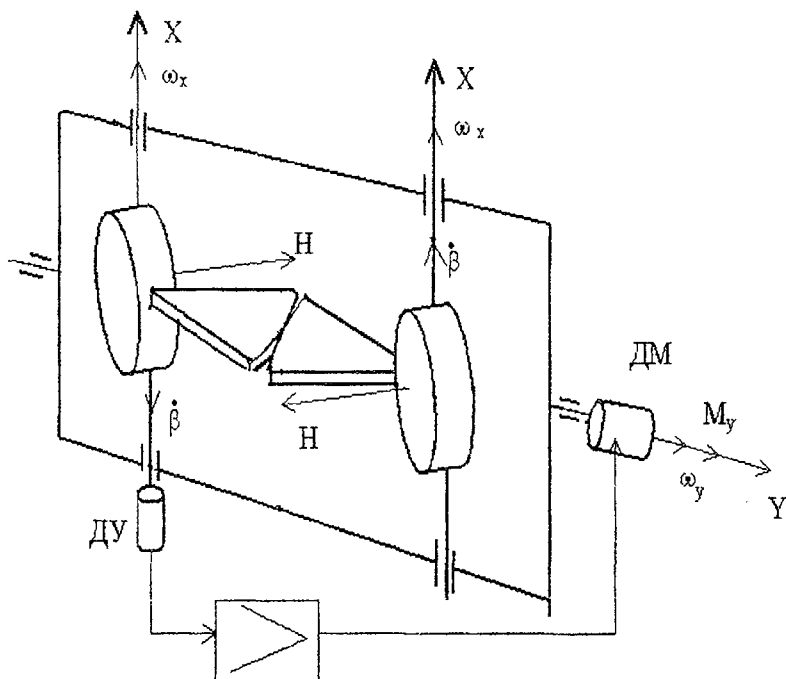


Рис. 1.19. Принципиальная схема двухгиропского ГС

### 1:8.3. Силовая гироскопическая вертикаль

Для определения углов тангажа и крена необходимо построить на борту ПА плоскость истинного горизонта, или, другими словами, построить истинную вертикаль места. Для этой цели используют двухосный гиростабилизатор, который называют гиростабилизированной платформой (ГСП). В качестве чувствительных элементов ГСП в настоящее время обычно используют поплавковые гироскопы, что исключает моменты сухого трения относительно осей прецессии. При идеальной работе прибора можно было бы оставить задачу следующим образом: до начала полета с помощью каких-либо внешних приборов силовая гироскопическая вертикаль устанавливается в положение вертикали места и в дальнейшем в течение всего полета сохраняет это положение. Но в действительности, за счет неучтенных возмущающих моментов, являющихся случайными функциями времени, непостоянства угловых скоростей поворота ПА и других причин, полученная гироскопическая

(ГВ) будет уходить от положения вертикали места и потребуются коррекция ее положения. С этой целью на ГСП устанавливаются элементы, которые фиксируют отклонения ГВ от положения вертикали места в двух плоскостях, и это позволяет сформировать корректирующие моменты для компенсации ошибок. Принципиальная схема силовой гировертикали показана на рис. 1.20.

На рисунке обозначено: ДУ<sub>1</sub> и ДУ<sub>2</sub> – датчики углов прецессии, ДУ – датчики коррекции углового положения ГСП, ДМ – датчики моментов коррекции, СД – стабилизирующие двигатели (двигатели разгрузки). Будем считать, что в качестве датчиков коррекции используются устройства, сигналы которых пропорциональны углам отклонения ГСП от положения вертикали места. Составим уравнения ГСП.

Ориентацию осей стабилизации определим следующим образом: ось ОУ платформы направлена по вектору скорости ЛА (при отсутствии угла скольжения это означает, что данная ось ГСП совпадает с продольной осью самолета), ось ОХ платформы совпадает с поперечной осью самолета. В соответствии с выражениями (1.22) составляющие абсолютной угловой скорости ГСП, зависящие от вращения Земли, движения ЛА относительно поверхности Земли и собственного вращения ЛА вокруг центра масс, можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} - \left( \omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi \right) \alpha_1 - \omega_1 \sin K - \frac{V}{R}, \\ \omega_y &= \dot{\gamma} - \left( \omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi \right) \alpha_2 + \omega_1 \cos K. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

В этих выражениях  $\dot{\gamma}$  – угловая скорость крена,  $\dot{\psi}$  – угловая скорость тангажа.

При составлении уравнений двухосной ГСП за основу возьмем уравнения гироскопа (1.9) с учетом малости угла прецессии, что позволяет считать  $\cos \beta = 0$ . Гироскопы являются двухстепенными и по отношению к осям стабилизации моменты инерции внешних рамок являются собственно моментами инерции платформы. Обозначим составляющие угловых скоростей, зависящие от вращения Земли, движения ЛА относительно земной поверхности и вращения ЛА вокруг центра масс, как  $\omega_x$  и  $\omega_y$ . Будем также считать, что оба гироскопа абсолютно идентичны и их моменты инерции относительно осей прецессии обозначим как  $J_x$ . С учетом сказанного, а также перекрестных гироскопических моментов, возникающих за счет движения ГСП относительно осей стабилизации, систему уравнений можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} J_x (\ddot{\beta}_1 + \dot{\omega}_x) - H (\dot{\alpha}_1 + \omega_y) + H (\dot{\alpha}_2 + \omega_x) &= -M_{x1}, \\ J_{nly} (\ddot{\alpha}_1 + \dot{\omega}_y) + H (\dot{\beta}_1 + \omega_x) &= M_y, \\ J_x (\ddot{\beta}_2 + \dot{\omega}_y) - H (\dot{\alpha}_2 + \omega_x) + H (\dot{\alpha}_1 + \omega_y) &= -M_{x2}, \\ J_{nlx} (\ddot{\alpha}_2 + \omega_x) + H (\dot{\beta}_2 + \omega_y) &= M_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

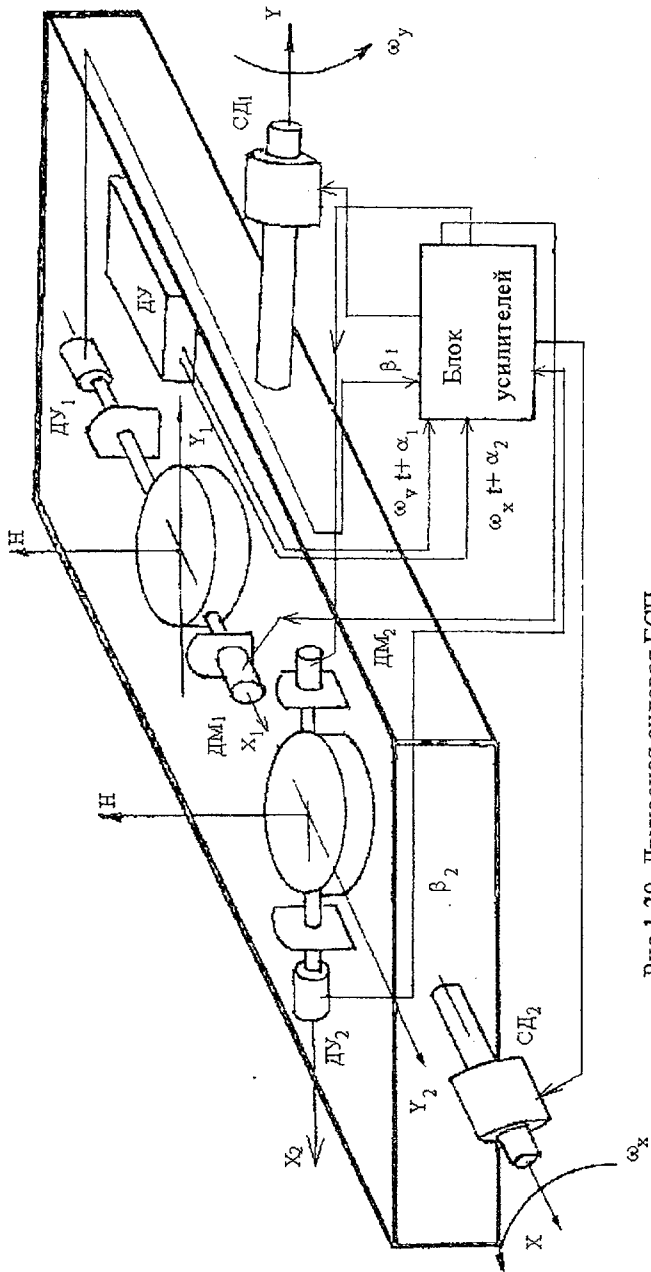


Рис. 1.20. Двухосная силовая ГСП

Рассмотрим структуру правых частей системы (1.66).

$$M_{x1} = M_{mp1} - m_d(\dot{\beta}_1 + \omega_x) - k_1(\alpha_1 + \omega_y t),$$

$$M_{x2} = M_{нагу} + M_{mp2} - m_d(\dot{\beta}_2 + \omega_y) - k_2(\alpha_2 + \omega_x t),$$

$$M_{y1} = M_{нагу} + M_{mpx} + M_{py},$$

$$M_{y2} = M_{нагх} + M_{mpy} + M_{px}.$$

В этих выражениях обозначено:

- $M_{нагх}$  и  $M_{нагу}$  – моменты нагрузки по осям стабилизации, вызванные смещением центра масс, воздействием со стороны токоподводящих устройств, функционированием расположенных на платформе устройств и т.д.;
- $M_{mp1}$  и  $M_{mp2}$  – моменты сухого трения по осям прецессии;
- $m_d$  – коэффициент демпфирования жидкости, заполняющей внутренность ГИИ;
- $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты передачи систем коррекции;
- $M_{mpx}$  и  $M_{mpy}$  – моменты сухого трения по осям стабилизации;
- $M_{px}$  и  $M_{py}$  – моменты систем разгрузки, причем  $M_{px} = k_{px} \beta_2$ ,

$$M_{py} = k_{py} \beta_1.$$

Система (1.66) имеет 6-й порядок и ее аналитическое решение возможно только при каких-либо допущениях о величинах угловых скоростей  $\omega_x$  и  $\omega_y$  и возмущающих моментов. Так как в качестве гироскопов мы рассматриваем поплавковые интегрирующие гироскопы, то моментами сухого трения относительно осей прецессии можно пренебречь. Моменты сухого трения относительно осей стабилизации значительно меньше моментов нагрузки, и они описываются нелинейными функциями. По этим причинам на этапе исследования уравнений ГСП в линейной постановке эти моменты учитывать не будем. Движение ГСП рассмотрим в два этапа.

### 1. Начальная выставка ГСП (отработка начальных условий)

В рассматриваемый момент самолет неподвижен, т.е.  $V=0$ ,  $\dot{\gamma}=0$ ,  $\dot{\psi}=0$ . Угловые скорости за счет вращения Земли постоянны и могут рассматриваться как ступенчатые воздействия, причем  $\dot{\omega}_x=0$  и  $\dot{\omega}_y=0$ . Моменты нагрузки также будем считать постоянными. Постоянство моментов и угловых скоростей будем обозначать индексом “\*”. После разгона гироскопов в момент разарретирования начальные условия по углам и

угловым скоростям прецессии и стабилизации определяются величинами  $\alpha_1(0), \dot{\alpha}_1(0)=0, \alpha_2(0), \dot{\alpha}_2(0)=0, \beta_1(0), \dot{\beta}_1(0)=0, \beta_2(0), \dot{\beta}_2(0)=0$ . При этих условиях разделим уравнения системы на  $H$  и перейдем к изображениям по Лапласу. Правые части полученных уравнений обозначим как  $R_i, i=1,2,3,4$ . Система уравнений в изображениях по Лапласу примет вид

$$\left. \begin{aligned} s\left(\frac{J_x}{H}s + \frac{m}{H}\right)\beta_1(s) - \left(s + \frac{k_1}{H}\right)\alpha_1(s) + s\alpha_2(s) &= R_1(s), \\ \frac{J_{ny}}{H}s^2\alpha_1(s) + \left(s + \frac{k_{py}}{H}\right)\beta_1(s) &= R_2(s), \\ s\left(\frac{J_x}{H}s + \frac{m_d}{H}\right)\beta_2(s) - \left(s + \frac{k_2}{H}\right)\alpha_2(s) - s\alpha_1(s) &= R_3(s), \\ \frac{J_{nx}}{H}s^2\alpha_2(s) + \left(s + \frac{k_{px}}{H}\right)\beta_2(s) &= R_4(s). \end{aligned} \right\} (1.67)$$

В этих условиях

$$\begin{aligned} R_1(s) &= \frac{M_{nazx}^*}{sH} + \left(\frac{J_x}{H}s + \frac{m_d}{H}\right)\beta_1(0) - \alpha_1(0) + \alpha_2(0) - \\ & - \left(1 + \frac{m_d}{H}\right)\frac{\omega_x^*}{s} + \left(1 + \frac{k_1}{sH}\right)\frac{\omega_y^*}{s}; \\ R_2(s) &= \frac{M_{nazy}^*}{sH} + \frac{J_{ny}}{H}s\alpha_1(0) + \beta_1(0) - \frac{\omega_x^*}{s}; \\ R_3(s) &= \frac{M_{nazy}^*}{sH} + \left(\frac{J_x}{H}s + \frac{m_d}{H}\right)\beta_2(0) + \alpha_1(0) - \alpha_2(0) - \\ & - \left(1 + \frac{m_d}{H}\right)\frac{\omega_y^*}{s} + \left(1 + \frac{k_2}{sH}\right)\frac{\omega_x^*}{s}; \\ R_4(s) &= \frac{M_{nazx}^*}{sH} + \frac{J_{nx}}{H}s\alpha_2(0) + \beta_2(0) - \frac{\omega_y^*}{s}. \end{aligned}$$

Сделаем для сокращения записей обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_1(s) &= \left( \frac{J_x}{H} s + \frac{m_d}{H} \right); & B_1(s) &= s + \frac{k_1}{H}; \\
 A_2 &= \frac{J_{ны}}{H}; & B_2(s) &= s + \frac{k_{py}}{H}; \\
 A_3 &= \frac{J_{max}}{H}; & B_3(s) &= s + \frac{k_2}{H}; \\
 & & B_4(s) &= s + \frac{k_{px}}{H}.
 \end{aligned}$$

Найдем характеристический определитель системы (1.67).

$$\begin{aligned}
 D(s) &= \begin{vmatrix} sA_1(s) & 0 & -B_1(s) & s \\ B_2(s) & 0 & s^2 A_2 & 0 \\ 0 & sA_1(s) & -s & -B_3(s) \\ 0 & B_4(s) & 0 & s^2 A_3 \end{vmatrix} = \\
 &= sA_1(s) \left[ -s^2 A_2 (s^3 A_1(s) A_3 + B_3(s) B_4(s)) - \right. \\
 &\quad \left. - B_2(s) \left[ s^3 A_1(s) A_3 B_1(s) + B_4(s) (B_1(s) B_3(s) + s^2) \right] \right], \\
 D(s) &= -(d_0 s^8 + d_1 s^7 + d_2 s^6 + d_3 s^5 + d_4 s^4 + d_5 s^3 + \\
 &\quad + d_6 s^2 + d_7 s + d_8). \tag{1.68}
 \end{aligned}$$

Несложный анализ коэффициентов характеристического полинома показывает, что все они положительны, т.е. необходимое условие устойчивости выполняется, и выполнение достаточных условий можно обеспечить правильным выбором параметров цепей стабилизации и разгрузки. Получение достаточных условий устойчивости системы 8-го порядка может привести к труднообозримым результатам. Для упрощения задачи будем считать, что моменты нагрузки оказывают малое влияние на движение ГСП относительно осей прецессии и перекрестные гироскопические моменты равны нулю. Тогда система уравнений (1.67) распадается на две системы 4-го порядка, каждая из которых описывает движение ГСП относительно одной оси. Характеристическое уравнение одной такой системы, например, системы относительно оси стабилизации Y, примет вид

$$A(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0.$$

$$\text{Здесь } a_0 = \frac{J_x J_{\text{нлп}}}{H^2}; \quad a_1 = \frac{J_x m_d}{H^2}; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = \frac{k_1 + k_{\text{пв}}}{H}; \quad a_4 = \frac{k_1 k_{\text{пв}}}{H^2}.$$

Используя критерий Гурвица, можно получить достаточные условия устойчивости ГСП относительно оси ОУ:

$$m_d H > J_x (k_1 + k_{\text{пв}}), \quad (1.68)$$

$$r_0 k_1^2 + r_2 k_1 + r_2 k_{\text{пв}} > 0. \quad (1.69)$$

Приравняв полученные выражения нулю, можно построить область устойчивости ГСП относительно рассматриваемой оси. Аналогичные условия устойчивости могут быть определены и относительно оси стабилизации ОХ.

Найдем замещенные определители системы (1.67).

$$R_{\beta 1}(s) = -s A_1(s) \{ R_1(s) A_2 A_3 s^4 + R_2(s) B_1(s) A_3 s^2 - R_4(s) A_2 s^3 \} + B_4(s) \{ -R_1(s) B_3(s) A_2 s^2 - R_2(s) (s^2 + B_1(s) B_3(s)) - R_3(s) A_2 s^3 \};$$

$$R_{\beta 2}(s) = s A_1(s) \{ -R_2(s) A_3 s^3 - R_3(s) A_2 A_3 s^4 - R_4(s) A_2 s^3 \} - B_2(s) \{ -R_1(s) A_3 s^3 - R_3(s) B_1(s) A_3 s^2 + R_4(s) (s^2 + B_1(s) B_3(s)) \};$$

$$R_{\alpha 1}(s) = s A_1(s) \{ -R_2(s) (s^3 A_3 A_1(s) + B_3(s) B_3(s)) \} - B_2(s) \{ -R_1(s) (A_1(s) A_3 s^3 + B_3(s) B_4(s)) - R_3(s) B_4(s) s + R_4(s) A_1(s) s^2 \};$$

$$R_{\alpha 2}(s) = s A_1(s) \{ R_2(s) B_4(s) s + R_3(s) B_4(s) A_2 s^2 - R_4(s) A_1(s) A_2 s^3 \} - B_2(s) \{ R_1(s) B_4(s) s - R_3(s) B_1(s) B_4(s) + R_4(s) A_1(s) B_1(s) s \}.$$

Используя теорему о конечном значении оригинала для статических значений параметров можно получить:

$$\beta_{1cm} = \frac{M_{\text{нагу}}^*}{k_{\text{пв}}} - \frac{H}{k_{\text{пв}}} \omega_x^*; \quad \beta_{2cm} = \frac{M_{\text{назх}}^*}{k_{\text{пх}}} - \frac{H}{k_{\text{пх}}};$$

$$\alpha_{1cm} = \frac{m_d}{k_1} \omega_x^* - \frac{H}{k_1} \omega_y^*; \quad \dot{\alpha}_{1cm} = -\omega_y^*;$$

$$\alpha_{2cm} = -\frac{m_d}{k_2} \omega_y^* + \frac{H}{k_2} \omega_x^*; \quad \dot{\alpha}_{2cm} = -\omega_z^*.$$

При  $V=0$  и хорошей балансировке платформы моменты нагрузки очень малы. Также крайне малы величины угловых скоростей, зависящие в данном случае только от угловой скорости Земли. Поэтому анализ полученных значений позволяет сделать следующие выводы:

1) силовая гировертикаль устанавливается в положение вертикали места с высокой точностью;

2) по окончании процесса выставки силовая ГВ отслеживает положение вертикали места в соответствии с составляющими угловой скорости Земли.

## 2. Рабочий режим силовой ГВ

Рассмотрим работу силовой ГВ при полете самолета постоянным курсом и с постоянной скоростью. Для определенности будем также полагать, что развороты по тангажу и крену самолет совершает с постоянными угловыми скоростями. Предполагая, что стабилизация положения относительно вертикали места осуществляется с высокой точностью, можно считать, что вторые члены в формулах (1.65) представляют собой произведения бесконечно малых величин и ими можно пренебречь. Даже при полете на широтах ( $\varphi=90^0$ )

при  $V=300$  м/с величина выражения  $(\omega_2 + \frac{V}{R} \sin K \operatorname{tg} \varphi)$  не превышает 0.0028 1/с. В результате для составляющих абсолютной угловой скорости получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= \dot{\gamma}^* - \omega_1 \sin K - \frac{V}{R}, \\ \omega_x &= \dot{\psi}^* + \omega_1 \cos K. \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Для исключения явного времени продифференцируем исходную систему уравнений (1.66) по времени и рассмотрим производные от угловых скоростей (1.70):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_y &= -\dot{\omega}_1 \sin K, \\ \dot{\omega}_x &= \dot{\omega}_1 \cos K. \end{aligned}$$

При постоянной скорости полета и постоянном курсе угловая скорость изменения широты места

$$\dot{\varphi} = \frac{V \cos K}{R}$$

является величиной постоянной и при  $V=300$  м/с не превышает значения 0.000047 1/с. Производная от угловой скорости определяется выражением

$$\dot{\omega}_1 = \frac{d}{dt}(\omega_3 \cos \varphi t) = -\omega_3 \dot{\varphi} \sin \varphi t.$$

Так как угловая скорость вращения Земли равна 0.000072 1/с, то можно считать, что произведение  $\omega_3 \dot{\varphi} \approx 0$ , и это дает возможность считать



производные от угловых скоростей равными нулю. В этом случае для правых частей системы уравнений получим

$$R_1(s) = L \left\{ \frac{k_1}{H} \omega_y(t) \right\} = \frac{k_1}{H} \left( \frac{\dot{\gamma}^*}{s} - \omega_3 \sin K \frac{s}{s^2 + \phi^2} - \frac{V}{sR} \right);$$

$$R_2(s) = 0;$$

$$R_3(s) = L \left\{ \frac{k_2}{H} \omega_x(t) \right\} = \frac{k_2}{H} \left( \frac{\dot{\nu}^*}{s} + \omega_3 \cos K \frac{s}{s^2 + \phi^2} \right);$$

$$R_4(s) = 0.$$

Характеристический определитель преобразованной системы будет

$$D_1(s) = s^4 D(s).$$

Последовательность дальнейших действий обычная: находим изображения решений по параметрам стабилизации и, используя теорему о конечном значении оригинала, находим установившиеся (статические) значения этих параметров. Получим:

$$\begin{aligned} \beta_{cm1} &= 0, \\ \beta_{cm2} &= 0, \\ \alpha_{cm1} &= -\frac{H}{k_1} \left( \dot{\nu}^* - \frac{V}{R} \right), \\ \dot{\alpha}_{cm1} &= -\dot{\gamma}^*; \\ \alpha_{cm2} &= \frac{H}{k_2} \dot{\gamma}^*; \\ \dot{\alpha}_{cm2} &= -\dot{\nu}^* + \frac{V}{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, при оговоренных условиях полета статические ошибки по углам прецессии сохраняют свои малые значения. По углам стабилизации силовая гировертикаль отслеживает положение вертикали места со статическими ошибками, которые можно сделать малыми за счет выбора необходимого значения коэффициента усиления цепей коррекции. Входящая в состав статической ошибки относительно оси стабилизации ОУ величина  $\frac{V}{R}$

называется скоростной девиацией гировертикали. При реально существующих скоростях самолетов эта величина очень мала.

Дальнейшие исследования точности и устойчивости силовой ГВ могут быть связаны с применением отличных от рассмотренных устройств разгрузки и коррекции, использованием более сложных законов управления в цепях разгрузки и коррекции и т.д. Например, в качестве датчика в системе коррекции

очень часто используется жидкостный маятник, статическая характеристика которого нелинейна и имеет вид характеристики идеального реле. При необходимости учета моментов сухого трения также нужно помнить, что они выражаются нелинейными функциями вида (1.10). В перечисленных случаях для исследования движения ГВ можно использовать метод гармонической линеаризации [6, 12]. Может потребоваться также учет эффекта демпфирования за счет противоэдс в цепях разгрузки и момента инерции за счет обкатки редуктора в этих цепях [14]. Данные обстоятельства не меняют рассмотренную методику исследования и не вносят существенных изменений в полученные результаты.

## 1.9. Измерители линейных величин

### 1.9.1. Устройство и принцип действия акселерометра

Акселерометр — это устройство, предназначенное для измерения линейных ускорений. Чувствительным элементом акселерометра является груз 1 массой  $m$ , который помещен в корпус 2 и движение которого ограничено пружинами 3 (рис.1.21). Успокоение колебаний обеспечивается демпфером 4.

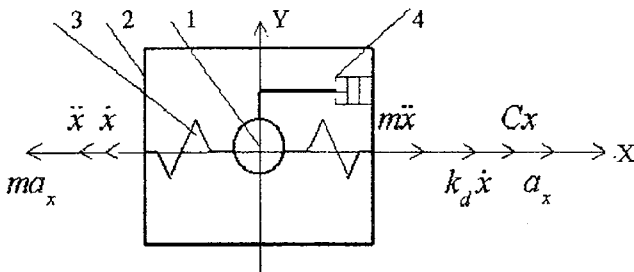


Рис.1.21. Принципиальная схема акселерометра

Предположим, что объект, на котором установлен акселерометр, имеет ускорение  $a_x$ , направленное вдоль оси  $X$ , которая называется измерительной осью или осью чувствительности. Под действием силы инерции  $F_{ин} = -ma_x$  груз 1 будет смещаться в сторону, противоположную ускорению  $a_x$ , со скоростью  $\dot{x}$  и ускорением  $\ddot{x}$ . Создаваемая ускорением сила инерции  $m\ddot{x}$  направлена в сторону, противоположную  $F_{ин}$ . На груз действуют также сила упругости пружины  $Cx$ , где  $C$  — коэффициент жесткости пружины, и усилие демпфера  $k_d \dot{x}$ , где  $k_d$  — коэффициент демпфирования. Уравнение сил вдоль оси  $X$  будет иметь вид

$$m\ddot{x} + k_d \dot{x} + Cx = ma_x$$

или

$$\frac{m}{C} \ddot{x} + \frac{k_d}{C} \dot{x} + x = \frac{m}{C} a_x. \quad (1.71)$$

Перейдя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$X(s) = W_a(s) a_x(s), \quad (1.72)$$

где  $W_a(s) = \frac{k_a}{T_a^2 s^2 + 2T_a \zeta_a s + 1}$  — передаточная функция акселерометра, в

которой  $T_a = \sqrt{\frac{m}{C}}$  — постоянная времени;  $\zeta_a = \frac{k_d}{2\sqrt{mC}}$  — показатель

затухания;  $k_a = \frac{m}{C}$  — коэффициент передачи акселерометра по перемещению груза  $x$ .

По окончании переходного процесса величина перемещения груза будет пропорциональна величине ускорения, действующего относительно оси чувствительности:

$$x = k_a a_x. \quad (1.73)$$

Если связать с грузом токосъемник потенциометра, то его выходное напряжение также будет пропорционально действующему напряжению.

Ускорение, действующее вдоль оси  $X$ , представляет собой разность ускорения объекта  $W_x$  и проекции на эту ось ускорения силы тяжести  $g_x = g \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осью  $X$  и плоскостью горизонта:

$$a_x = W_x - g_x.$$

Такое ускорение называется кажущимся ускорением. Для измерения истинного ускорения объекта необходимо акселерометр располагать в плоскости горизонта места. В этом случае  $\alpha = 0$  и  $a_x = W_x$ .

## 1.9.2. Гироскопический интегратор линейных ускорений

Гироскопический интегратор (ГИ) линейных ускорений представляет собой гироскоп с 3 степенями свободы, лишенный свойства астатичности за счет смещения центра тяжести относительно точки подвеса грузом  $P$  с плечом  $l_1$  (рис.1.22). Груз  $Q$  с плечом  $l_2$  предназначен для балансировки прибора относительно внешней рамки и играет вспомогательную роль. Совместим ось внешней рамки гироскопа со связанной осью  $X$  самолета, а ось внутренней рамки со связанной осью  $Z$ . Пусть задачей ГИ является измерение скорости ЛА

вдоль оси  $X$ , которая в этом случае является измерительной осью. Ускорение, действующее на летательный аппарат в плоскости  $XOZ$ , можно разложить на составляющие  $a_x$  и  $a_z$ . Эти ускорения, действуя на грузы  $P$  и  $Q$ , вызовут моменты относительно точки подвеса, и начнется прецессия гироскопа с угловыми скоростями  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$ . Рассмотрим уравнения гироскопа в рамках прецессионной теории.

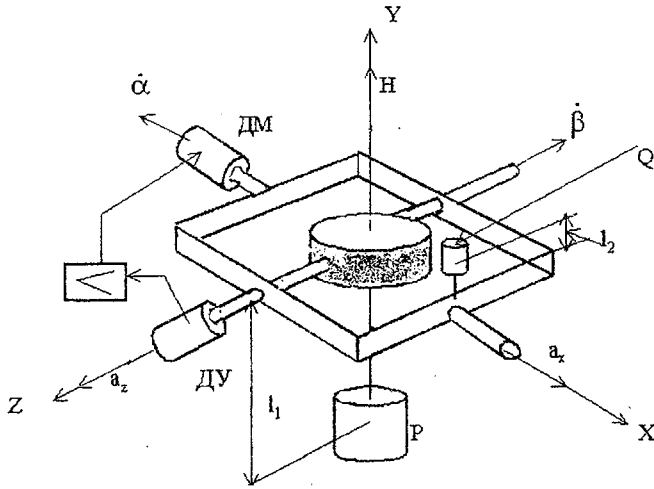


Рис. 1.22. Принципиальная схема ГИ

$$\left. \begin{aligned} H\dot{\alpha} &= M_{x'} \\ H\dot{\beta} &= M_{y'} \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Так как груз  $Q$  не создает момента относительно оси внутренней рамки гироскопа, то можно записать

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{P}{g} l_1 a_x \cos \beta \pm M_{x'} \\ M_y &= \frac{Pl_1 - Ql_2}{g} a_z \cos \alpha \pm M_{y'} \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

Здесь  $M_{x'}$  и  $M_{y'}$  - моменты трения по осям подвеса гироскопа.

Если выбрать параметры устройства так, что  $Pl_1 = Ql_2$ , то  $M_y = \pm M_{y'}$ .

Тогда для угловой скорости прецессии относительно внутренней рамки можно

записать  $\dot{\beta} = \pm \frac{M_{\text{ут.}}}{H}$ . Появление угла прецессии вызовет сигнал датчика угла

(ДУ), который через усилитель поступит на датчик моментов (ДМ). Момент, созданный этим датчиком компенсирует момент трения и реализует условие  $\beta = 0$ . Система ДУ-усилитель-ДМ представляет собой уже описанную выше систему межрамочной коррекции (МРК). Очевидно, что система МРК и добавочный груз  $Q$  совместно решают задачу обеспечения взаимной перпендикулярности рамок гироскопа. При условии  $\beta = 0$  получим

$$\dot{\alpha} = -\frac{P}{Hg} l_1 a_x \pm \frac{M_{\text{xt.}}}{H}. \quad (1.76)$$

С целью уменьшения погрешностей из-за момента трения используют различные способы, чаще всего применяют поплавковые гироскопы. Поэтому можно считать  $M_{\text{xt.}} \approx 0$ . Тогда для угла прецессии относительно внешней рамки получим

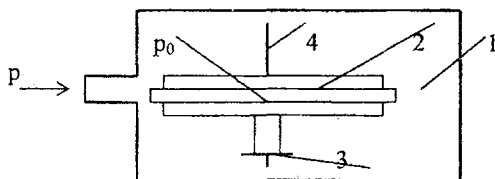
$$\alpha(t) = -\int_0^t \frac{P}{Hg} l_1 a_x(t) dt. \quad (1.77)$$

Так как угол прецессии ГИ относительно внешней рамки пропорционален интегралу от кажущегося ускорения, то прибор измеряет кажущуюся скорость ЛА. Для решения задачи определения истинной скорости в заданном направлении необходимо обеспечить положение измерительной оси в плоскости горизонта места, что достигается расположением ГИ на ГСП, сохраняющей плоскость горизонта места.

### 1.9.3. Барометрический измеритель высоты полета

Различают абсолютную, относительную и истинную высоту полета. Абсолютная высота измеряется относительно уровня моря, относительная — относительно высоты места взлета, истинная — относительно места, над которым пролетает самолет.

Принцип действия барометрического высотомера (рис. 1.23) заключается в измерении разности давлений между давлением на высоте полета  $p$  и некоторым постоянным —  $p_0$ .



1.23. Схема барометрического высотомера

Перед взлетом самолета клапан 3 открыт и через него в гибкую мембранную коробку 2 через отверстие в корпусе 1 поступает воздух под давлением  $p_0$ , соответствующим высоте места взлета. В момент взлета клапан закрывается и внутри мембранной коробки запоминается давление  $p_0$ . В процессе набора высоты давление внутри корпуса уменьшается, мембранная коробка под действием разности давлений  $\Delta p = p_0 - p$  изменяет свои размеры, что фиксируется перемещением штока 4.

Известно, что для высот от нуля до 11000 м атмосферное давление и высота полета связаны соотношением

$$p = p_0 e^{-\frac{H}{RT_{cp}}}, \quad (1.78)$$

где  $R = 29.27$  м/град — газовая постоянная;  $T_{cp} = \frac{T_0 + T_H}{2}$  — средняя температура по Кельвину,  $T_0$  и  $T_H$  — абсолютная температура воздуха у Земли и на высоте  $H$  соответственно. Из (1.78) следует

$$H = RT_{cp} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (1.79)$$

Для высот от 11000 м до 33000 м абсолютная температура воздуха практически не изменяется и равна  $T_{11} = 216,5$  К. Для этих высот

$$H = 11000 + RT_{11} \ln \frac{p_{11}}{p}. \quad (1.80)$$

Следовательно, в процессе полета изменение высоты относительно места взлета будет регистрироваться величиной перемещения штока 4 мембранной коробки. Это перемещение можно преобразовать в электрический сигнал, удобный для использования в системе автоматической стабилизации высоты полета. Необходимо подчеркнуть, что перед посадкой нужно по информации с Земли откорректировать величину  $p_0$  в соответствии с давлением воздуха на высоте места посадки.

Чаще всего барометрический принцип измерения высоты используется по схеме корректора высоты полета. Принципиальная схема корректора высоты приведена на рис. 1.24. Корректор высоты (КВ) работает следующим образом:

1. Корректор высоты не включен (контакт Вкл.КВ разомкнут). Автопилот работает в режиме "Подготовка" или в режиме стабилизации угла тангажа. В этом случае при изменении самолетом барометрической высоты ход мембранной (анероидной) коробки 1 через зубчатый сектор 2 передается на сравнивающее устройство 3, в качестве которого обычно используется индукционный преобразователь (ИД). Электрический сигнал с выхода ИД через усилитель подается на электродвигатель (ЭД). Двигатель через первый редуктор Р отрабатывает до тех пор, пока сигнал на выходе ИД не станет равным нулю. Движение от ЭД на шетку

потенциометра 4 не передается, так как электромагнитная муфта ЭММ обесточена. Таким образом, в этих режимах работы автопилота в КВ работает только следящая

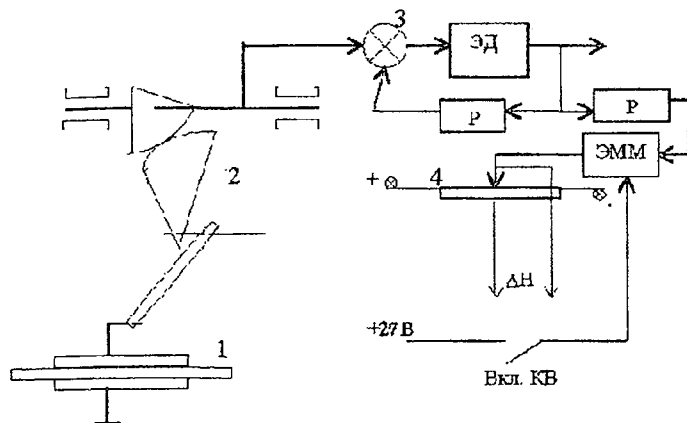


Рис.1.24. Принципиальная схема КВ

система, которая обнуляет показания ИД. Структурная схема этой следящей системы показана на рис 1.25.

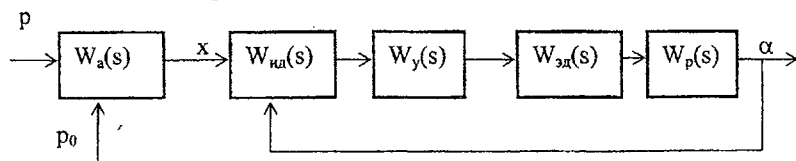


Рис.1.25. Структурная схема следящей системы КВ

На структурной схеме обозначено:

$W_a(s)=k_a$  – передаточная функция анероидной коробки;

$W_{ид}(s)=k_{ид}$  – передаточная функция ИД;

$W_y(s)=k_y$  – передаточная функция усилителя;

$W_{эд}(s) = \frac{k_d}{s(T_d s + 1)}$  – передаточная функция ЭД;

$W_p(s)=i$  – передаточная функция редуктора.

Сигнал на выходе анероидной коробки равен

$$x(s) = k_a (p - p_0).$$

Если давление  $p_0$  соответствует высоте места взлета, то величина разности давлений пропорциональна барометрической высоте полета

$$x(s) = k_a H.$$

Передаточная функция замкнутой цепи регулирования будет

$$\Phi(s) = \frac{k_{ud} k_y k_d i}{s(T_d s + 1) + k_{ud} k_y k_d i}.$$

Для сигнала на выходе следящей системы можно записать

$$\alpha(s) = k_a \Phi(s) H \quad (1.81)$$

Если считать, что осуществляется подъем или снижение на заданную высоту

$$H = H^* = \text{const} \Rightarrow \frac{H^*}{s}, \text{ то в соответствии с теоремой о конечном значе-}$$

нии оригинала, получим

$$\alpha_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \alpha(s) = k_a H^* \quad (1.82)$$

Следовательно, установившееся значение выходного сигнала следящей системы после достижения заданной высоты пропорционально этой высоте.

2. После достижения заданной высоты и необходимости ее стабилизации нажатием специальной кнопки замыкают контакт "Вкл.КВ". В этот момент сигнал потенциометрического преобразователя 4 равен нулю, так как его щетка удерживается в среднем положении специальными пружинами. Таким образом, нулевой сигнал потенциометра соответствует положению самолета на заданной высоте. При замыкании контакта "Вкл.КВ" электрический сигнал подается на ЭММ и она включается. Теперь при изменении барометрической высоты полета электродвигатель поворачивает не только обрабатывающий элемент ИД до согласования, но через ЭММ и второй редуктор смещает щетку потенциометра на величину, пропорциональную  $\Delta H$  - отклонению самолета от заданной высоты. Сигнал с потенциометра поступает в продольный канал автопилота, в результате чего самолет возвращается на заданную высоту полета.

Атмосферное давление у поверхности Земли не постоянно и изменяется в пределах от 760 до 730 мм рт.столба. Допустим, что в месте взлета в анероидной коробке установлено давление  $p_0 = 760$  мм рт.столба. Полет должен проходить на высоте 10000 м, чему соответствует давление  $p = 199.6$  мм рт.столба. При пролете над точкой, для которой  $p_0 = 730$  мм рт.столба, баровысотомер будет показывать по-прежнему высоту 10000 м, хотя реальное значение высоты будет  $\approx 9700$  м. Поэтому полет на малых высотах ( $H < 100$  м) по показаниям баровысотомера запрещен.



Кроме того, при подлете к месту посадки необходимо запросить давление у этого места земной поверхности и откорректировать показания баровысотомера.

#### 1.9.4. Инерциальная вертикаль

После изучения свойств гироскопа и измерителей ускорения можно рассмотреть принцип построения инерциальной вертикали места.

Суть работы инерциальных систем управления (ИНС) заключается в измерении ускорений движущегося ЛА в определенных направлениях и двукратном их интегрировании. Допустим, что имеется акселерометр, установленный на ГСП, сохраняющей плоскость истинного горизонта, и ориентированный в направлении Север – Юг (рис.1.26).

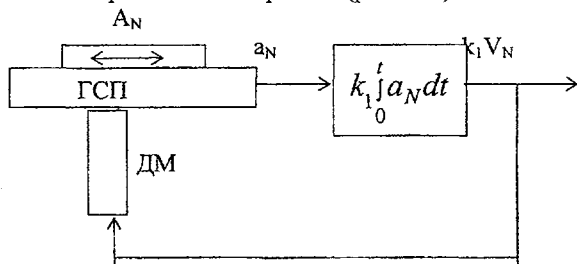


Рис.1.26. Схема одноканальной инерциальной вертикали

После интегрирования сигнала ускорения  $A_N$  и деления полученного результата на радиус Земли  $R$ , получим значение угловой скорости широты места

$$\dot{\varphi} = \frac{k_1 V_N}{R}$$

Проинтегрировав полученное значение, с учетом начальных условий получим значение широты места. Для решения такой задачи необходимо ориентировать акселерометр определенным образом в плоскости истинного горизонта места. Если в плоскости горизонта ориентировать акселерометр в направлении Восток - Запад, то аналогичным образом получим значение географической долготы места. Главным в данном случае является ориентация ГСП в плоскости горизонта места, т.е. получение вертикали места.

Идеальным указателем вертикали места является гипотетический маятник, точка подвеса которого находится на поверхности Земли, а вся его масса сосредоточена в центре Земли.

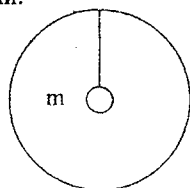


Рис.1.27. Маятник Шюллера

При любом перемещении точки подвеса такой маятник будет сохранять положение вертикали места. Этот маятник получил название маятника Шулера. Период собственных колебаний маятника Шулера равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84.4 \text{ кг.}$$

Физически реализовать такой маятник невозможно, но возможно создать построители вертикали места, являющиеся математической моделью маятника Шулера.

Рассмотрим упрощенную схему построения вертикали места по одному каналу (рис.1.26). Выходной сигнал интегратора подается на датчик момента и ГСП прецессирует с угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = \frac{M}{H}, \text{ где } M = k_1 k_{DM} V_N.$$

Если выбрать параметры системы так, что  $\frac{k_1 k_{DM}}{H} = \frac{1}{R}$ , то получим

$$\dot{\alpha} = \frac{V_N}{R} = \dot{\varphi}.$$

Угловая скорость прецессии равна угловой скорости изменения широты места, и такая ГСП сохраняет положение вертикали места в рассматриваемой плоскости. Такая вертикаль называется инерциальной (ИВ).

### 1.9.5. Динамические характеристики инерциальной вертикали

В рамках прецессионной теории, пренебрегая моментами трения, уравнения ГСП можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} Hq &= M_x, \\ Hp &= -M_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

Вопросы компенсации возмущений, выводящих ГСП из требуемого положения, в данном случае рассматривать не будем. Пусть на ГСП расположены два акселерометра  $A_x$  и  $A_y$ , измерительные оси которых ориентированы по линии "Восток - Запад" и "Север - Юг" соответственно. Сигналы этих акселерометров являются основой для формирования управляющих моментов

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \mu \int_0^t a_x(t) dt, \\ M_y &= \mu \int_0^t a_y(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

В этих выражениях  $\mu$  - коэффициент передачи датчиков моментов.

За счет движения ЛА относительно Земли возникают угловые скорости

$u_x = -\frac{V_N}{R}$  и  $u_y = \frac{V_E}{R}$ , где  $V_N$  и  $V_E$  – северная и западная составляющие скорости ЛА (рис.1.29).

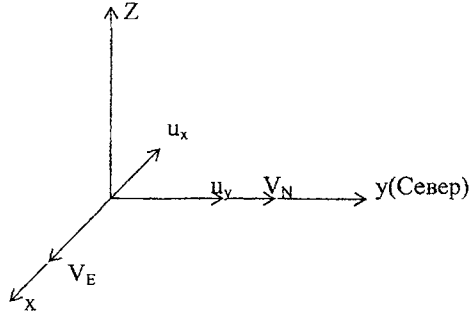


Рис.1.29. Угловые скорости за счет движения ЛА

Для абсолютных угловых скоростей получим

$$\left. \begin{aligned} q &= \dot{\alpha} + \frac{V_E}{R}, \\ p &= \dot{\beta} + \frac{V_N}{R}. \end{aligned} \right\}$$

Ускорения, действующие относительно осей акселерометров

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \dot{V}_E - g \sin \alpha = \dot{V}_E - g \alpha, \\ a_y &= \dot{V}_N - g \sin \beta = \dot{V}_N - g \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

Сделаем следующие преобразования:

1. Подставим в (1.83) абсолютные угловые скорости и выражения для моментов с учетом выражений (1.85) для ускорений.

2. Продифференцируем обе части полученных выражений и разделим их на кинетический момент  $H$ .

После приведения подобных членов получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{\mu g}{H} \alpha &= \left( \frac{\mu}{H} - \frac{1}{R} \right) \dot{V}_E, \\ \ddot{\beta} + \frac{\mu g}{H} \beta &= \left( \frac{\mu}{H} - \frac{1}{R} \right) \dot{V}_N. \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

Выберем параметры системы так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\mu}{H} = \frac{1}{R}. \quad (1.87)$$

Получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \alpha &= 0, \\ \ddot{\beta} + \frac{g}{R} \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

Движение такой системы не зависит от внешних воздействий и условие (1.87) называется условием невозмущаемости. Решение, например, первого уравнения системы (1.88) при начальных условиях  $\alpha(0)=\alpha_0$ ,  $d\alpha/dt(0)=\alpha_1$  имеет вид

$$\alpha(t) = A \sin(\nu t + \varphi), \quad (1.89)$$

где  $A = \sqrt{\alpha_0^2 + \left(\frac{\alpha_1}{\nu}\right)^2}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{\alpha_0 \nu}{\alpha_1}$ ;  $\nu^2 = \frac{g}{R}$ .

Выражение (1.89) описывает незатухающие гармонические колебания с амплитудой и фазой, зависящими от начальных условий. Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84,4 \text{ мин.}$$

Следовательно, рассматриваемый гироскопический построитель инерциальной вертикали места является математической моделью маятника Шулера. Различие между маятником Шулера и его математической моделью заключается в том, что для первого начальные условия всегда нулевые и амплитуда его колебаний равна нулю. Отсюда возникают для модели маятника Шулера очень высокие требования к точности начальной выставки, а также необходимость демпфирования колебаний инерциальной вертикали.

### 1.9.6. Демпфирование инерциальной вертикали

Демпфирование инерциальной вертикали (ИВ) может осуществляться как за счет внутренних связей, так и за счет внешней информации. Структурная схема демпфирования одного канала ИВ внутренней связью приведена на рис. 1.30, на котором обозначено:

- $K_1$  - коэффициент передачи акселерометра;
- $K_2$  - коэффициент передачи интегратора;
- $K_3$  - коэффициент передачи датчика момента;
- $K_4$  - коэффициент передачи демпфирующей связи;
- $\beta_n$  - истинное значение угла прецессии;
- $\beta_n$  - приборное значение угла прецессии;
- $\beta = \beta_n - \beta_n$  - ошибка ориентации.

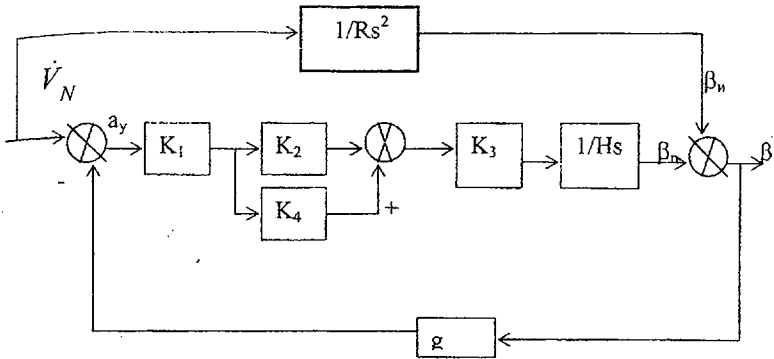


Рис.1.30. Схема демпфирования ИВ внутренней связью

На вход поступает значение ускорения по линии Север – Юг. Верхний канал схемы является математической моделью образования угловой скорости широты места, равной необходимой (истинной) скорости прецессии ГСП. Средний и нижний участки схемы представляют собой схему формирования ускорения  $a_y$ , его интегрирования и создания момента коррекции для реализации нужного прецессионного движения ГСП.

В соответствии со схемой можно записать

$$\beta_{II} = k_1 \left( \frac{k_2}{s} + k_4 \right) \frac{k_3}{Hs} (\dot{V}_N - g\beta).$$

С другой стороны,

$$\beta_{II} = \beta + \beta_u = \beta + \frac{\dot{V}_N}{Rs^2}.$$

Приравняв эти выражения и умножив обе части на  $s^2$ , после группировки членов с неизвестными в левой части получим

$$\ddot{\beta} + \frac{bg}{H} \dot{\beta} + \frac{\mu g}{H} \beta = \left( \frac{\mu}{H} - \frac{1}{R} \right) \dot{V}_N + \frac{b}{H} \ddot{V}_N,$$

где  $b = k_1 k_3 k_4$ ;  $\mu = k_1 k_2 k_3$ .

При выполнении условия невозмущаемости уравнение примет вид

$$\ddot{\beta} + \frac{bg}{H} \dot{\beta} + \frac{g}{R} \beta = \frac{b}{H} \ddot{V}_N.$$

Решение этого уравнения может быть записано следующим образом:

$$\beta(t) = e^{\lambda t} (C_1 \cos vt + C_2 \sin vt),$$

$$\text{где } \lambda = -\frac{bg}{2H}.$$

Из решения следует, что колебания инерциальной вертикали стали затухающими, причем период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\nu} = 84.4$  мин по-прежнему

равен периоду Шулера. Недостатком такого демпфирования является то, что вертикаль стала возмущаемой производной от ускорения. Необходимо отметить, что эта производная обычно крайне мала. Достоинство – простота технической реализации.

Рассмотрим возможный метод демпфирования за счет внешней информации. Пусть на борту ЛА имеется возможность точно измерить пройденный путь  $S^*$  и скорость полета  $V^*$ , например с помощью астрономических приборов. Тогда можно вычислить

$$\beta = \frac{S^* - S_{II}}{R}; \quad \dot{\beta} = \frac{V^* - V_{II}}{R},$$

где  $S_{II}$  и  $V_{II}$  – приборные значения пути и скорости, полученные с помощью инерциальной системы. Вычисленные значения введем в цепь коррекции:

$$M_y = \mu \int_0^t (\dot{V}_N - g\beta - n_1\dot{\beta} - b\beta) dt.$$

Подставив значения моментов в (1.83), после преобразований получим

$$\ddot{\beta} + \frac{b\mu}{H}\dot{\beta} + \frac{\mu(g+n_1)}{H}\beta = \left(\frac{\mu}{H} - \frac{1}{R}\right)\dot{V}_N.$$

При выполнении условия невозмущаемости правая часть последнего выражения обращается в ноль и вертикаль становится невозмущаемой.

Колебания становятся затухающими с частотой  $\nu^2 = \frac{g+n_1}{R}$ . При  $n_1=0$  период колебаний равен периоду Шулера.

## Глава 2. ПРЕОБРАЗУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Преобразующие устройства предназначены для преобразования перемещения чувствительного элемента измерительного устройства в сигнал другой формы, чаще всего в электрический сигнал. Наибольшее распространение нашли потенциометрические, индуктивные и индукционные преобразователи угла поворота или линейного перемещения в электрический сигнал постоянного или переменного тока.

### 2.1. Потенциометрический преобразователь

Рассмотрим работу двухтактного потенциометра, схема которого приведена на рис.2.1.

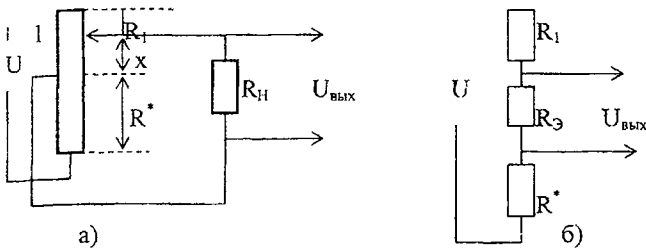


Рис.2.1. Двухтактный потенциометрический преобразователь:  
а) схема принципиальная; б) схема эквивалентная

На рисунке обозначено:  $R^*$  - половина сопротивления потенциометра;  $R_H$  - сопротивление нагрузки;  $U$  - напряжение питания;  $U_{\text{вых}}$  - выходное напряжение;  $x$  - перемещение токосъемника;  $R_1$  - сопротивление между токосъемником и верхним выводом потенциометра,  $l$  - половина длины (базы) потенциометра.

Обозначим сопротивление между средней точкой и токосъемником  $R_x$ . Сопротивления  $R_x$  и  $R_H$  включены параллельно. Поэтому их эквивалентное сопротивление равно

$$R_{\mathcal{E}} = \frac{R_H R_x}{R_H + R_x}.$$

Если выполняется условие  $R_H \gg R_x$ , то последнее выражение можно записать в виде

$$R_{\mathcal{E}} = \frac{R_x}{\left(1 + \frac{R_x}{R_H}\right)} \approx R_x.$$

Так как  $R^* = R/2$ , то  $R_1 + R_{\mathcal{E}} + R^* = R$ , где  $R$  - полное сопротивление потенциометра. Для выходного напряжения получим

$$U_{\text{вых}} = \frac{U}{R} R_x.$$

Так как  $R_x = \frac{x R}{l 2}$ , то можно записать

$$U_{\text{вых}} = \frac{U}{2l} x = k_{\text{П}} x. \quad (2.1)$$

Точность преобразования тем выше, чем больше сопротивление нагрузки по сравнению с сопротивлением потенциометра. При  $R_H > 10R$  характеристику потенциометрического преобразователя можно считать практически линейной. Если такое соотношение невозможно выполнить, то между

потенциометром и нагрузкой устанавливают специальные согласующие устройства.

Из схемы следует, что при переходе токосъемником через среднюю точку полярность (фаза) выходного напряжения изменяется на противоположную. Поэтому такой потенциометрический преобразователь называется двухтактным.

С учетом ошибок изготовления, диаметра проволоки и шага намотки нелинейность статической характеристики промышленных потенциометров составляет 0.1 – 0.3%. Чувствительность потенциометров не превышает  $(3-5)10^{-3}$  В/мм. Потенциометрические преобразователи по точности делятся на три класса с точностью  $\pm 0.01\%$ ,  $\pm 0.02\%$ ,  $0.05\%$ . Потенциометры достаточно надежно работают при частоте перемещения токосъемника  $\omega = (600-900)$  град/с. Средний срок службы составляет  $(2-10)10^6$  циклов.

## 2.2. Индуктивные преобразователи

Индуктивные преобразователи предназначены для преобразования механического перемещения в электрический сигнал. Работа такого преобразователя основана на изменении индуктивного сопротивления катушки со стальным сердечником при перемещении подвижного якоря (рис.2.2).

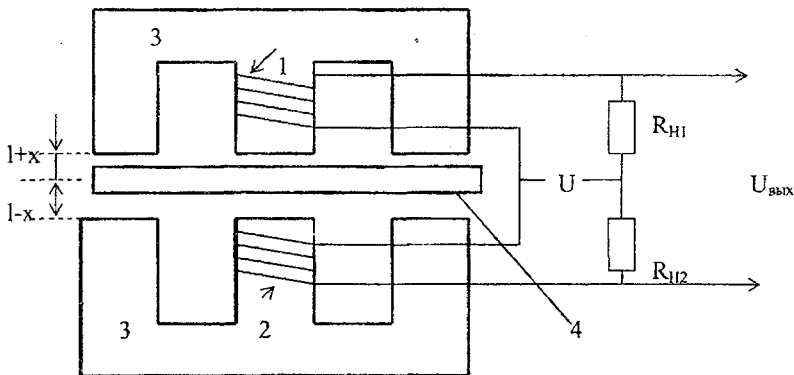


Рис.2.2.Схема двухтактного индуктивного преобразователя

Катушки 1 и 2 намотаны на стальные сердечники 3 и через сопротивления нагрузки  $R_{Н1}$  и  $R_{Н2}$  подключены к источнику переменного тока  $U$  встречно. Процессы, протекающие в обоих плечах двухтактного преобразователя, одинаковы. Магнитный поток обмотки 1 проходит через стальной сердечник 3 и замыкается через подвижный якорь 4. Индуктивность катушки определяется выражением



$$L = \frac{W\Phi}{i}, \quad (2.2)$$

где  $W$  – число витков катушки;  $\Phi$  – магнитный поток;  $i$  – ток в катушке.  
Магнитный поток

$$\Phi = \frac{0.4\pi i W}{R_m} = \frac{0.4\pi i W}{R_{cm} + \frac{2x}{S_m \mu_0}}. \quad (2.3)$$

В этом выражении  $R_m$  – магнитное сопротивление цепи;  $R_{cm}$  – магнитное сопротивление стального сеодечника;  $S_m$  – площадь сечения сердечника;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость воздуха. Подставив (2.3) в (2.2), получим

$$L = \frac{0.4\pi W^2}{R_{cm} + \frac{2x}{S_m \mu_0}}.$$

Действующее значение тока в нагрузке

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad (2.4)$$

где  $R$  – активное сопротивление катушки и нагрузки;  $\omega$  – частота питающего напряжения. В типовых конструкциях  $R_{cm} \ll \frac{2x}{S_m \mu_0}$  и  $R \ll \omega L$ . Тогда из

(1.86) следует

$$I_H = \frac{2U}{W^2 \omega \mu_0 S_m} (l \pm x), \quad U_{вых} = R_{H1} I_{H1} - R_{H2} I_{H2}. \quad (2.5)$$

Очевидно, что при  $R_{H1} = R_{H2}$  и  $x=0$  выходное напряжение  $U_{вых} = 0$ . Если  $x \neq 0$ , то

$$U_{вых} = 2k R_H x, \quad (2.6)$$

где  $R_H = R_{H1} = R_{H2}$ ,  $k = \frac{2U}{W^2 \omega \mu_0 S_m}$ . Изменение знака перемещения  $x$  приводит

к изменению фазы выходного напряжения на противоположную.

Основными недостатками индуктивных преобразователей являются возможность их работы только на переменном токе и сильная зависимость параметров от стабильности частоты питающего напряжения.

Основными достоинствами индуктивных преобразователей являются высокая надежность, обусловленная отсутствием скользящих контактов, и большой коэффициент передачи, достигающий нескольких сотен вольт на миллиметр

перемещения якоря. Благодаря этому, а также высокой разрешающей способности индуктивные преобразователи особенно пригодны для работы в системах измерения очень малых угловых или линейных перемещений.

С точки зрения динамики индуктивные преобразователи представляют собой безинерционное звено.

### 2.3. Индукционный преобразователь

Индукционные преобразователи предназначены для преобразования линейного или углового перемещения в изменение коэффициента взаимной индукции между двумя или несколькими катушками. Принцип действия такого преобразователя можно пояснить рисунком 2.3.

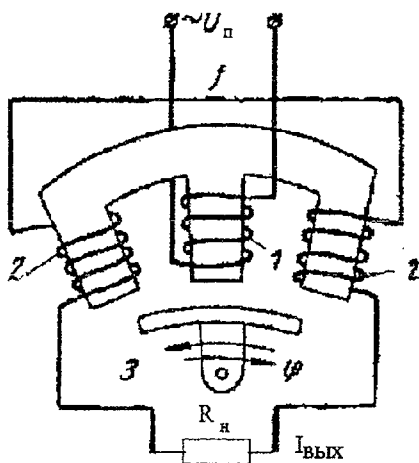


Рис.2.3. Принципиальная схема индукционного преобразователя

Первичная обмотка 1 питается переменным током напряжением  $U_n$  с частотой  $f$ . Обмотки 2 на крайних стержнях сердечника намотаны в противоположных направлениях. Магнитные потоки первичной катушки, определяемые выражением (1.85), пронизывают витки вторичных катушек и замыкаются через подвижный якорь 3. Во вторичных катушках индуктируются ЭДС

$$E_{2л} = 4.44\Phi_1 w_2 f,$$

$$E_{2п} = 4.44\Phi_2 w_2 f.$$

Здесь обозначено: 2л- левая вторичная катушка, 2п – правая вторичная катушка. Будем полагать, что число витков  $w_2$  во вторичных катушках одинаково. Подставив выражения для магнитных потоков, получим

$$E_{2n} = \frac{1.776\pi i w_1 w_2 f}{R_{M1}},$$

$$E_{2n} = \frac{1.776\pi i w_1 w_2 f}{R_{M2}}.$$

Величина  $M = \frac{w_1 w_2}{R_M}$  называется коэффициентом взаимной индуктивности.

Окончательно получим

$$E_{2л} = 1.776\pi i M_{2л} f,$$

$$E_{2н} = 1.776\pi i M_{2н} f.$$

Если якорь находится в среднем положении, т.е.  $\varphi=0$ , то магнитные сопротивления в обоих каналах равны, равны коэффициенты взаимной индукции и равны ЭДС, индуцируемые во вторичных катушках. Суммарная ЭДС равна нулю и  $I_{\text{вых}}=0$ . При перемещении якоря в какую-либо сторону изменяются магнитные сопротивления каналов и коэффициенты взаимной индукции, и за счет возникающей разности индуцируемых ЭДС появляется выходной ток. На сопротивлении нагрузки появляется выходное напряжение

$$U_{\text{вых}} = I_{\text{вых}} R_n, \quad (2.7)$$

которое является функцией угла поворота  $\varphi$  якоря.

### Глава 3. ПРИБОРЫ ЛОГИКО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ИСПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПОДСИСТЕМ

Общей задачей логико-вычислительной и исполнительной подсистем является формирование и реализация закона управления.

Законом управления называется зависимость отклонения регулирующего органа от сигнала ошибки

$$R(s) = W(s)E(s).$$

В этом выражении  $R(s)$ -изображение вектора регулирующего воздействия,  $W(s)$ -передаточная функция закона управления,  $E(s)$ -изображение вектора ошибки. В практических приложениях при определении структурной схемы системы и последующем синтезе параметров закона управления используют его идеализированную форму, пренебрегая постоянными времени, т.е.

$$R(s) = A(s)E(s),$$

где  $A(s)$  – некоторый полином вида

$$A(s) = \sum_{i=0}^k a_i s^{k-i} + \sum_{j=k+1}^r a_j / s^{r-j}.$$

Следовательно, рассматриваемый полином является комбинацией производных и интегралов, обеспечивающей необходимые запасы устойчивости и качество системы.

Формирование закона управления может быть осуществлено как на цифровой ЭВМ (дискретные системы), так и с помощью непрерывных устройств (непрерывные системы). Вопросам формирования закона управления на ЦВМ посвящено большое количество литературы [6,7,8]. Здесь мы рассмотрим только принцип реализации закона управления с помощью устройств непрерывного типа.

### 3.1. Линейные корректирующие устройства

Выше уже говорилось, что включение корректирующих устройств в контур управления с целью формирования закона управления обеспечивает системе необходимые запасы устойчивости и требуемое качество процесса управления. Линейные корректирующие устройства вводят в закон управления производные, интегралы и их комбинации от сигнала ошибки. В основе этих устройств лежат простейшие R-C контуры.

#### 1. Дифференцирующий R-C контур

Схема дифференцирующего контура показана на рис. 3.1.

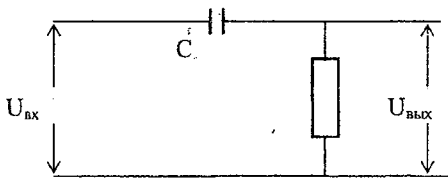


Рис.3.1. Принципиальная схема дифференцирующего контура

Сила тока в цепи может быть определена из выражения

$$U_{\text{вх}} = i_c R + \frac{1}{C_0} \int i_c dt = U_R + U_C. \quad (3.1)$$

В этом выражении  $i_c$  – ток заряда конденсатора,  $U_R$  – падение напряжения на активном сопротивлении,  $U_C$  – падение напряжения на емкости.

Из (3.1) получим

$$i_c = \frac{U_{\text{вх}} - U_C}{R}.$$

Продифференцируем это выражение и с учетом (3.1) получим

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - \frac{1}{R} \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - \frac{1}{RC} i_c.$$

Обозначим  $T=RC$ . Теперь можно записать дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{di_c}{dt} + \frac{1}{T} i_c = \frac{1}{R} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (3.2)$$

Учитывая, что  $U_{\text{вых}} = i_c R$  и умножая обе части (3.2) на  $R$ , получим

$$\frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + \frac{1}{T} U_{\text{вых}} = \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}.$$

Переходя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, можно записать

$$\frac{Ts+1}{T} U_{\text{вых}}(s) = s U_{\text{вх}}(s).$$

Окончательно получим

$$U_{\text{вых}}(s) = \frac{Ts}{Ts+1} U_{\text{вх}}(s),$$

где  $W(s) = \frac{Ts}{Ts+1}$  — (3.3)

передаточная функция дифференцирующего контура. Рассмотрим логарифмическую частотную амплитудную характеристику контура (рис.3.2).

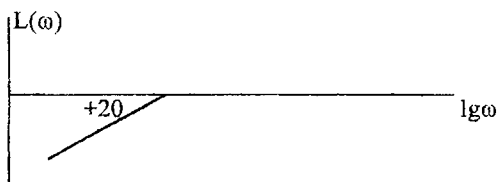


Рис.3.2. ЛАХ дифференцирующего контура

Из анализа рис.3.2. можно сделать следующие выводы:

- 1) в диапазоне частот  $\omega < \frac{1}{T}$  звено выполняет операцию дифференцирования;
- 2) в диапазоне частот  $\omega > \frac{1}{T}$  звено является безинерционным с коэффициентом усиления, равным единице.

Чем меньше величина постоянной времени  $T$ , тем для большего диапазона частот выполняется операция дифференцирования.

## 2. Интегрирующий R-C контур

Принципиальная схема интегрирующего контура показана на рис. 3.3. По аналогии с предыдущим можно записать.

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{C} \int i_c dt = U_{\text{вх}} - i_c R. \quad (3.4)$$

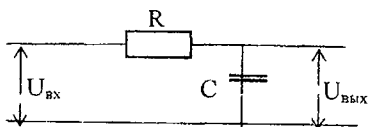


Рис.3.3. Принципиальная схема интегрирующего контура

Отсюда

$$i_c = \frac{U_{вх} - U_{вых}}{R}$$

Подставим в (3.4) выражения для тока в цепи и получим

$$U_{вых} = \frac{1}{T_0} \int (U_{вх} - U_{вых}) dt.$$

Перейдем к изображениям по Лапласу, и после элементарных преобразований получим

$$U_{вых}(s) = \frac{1}{Ts+1} U_{вх}(s).$$

В этом выражении

$$W(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad (3.5)$$

передаточная функция интегрирующего контура. Этой передаточной функции соответствует логарифмическая амплитудная характеристика, показанная на рис. 3.4.

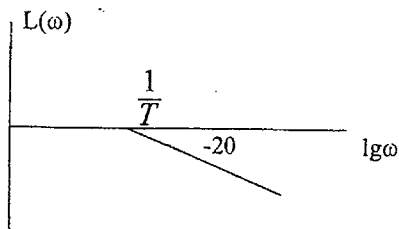


Рис.3.4. Логарифмическая амплитудная характеристика интегрирующего контура

В диапазоне частот  $\omega > \frac{1}{T}$  схема выполняет операцию интегрирования,

при  $\omega < \frac{1}{T}$  звено является безинерционным с коэффициентом передачи, равным единице. Чем больше величина постоянной времени  $T$ , тем для большего диапазона частот выполняется операция интегрирования.

Комбинируя рассмотренные схемы, можно получить более сложные интегродифференцирующие контуры. Разнообразные схемы таких контуров приводятся в литературе [4,8,14].

### 3. Антивибраторы

В процессе полета на ЛА действуют управляющие и возмущающие воздействия, что приводит к изгибным колебаниям корпуса [6,7,8,12]. Эти колебания относительно высокой частоты и малой амплитуды, проходя через приборы информационной подсистемы, в частности через ДУС, могут получить значительное усиление и привести к нарушениям в работе системы стабилизации. Если ЛА обладает статической устойчивостью, то под воздействием высокочастотных сигналов от изгибных колебаний изменятся только масштабы процессов, т.е. изменятся только показатели качества процесса управления. При отсутствии статической устойчивости высокочастотные сигналы изгибных колебаний могут привести к потере устойчивости системы управления. Для исключения этого явления применяются меры амплитудной стабилизации и фазовой стабилизации. Амплитудная стабилизация заключается в подавлении сигналов на частоте помехи. При фазовой стабилизации создается подъем фазовой характеристики на частоте помехи. Рассмотрим одну из возможных схем контура для амплитудной стабилизации. Эта схема антивибратора получила название двойного Т-образного моста (рис.3.5).

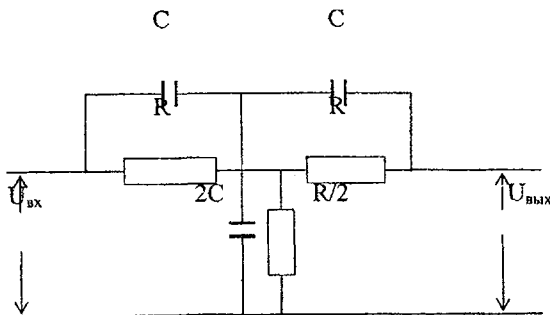


Рис.3.5. Принципиальная схема двойного Т-образного моста

Передаточная функция такого антивибратора имеет вид

$$W(s) = \frac{1 + T^2 s^2}{T^2 s^2 + 4Ts + 1}, \quad (3.6)$$

$$T = RC.$$

Из (3.6) нетрудно получить выражение для частотных характеристик

$$A(\omega) = \frac{1 - T^2 \omega^2}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 16T^2 \omega^2}}, \quad (3.7)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{4T\omega}{1 - T^2 \omega^2}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что  $\lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{T}} A(\omega) = 0$  т.е. на частоте  $\omega = \frac{1}{T}$  обеспечивается

полное подавление сигнала (рис.3.6). Фазовая характеристика изменяется в пределах от нуля до  $-180^\circ$  и на частоте  $\omega = \frac{1}{T}$  равна  $-90^\circ$ .

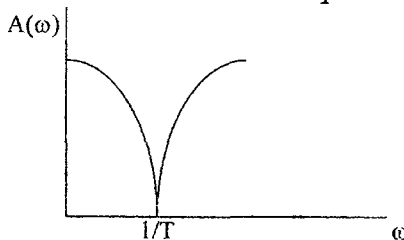


Рис.3.6. Амплитудная частотная характеристика

Большим недостатком линейных корректирующих устройств является жесткая связь амплитудной и фазовой характеристик, что приводит к значительному фазовому запаздыванию на частоте подавления и, в результате, к снижению запасов устойчивости. С целью исключения этого недостатка используются нелинейные и псевдолинейные корректирующие устройства [4, 12].

### 3.2. Усилители

Сигналы устройств логико-вычислительной подсистемы имеют незначительную мощность и не могут непосредственно использоваться для обеспечения работы исполнительной подсистемы. Возникает необходимость усиления сигналов.

Общей функцией усилителей является усиление по мощности сигнала управления до уровня необходимого для работы исполнительных устройств системы. Усилительные устройства систем автоматического управления представляют собой, как правило, многокаскадные усилители со сложными обратными связями, которые вводятся для улучшения его статических, динамических и эксплуатационных характеристик.

В бортовых системах управления ЛА применяются электрические усилители, которые, в свою очередь, подразделяются на электронные, релейные



и магнитные. Особенностью электронных усилителей является их высокая чувствительность, они способны усиливать сигналы мощностью порядка нескольких микроватт.

К недостаткам электронных усилителей можно отнести их недостаточно высокую мощность, относительно низкую надежность, чувствительность к вибрациям и относительно большую мощность потребления. Транзисторные усилители, кроме того, обладают недостаточно стабильными характеристиками.

Широкое применение в системах управления нашли релейные усилители.

Основные их достоинства:

- устойчивость к изменению температуры и электрическим перегрузкам;
- широкий диапазон коммутируемых токов и напряжений;
- ударная и вибростойкость;
- малые веса и габариты.

Реле является нелинейным элементом и включение его в систему делает её существенно нелинейной, что может вызвать нежелательные движения. Поэтому часто на практике применяют линеаризованные релейные усилители, статическую характеристику которых в значительном диапазоне можно считать линейной.

Значительное распространение нашли такие магнитные усилители, принцип действия которых основан на изменении динамической магнитной проницаемости ферромагнитного сердечника при его подмагничивании током управления.

Достоинства магнитных усилителей:

- 1) высокая эксплуатационная надежность и стабильность параметров;
- 2) большой коэффициент усиления на один каскад (до  $10^5$ );
- 3) высокая чувствительность ( $10^{-6}$ — $10^{-7}$ А);
- 4) большая перегрузочная способность;
- 5) ударная и вибростойкость.

Основным недостатком магнитного усилителя является его относительно высокая инерционность, обусловленная индуктивностью обмоток управления.

Описанию принципов работы, расчета и анализа схем различных типов усилителей посвящено большое количество специальной литературы.

### 3.3. Исполнительные двигатели

Исполнительная подсистема преобразует управляющий сигнал, усиленный до необходимого уровня, в механическое перемещение органа управления. Для непосредственного перемещения управляющего органа в

системах управления летательными аппаратами нашли применение электродвигатели постоянного тока и гидравлические двигатели.

К достоинствам электродвигателя постоянного тока следует отнести:

- 1) широкий диапазон изменения скорости вращения;
- 2) возможность реверсирования;
- 3) высокий коэффициент полезного действия;
- 4) высокое быстродействие и большой диапазон мощностей.

Серьезным недостатком электродвигателей, ограничивающим область их применения, является быстрый рост габаритно-массовых характеристик с ростом потребных мощностей.

Как динамическое звено электродвигатель постоянного тока можно описать передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k_d}{s(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)} \quad (3.9)$$

В этом выражении  $T^2 = T_{\text{я}} T_{\text{д}}$ ,  $\zeta = \sqrt{\frac{T_{\text{д}}}{T_{\text{я}}}}$ ;  $k_d = \frac{1}{k_m}$ ,

где  $T_{\text{я}}$  - электромеханическая постоянная времени цепи якоря;

$T_{\text{д}}$  - электромеханическая постоянная времени электродвигателя;

$k_m$  - постоянный коэффициент, зависящий от конструкции двигателя;

$k_d$  - коэффициент передачи электродвигателя по напряжению (по управляющему воздействию).

Величина  $T_{\text{д}}$  очень мала и в практических приложениях ею пренебрегают. Тогда передаточная функция электродвигателя приобретает вид

$$W(s) = \frac{k_d}{s(T_{\text{д}} s + 1)} \quad (3.10)$$

Гидравлические исполнительные устройства имеют ряд важных преимуществ перед электрическими, а именно, они обладают большей мощностью и большим быстродействием, чем электрические двигатели, при тех же весах и габаритах. Рассмотрим широко распространенную схему с золотниковым распределителем (рис.3.7).

При отсутствии управляющего сигнала  $U_{\text{упр}}(t)$  на входе электро-механического преобразователя 1 золотник 2 находится в нейтральном положении и закрывает доступ жидкости в рабочий цилиндр 4. В этом случае давления  $p_1$  и  $p_2$  в полостях цилиндра равны и перемещение рабочего штока равно нулю. При наличии входного сигнала электро-механический преобразователь перемещает золотник, открывая доступ жидкости в рабочий

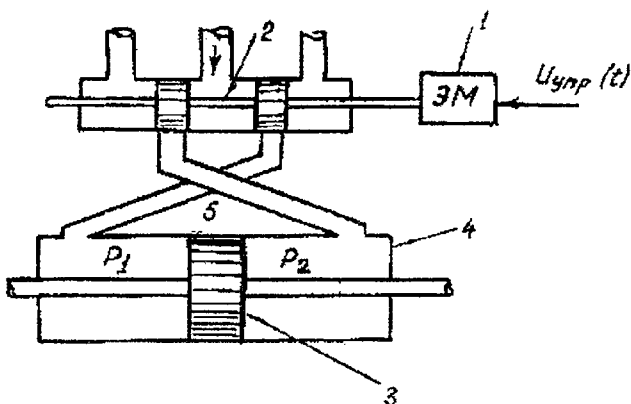


Рис.3.7. Гидравлический исполнительный двигатель

цилиндр через одну из магистралей 5 и одновременно открывая канал для слива жидкости из другой полости рабочего цилиндра. Под действием разности давления  $\Delta p = p_1 - p_2$  поршень 3 перемещается в ту или иную сторону. Выходной величиной гидродвигателя является перемещение  $x$  штока рабочего цилиндра.

Для исследования динамических свойств гидродвигателя составим уравнение движения поршня в рабочем цилиндре:

$$m\ddot{x} = (p_1 - p_2)S - R - G, \quad (3.11)$$

где  $m$  - приведенная масса поршня с учетом присоединенных к нему масс,  $S$  - площадь поршня,  $R$  - сила сопротивления,  $G$  - сопротивление нагрузки. Сила сопротивления  $R$  создается за счет трения. В реальных условиях сила трения может быть представлена в виде суммы жидкого и сухого трения:

$$R = C\dot{x} + N\text{sign}(\dot{x}),$$

где  $C\dot{x}$  - сила жидкого (вязкого) трения;  $N\text{sign}(\dot{x})$  - сила сухого трения. Сопротивление нагрузки часто считают линейно зависящим от перемещения поршня. Зависимость разности давлений от управляющего сигнала является нелинейной, но в ограниченном диапазоне перемещений можно считать, что

$$\left. \begin{aligned} \Delta p = p_1 - p_2 &= k_1 U_{гип}(t), \\ (p_1 - p_2)S &= k U_{гип}(t), \\ k &= k_1 S. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Сила жидкого трения мала и, пренебрегая ее величиной, можно записать

$$m\ddot{x} + N\text{sign}(\dot{x}) + bx = kU_{\text{нпр}}, \quad (3.13)$$

где  $b$  – коэффициент нагрузки.

Для нелинейности сухого трения коэффициент гармонической линеаризации определяется выражением

$$q(a) = \frac{4N}{\pi a}.$$

Тогда

$$m\ddot{x} + q(a)\dot{x} + bx = kU_{\text{нпр}}. \quad (3.14)$$

Перейдя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$X(s) = \frac{k_d}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} U_{\text{нпр}}(s),$$

где  $T = \sqrt{\frac{m}{b}}$ ,  $\zeta = \frac{q(a)}{2\sqrt{mb}}$ ,  $k_d = \frac{k}{b}$ .

Обычно силы инерции и силы сопротивления нагрузки малы по сравнению с силой давления  $\Delta pS$ . Пренебрегая этими силами, из (3.14) получим

$$q(a)\dot{x} = kU_{\text{нпр}}.$$

Тогда

$$X(s) = \frac{k}{sq(a)} U_{\text{нпр}}(s).$$

Таким образом, малость постоянной времени гидродвигателя позволяет считать его при упрощенных исследованиях идеальным интегрирующим звеном с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k_d}{s}, \quad (3.15)$$

где  $k_d = \frac{k}{q(a)}$ .

Выражение для  $q(a)$  свидетельствует о зависимости коэффициента  $k_d$  от собственно величины перемещения штока. Ниже будет показано, что эта зависимость компенсируется в значительной мере в системах с обратной связью.

# АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ САМОЛЕТОМ

## Глава 4. САМОЛЕТ КАК ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ

### 4.1. Сущность процесса управления самолетом

Применительно к самолету управление может быть определено как целесообразное воздействие, вносящее желаемое изменение в процесс полета самолета и основанное на использовании определенной информации.

Для современных комплексов систем управления характерна функциональная избыточность, проявляющаяся в том, что управление самолетом может осуществляться несколькими способами. Этих способов четыре.

#### 1) Автоматическое управление траекторией

Все режимы полета, за исключением взлета и посадки, программируются в вычислителе навигационного комплекса. С момента включения автоматики управление движением самолета производится по отклонениям от программы полета, определяемым в навигационном комплексе. Система траекторного управления вырабатывает на основе этих отклонений команды в виде заданных значений угловых и линейных параметров и заданного режима работы двигателя. Эти команды обрабатываются системой стабилизации путем соответствующих воздействий на рули и рычаг управления двигателем. В этом режиме летчик выполняет функции включения тех или иных систем и общего контроля за ходом выполнения операций.

#### 2) Управление траекторным движением по командному прибору

В этом режиме управление самолетом производится летчиком вручную посредством воздействия на рычаги управления и сектор газа. Стратегия управления траекторным движением вырабатывается в навигационном комплексе. Требуемое управление производится с помощью командного прибора системы индикации. На стрелки командного прибора подаются сигналы рассогласования, задача летчика состоит в обнулении этих сигналов путем соответствующего перемещения рычагов управления. Такое управление называют директорным.

#### 3) Автоматическая стабилизация параметров движения

При этом способе стратегия управления выбирается летчиком. Ориентируясь по пилотажно-навигационным приборам, летчик в соответствии с обстановкой задает системе автоматической стабилизации требуемые параметры движения. Автоматика, т.е. автопилот, стабилизирует угловые и линейные координаты относительно заданных.

#### 4) Штурвальное управление

Летчик управляет самолетом с помощью рычагов управления, в полном объеме решая всю сумму задач, связанных с управлением полетом. При этом способе управления вклад автоматики минимален и связан только с решением задачи улучшения пилотажных характеристик самолета.

### 4.2. Самолет как объект управления

В общем случае самолет как твердое тело описывается системой нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений. Эта система включает в себя уравнения движения центра масс, уравнения движения относительно центра масс и кинематические уравнения. Система уравнений самолета в таком виде не решается аналитически и непригодна для создания каких-либо общих методик анализа и синтеза систем автоматического управления. С целью разработки таких методик прибегают к определенным упрощениям исходной системы дифференциальных уравнений.

Прежде всего движение самолета рассматривается в какой-то конкретный момент времени  $t_k$  и в ближайшей окрестности его. Все коэффициенты системы дифференциальных уравнений становятся постоянными, т.е.  $a_{ij}(t_k) = \text{const}$ , и система в дальнейшем рассматривается как стационарная. Такой метод, когда движение объекта рассматривается в некотором множестве точек траектории, называют методом "замороженных" коэффициентов.

При определенных значениях угловых параметров движения, из которых определяющим является значение угла крена, близкое к нулю, можно пренебречь перекрестными связями между продольным и боковым движениями самолета и выделить из общей системы уравнений две системы более низкого порядка: систему уравнений продольного движения и систему уравнений бокового движения. Следующим шагом является линеаризация полученных систем по методу малого отклонения.

#### 4.2.1. Уравнения продольного движения и передаточные функции самолета в продольном движении

При учете того обстоятельства, что при действии на самолет различных возмущений, в том числе и отклонения руля высоты, скорость полета изменяется намного медленнее угловых координат, можно пренебречь вариациями скорости за время изменения угловых величин. В этом случае система линеаризованных дифференциальных уравнений продольного движения может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}(t) + a_{22}\alpha(t) + a_{23}\omega_z(t) &= b_{21}\delta_b(t) + \bar{F}_{yb}(t), \\ \dot{\omega}_z(t) + a_{32}\alpha(t) + a_{33}\omega_z(t) &= b_{31}\delta_b(t) + \bar{M}_{zb}(t), \\ \dot{\psi}(t) &= \omega_z(t), \\ \dot{H}(t) &= a_{41}\theta(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

В этих уравнениях  $\alpha(t)$ - угол атаки,  $\psi(t)$ - угол тангажа,  $\omega_z(t)$ - угловая скорости

по тангажу,  $\theta(t)$ - угол подъема траектории,  $H$ - высота полета,  $a_{ij}$ - аэродинамические коэффициенты самолета в продольном движении,  $\delta_b$ - угол отклонения руля высоты,  $b_{21}$ - коэффициент подъемной силы рулей высоты,  $b_{31}$ - коэффициент момента, создаваемого за счет отклонения руля высоты,

$$\bar{F}_{yb}(t) = \frac{F_{yb}(t)}{mV} \quad \text{возмущающее воздействие вдоль оси OY,}$$

$$\bar{M}_{zb}(t) = -\frac{M_{zb}(t)}{J_z} \quad \text{возмущающий момент относительно оси OZ.}$$

Высота полета не входит ни в одно из первых трех уравнений системы (2.1), и эти три уравнения образуют так называемую систему уравнений малого продольного движения, описывающую только угловое движение самолета в продольной плоскости. В этой системе подъемной силой рулей высоты, ввиду ее малости по сравнению с подъемной силой крыла, можно пренебречь, т.е. считать  $b_{21}=0$ . Перейдя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим

$$\left. \begin{aligned} (s+a_{22})\alpha(s)+a_{23}\omega_z(s) &= \bar{F}_{yb}(s), \\ a_{32}\alpha(s)+(s+a_{33})\omega_z(s) &= b_{31}\delta_b(s)+M_{zb}(s), \\ s\psi(s)-\omega_z(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Для определения передаточных функций самолета составим и раскроем характеристический и замещенные определители системы (2.2).

Характеристический определитель

$$D(s) = \begin{vmatrix} s+a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & s+a_{33} & 0 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} =$$

$$= s \left[ s^2 + (a_{22} + a_{33})s + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \right].$$

Замещенный определитель по углу тангажа

$$R^v(s) = \begin{vmatrix} s+a_{22} & a_{23} & \bar{F}_{yb}(s) \\ a_{32} & s+a_{33} & b_{31}\delta_b(s) + \bar{M}_{zb}(s) \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= b_{31}(s+a_{22})\delta_b(s) + (s+a_{22})\bar{M}_{zb}(s) - a_{32}\bar{F}_{yb}(s).$$

На основании полученных выражений для передаточных функций самолета относительно угла тангажа можно записать следующие выражения:

-передаточная функция по углу тангажа от отклонения руля высоты

$$W_c(s) = \frac{v(s)}{\delta_b(s)} = \frac{b_{31}(s+a_{22})}{D(s)};$$

-передаточные функции по углу тангажа по возмущающим воздействи-  
ям

$$W_f(s) = \frac{v(s)}{\bar{F}_{yb}(s)} = -\frac{a_{32}}{D(s)};$$

$$W_M(s) = \frac{v(s)}{\bar{M}_{zb}(s)} = \frac{s+a_{22}}{D(s)}.$$

Действуя аналогично, можно при необходимости получить передаточные функции самолета по углу атаки. В дальнейшем нам потребуется передаточная функция, определяющая зависимость изменения угла подъема траектории от изменения угла тангажа. Для ее получения в системе (2) сделаем замену  $v = \theta + \alpha$  и учитывая третье уравнение системы, а также то, что для всех самолетов  $a_{23} = -1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} a_{22}\alpha(s) - s\theta &= \bar{F}_{yb}(s), \\ (s^2 + a_{33}s + a_{32})\alpha(s) + s(s + a_{33})\theta &= b_{31}\delta(s) + \bar{M}_{zb}(s). \end{aligned} \right\}$$

Характеристический определитель системы не изменится, а замещенный определитель, определяющий зависимость угла подъема траектории от отклонения руля высоты имеет вид

$$R^\theta(s) = a_{22}b_{31}\delta_b(s).$$

Тогда

$$W_\theta(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_b(s)} = \frac{a_{22}b_{31}}{D(s)}.$$

Передаточная функция, характеризующая зависимость угла подъема траектории от угла тангажа, запишется следующим образом:

$$W_\theta^v(s) = W_\theta(s)/W_c(s) = \frac{a_{22}b_{31}}{b_{31}(s+a_{22})}.$$

Приведем полученные передаточные функции самолета к стандартному виду. Для этого в характеристическом полиноме вынесем за скобки свободный член и сделаем обозначения:

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{a_{22}a_{33} + a_{32}}} \text{ -- постоянная времени самолета;}$$

$$2T_c\zeta_c = \frac{a_{22} + a_{33}}{a_{22}a_{33} + a_{32}};$$



$$\zeta_c = \frac{a_{22} + a_{33}}{2\sqrt{a_{22}a_{33} + a_{32}}} \text{ — показатель затухания.}$$

В этих выражениях учтено, что  $a_{23}=1$ . В числителе передаточной функции самолета по тангажу от отклонения руля высоты вынесем за скобки свободный член и обозначим

$$k_c = \frac{|b_{31}|a_{22}}{a_{22}a_{33} + a_{32}} \text{ — коэффициент передачи самолета;}$$

$$T_1 = \frac{1}{a_{22}} \text{ — траекторная постоянная.}$$

Так как  $b_{31} < 0$ , то в выражении для коэффициента усиления используется модуль этого параметра, а для передаточных функций самолета получим

$$W_c(s) = -\frac{k_c(T_1s+1)}{s(T_c^2s^2 + 2T_c\zeta_c s + 1)}, \quad (4.3)$$

$$W_\theta^v(s) = \frac{1}{T_1s+1}. \quad (4.4)$$

Знак минус в передаточной функции по тангажу имеет физический смысл и учитывается в дальнейшем структурно.

Для передаточных функций по возмущающим воздействиям получим

$$W_f(s) = -\frac{k_f}{s(T_c^2s^2 + 2T_c\zeta_c s + 1)}, \quad (4.5)$$

$$W_M(s) = \frac{k_M(T_1s+1)}{s(T_c^2s^2 + 2T_c\zeta_c s + 1)}. \quad (4.6)$$

В этих выражениях

$$k_f = \frac{a_{32}}{a_{22}a_{33} + a_{32}};$$

$$k_M = \frac{a_{22}}{a_{22}a_{33} + a_{32}}.$$

Из выражения (2.3) следует, что самолет как динамическую систему можно представить в виде последовательного соединения идеального интегрирующего звена, форсирующего звена 1-го порядка и некоторого звена 2-го порядка, которое чаще всего является колебательным звеном. Выделив интегрирующее звено, структурную схему самолета в продольном движении можно изобразить следующим образом (рис.4.1):

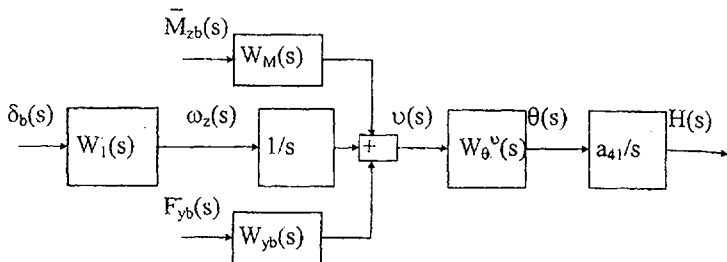


Рис.4.1. Структурная схема самолета в продольном движении

Проанализируем собственную устойчивость самолета в продольном движении. Так как характеристический полином имеет один нулевой корень, то самолет нейтрален по отношению к углу тангажа и собственную устойчивость можно анализировать только по отношению к угловой скорости. Устойчивость самолета в продольном движении определяется корнями уравнения

$$s^2 + (a_{22} + a_{33})s + a_{22}a_{33} + a_{32} = 0.$$

Для всех самолетов  $a_{22} > 0$  и  $a_{33} > 0$  [1,2,10] и, следовательно, устойчивость определяется знаком свободного члена характеристического уравнения. Практически всегда коэффициент  $a_{32}$  по модулю больше произведения  $a_{22}a_{33}$  и устойчивость самолета определяется знаком  $a_{32}$ . Самолет устойчив в угловом продольном движении, только если  $a_{32} > 0$ , а это конструктивно может быть только при расположении фокуса аэродинамических сил впереди центра масс. Неустойчивость самолета при угловом (короткопериодическом) продольном движении недопустима. Это объясняется тем, что при частоте колебаний свыше 0.3...0.4 Гц летчик в силу запаздывания реакции не может своевременно и правильно отклонять органы управления для парирования колебаний и, в определенных условиях, может даже усиливать колебания, раскачивая самолет.

#### 4.2.2. Уравнения бокового движения и передаточные функции самолета в боковом движении

При определенных допущениях, таких как малость угла атаки, пренебрежении величинами гравитационных сил и влиянием спиральных моментов, систему уравнений бокового движения можно представить в следующем виде [1,2,5,7,10,11,16]:

$$\left. \begin{aligned} \beta(t) - n_{11}\beta(t) - n_{12}\omega_y(t) &= m_{11}\delta_n(t) + m_{12}\delta_\gamma(t) + \overline{F}_{zb}(t), \\ \omega_y(t) - n_{21}\beta(t) - n_{22}\omega_y(t) &= m_{21}\delta_n(t) + m_{22}\delta_\gamma(t) + \overline{M}_{yb}(t), \\ \omega_x(t) - n_{31}\beta(t) - n_{33}\omega_x(t) &= m_{31}\delta_n(t) + m_{32}\delta_\gamma(t) + \overline{M}_{xb}(t). \end{aligned} \right\}$$

В этой системе  $n_{ij}$  - аэродинамические коэффициенты,  $\beta$  - угол скольжения,  $\omega_y$  - угловая скорость рыскания,  $\omega_x$  - угловая скорость крена,  $\delta_n$  - угол отклонения

руля направления,  $\delta_3$ - угол отклонения элеронов,  $F_{yb}$ ,  $M_{yb}$ ,  $M_{xb}$ - возмущающие силы и моменты.

Нетрудно видеть, что первое и второе уравнения системы, представляющие собой уравнения сил в проекциях на ось OZ самолета и моментов относительно оси OY, не зависят от третьего- уравнения моментов относительно оси OX. Поэтому приведенную выше систему уравнений бокового движения, перейдя предварительно к изображениям по Лапласу, можно разбить на систему

$$\left. \begin{aligned} (s - n_{11})\beta(s) - n_{12}\omega_y(s) &= \bar{F}_{zb}(s), \\ -n_{21}\beta(s) + (s - n_{22})\omega_y(s) &= m_{21}\delta_n(s) + m_{22}\delta_3(s) + \bar{M}_{yb}(s), \end{aligned} \right\}$$

определяющую изменение угла скольжения самолета и угловую скорость  $\omega_y$  (движение рыскания), и уравнение

$$(s - n_{33})\omega_x(s) = n_{31}\beta(s) + m_{31}\delta_n(s) + m_{32}\delta_3(s) + \bar{M}_{xb}(s),$$

описывающее движение крена, и которое может быть решено, если в качестве возмущения в его правую часть подставить угол скольжения  $\beta$ , полученный в результате решения системы уравнений рыскания. Отметим сразу, что в этой системе не учитываются боковые силы руля направления и элеронов ввиду их малости.

Определим передаточные функции самолета в движении рыскания. Характеристический определитель соответствующей системы будет

$$\begin{aligned} D(s) &= \begin{vmatrix} s - n_{11} & -n_{12} \\ -n_{21} & s - n_{22} \end{vmatrix} = \\ &= s^2 - (n_{11} + n_{22})s + n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Так как для всех самолетов  $n_{11} < 0$  и  $n_{22} < 0$ , то устойчивость самолета в движении рыскания определяется только свободным членом полинома (2.7). С учетом того, что при сделанных допущениях  $n_{12} = \cos\alpha \approx 1$ , а модуль  $n_{21}$  больше модуля произведения  $n_{11}n_{22}$ , можно сделать вывод, что самолет статически устойчив в движении рыскания, если  $n_{21} < 0$ . Полет на самолете, имеющем  $n_{21} > 0$ , невозможен.

Замещенные определители по углу скольжения и угловой скорости рыскания будут

$$R^\beta(s) = \begin{vmatrix} \bar{F}_{zb}(s) & -1 \\ m_{21}\delta_n(s) + m_{22}\delta_3(s) + \bar{M}_{yb}(s) & s - n_{22} \end{vmatrix},$$

$$R^{\omega_y}(s) = \begin{vmatrix} s - n_{11} & \bar{F}_{zb}(s) \\ -n_{21} & m_{21}\delta_n(s) + m_{22}\delta_3(s) + \bar{M}_{yb}(s) \end{vmatrix}.$$

Решение системы по угловой скорости рыскания будет

$$\omega_y(s) = \frac{m_{21}(s-n_{11})}{D(s)} \delta_n(s) + \frac{m_{22}(s-n_{11})}{D(s)} \delta_\varphi(s) + \frac{s-n_{11}}{D(s)} \overline{M}_{yb}(s) + \frac{n_{21}}{D(s)} \overline{F}_{zb}(s). \quad (4.8)$$

На основании выражения (2.8) после преобразований получим следующие передаточные функции:

$$W_c(s) = \frac{\omega_y(s)}{\delta_n(s)} = \frac{k_c(T_1s+1)}{T_c^2s^2+2T_c\zeta_c s+1}; \quad (4.9)$$

$$W_c^\varphi(s) = \frac{\omega_y(s)}{\delta_\varphi(s)} = \frac{k_c^\varphi(T_1s+1)}{T_c^2s^2+2T_c\zeta_c s+1}; \quad (4.10)$$

$$W_c^{M_y}(s) = \frac{\omega_y(s)}{\overline{M}_{yb}(s)} = \frac{k_c^M(T_1s+1)}{T_c^2s^2+2T_c\zeta_c s+1}; \quad (4.11)$$

$$W_c^{F_z}(s) = \frac{\omega_y(s)}{\overline{F}_{zb}(s)} = \frac{k_c^f}{T_c^2s^2+2T_c\zeta_c s+1}. \quad (4.12)$$

В этих выражениях обозначено:

$$\left. \begin{aligned} k_c &= \frac{m_{21}|n_{11}|}{n_{11}n_{22}+|n_{21}|}, \\ T_1 &= \frac{1}{|n_{11}|}, \\ T_c &= \frac{1}{\sqrt{n_{11}n_{22}+|n_{21}|}}, \\ \zeta_c &= \frac{|n_{11}|+n_{22}}{2\sqrt{n_{11}n_{22}+|n_{21}|}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} k_c^{M_y} &= \frac{|n_{11}|}{n_{11}n_{22}+|n_{21}|}, \\ k_c^{F_z} &= \frac{|n_{21}|}{n_{11}n_{22}+|n_{21}|}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Так как угловая скорость и угол рыскания связаны соотношением  $\omega_y = d\psi/dt$ , то

передаточные функции в отношении угла рыскания получаются умножением вышеприведенных передаточных функций на оператор  $1/s$ , например,

$$W_{c1} = \frac{\psi(s)}{\delta_n(s)} = \frac{k_c(T_1 s + 1)}{s(T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1)}. \quad (4.15)$$

Вид этой передаточной функции полностью аналогичен передаточной функции самолета по углу тангажа, но ее параметры вычисляются по другим формулам и с использованием других аэродинамических коэффициентов.

Уравнение движения крена позволяет получить передаточные функции самолета по крену.

В этих выражениях

$$\left. \begin{aligned} W_{\omega x}(s) &= \frac{\omega_x(s)}{\delta_\gamma(s)} = \frac{k_\gamma^\gamma}{T_\gamma s + 1}, \\ W_{\omega x}^\beta(s) &= \frac{\omega_x(s)}{\beta(s)} = \frac{k_\gamma^\beta}{T_\gamma s + 1}, \\ W_{\omega x}^{\delta n}(s) &= \frac{\omega_x(s)}{\delta_n(s)} = \frac{k_\gamma^{\delta n}}{T_\gamma s + 1}, \\ W_{\omega x}^{M_{xb}}(s) &= \frac{\omega_x(s)}{M_{xb}(s)} = \frac{k_\gamma^M}{T_\gamma s + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

$$\left. \begin{aligned} k_\gamma &= \frac{m_{32}}{n_{33}}; & T_\gamma &= \frac{1}{n_{33}}; \\ k_\gamma^\beta &= \frac{n_{31}}{n_{33}}; & k_\gamma^{\delta n} &= \frac{m_{31}}{n_{33}}; \\ k_\gamma^M &= \frac{1}{n_{33}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Так как  $\omega_x = \dot{\gamma}$ , то передаточные функции по углу крена получаются умножением выражений (2.16) на оператор  $1/s$ .

$$W_\gamma(s) = \frac{\gamma(s)}{\delta_\gamma(s)} = \frac{k_\gamma}{s(T_\gamma s + 1)}. \quad (4.18)$$

Для всех самолетов  $n_{33} < 0$  и, следовательно, самолет устойчив по отношению к угловой скорости крена и нейтрален по отношению к углу крена.

Структурная схема самолета в боковом движении может быть изображена так, как показано на рис.4.2.

На этой структурной схеме

$$W_{\beta}^{\delta_H}(s) = \frac{k_{\beta}^{\delta_H}}{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1},$$

$$k_{\beta}^{\delta_H} = \frac{m_{21}}{n_{11}n_{22} + |n_{21}|}.$$

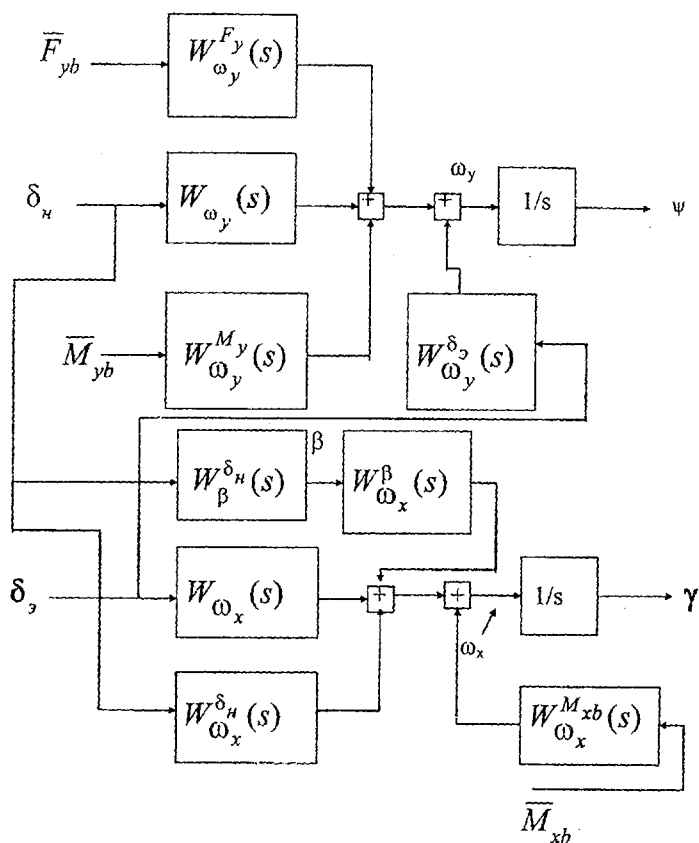


Рис. 4.2. Структурная схема самолета в боковом движении

### 4.3. Рулевые приводы систем управления самолетами

Задачей рулевых приводов является соблюдение требуемого отклонения рулевых органов. Рулевые приводы обычно включают в состав объекта управления или, как говорят, в неизменяемую часть системы. Рулевой привод самолета состоит из усилителя, исполнительного двигателя (рулевой машины) и устройства обратной связи (рис.4.3).

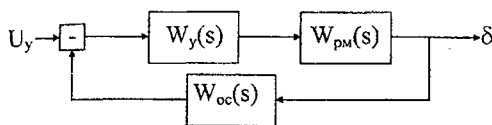


Рис.4.3. Структурная схема рулевого привода

Передаточная функция усилителя обычно представляется в виде передаточной функции безинерционного звена:

$$W_y(s) = k_y$$

Коэффициент усиления может изменяться в широких пределах.

Передаточная функция рулевой машины записывается в большинстве случаев как

$$W_{рм}(s) = \frac{k_{рм}}{s(T_{рм}s + 1)},$$

где для электрических двигателей  $T_{рм} \approx 0.1$ , а для гидравлических  $T_{рм} \approx 0$ .

В качестве звена обратной связи в настоящее время используются три типа звеньев:

- 1) жесткая обратная связь (ЖОС), для которой

$$W_{ос}(s) = k_{ос};$$

- 2) скоростная обратная связь, когда

$$W_{ос}(s) = k_{ос}s;$$

- 3) издромная обратная связь, для которой

$$W_{ос}(s) = k_{ос} \frac{T_u s}{T_u s + 1}.$$

Передаточная функция рулевого привода может быть записана следующим образом:

Структурная схема самолета в боковом движении может быть изображена так, как показано на рис.4.2.

На этой структурной схеме

$$W_{\beta}^{\delta_H}(s) = \frac{k_{\beta}^{\delta_H}}{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1},$$

$$k_{\beta}^{\delta_H} = \frac{m_{21}}{n_{11}n_{22} + |n_{21}|}.$$

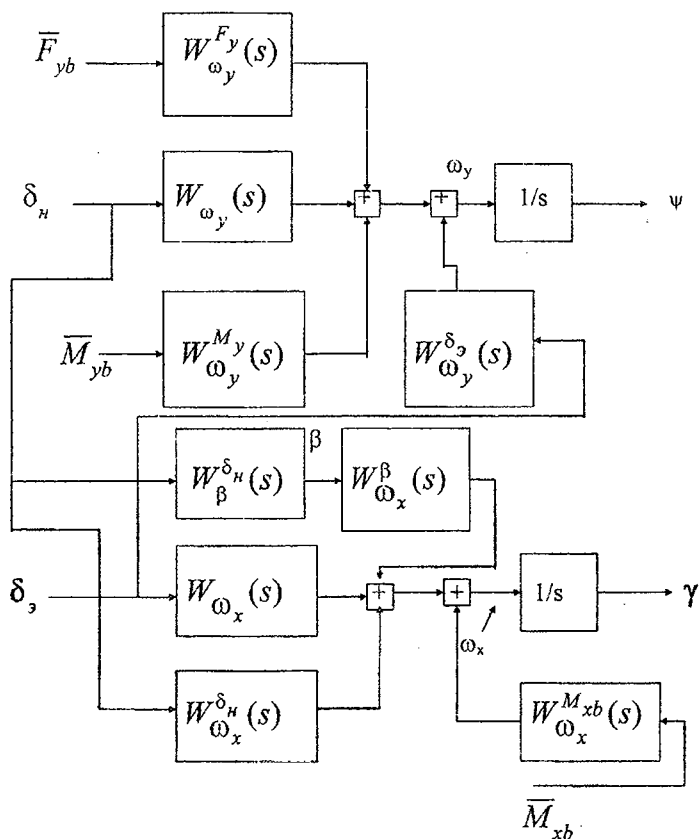


Рис. 4.2. Структурная схема самолета в боковом движении



### 4.3. Рулевые приводы систем управления самолетами

Задачей рулевых приводов является соблюдение требуемого отклонения рулевых органов. Рулевые приводы обычно включают в состав объекта управления или, как говорят, в неизменяемую часть системы. Рулевой привод самолета состоит из усилителя, исполнительного двигателя (рулевой машины) и устройства обратной связи (рис.4.3).

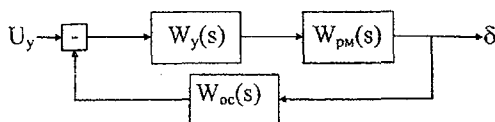


Рис.4.3. Структурная схема рулевого привода

Передаточная функция усилителя обычно представляется в виде передаточной функции безинерционного звена:

$$W_y(s) = k_y.$$

Коэффициент усиления может изменяться в широких пределах.

Передаточная функция рулевой машины записывается в большинстве случаев как

$$W_{рм}(s) = \frac{k_{рм}}{s(T_{рм}s+1)},$$

где для электрических двигателей  $T_{рм} \approx 0.1$ , а для гидравлических  $T_{рм} \approx 0$ .

В качестве звена обратной связи в настоящее время используются три типа звеньев:

- 1) жесткая обратная связь (ЖОС), для которой

$$W_{оc}(s) = k_{оc};$$

- 2) скоростная обратная связь, когда

$$W_{оc}(s) = k_{оc}s;$$

- 3) изодромная обратная связь, для которой

$$W_{оc}(s) = k_{оc} \frac{T_u s}{T_u s + 1}.$$

Передаточная функция рулевого привода может быть записана следующим образом:

$$W_{pn}(s) = \frac{W_y(s)W_{pm}(s)}{1+W_{oc}(s)W_y(s)W_{pm}(s)}. \quad (4.19)$$

Для рулевого привода с жесткой обратной связью получим

$$W_{pn}(s) = \frac{k_y k_{pm}}{s(T_{pm}s+1) + k_{oc} k_y k_{pm}}.$$

После очевидных преобразований эта передаточная функция для  $k_{oc}=1$  может быть записана в виде

$$W_{pn}(s) = \frac{1}{T_{pn}^2 s^2 + 2T_{pn}\zeta_{pn}s + 1}, \quad (4.20)$$

где

$$T_{pn} = \sqrt{\frac{T_{pm}}{k_y k_{pm}}}; \quad \zeta_{pn} = \frac{1}{2\sqrt{T_{pm} k_y k_{pm}}}.$$

Стремление получить значения показателя затухания не менее 0.5 и постоянной времени не более 0.05 противоречивы, так как оба эти параметра уменьшаются при увеличении коэффициентов усиления усилителя и рулевой машины. Но, с другой стороны, при  $T_{pn} \leq 0.05$  значение показателя затухания становится настолько малым, что и величиной постоянной времени, и величиной произведения  $2T_{pn}\zeta_{pn}$  можно пренебречь и при практических расчетах считать рулевой привод безинерционным звеном с передаточной функцией  $W_{pn}(s) = 1$ .

Для рулевого привода со скоростной обратной связью можно получить при  $k_{oc}=1$

$$W_{pn}(s) = \frac{1}{s(T_{pn}s+1)}, \quad (4.21)$$

где  $T_{pn} = \frac{T_{pm}}{1+k_y k_{pm}}$ .

Так как обычно добиваются, чтобы  $T_{pn} \leq 0.02$  сек., то такая постоянная времени рулевого привода на динамику контура управления движением самолета практически не влияет, поэтому можно рассматривать  $W_{pn}(s)$  как передаточную функцию интегрирующего звена, т.е.

$$W_{pn}(s) = \frac{1}{s}. \quad (4.22)$$

Такой рулевой привод практически пропускает только постоянную составляющую управляющего сигнала.

Рулевой привод с изотропной обратной связью имеет передаточную функцию при  $k_{oc}=1$  следующего вида:

$$W_{pn}(s) = \frac{k_1(T_u s + 1)}{s(T_{pn}^2 s^2 + 2T_{pn}\zeta_{pn}s + 1)}, \quad (4.23)$$

где

$$k_1 = \frac{k_y k_{pm}}{1 + T_u k_y k_{pm}}; \quad T_{pn} = \frac{T_{pm} T_u}{1 + T_u k_y k_{pm}}; \quad \zeta_{pn} = \frac{T_{pm} + T_u}{2\sqrt{T_{pm} T_u (1 + T_u k_y k_{pm})}}.$$

Величиной  $T_{pn}$  по указанным выше причинам можно пренебречь, и так как  $T_u k_y k_{pm} \gg 1$ , то  $k_1 \approx 1/T_u$ . В этом случае для передаточной функции рулевого привода можно записать

$$W_{pn}(s) = \frac{T_u s + 1}{s(T'_u s + 1)}. \quad (4.24)$$

В этом выражении  $T'_u = \frac{T_{pm} + T_u}{1 + T_u k_y k_{pm}}$ .

Обычно  $T'_u \ll T_u$  и поэтому можно считать, что

$$W_{pn}(s) = \frac{T_u s + 1}{T_u s}. \quad (4.25)$$

Отсюда следует, что в области частот управляющего сигнала  $\omega > 1/T_u$  изодромный рулевой привод работает как привод с жесткой обратной связью, а в области частот  $\omega < 1/T_u$  — как привод со скоростной обратной связью.

В дальнейшем, при расчетах закона управления, в качестве передаточных функций рулевого привода чаще всего будем использовать их приближенные выражения. Полными выражениями передаточных функций (4.20), (4.21), (4.23), (4.24) необходимо пользоваться, когда динамикой составляющих элементов рулевого привода пренебрегать нельзя.

#### 4.4. Летчик в контуре ручного управления

Несмотря на некоторые индивидуальные особенности, действия основной массы летчиков при решении отдельных задач полета описываются вполне определенными математическими зависимостями. Такие осредненные характеристики летчиков можно изучить и представить человека, управляющего самолетом, в виде некоторой комплексной системы, действия которой описываются определенными алгоритмами.

При ручном управлении самолетом летчик обеспечивает задание в виде функции времени определенных параметров движения или последовательности параметров на основании информации, хранящейся в памяти летчика, а также текущей информации, собираемой с помощью органов чувств летчика и пилотажно-навигационных приборов. Летчик обеспечивает стабилизацию заданных параметров движения самолета на основании сравнения текущей

информации об изменении этих параметров с программными заданиями. Таким образом, летчик осуществляет процесс регулирования, т.е. работает в качестве оператора в замкнутом контуре управления. Особенно ярко это проявляется при полете по приборам (директорное управление). В этом частном случае возможно описать действия летчика математически, по существу определить его передаточную функцию. На передаточную функцию летчика, работающего в такой системе, существенно влияют характеристики входного воздействия и динамические характеристики самолета как объекта управления. Летчик стремится приспособиться к тем и другим, пытается сделать систему устойчивой, а ошибку малой. Он именно пытается это сделать, так как может и не справиться с поставленной задачей в силу плохих динамических характеристик самолета и ограниченных возможностей человека, зависящих существенно от внешних условий работы.

В диапазоне частот примерно до 1.2-1.5Гц оказалось возможным характеризовать деятельность летчика звеном, представляющим собой усредненные на определенном сравнительно небольшом отрезке времени характеристики. Полученная "модель" летчика описывается передаточной функцией

$$W_n(s) = \frac{k_n e^{-\tau s} (T_{n1}s + 1)}{(T_{n2}s + 1)(T_{n3}s + 1)}. \quad (4.26)$$

Эта передаточная функция включает в себя три блока.

1. Блок запаздывания, характеризующий время, потребное для возбуждения рецепторов прохождения сигналов возбуждения нервной системы, интерпретации полученной информации и проведения необходимых расчетов. Величина запаздывания  $\tau$  отрицательно влияет на запасы устойчивости и, с этой точки зрения, ее желательно уменьшать. Но, с другой стороны, уменьшение запасов устойчивости, вызванное запаздыванием реакции летчика, при малых частотах среза системы летчик-самолет незначительно, а уменьшение запаздывания, т.е. ускорение реакции летчика, ухудшает точность оценки им пилотажных характеристик самолета и сложившейся ситуации. Считается [11], что в большинстве случаев достаточным является значение  $\tau=0.1-0.2c$ .

2. Корректирующий блок, отражающий способность человека к самонастройке, т.е. к приспособлению своих динамических характеристик к характеристикам остальной части системы, а также входных сигналов. Настройка блока осуществляется изменением значений  $k_n$ ,  $T_{n1}$ ,  $T_{n2}$ .

Величина  $k_n$  подбирается так, чтобы частота среза разомкнутой системы самолет-летчик имела значение, соответствующее условиям задачи, причем летчик стремится обеспечить запас устойчивости по фазе, равный примерно 40-80 градусам. Значение  $k_n$  зависит от коэффициента передачи самолета и подбирается так, чтобы произведение  $k_n k_c$  находилось в пределах от 5 до 9, в зависимости от спектра входного сигнала. Если во входном сигнале содержатся высокие частоты, то  $k=k_n k_c=5$ , если преобладают низкие частоты, то  $k=9$ .

Частота среза разомкнутой системы практически неизменна для данного типа самолетов. Поэтому при увеличении полосы частот входного сигнала летчик стремится увеличить демпфирование в замкнутой системе так, чтобы

резонансный пик частотной характеристики не добавлялся к ошибке слежения. Это достигается введением опережения  $T_{n1} \neq 0$ . Величина  $T_{n1}$  в определенной степени характеризует возможности прогнозирования летчиком последствий возникшей ситуации и принятых решений по ее разрешению. Увеличение  $T_{n1}$  приводит к расширению полосы пропускания системы и возрастанию запасов устойчивости. Но форсирование системы, т.е. значительное увеличение значения  $T_{n1}$ , может привести к большим ошибкам в оценке прогнозируемой ситуации и параметров самолета летчиком. Эксперименты показали, что величина  $T_{n1}$  не должна превосходить 1с.

Введение форсирования ( $T_{n1} \neq 0$ ) приводит к более “резким” движениям самолета при парировании возмущений, и для более “аккуратного” пилотирования летчик вводит запаздывание ( $T_{n2} \neq 0$ ), фильтруя таким образом высокочастотные составляющие движения. Величина  $T_{n2}$  лежит в пределах 10-20с.

3. Нейромускульный блок, характеризующий запаздывание между командой, идущей в нейромускульную систему, и реакцией перемещения руки летчика на эту команду. Величина  $T_{n3}$  лежит в пределах 0.1- 0.2с.

Исследования показывают, что летчик может обеспечить хорошие динамические качества всей системы, только если самолет обладает такими характеристиками устойчивости и управляемости, при которых потребные для этого возможности летчика не превосходят им реализуемые. Следовательно, летчик может успешно пилотировать не всякий самолет, а лишь такой, который обладает достаточно хорошими динамическими характеристиками. Поскольку динамические характеристики летчика ограничены и улучшить их невозможно, то согласование указанных характеристик летчика и самолета возможно лишь за счет обеспечения необходимых характеристик самолета.

#### Пример

Рассмотрим возможности ручного управления самолетом, имеющим следующие параметры:

$$k_c = 1.5; T_1 = 0.53, T_c = 0.25, \xi_c = 0.12.$$

Примем, что летчик как динамическое звено характеризуется некоторыми усредненными параметрами

$$\tau = 0.15\text{с}, T_{n1} = 1\text{с}, T_{n2} = 15\text{с}, T_{n3} = 0.15\text{с}.$$

Построим годографы Найквиста для различных значений  $k_n$  (рис.4.4).

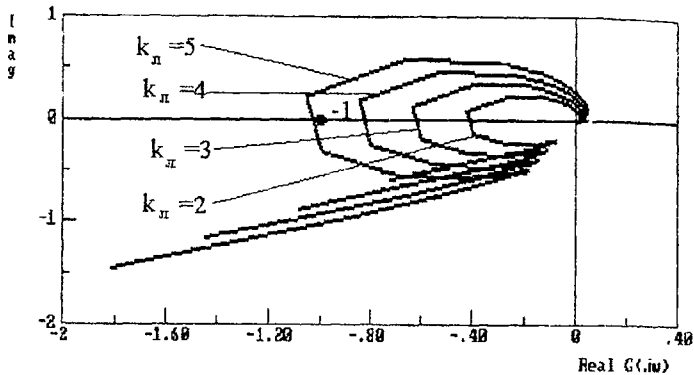


Рис.4.4. Годографы Найквиста системы самолет – летчик

При увеличении  $k_n$  кривая Найквиста приближается к критической точке и уже при  $k_n=3$  запас устойчивости по модулю становится равным 1.67, что меньше необходимого значения. Переходный процесс для этого случая показан на рис.4.5.

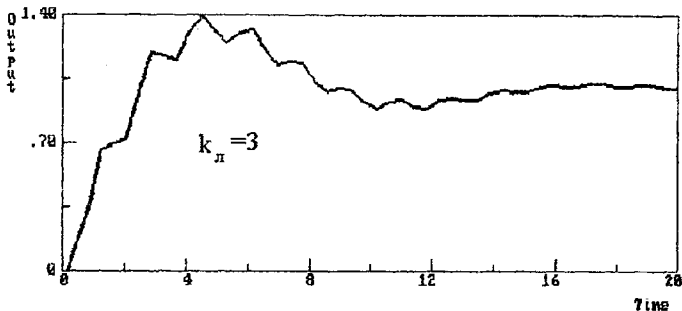


Рис.4.5. Переходный процесс в системе самолет-летчик

Процесс имеет колебательную составляющую, высокое перерегулирование. При значении  $k_n=4.5$  система близка к границе устойчивости, запас устойчивости по модулю равен всего 1.02, переходный процесс имеет недопустимый вид (рис.4.6).

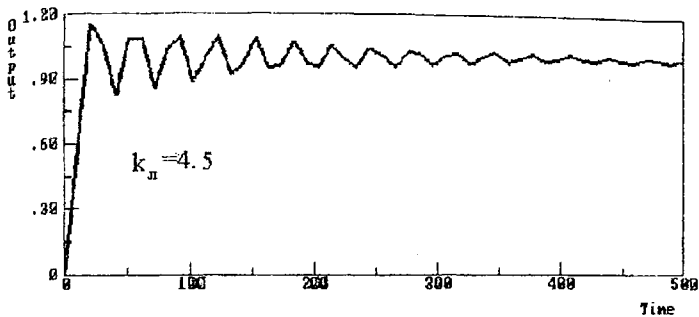


Рис.4.6. Переходный процесс в системе самолет- летчик при  $k_n=4.5$

Возможные значения коэффициента передачи летчика в данном случае очень малы и это говорит о том, что пилотируя рассматриваемый самолет, летчик должен очень осторожно изменять положение рычагов управления, что вызывает напряженность, при длительном полете накапливается усталость, возрастает вероятность неправильного решения.

Отсюда следует вывод, что необходимо каким-либо способом улучшить динамические характеристики самолета, в частности увеличить показатель затухания. На помощь человеку приходит автоматика.

## АВТОМАТЫ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ПОТРЕБНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ

В системе самолет – автомат управляющее воздействие летчик задает через рычаги управления. Автомат подключается параллельно летчику и его действие, в силу дифференциальной проводки исполнительных органов, не приводит к перемещению рычагов управления. Летчик воспринимает такую систему как самолет с хорошими характеристиками устойчивости и управляемости.

Выполнение указанного условия математически можно записать следующим образом:

$$\delta = k_{ш} (x_{шк}) x_{шк} + \delta_{авт}.$$

В этом выражении  $\delta$  - отклонение рулей или элеронов,  $k_{ш}$  – коэффициент передачи между отклонениями рычага управления и соответствующего рулевого

органа,  $x_{\text{шк}}$  – отклонение рычага управления от нейтрального положения,  $\delta_{\text{авт}}$  – отклонение руля или элеронов рулевым приводом.

Таким образом, отклонение рулей и элеронов является суммой двух отклонений – задаваемого летчиком и задаваемого автоматом, в соответствии с принятым законом управления.

К автоматам, обеспечивающим требуемые характеристики устойчивости и управляемости, относятся:

- 1) демпферы рыскания, тангажа и крена, улучшающие затухание колебаний самолета относительно соответствующей оси;
- 2) автоматы продольного управления;
- 3) автоматы бокового управления.

## Глава 5. ДЕМПФЕРЫ

### 5.1. Демпфер рыскания

Современные самолеты являются неустойчивыми в боковом движении. Однако в большинстве случаев достаточно обеспечить стабилизацию угла крена, чтобы самолет стал устойчивым.

При этом оказывается, что коэффициент относительного затухания колебаний угла рыскания имеет малое значение (порядка 0.1), что затрудняет пилотирование самолета. Для увеличения коэффициента затухания и применяется демпфер рыскания, закон управления которого чаще всего имеет вид

$$\delta_n = k_{\omega y} \frac{T_{\phi} s}{T_{\phi} s + 1} \omega_y \quad (5.1)$$

Здесь  $k_{\omega y}$  – передаточное число автомата по угловой скорости рыскания.

Включение дифференцирующего звена необходимо для того, чтобы не пропускать постоянную составляющую угловой скорости, поскольку в противном случае при разворотах с постоянной угловой скоростью отклонение руля направления, обусловленное сигналом демпфера, препятствовало бы выполнению маневра.

Структурная схема самолета с демпфером рыскания показана на рис.5.1.

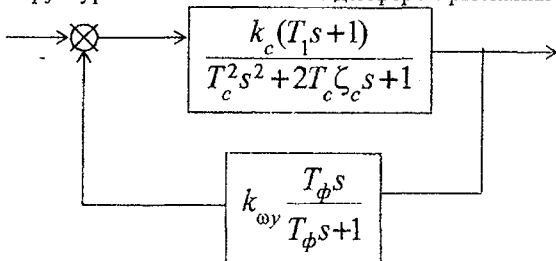


Рис.5.1. Структурная схема самолет – демпфер рыскания



Предполагается использование рулевого привода с жесткой обратной связью.

На низких частотах ( $\omega_y < \frac{1}{k_{\omega y} T_\phi}$ ) демпфер является дифференцирующим звеном, а на высоких частотах ( $\omega_y > \frac{1}{k_{\omega y} T_\phi}$ ) — безинерционным звеном.

Передаточная функция самолета с демпфером рыскания имеет вид

$$W_d(s) = \frac{k_c(T_1 s + 1)(T_\phi s + 1)}{(T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1)(T_\phi s + 1) + k_{\omega y} k_c T_\phi s (T_1 s + 1)}. \quad (5.2)$$

Характеристическое уравнение системы (5.2) приводится к виду

$$T_\phi s [T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c s + k_c k_{\omega y} T_1) s + (1 + k_c k_{\omega y})] + (T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1) = 0. \quad (5.3)$$

Преобразуем это выражение, разделив на  $T_\phi$ :

$$s [T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_c k_{\omega y} T_1) s + (1 + k_c k_{\omega y})] + \frac{1}{T_\phi} (T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1) = 0. \quad (5.4)$$

Допустим, что постоянная времени  $T_\phi$  такова, что второе слагаемое в левой части (5.4) мало по сравнению с первым слагаемым. Тогда комплексные корни уравнения (5.4) будут мало зависеть от параметра  $T_\phi$  и будут определяться уравнением

$$T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_c k_{\omega y} T_1) s + (1 + k_c k_{\omega y}) = 0. \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что относительный коэффициент затухания колебательной составляющей переходного процесса системы самолет — демпфер равен

$$\zeta = \frac{2T_c \zeta_c + k_c k_{\omega y} T_1}{2T_c \sqrt{1 + k_c k_{\omega y}}}. \quad (5.6)$$

Затухание в канале рыскания считается достаточным, если  $0.2 \leq \zeta \leq 0.4$ .

Из уравнения (5.6) при заданном значении показателя затухания получим выражение для расчета требуемого значения передаточного числа

$$k_{\omega y} = f(k_c, T_1, \zeta, \zeta_c). \quad (5.7)$$

При большом диапазоне высот передаточное число  $K_{\omega y}$  следует корректировать в сторону увеличения при возрастании высоты [ 11 ].

Теперь можно приступить к расчету величины  $T_{\phi}$ . Постоянная времени  $T_{\phi}$  должна иметь такую величину, чтобы ее изменение мало сказывалось на динамике системы с уже выбранным значением  $K_{\omega y}$ . Уравнение (5.3) является уравнением 3-й степени и обязательно имеет один вещественный корень. При выборе  $K_{\omega y}$  предполагалось, что величина  $T_{\phi}$  не должна оказывать влияния на комплексные корни. Поэтому можно считать, что постоянная времени  $T_{\phi}$  зависит только от вещественного корня. Из (5.3) следует

$$T_{\phi} = - \frac{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1}{s [T^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_c k_{\omega y} T_1) s + (1 + k_c k_{\omega y})]}. \quad (5.8)$$

Задавая различные отрицательные значения вещественного корня  $s_i$  можно построить график  $T_{\phi} = f(s_i)$ . При малых абсолютных значениях корня постоянная времени принимает большие значения и мало влияет на комплексные корни. Допустим, что в выражении (5.8) вещественный корень настолько мал, что приближенно можно считать, что

$$T_{\phi} \approx - \frac{1}{s_i}. \quad (5.9)$$

Построив гиперболу (5.9) на том же графике, где и  $T_{\phi} = f(s_i)$ , можно приступить к выбору величины  $T_{\phi}$ , которую нужно выбирать так, чтобы абсциссы точек пересечения кривых, построенных по выражениям (5.8) и (5.9), с прямой  $T_{\phi} = \text{const}$  были максимально близки друг к другу (рис.5.2). Можно считать достаточной близость не менее 5% от величины корня на кривой (гиперболе) (5.9). Расчеты показывают, что целесообразно выбирать постоянную времени в пределах  $T_{\phi} = 2-5c$ .

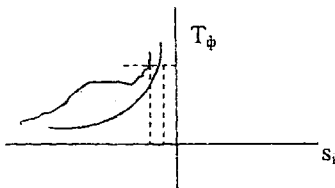


Рис.5.2. Выбор значения  $T_{\phi}$

Изложенный метод определения  $T_{\phi}$  приводит к таким значениям, которые, не влияя на характер переходного процесса, позволяют построить фильтр высоких частот, фильтрующий постоянную составляющую угловой скорости  $\omega_y$ .

## 5.2. Демпфер тангажа

Демпфер тангажа предназначен для обеспечения требуемого значения относительного показателя затухания продольных колебаний системы самолет - демпфер.

Закон управления демпфера тангажа, как правило, имеет вид

$$\delta_b = k_{\omega_z} \dot{\omega}_z. \quad (5.10)$$

Здесь  $k_{\omega_z}$  - передаточное число демпфера тангажа.

Структурная схема системы самолет - демпфер тангажа для рулевого привода с жесткой обратной связью имеет вид, показанный на рис.5.3.

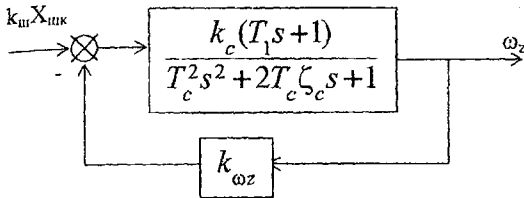


Рис.5.3. Структурная схема системы самолет - демпфер тангажа

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c s + k_{\omega_z} k_c T_1) s + (1 + k_{\omega_z} k_c) = 0. \quad (5.11)$$

Отсюда следует, что требуемое значение относительного показателя затухания определяется выражением

$$\zeta = \frac{2T_c \zeta_c + k_{\omega_z} k_c T_1}{2T_c \sqrt{1 + k_{\omega_z} k_c}}. \quad (5.12)$$

Для канала тангажа обычно требуется, чтобы  $\zeta = 0.7-1$ .

Задавшись требуемым значением показателя затухания  $\zeta$ , из (5.12) можно определить потребное для этого значение передаточного числа  $k_{\omega_z}$ . Из (5.12) после элементарных преобразований можно получить квадратное уравнение

$$k_{\omega_z}^2 + b k_{\omega_z} + c = 0. \quad (5.13)$$

В этом уравнении

$$b = \frac{4T_c \zeta_c k_c T_1 - 4T_c^2 k_c \zeta^2}{(k_c T_1)^2},$$

$$c = \frac{4T_c^2 (\zeta_c^2 - \zeta^2)}{(k_c T_1)^2}.$$

При большом диапазоне высот передаточное число  $k_{\omega y}$  следует корректировать в сторону увеличения при возрастании высоты [ 11 ].

Теперь можно приступить к расчету величины  $T_{\phi}$ . Постоянная времени  $T_{\phi}$  должна иметь такую величину, чтобы ее изменение мало сказывалось на динамике системы с уже выбранным значением  $k_{\omega y}$ . Уравнение (5.3) является уравнением 3-й степени и обязательно имеет один вещественный корень. При выборе  $k_{\omega y}$  предполагалось, что величина  $T_{\phi}$  не должна оказывать влияния на комплексные корни. Поэтому можно считать, что постоянная времени  $T_{\phi}$  зависит только от вещественного корня. Из (5.3) следует

$$T_{\phi} = - \frac{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1}{s [T^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_c k_{\omega y} T_1) s + (1 + k_c k_{\omega y})]} \quad (5.8)$$

Задавая различные отрицательные значения вещественного корня  $s_i$  можно построить график  $T_{\phi} = f(s_i)$ . При малых абсолютных значениях корня постоянная времени принимает большие значения и мало влияет на комплексные корни. Допустим, что в выражении (5.8) вещественный корень настолько мал, что приближенно можно считать, что

$$T_{\phi} \approx - \frac{1}{s_i} \quad (5.9)$$

Построив гиперболу (5.9) на том же графике, где и  $T_{\phi} = f(s_i)$ , можно приступить к выбору величины  $T_{\phi}$ , которую нужно выбирать так, чтобы абсциссы точек пересечения кривых, построенных по выражениям (5.8) и (5.9), с прямой  $T_{\phi} = \text{const}$  были максимально близки друг к другу (рис.5.2). Можно считать достаточной близость не менее 5% от величины корня на кривой (гиперболе) (5.9). Расчеты показывают, что целесообразно выбирать постоянную времени в пределах  $T_{\phi} = 2-5s$ .

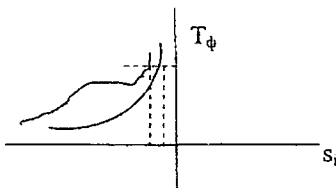


Рис.5.2. Выбор значения  $T_{\phi}$

Изложенный метод определения  $T_{\phi}$  приводит к таким значениям, которые, не влияя на характер переходного процесса, позволяют построить фильтр высоких частот, фильтрующий постоянную составляющую угловой скорости  $\omega_y$ .

## 5.2. Демпфер тангажа

Демпфер тангажа предназначен для обеспечения требуемого значения относительного показателя затухания продольных колебаний системы самолет – демпфер.

Закон управления демпфера тангажа, как правило, имеет вид

$$\delta_b = k_{\omega_z} \omega_z. \quad (5.10)$$

Здесь  $k_{\omega_z}$  – передаточное число демпфера тангажа.

Структурная схема системы самолет – демпфер тангажа для рулевого привода с жесткой обратной связью имеет вид, показанный на рис.5.3.

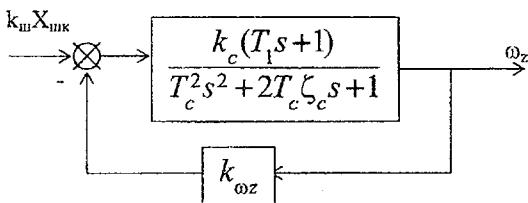


Рис.5.3. Структурная схема системы самолет – демпфер тангажа

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c s + k_{\omega_z} k_c T_1) s + (1 + k_{\omega_z} k_c) = 0. \quad (5.11)$$

Отсюда следует, что требуемое значение относительного показателя затухания определяется выражением

$$\zeta = \frac{2T_c \zeta_c + k_{\omega_z} k_c T_1}{2T_c \sqrt{1 + k_{\omega_z} k_c}}. \quad (5.12)$$

Для канала тангажа обычно требуется, чтобы  $\zeta = 0.7-1$ .

Задавшись требуемым значением относительного показателя затухания  $\zeta$ , из (5.12) можно определить потребное для этого значение передаточного числа  $k_{\omega_z}$ . Из (5.12) после элементарных преобразований можно получить квадратное уравнение

$$k_{\omega_z}^2 + b k_{\omega_z} + c = 0. \quad (5.13)$$

В этом уравнении

$$b = \frac{4T_c \zeta_c k_c T_1 - 4T_c^2 k_c \zeta^2}{(k_c T_1)^2},$$

$$c = \frac{4T_c^2 (\zeta_c^2 - \zeta^2)}{(k_c T_1)^2}.$$

Из решений уравнения (5.13) выбирается арифметическое. Два отрицательных значения  $k_{\omega z}$  могут быть получены, только если потребное значение показателя затухания меньше, чем имеющееся. Но в этом случае нет необходимости в установке демпфера.

### 5.3. Демпфер крена

Величина постоянной времени  $T_\gamma$  в передаточной функции самолета по углу крена может быть достаточно большой и увеличивается с высотой полета. Демпфер крена предназначен для уменьшения этой постоянной времени. Закон управления демпфера крена может быть различным. Рассмотрим закон управления, который используется в системе автоматического управления САУ – 4 самолета Ту – 154:

$$\delta_\varphi = k_{\omega x} \frac{T_\phi s}{T_\phi s + 1} \omega_x. \quad (5.14)$$

Структурная схема самолета с демпфером крена показана на рис.5.4.

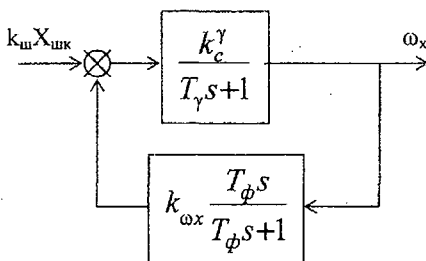


Рис.5.4. Структурная схема системы самолет – демпфер крена

Передаточная функция, соответствующая этой структурной схеме имеет вид

$$W(s) = \frac{k_c^\gamma (T_\phi s + 1)}{T_\gamma T_\phi s^2 + (T_\gamma + T_\phi + k_c^\gamma k_{\omega x} T_\phi) s + 1}. \quad (5.15)$$

Постоянная времени такой системы определяется выражением

$$T = \sqrt{T_\gamma T_\phi}.$$

Обычно требуется, чтобы  $T \leq 1c$ . Задавшись значением постоянной времени  $T$ , можно определить постоянную времени дифференцирующего фильтра

$$T_{\phi} = \frac{T^2}{T_{\gamma}}. \quad (5.16)$$

Относительный коэффициент затухания системы определяется из выражения

$$\zeta = \frac{T_{\gamma} + T_{\phi} + k_c^{\gamma} k_{\omega z} T_{\phi}}{2\sqrt{T_{\gamma} T_{\phi}}}. \quad (5.17)$$

Требуемое значение показателя затухания лежит в пределах 0.7 – 0.8. Формула (5.17) дает возможность вычислить величину передаточного числа  $k_{\omega z}$ , обеспечивающую требуемое значение показателя затухания.

#### 5.4. Автомат продольного управления

С помощью только одних демпферов не всегда удастся получить приемлемые характеристики устойчивости и управляемости самолета, особенно в случае его статической неустойчивости или близости к границе устойчивости.

Допустим, что в продольном движении самолет не обладает статической устойчивостью и его передаточная функция по угловой скорости имеет вид

$$W_{\omega z}(s) = \frac{k_c(T_1 s + 1)}{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s - 1}.$$

При рулевом приводе с жесткой обратной связью и введении демпфера характеристическое уравнение системы самолет – демпфер тангажа можно записать в виде

$$T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_{\omega z} k_c T_1) s + (k_{\omega z} k_c - 1) = 0. \quad (5.18)$$

Очевидно, что система может быть устойчивой, только если

$$k_{\omega z} k_c > 1.$$

Это не всегда желательно с точки зрения получения оптимального значения относительного показателя затухания и, кроме того, в случае  $(k_{\omega z} k_c - 1) < 1$

снижается частота собственных колебаний  $\Omega = \sqrt{\frac{k_{\omega z} k_c - 1}{T_c^2}}$ , что

неблагоприятно сказывается на условиях работы экипажа и комфортности пассажиров.

Работоспособность летчика зависит как от величины случайной перегрузки и времени ее действия, так и от ее частоты. Так, например, ветровые воздействия, вызывающие в течение нескольких минут нормальную перегрузку со средним квадратичным значением порядка 0.5, снижают качество управления, вызывают у летчика чувство беспокойства. При случайных перегрузках выше 0.2 летчику

трудно считывать показания приборов. Колебания перегрузки с частотой около 1Гц могут быть причиной функциональных расстройств организма летчика, приводящих к его дезориентации. Основным путем уменьшения перегрузок является улучшение динамических характеристик самолета как твердого тела.

Амплитудная частотная характеристика самолета имеет, как правило, пик на частоте короткопериодических колебаний. Так как основная энергия возмущений, например ветровых, сосредоточена в низкочастотной области спектра, то сдвиг резонансного пика АЧХ вправо и его уменьшение приводят к снижению перегрузок. Этот факт и используется для увеличения частоты и демпфирования угловых колебаний самолета посредством автоматики.

С этой целью кроме сигнала угловой скорости в закон управления вводится сигнал перегрузки. Перегрузкой называется отношение силы, действующей на самолет в определенном направлении, к силе тяжести. Перегрузка в продольном движении определяется выражением

$$n_y = \frac{V}{g} \dot{\Theta}. \quad (5.19)$$

Введем сигнал перегрузки в цепь обратной связи с некоторым коэффициентом  $k_{ny}$ . Структурная схема самолета с автоматом продольного управления (АПУ) показана на рис.5.5.

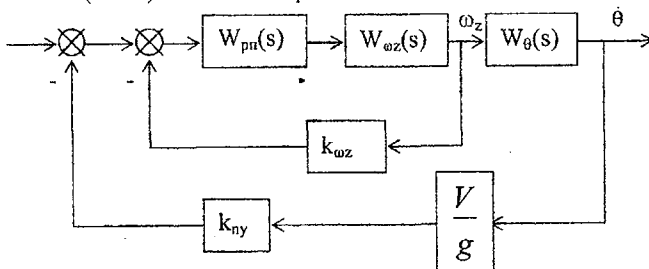


Рис.5.5. Структурная схема системы самолет – АПУ

На рис.5.5 обозначено:

$$W_{pn}(s) = \frac{B_{pn}(s)}{A_{pn}(s)} \text{ — передаточная функция рулевого привода,}$$

$$W_{\omega_z}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k_c(T_1 s + 1)}{T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1} \text{ — передаточная функция самолета}$$

по угловой скорости тангажа,

$$W_{\theta}(s) = \frac{1}{T_1 s + 1} \text{ — передаточная функция, связывающая угол тангажа и}$$

угол подъема траектории.



На основании структурной схемы запишем передаточную функцию системы

$$W(s) = \frac{k_c B_{pn}(s)}{A_{pn}(s)A(s) + k_{\omega z} B_{pn}(s)B(s) + k_{ny} \frac{V}{g} - k_c B_{pn}(s)}. \quad (5.20)$$

При рулевом приводе с жесткой обратной связью, когда  $B_{pn}(s)=1$  и  $A_{pn}(s)=1$ , характеристическое уравнение системы приобретает вид

$$A(s) + k_{\omega z} k_c (T_1 s + 1) + k_{ny} k_c \frac{V}{g} = 0.$$

После подстановки полинома  $A(s)$  и преобразований получим

$$T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_{\omega z} k_c T_1) s + 1 + k_{\omega z} k_c + k_{ny} k_c \frac{V}{g} = 0. \quad (5.21)$$

В силу большого значения скорости самолета  $k_{ny} k_c \frac{V}{g} \gg k_{\omega z} k_c$ , и в этом

случае частота собственных колебаний определяется величиной  $k_{ny} k_c \frac{V}{g}$  и

она может быть сделана существенно большей, чем у самолета с демпфером тангажа. Относительный показатель затухания определяется выражением

$$\zeta = \frac{2T_c \zeta_c + k_{\omega z} k_c T_1}{2T_c \sqrt{1 + k_{ny} k_c \frac{V}{g}}}. \quad (5.22)$$

При уже определенном значении  $k_{ny}$  и заданном значении показателя затухания из (5.22) может быть вычислено требуемое значение передаточного числа по угловой скорости  $k_{\omega z}$ .

Методика расчета при рулевом приводе со скоростной или изодромной обратной связью аналогична вышеописанной.

## 5.5. Автомат бокового управления

Задачи автомата бокового управления (АБУ) такие же, как и у рассмотренного АПУ. Сигнал боковой перегрузки определяется выражением

$$n_z = \frac{V}{g} \dot{\psi}. \quad (5.23)$$

Закон управления имеет вид

$$\delta_n = k_{\omega y} \frac{T_\phi s}{T_\phi s + 1} \omega_y + k_{nz} n_z. \quad (5.24)$$

Передаточная функция системы будет

$$W(s) = \frac{B_{pn}(s)(T_\phi s + 1)}{A_{pn}(s)A(s)(T_\phi s + 1) + k_{\omega y} T_\phi s B(s) + k_c k_{nz} B_{pn}(s) n_z (T_\phi s + 1)}$$

Принципиальным отличием от АПУ является наличие дифференцирующего фильтра. Поэтому рекомендуется сначала рассчитать значения  $T_\phi$  и  $k_{\omega y}$  по методике, описанной для демпфера рыскания, а затем подобрать такое значение  $k_{nz}$ , которое обеспечило бы требуемую частоту собственных колебаний, не изменяя существенно при этом относительный показатель затухания.

## АВТОМАТИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА

### Глава 6. АВТОМАТИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА

В продольном короткопериодическом движении производится управление углом тангажа самолета. Система, осуществляющая это управление и входящая в состав автопилота, называется автоматом тангажа.

#### 6.1. Структурная схема и характеристики автомата тангажа

Закон управления автомата тангажа чаще всего имеет вид

$$\delta_b = k_v (v^* - v) - k_{\omega z} \omega_z. \quad (6.1)$$

Здесь  $v^*$  - заданное значение угла тангажа. При таком законе управления используется рулевой привод с жесткой обратной связью, и структурная схема самолета с автоматом тангажа при учете возмущающего момента приведена на рис.6.1.

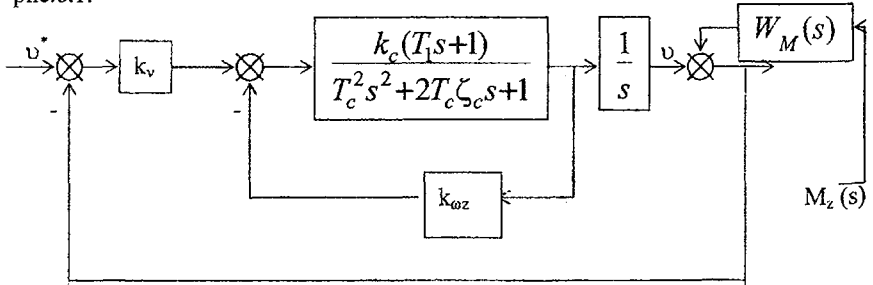


Рис.6.1. Структурная схема системы самолет – автомат тангажа

Внутренний контур этой схемы описывает самолет с демпфером тангажа, и передаточное число автопилота по угловой скорости тангажа  $k_{\omega z}$  может быть рассчитано по методике, изложенной в п.5.2.

Расчет передаточного числа по углу тангажа может быть произведен с использованием ЛЧХ. Передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию имеет вид

$$W(s) = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)_1}{s(T_c^2 s^2 + (2T_c \zeta_c + k_{\omega z} k_c T_1) s + 1 + k_{\omega z} k_c)} = \frac{k(T_1 s + 1)}{s(T^2 s^2 + 2T \zeta s + 1)} \quad (6.2)$$

В этой передаточной функции

$$k = \frac{k_v k_c}{1 + k_{\omega z} k_c};$$

$$T = \sqrt{\frac{T_c^2}{1 + k_{\omega z} k_c}};$$

$$\zeta = \frac{2T_c \zeta_c + k_{\omega z} k_c T_1}{2T_c \sqrt{1 + k_{\omega z} k_c}}.$$

При определенном выше значении  $k_{\omega z}$  и заданном значении показателя затухания  $\zeta$  остается неизвестным только коэффициент передачи прямой цепи. Можно предложить следующую методику расчета этого коэффициента.

1) Логарифмическая фазовая характеристика не зависит от коэффициента передачи прямой цепи и ее можно построить по передаточной функции (6.2).

2) Задав требуемый запас устойчивости системы по фазе, обычно в пределах  $30^\circ - 45^\circ$ , можно определить частоту среза системы (рис.6.1).

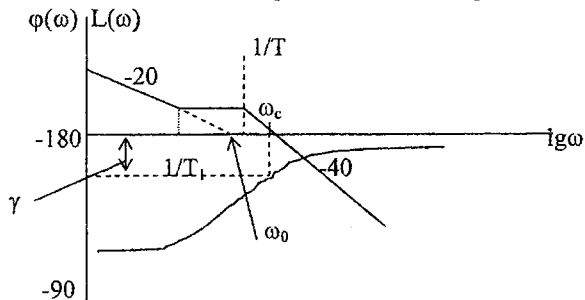


Рис.6.2. ЛЧХ системы самолет – автомат тангажа

Для этого нужно отложить на оси ординат значение запаса устойчивости по фазе  $\gamma$  и провести линию, параллельную оси частот до пересечения с ЛФХ.

3) Зная частоту среза, а также частоты сопряжения  $1/T_1$  и  $1/T$  можно построить ЛАХ системы.

4) Продлим асимптоту с наклоном  $-20$  дБл/дек, соответствующую интегрирующему звену, до пересечения с осью частот, и определим базовую частоту  $\omega_0$ . Известно, что асимптота интегрирующего звена пересекает ось частот в точке, равной коэффициенту усиления, т.е.

$$\omega_0 = \frac{k_v k_c}{1 + k_{\omega z} k_c}.$$

Отсюда получим

$$k_v = \frac{\omega_0 (1 + k_{\omega z} k_c)}{k_c}. \quad (6.3)$$

Может случиться так, что ЛФХ пересекает ось частот и полученный запас устойчивости по модулю неудовлетворителен. В этом случае нужно уменьшить значение частоты среза и повторить расчет.

Вид ЛАХ и передаточная функция (6.2) свидетельствуют о том, что рассматриваемая система имеет астатизм 1-го порядка по отношению к задающему воздействию.

Рассмотрим реакцию системы на постоянный возмущающий момент  $M_z = \text{const}$ .

Подставив закон управления вместо  $\delta_b$  в систему уравнений (4.2), определим характеристический определитель и замещенный определитель по возмущающему моменту. Получим

$$D(s) = s[s^2 + (a_{22} + a_{33})s + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}] - (s + a_{22})b_{31}(k_{\omega z}s + k_v),$$

$$R_M(s) = \frac{s + a_{22}}{s} M_z^*.$$

Изображение ошибки от возмущающего момента

$$E_M(s) = \frac{R_M(s)}{D(s)}.$$

Используя теорему о конечном значении оригинала, получим значение установившейся (статической) ошибки от постоянного возмущающего момента.

$$\varepsilon_{cm} = \frac{1}{b_{31}k_v} M_z^*.$$

Эта ошибка не равна нулю, и это означает, что по отношению к возмущающему моменту система астатизма не имеет. Статическая ошибка тем меньше, чем больше передаточное число по углу тангажа.

## 6.2. Структурная схема и характеристики автомата высоты

Скорость изменения высоты полета определяется четвертым уравнением системы (4.1). Статическая ошибка стабилизации угла тангажа, а значит и угла подъема траектории имеет постоянное и не равное нулю значение. Поэтому величина изменения высоты полета определяется выражением

$$\Delta H = a_{41} \int_0^t \theta_{cm} dt = a_{41} \theta_{cm} t. \quad (6.4)$$

Таким образом, самолет, автоматизированный по тангажу, уходит с заданной высоты полета и этот уход пропорционален времени. Это вызывает необходимость стабилизации высоты полета. Рассмотрим закон управления в продольной плоскости:

$$\delta_b(s) = k_v v^* - (k_{\omega z} s + k_v) v(s) + W_H(s)(H^* - H). \quad (6.5)$$

Здесь  $W_H(s)$  - закон управления по высоте полета. Систему автоматического управления (6.5) называют автоматом высоты, или полным продольным автоматом.

Структурная схема автомата высоты при учете возмущающего момента имеет вид, показанный на рис. 6.3.

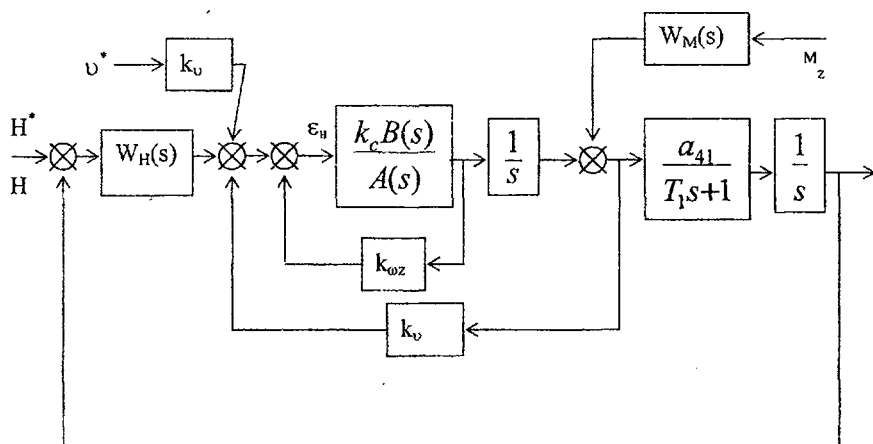


Рис. 6.3. Структурная схема автомата высоты

При рассмотрении динамики самолета с автоматом высоты будем полагать, что параметры автомата тангажа, входящего в автомат высоты

внутренним контуром, уже известны. Используя структурную схему, запишем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_H + W_H(s)H + k_v v + k_\omega \omega &= W_H(s)H^* + k_v v^*, \\ k_c B(s)\varepsilon_H - A(s)\omega &= 0, \\ s v - \omega &= 0, \\ sB(s)H - a_{41} v &= a_{41} W_M(s)M_{zb}^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

В этой системе  $B(s) = T_1 s + 1$ ;  $A(s) = T_c^2 s^2 + 2T_c \zeta_c s + 1$ ;

$$W_M(s) = \frac{s + a_{22}}{sA(s)}.$$

Найдем характеристический и замещенный определители. Получим

$$\begin{aligned} D(s) &= s^2 B(s)(A(s) + k_c k_\omega B(s)) + s k_v B^2(s) + a_{41} k_c B(s) W_H(s), \\ R_H(s) &= a_{41} k_c B(s) W_H(s) H^* + a_{41} W_M(s) [sA(s) + k_c B(s)(k_v + k_\omega s)] M_{zb}^*. \end{aligned}$$

Допустим, что для управления высотой используется пропорциональный статический закон, т.е.  $W_H(s) = k_H$ . Будем также считать, что

$H^* = \text{const} \rightarrow \frac{H^*}{s}$  и  $M_{zb}^* = \text{const} \rightarrow \frac{M_{zb}^*}{s}$ . Используя теорему о

конечном значении оригинала, получим

$$H_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R_H(s)}{D(s)} = H^* + \frac{k_v a_{22}}{k_H} M_{zb}^*.$$

Отсюда следует, что по отношению к задающему воздействию такая система обладает астатизмом первого порядка, а статическая ошибка, вызванная возмущающим моментом, определяется выражением

$$\Delta_H = \frac{k_v a_{22}}{k_H} M_{zb}^*. \quad (6.7)$$

Расчет передаточного числа автопилота по высоте можно вести различными способами. Например, используя характеристическое уравнение замкнутой системы, можно построить область устойчивости в плоскости параметра  $k_H$  и выбрать такое значение в этой области, которое обеспечивает необходимые запасы устойчивости и требуемое качество переходного процесса.

В случаях полета на малых высотах может возникнуть необходимость устранения статической ошибки (6.7). Для этой цели можно использовать пропорционально-интегральный закон управления:

$$W_H(s) = k_H + \frac{k_u}{s} = \frac{k_H s + k_u}{s}. \quad (6.8)$$

Подставив этот закон управления в систему (6.6) и решив ее, можно убедиться, что

$$\Delta H = 0.$$

Расчет передаточного числа по интегралу удобно вести при уже полученном значении  $k_H$ . При введении интеграла в передаточную функцию разомкнутой системы дополнительно вводятся интеграл и форсирующее звено первого порядка  $\frac{k_H}{k_u} s + 1$ . Выражение для фазовой частотной характеристики будет

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \operatorname{arctg} \frac{k_H}{k_u} \omega + \varphi_1(\omega),$$

где  $\varphi(\omega)$  – фазовая характеристика системы при  $k_H=0$ . Запас устойчивости по фазе определяется выражением  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$ . Задавшись значением частоты среза  $\omega_c$  и необходимым запасом устойчивости по фазе, можно получить

$$\operatorname{arctg} \frac{k_H}{k_u} \omega_c = \gamma - 90^\circ - \varphi_1(\omega_c). \quad (6.9)$$

Отсюда вычисляется значение  $k_H$ . После расчета передаточного числа необходимо построить ЛЧХ и убедиться в том, что полученные запасы устойчивости по фазе и по модулю соответствуют потребным значениям. Построенные ЛЧХ дают возможность при необходимости уточнить расчет.

## Глава 7. АВТОМАТИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА

В боковом движении осуществляется автоматическая стабилизация и управление углами крена и курса. Система стабилизации бокового движения состоит из канала крена (автомат крена) и канала курса (автомат курса). Рулевые приводы каналов крена и курса могут иметь жесткие, скоростные и изодромные обратные связи, при этом не одинаковые для обоих каналов. С этой точки зрения всего можно рассматривать девять автоматов бокового движения.

Другой вид классификации связан с характером автоматического управления по курсу. Если позиционный сигнал курса подается только в канал руля направления, то автопилот называется автопилотом прямой схемы. Если позиционный сигнал курса подается только в канал элеронов, то автопилот называется автопилотом перекрестной схемы. Наконец, если позиционный сигнал курса подается в канал руля направления и в канал элеронов, то автопилот называется автопилотом смешанной схемы. В настоящее время наибольшее распространение получили автопилоты перекрестной схемы. Автопилоты прямой схемы используются лишь для решения специальных

задач, связанных с плоским движением самолета, когда самолет жестко стабилизируется по крену (например, при аэрофотосъемке). Автопилоты смешанной схемы в настоящее время почти не используются. Поэтому ниже рассматривается только автопилот перекрестной схемы.

### 7.1. Структурная схема и характеристики автомата крена

Во многих случаях, в частности в системе автоматического управления самолета Ту-154, при стабилизации угла крена и при развороте с заданным креном используется закон управления

$$\delta_{\gamma} = k_{\gamma}(\gamma^* - \gamma) + k_{\omega x} \frac{T_{\phi} s}{T_{\phi} s + 1} \omega_x. \quad (7.1)$$

Структурная схема самолета с автоматом крена при таком законе управления и при учете моментного возмущения показана на рис. 7.1.

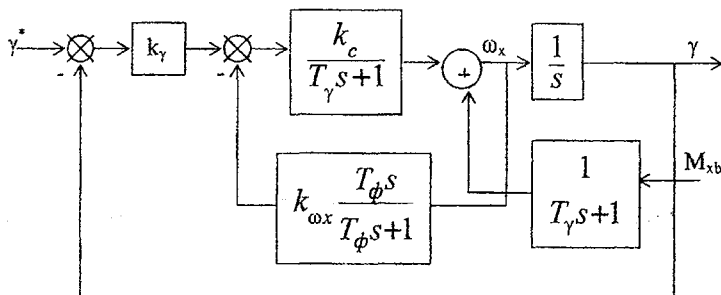


Рис. 7.1. Структурная схема самолета с автоматом крена

Угловая скорость крена, согласно структурной схеме, определится выражением

$$\omega_x(s) = \frac{k_c k_{\gamma} (T_{\phi} s + 1)}{T_{\phi} T_{\gamma} s^2 + (T_{\phi} + T_{\gamma} + k_{\omega x} k_c T_{\phi}) s + 1} (\gamma^* - \gamma) + \frac{1}{T_{\gamma} s + 1} M_{xb}^*(s).$$

Так как  $\gamma(s) = \omega(s)/s$ , то после преобразований получим

$$\gamma(s) = \frac{W_1(s)}{s + W_1(s)} \gamma^*(s) + \frac{1}{(T_{\gamma} s + 1)(s + W_1(s))_1} M_{xb}^*(s),$$

где

$$W_1(s) = \frac{k_{\gamma} k_c (T_{\phi} s + 1)}{T_{\phi} T_{\gamma} s^2 + (T_{\phi} + T_{\gamma} + k_c k_{\omega x} T_{\phi}) s + 1}.$$

Используя теорему о конечном значении оригинала при



$$\gamma^* = \text{const} \rightarrow \frac{\gamma^*}{s} \quad \text{и} \quad M_{xb}^* = \text{const} \rightarrow \frac{M_{xb}^*}{s}, \quad \text{получим, что}$$

$$\gamma_{уст} = \gamma^* + \Delta_\gamma, \quad (7.2)$$

где статическая ошибка  $\Delta_\gamma = \frac{M_{xb}^*}{k_c k_\gamma}$ .

Передаточная функция разомкнутой системы  $W(s) = \frac{1}{s} W_1(s)$  и расчет

передаточного числа по углу крена можно вести, используя ЛЧХ, по методике описанной для автомата тангажа, задавшись запасом устойчивости по фазе. При этом желательно обеспечить минимальное значение статической ошибки.

В случае полета на малых высотах и необходимости совершения плоских разворотов, желательно иметь статическую ошибку, равной нулю. Для решения этой задачи можно использовать пропорционально-интегральный закон управления по углу крена. Для этого вместо звена с коэффициентом передачи  $k_\gamma$  нужно использовать звено с передаточной функцией

$$W(s) = k_\gamma + \frac{k_u}{s} = \frac{k_\gamma s + k_u}{s}, \quad \text{т.е. ввести в закон управления интеграл от ошиб-$$

ки крена. Легко показать, что в случае такого закона управления статическая ошибка равна нулю. Расчет передаточного числа  $k_u$  можно вести по методике, рассмотренной для автомата высоты.

## 7.2. Структурная схема и характеристики автомата курса

Рассмотрим автомат курса перекрестной схемы. Для изучения системы стабилизации и управления курсом должна использоваться полная система уравнений движения самолета, но для получения некоторых качественных результатов можно использовать упрощенную систему уравнений. Для определенности примем, что канал крена имеет рулевой привод с жесткой обратной связью, а в канале курса закон управления по угловой скорости формируется автоматом бокового управления. В этом случае закон управления в канале элеронов имеет вид

$$\delta_\alpha = k_{\omega_x} s \gamma + k_\gamma (\gamma - \gamma_{зад}), \quad (7.3)$$

где  $\gamma_{зад} = n \frac{\Psi - \Psi_{зад}}{T_\Psi s + 1}$ .

Параметры автомата крена и автомата бокового управления рассчитаны ранее. Задача состоит в расчете передаточного числа  $n$  и постоянной времени фильтра  $T_\Psi$  в канале элеронов. При расчете этих параметров для автопилота перекрестной схемы необходимо рассматривать всю систему дифференциаль-

ных уравнений бокового движения самолета, в которой можно пренебречь членами, содержащими коэффициенты  $m_{21}$  и  $m_{31}$ , по их малости, а также некоторыми перекрестными связями, оказывающими малое влияние на динамику движения. Доказано, что самолет с демпфером рыскания или статическим автоматом бокового управления эквивалентен самолету с закрепленным рулем направления. Это означает, что из уравнений бокового движения исключается  $\delta_u$ . При указанных условиях и допущениях система уравнений бокового движения автоматизированного самолета в изображениях по Лапласу может быть записана в виде

$$\left. \begin{aligned} (s^2 + a_{11})\psi + a_{12}\beta &= 0, \\ (s^2 + a_{21})\gamma + a_{22}\beta + a_{23}\delta_s &= 0, \\ -s\psi + (s + a_{31})\beta - (a_{32}s + a_{33})\gamma &= 0, \\ -(k_{\omega_x}s + k_\gamma)\gamma + \delta_s + k_\gamma\gamma_{зад} &= 0, \\ -n\psi + (T_\psi s + 1)\gamma_{зад} &= -n\psi_{зад}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

В этой системе уравнений

$$\begin{aligned} a_{11} &= |n_{22}|, & a_{12} &= |n_{21}|, \\ a_{21} &= |n_{33}|, & a_{31} &= |n_{11}|, \\ a_{23} &= m_{32}, & a_{22} &= |n_{31}|. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{32}$  и  $a_{33}$  определяют существенные перекрестные связи.

Характеристическое уравнение системы (7.4) имеет вид

$$\begin{aligned} D(s) &= s(T_\psi s + 1) \{ s(s + a_{21}) [s^2 + (a_{11} + a_{31})s + (a_{12} + a_{11}a_{31})] + \\ &+ a_{22}(s + a_{11})(a_{32}s + a_{33}) + a_{23}(k_{\omega_x}s + k_\gamma) \} * [s^2 + (a_{11} + a_{31})s + \\ &+ (a_{12} + a_{11}a_{31})] + a_{12}a_{23}k_\gamma n(a_{32}s + a_{33}). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию будет

$$\Phi(s) = \frac{\psi}{\psi_{зад}} = \frac{a_{12}a_{23}k_\gamma n(a_{32}s + a_{33})}{D(s)}. \quad (7.6)$$

Эта передаточная функция имеет нуль, равный отношению коэффициентов  $\frac{a_{33}}{a_{32}}$ . Из передаточной функции (7.6) можно получить передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{a_{12}a_{23}k_{\gamma}n(a_{32}s + a_{33})}{D(s) - a_{12}a_{23}k_{\gamma}n(a_{32}s + a_{33})} \quad (7.7)$$

Анализ этой передаточной функции показывает, что ее характеристический полином имеет один нулевой корень, т.е. в состав этой передаточной функции входит интегрирующее звено первого порядка. Вид передаточных функций (7.6) и (7.7) показывает, что передаточное число  $n$  входит только в числитель передаточной функции разомкнутой системы, т.е. входит в коэффициент усиления. Поэтому изменением передаточного числа  $n$  можно лишь сдвигать логарифмическую амплитудную характеристику, построенную по  $W(s)$ , вверх и вниз. Таким образом величина участка ЛАХ с наклоном  $-20$ дБ/дек, соответствующего интегрирующему звену, зависит от числа  $n$  и от величины постоянной времени, определяемой отношением  $\frac{a_{32}}{a_{33}}$ . Чем больше величина

этой постоянной времени, тем раньше участок с наклоном  $-20$ дБ/дек сменится участком с нулевым наклоном. Большое значение передаточного числа  $n$  может привести к высокой колебательности процесса регулирования и большому перерегулированию. Нуль передаточной функции (7.7) позволяет уменьшить число  $n$  и избавиться от указанных выше недостатков. В то же время уменьшение числа  $n$  затягивает процесс доворота на заданный курс. Для того чтобы ликвидировать эти нежелательные явления, в закон управления введено

инерционное звено с постоянной времени  $T_{\Psi}$ . Выбрав  $T_{\Psi} = \frac{a_{32}}{a_{33}}$ , можно в

передаточных функциях (7.6) и (7.7) произвести сокращение на  $(a_{32}s + a_{33})$ , т.е. избавиться от нуля и уменьшить на единицу порядок системы. После сокращения нуля передаточные функции системы примут вид

$$\Phi(s) = \frac{\Psi}{\Psi_{зад}} = \frac{a_{12}a_{23}k_{\gamma}n}{D_1(s)} \quad (7.8)$$

$$W(s) = \frac{a_{12}a_{23}k_{\gamma}n}{A_1(s)} \quad (7.9)$$

В этих выражениях

$$D_1(s) = s\{[s(s+a_{21})+a_{23}(k_{\omega_x}s+k_{\gamma})][s^2+(a_{11}+a_{31})s+(a_{12}+a_{11}a_{31})]+a_{22}(s+a_{11})(a_{32}s+a_{33})\}+a_{12}a_{23}k_{\gamma}n, \quad (7.10)$$

$$A_1(s) = s\{[s(s+a_{21})+a_{23}(k_{\omega_x}s+k_{\gamma})][s^2+(a_{11}+a_{31})s+(a_{12}+a_{11}a_{31})]+a_{22}(s+a_{11})(a_{32}s+a_{33})\}. \quad (7.11)$$

Из этих выражений следует, что система обладает астатизмом первого порядка по отношению к задающему воздействию.

Для определения передаточного числа  $n$  необходимо построить ЛАХ по передаточной функции разомкнутой системы (7.9) при  $n=1$  (ЛАХ 1 на рис.7.2).

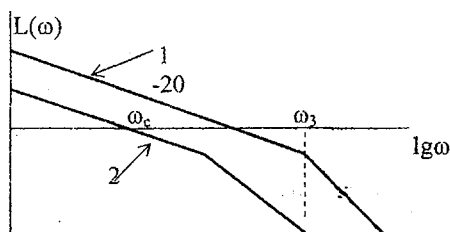


Рис.7.2. Определение передаточного числа  $n$

После этого от сопрягающей частоты  $\omega_3$ , соответствующей малым корням уравнения  $A_1(s)=0$ , которой заканчивается участок с наклоном -20дБ/дек, нужно отложить влево отрезок в 2-3 октавы, т.е. уменьшить  $\omega_3$  в 5-8 раз (ЛАХ 2 на рис.7.1). Полученное значение частоты среза  $\omega_c$  равно коэффициенту усиления

$$k = \omega_c = \frac{a_{12}a_{23}k_{\gamma}n}{a_{23}k_{\gamma}(a_{12}+a_{11}a_{31})+a_{11}a_{22}a_{33}} = (0.125 \div 0.2)\omega_3.$$

Из этого выражения определяется

$$n = \frac{(0.125 \div 0.2)\omega_3[a_{23}k_{\gamma}(a_{12}+a_{11}a_{31})+a_{11}a_{22}a_{33}]}{a_{12}a_{23}k_{\gamma}}. \quad (7.12)$$

## Глава 8. СТАБИЛИЗАЦИЯ СКОРОСТИ ПОЛЕТА САМОЛЕТА. АВТОМАТ ТЯГИ

Стабилизация скорости полета и числа  $M$  может осуществляться соответствующим воздействием на руль высоты и на сектор газа двигателей. Стабилизация скорости полета и числа  $M$  рассматриваются применительно к полету на максимальную дальность.

### 8.1. Необходимые условия для осуществления режима полета на максимальную дальность

Для осуществления режима полета на максимальную дальность необходимо во время полета поддерживать постоянными число  $M$  и коэффициент подъемной силы  $C_y$ . Определим необходимые для этого условия.

Полет на дальность, строго говоря, не является установившимся, поскольку в процессе полета вследствие выгорания топлива вес самолета изменяется. Однако ввиду медленности этого процесса с достаточной для практики точностью можно пользоваться для установления принципиальной возможности такого полета уравнениями установившегося движения для каждого момента времени. Так как полет по трассе происходит с очень малым значением вертикальной скорости, то за исходный режим примем горизонтальный полет при  $V = \text{const}$ . Другими словами, будем считать, что в каждый момент времени сила тяги двигателей равна силе тяги, потребной для горизонтального полета с полетным весом, скоростью и углом атаки, имеющими место в рассматриваемый момент времени, а подъемная сила в каждый момент времени равна полетному весу самолета, что соответствует выполнению условий

$$\left. \begin{aligned} P &= Q, \\ G &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

или

$$\left. \begin{aligned} P &= c_x S \frac{\rho V^2}{2}, \\ G &= c_y S \frac{\rho V^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Введем в уравнения (8.2) число  $M$  в явном виде. Для этого выполним следующее преобразование:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} k_{p_H} \frac{V^2}{\frac{k_{p_H}}{\rho}} = \frac{1}{2} k_{p_H} \frac{V^2}{a^2} = \frac{1}{2} k_{p_H} M^2,$$

где  $k = \frac{c_p}{c_v}$  — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме (для воздуха в среднем  $k=1.4$ ),  $p_H$  — барометрическое давление на высоте полета. Тогда

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{k}{2} p_H c_x S M^2, \\ G &= \frac{k}{2} p_H c_y S M^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

В общем случае тяга ТРД зависит от числа оборотов двигателя  $n$ , барометрического давления  $p_H$ , абсолютной температуры воздуха  $T_H$  и скорости полета  $V$  (или числа  $M$ ). Задание этих параметров, совокупность которых обуславливает определенный режим работы двигателя, однозначно определяет величину тяги.

Известно, что для ТРД с нерегулируемым соплом применим закон подобия, который формулируется следующим образом: для данного двигателя при

$$\frac{V}{\sqrt{T_H}} = \text{const}; \quad \frac{n}{\sqrt{T_H}} = \text{const} \quad (8.4)$$

остается постоянной величина  $P/p_H$ , пропорциональная тяге. Можно показать, что первое из условий (8.4) означает выполнение условия  $M = \text{const}$ . Так как скорость звука

$$a_H = \sqrt{kgRT_H}, \quad (8.5)$$

где  $R$  — газовая постоянная, то заменяя в выражении для  $M$  скорость звука в соответствии с выражением (8.5), получим

$$M = \frac{V}{\sqrt{kgR}\sqrt{T_H}}. \quad (8.6)$$

Из этого выражения следует, что при  $M = \text{const}$  остается постоянной величина

$$\frac{V}{\sqrt{T_H}}, \quad \text{т.е. выполняется первое из условий (8.4).}$$

Воспользовавшись законом подобия, можно написать, что тяга двигателя

$$P = p_H f\left(M, \frac{n}{\sqrt{T_H}}\right). \quad (8.7)$$

Введем понятие *приведенных оборотов* и *приведенной тяги* двигателя:

$$P_{np} = P \frac{P_0}{P_H},$$

$$n_{np} = n \sqrt{\frac{T_0}{T_H}}.$$

Выражение (8.7) теперь можно представить в виде

$$P_{np} = f_1(M, n_{np}). \quad (8.8)$$

Функция  $f_1(M, n_{np})$  определяется по известной зависимости тяги двигателя от скорости полета при различных  $H$  при  $n = \text{const}$ . Известно, что коэффициент лобового сопротивления

$$c_x = f_2(c_y, M). \quad (8.9)$$

Используя понятие *приведенного веса* самолета

$$G_{np} = G \frac{P_0}{P_H} \quad (8.10)$$

и присоединяя к уравнению (8.3) уравнения (8.8) и (8.9), получим систему уравнений, описывающую движение самолета в установившемся режиме:

$$\left. \begin{aligned} P_{np} &= \frac{k}{2} p_0 c_x S M^2, \\ G_{np} &= \frac{k}{2} p_0 c_y S M^2, \\ P_{np} &= f_1(M, n_{np}), \\ c_x &= f_2(c_y, M). \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Четыре уравнения (8.11) связывают шесть величин:  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $M$ ,  $P_{np}$ ,  $G_{np}$ ,  $n_{np}$ . Следовательно, четыре из них, а именно  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $P_{np}$  и  $G_{np}$  — могут быть выражены как функции двух других параметров. Например,

$$\left. \begin{aligned} P_{np} &= f_1(M, n_{np}), \\ G_{np} &= \Phi_1(M, n_{np}), \\ c_y &= \Phi_2(M, n_{np}), \\ c_x &= \Phi_3(M, n_{np}). \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

Из уравнений (8.12) следует, что  $c_y$  имеет постоянное значение при постоянных приведенных оборотах и постоянном числе  $M$ . При выполнении этих условий из второго уравнения системы (8.12) получаем, что  $G_{np} = \text{const}$ . Следовательно, при уменьшении полетного веса вследствие выгорания топлива высота полета будет непрерывно увеличиваться. Действительно, изменение высоты полета определяется из условия

$$G_{np} = G \frac{P_0}{P_H} = \text{const} \quad (8.13)$$

и уравнения статики атмосферы

$$dp = -\frac{P}{RT_H} dH. \quad (8.14)$$

Для высот  $H > 11$  км  $T_H = \text{const}$ . Тогда из выражения (8.14) следует

$$RT_H \ln \frac{P_2}{P_1} = -\Delta H. \quad (8.15)$$

Отношение давлений  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{G_2}{G_1}$ , что непосредственно следует из условия (8.13).

Для примера определим изменение высоты полета при  $\frac{G_2}{G_1} = 0.96$  и  $H = 15$  км.

Согласно уравнению (8.15) находим

$$\Delta H = 265 \text{ м}. \quad (8.16)$$

Итак, требование  $M = \text{const}$  и  $c_y = \text{const}$  равносильно выполнению двух условий:  $n_{np} = \text{const}$ ;  $M = \text{const}$ . Первое из условий определяется исключительно регулированием работы двигателя, т.е. двигатель должен иметь соответствующий автомат. Будем считать, что такой автомат имеется и условие  $n_{np} = \text{const}$  выполняется. Рассмотрим возможность выполнения второго условия с помощью автомата, воздействующего на руль высоты самолета.

## 8.2. Стабилизация числа $M$ с помощью автомата, воздействующего на руль высоты самолета

Стабилизация числа  $M$  не исключает необходимости стабилизации движения самолета относительно центра масс с помощью, например, автомата тангажа. Одним из возможных вариантов такого автомата является автомат с законом управления

$$\delta_{\beta} = k_{\psi} \psi + k_{\omega} \omega_z.$$

Для стабилизации числа  $M$  необходимо ввести в закон управления сигнал  $\Delta M$  - сигнал отклонения числа  $M$  от требуемого значения. Условие  $M = \text{const}$  требует астатического регулирования, следовательно, в законе управления необходим сигнал  $\int_0^t \Delta M dt$ . Таким образом, один из возможных

вариантов закона управления автопилота, стабилизирующего число  $M$ , имеет вид

$$\delta_b = k_{\psi} \psi + k_{\omega} \omega_z - k_M M - k_u \int_0^t M dt. \quad (8.17)$$



Поскольку режим полета по трассе характеризуется непрерывным изменением веса и центровки самолета, для оценки принципиальной возможности осуществления с предлагаемым автопилотом автоматического полета самолета по трассе рассмотрим динамику системы самолет – автопилот при изменении веса и действии момента относительно поперечной оси самолета, что учитывает изменение центровки.

Автопилот может обеспечить автоматический полет по трассе, если после окончания переходных процессов при указанных выше воздействиях сохраняется постоянным и число  $M$ , и  $c_y$ , а высота полета изменяется так, что обеспечивается условие  $G_{np} = \text{const}$ . Так как рассматривается возможность стабилизации числа  $M$ , то целесообразно уравнения движения самолета записать относительно числа  $M$ , а не скорости  $V$ . Система уравнений с учетом рассматриваемых возмущений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{M} + a_{11}M + a_{12}\alpha + a_{13}v + S_1\Delta H &= 0, \\ -\dot{v} + \dot{\alpha} + a_{22}\alpha + a_{21}M + S_2\Delta H &= F_y \frac{1}{mV}, \\ \ddot{v} + a_{33}\dot{v} + a_{32}\dot{\alpha} + a_{34}\alpha + a_{31}M + S_3\Delta H + a_{35}\delta_b &= M_z \frac{1}{J_z}, \\ \Delta \dot{H} &= a_{42}(v - \alpha) + a_{41}M + a_{44}\Delta H. \end{aligned} \right\} (8.18)$$

В этой системе уравнений  $F_y$  и  $M_z$  – соответственно вертикальная сила и момент, накладываемые на самолет при изменении веса.

Необходимо отметить, что при записи уравнений относительно числа  $M$  они по форме остались прежними. Коэффициенты  $a_{44}$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{43} &= M_0 \sin \theta_0 \frac{da}{dH}, \\ S_1 &= \left[ c_x \left( \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dH} + 2 \frac{1}{a} \frac{da}{dH} \right) \frac{\rho V^2}{2} - P^H \right] \frac{1}{ma}, \\ S_2 &= c_y \left( \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dH} + 2 \frac{1}{a} \frac{da}{dH} \right) \frac{\rho V^2}{2} S \frac{1}{m}, \\ S_3 &= - \left[ c_x y_p \left( \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dH} + 2 \frac{1}{a} \frac{da}{dH} \right) \frac{\rho V^2}{2} - P^H y_p \right] \frac{1}{J_z}. \end{aligned}$$

В этих выражениях  $P^H$  – производная от тяги по высоте полета,  $y_p$  – плечо силы тяги относительно поперечной оси самолета. Производная  $P^H$  вычисляется по кривым зависимости тяги от высоты полета при  $M = \text{const}$ .

Присоединяя к уравнениям (8.18) уравнение закона управления (8.17), получим уравнения самолета с автопилотом. Докажем, что в случае, если

$n_{np} = \text{const}$ , то в уравнениях (8.18) коэффициенты  $S_1=0$  и  $S_3=0$ . Используя выражения (8.7) и (8.8), можно записать, что

$$P = p_H f_1(M, n_{np}). \quad (8.19)$$

Считая, что двигатель регулируется так, что условие  $n_{np} = \text{const}$  выполняется тождественно в каждый момент времени, из уравнения (8.19) получим, что тяга двигателя будет зависеть от давления  $p_H$ , т.е. в конечном счете от высоты полета и от числа  $M$ .

Найдем аналитическое выражение для частной производной  $P^H$  при условии, что она определяется при  $M=M_{\text{реж}}$ , где  $M_{\text{реж}}$  — число  $M$ , соответствующее заданному режиму полета. В исходном режиме горизонтального полета  $P=Q$ , т.е.

$$p_H f_1(M_{\text{реж}}, n_{np}) = c_x \frac{\rho V^2}{2} S = \frac{k}{2} p_H c_x S M_{\text{реж}}^2.$$

Из этого соотношения для исходного режима можно определить значение функции

$$f_1(M_{\text{реж}}, n_{np}) = \frac{k}{2} c_x S M_{\text{реж}}^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial H} = \frac{\partial P}{\partial p_H} \frac{dp_H}{dH} = \frac{k}{2} c_x S M_{\text{реж}}^2 \frac{dp_H}{dH}.$$

Используя уравнение состояния газа, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial P}{\partial H} = \frac{1}{2} c_x S \frac{\partial}{\partial H} \rho V^2. \quad (8.20)$$

Очевидно, что и производная  $Q^H$  по условиям рассматриваемого режима будет определяться выражением (8.20). Отсюда следует, что  $P^H=Q^H$  при условии  $M=\text{const}$ . Следствием этого является то, что коэффициент  $S_1$  в уравнении продольных сил при вариации высоты, который пропорционален разности  $Q^H-P^H$ , тождественно равен нулю. Аналогично можно доказать, что коэффициент  $S_3$  в уравнении моментов также тождественно равен нулю.

С учетом указанных условий из выражений (8.17) и (8.18) можно определить изображения координат при изменении веса самолета и нулевых начальных условиях и при  $H > 11$  км,  $c_{13}=0$ .

$$M(s) = s \frac{a_{12}s^2 + (a_{33}a_{12} - a_{13}a_{34} + a_{35}k_{\omega})s + a_{35}a_{12}k_v - a_{13}a_{32}}{D(s)} F'_y;$$

$$\alpha(s) = s \frac{(s+a_{11})[(s^2+a_{33}s)+a_{35}(k_v+k_\omega s)]+a_{13} \left[ -a_{31}+a_{35} \left( k_M + \frac{k_u}{s} \right) \right]}{D(s)} F_y';$$

$$\Delta H^* = \frac{\left\{ (k_v+k_\omega s) \left[ a_{12}a_{41}+a_{42}(s+a_{11}) \right] + \left( k_M + \frac{k_u}{s} \right) a_{42}(a_{13}+a_{12}) \right\} + K(s)}{D(s)};$$

$$\Delta H(s) = \Delta H^*(s) a_{35} F_y'.$$

В этих выражениях

$$D(s) = sD^*(s) + s \left( k_M + \frac{k_u}{s} \right) a_{35} [(a_{13}+a_{12})s + a_{22}a_{13}] -$$

$$- S_2(B(s) + K(s));$$

$$B(s) = a_{35} a_{42} (a_{13} + a_{12}) \left( k_M + \frac{k_u}{s} \right) + a_{35} (k_v + k_\omega s) [(s + a_{11}) a_{42} + a_{12} a_{44}];$$

$$K(s) = a_{42} s^3 + (a_{12} a_{41} + a_{34} a_{42} + a_{42} a_{11} + a_{42} a_{33}) s^2 +$$

$$+ (a_{33} a_{12} a_{41} + a_{32} a_{42} + a_{34} a_{42} a_{11} + a_{33} a_{42} a_{11} - a_{34} a_{13} a_{41}) s +$$

$$+ a_{32} a_{42} a_{11} - a_{31} a_{42} (a_{11} + a_{12}) - a_{32} a_{13} a_{41}.$$

В выражении для характеристического полинома  $D^*(s)$  – характеристический полином системы при регулировании только угла тангажа.

$$D^*(s) = s^4 + A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4. \quad (8.21)$$

Коэффициенты этого полинома выражаются через параметры самолета и автопилота.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= a_{33} + a_{22} + a_{34} + a_{11} + a_{35} k_\omega, \\ A_2 &= a_{32} + a_{33} (a_{11} + a_{22}) + a_{11} (a_{22} + a_{34}) - a_{12} a_{21} + a_{35} k_v + \\ &+ a_{35} k_\omega (a_{11} + a_{22}), \\ A_3 &= a_{11} (a_{32} + a_{33} a_{22}) + a_{21} (a_{34} a_{13} - a_{33} a_{12}) - \\ &- a_{35} k_v (a_{11} + a_{22}) + a_{35} k_\omega (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}), \\ A_4 &= a_{32} a_{13} a_{21} - a_{22} a_{13} a_{31} + a_{35} k_v (a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}). \end{aligned} \right\} (8.22)$$

На основании полученных выражений, используя теорему о конечном значении, можно получить

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{уст} &= \lim_{s \rightarrow 0} s\alpha(s) = 0, \\ \Delta M_{уст} &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta M(s) = 0, \\ \Delta H_{уст} &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta H(s) = \frac{F'y}{S_2}. \end{aligned} \right\} (8.23)$$

Расчет по формуле (8.23) при  $G_2/G_1=0.96$ , т.е. при  $\Delta G=-0.04$ , что соответствует условиям вышеприведенного примера, дает

$$\Delta H = 255 \text{ м.} \quad (8.24)$$

При исследовании системы при возмущающем моменте получим

$$\left. \begin{aligned} M(s) &= -M_z' \frac{s[(a_{13}+a_{12})s+a_{22}a_{13}]-S_2a_{42}(a_{13}+a_{12})}{D(s)}, \\ \alpha(s) &= M_z' \frac{s[s(a_{13}+a_{12})+a_{13}a_{21}]+S_2[a_{13}a_{44}-a_{42}(s+a_{11})]}{D(s)}, \\ \Delta H(s) &= M_z' \frac{s[((a_{13}+a_{12})a_{41}+a_{22}a_{42})s+a_{42}a_{21}(a_{13}+a_{12})]}{D(s)} + \\ &+ M_z' \frac{s(a_{22}a_{42}a_{11}+a_{22}a_{13}a_{44})}{D(s)}. \end{aligned} \right\} (8.25)$$

Из (8.25), в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала, получим

$$\Delta H_{уст} = 0, \alpha_{уст} = 0, \Delta M_{уст} = 0.$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что рассматриваемая схема автопилота при изменении веса самолета и его центровки обеспечивает выполнение требований  $c_y = \text{const}$  и  $M = \text{const}$ .

### 8.3. Автоматическое управление скоростью полета самолета воздействием на сектор газа. Автомат тяги

Автомат, регулирующий величину тяги двигателей в зависимости от скорости полета, называют автоматом тяги (АТ). Автомат тяги необходим для стабилизации скорости полета с одновременной стабилизацией траектории центра тяжести самолета.

Закон управления астатического АТ может иметь вид

$$\delta_{\text{ср}} = -k_V V - k_u \int_0^t V dt, \quad (8.26)$$

где  $V$  – отклонение воздушной скорости самолета от требуемого значения;  $\delta_{\text{ср}}$  – угол перемещения сектора газа от установившегося положения;  $k_V$  и  $k_u$  – передаточные числа автомата тяги по сигналу отклонения и интегралу от него.

Система уравнений, описывающая движение самолета по скорости с автоматом тяги, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} + a_{11}V &= r_1 P, \\ \Delta P &= n \delta_{\text{ср}}, \\ \delta_{\text{ср}} &= -k_V (V - V_{\text{зад}}) - k_u \int_0^t (V - V_{\text{зад}}) dt. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

В уравнениях (8.27)  $n = P^{\text{ср}}$  – тяга, приходящаяся на  $1^\circ$  перемещения сектора газа,  $r_1$  – коэффициент, определяющий проекцию силы тяги на линию скорости. Структурная схема, соответствующая системе (8.27) показана на рис.8.1.

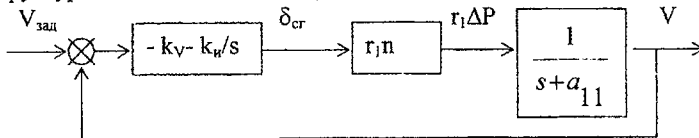


Рис.8.1. Структурная схема автомата тяги

Передаточные функции, соответствующие этой структурной схеме, имеют вид

$$W(s) = \frac{r_1 n k_u \left( \frac{k_V}{k_u} s + 1 \right)}{s(s + a_{11})}, \quad (8.28)$$

$$\Phi(s) = \frac{V}{V_{\text{зад}}} = \frac{\frac{k_V}{k_u} s + 1}{\frac{1}{r_1 n k_u} s^2 + \left( \frac{a_{11}}{r_1 n k_u} + \frac{k_V}{k_u} \right) s + 1}. \quad (8.29)$$

Передаточные числа АТ могут быть выбраны из условия обеспечения заданной динамики по скорости полета самолета при отработке единичного ступенчатого воздействия.

Из выражений (8.28) и (8.29) следует, что при выполнении соотношения

$$\frac{k_u}{k_V} = a_{11} \quad (8.30)$$

передаточная функция замкнутой системы упрощается и принимает вид

$$\Phi(s) = \frac{V}{V_{\text{зад}}} = \frac{1}{Ts+1},$$

где 
$$T = \frac{1}{k_V r_1 n} \quad (8.31)$$

Задавшись временем регулирования до входа в так называемую “трубку”, которая определяется величиной  $\pm \Delta = \pm(0.02 \div 0.05)V_{\text{зад}}$ , и используя соотношение  $t_p \approx (2.3 \div 3)T$ , из (8.31) можно получить необходимое значение передаточного числа  $k_V$ , а затем из (8.30) —  $k_u$ .

## Глава 9. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ТРИММИРОВАНИЕ

### 9.1. Общие сведения

Изменение центровки, скорости или высоты полета, а также выпуск закрылков и шасси приводит к возникновению пикирующих или кабрирующих моментов, в результате чего нарушается продольное равновесие самолета. При этом самолет начинает изменять угол тангажа. Для удержания самолета на заданном угле тангажа летчик должен восстановить продольное равновесие самолета.

Продольное равновесие восстанавливается с помощью руля высоты. Для этого летчик должен отклонить руль высоты от балансирующего положения на нужный угол и удерживать его в этом положении. Отклоненный руль создает момент, который компенсирует возмущающие моменты, действующие на самолет.

При отклонении руля высоты на него действует аэродинамическая сила  $R_{\text{ш}}$  (рис.9.1,а), создающая относительно оси вращения руля так называемый шарнирный момент  $M_{\text{ш}} = R_{\text{ш}} l_{\text{ш}}$ .

Передаваясь по тягам управления к колонке, этот момент утомляет летчика при длительном полете. Поэтому для снятия нагрузки с колонки в установившемся полете применяют триммер, который представляет собой вспомогательную рулевую поверхность, устанавливаемую на задней кромке руля.

Для уравнивания шарнирного момента триммер руля высоты отклоняют на угол  $\tau$  в сторону, противоположную отклонению руля высоты. При этом возникает аэродинамическая сила  $R_{\text{т}}$ , создающая момент триммера

$M_m = R_m l_m$ , направленный противоположно шарнирному моменту (рис.9.1,б). На этих рисунках  $l_{ш}$  — плечо аэродинамической силы руля относительно его оси вращения;  $l_m$  — плечо аэродинамической силы триммера относительно оси вращения руля.

При отклонении триммера снимается усилие со штурвала, а за счет отклонения руля высота восстанавливается продольное равновесие самолета.

При ручном пилотировании самолета летчик в случае возникновения усилия на колонке (штурвале) вручную или электромеханически отклоняет триммер на такой угол, при котором усилие на колонке отсутствует.

При управлении самолета автопилотом и при действии постоянных возмущающих моментов продольное равновесие самолета восстанавливается также за счет отклонения руля высоты. Шарнирный момент в этом случае воспринимается рулевой машинкой руля высоты. При выключении автопилота рулевая машинка освобождает руль высоты и под действием шарнирного момента он устанавливается в нейтральное положение. На самолет в этом случае действуют продольные перегрузки, которые могут достигать больших величин.

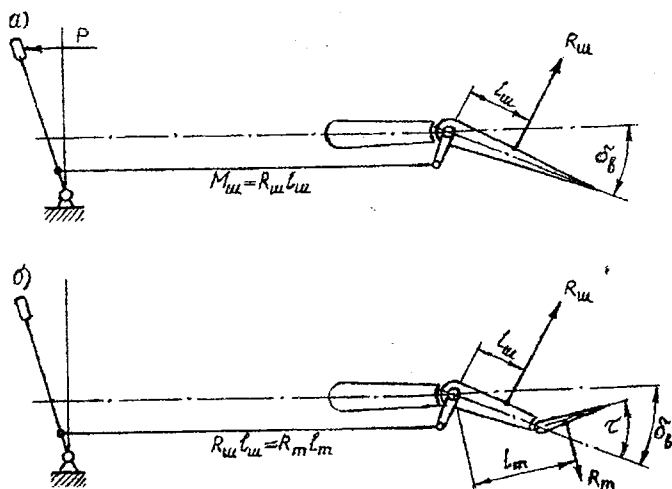


Рис.9.1. К пояснению действия триммера

В случае автоматического управления самолетом ручное триммирование недопустимо, так как летчик не знает ни направления, ни величины шарнирного момента. Поэтому для триммирования руля высоты при

автоматическом управлении применяется автомат триммирования. На рис.9.2. приведена функциональная схема автономного автомата триммирования.

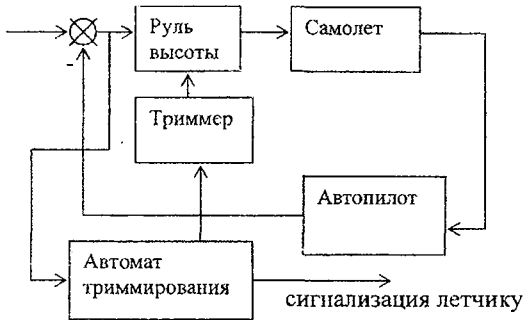


Рис.9.2. Функциональная схема автономного автомата триммирования

В таком автомате триммирования (АТ) непосредственно измеряется усилие в тяге управления рулем высоты, возникающее за счет шарнирного момента. Это усилие преобразуется в сигнал, который поступает на вход АТ. Автомат триммирования отклоняет триммер на такой угол, при котором усилие в тяге управления рулем высоты пропадает. В АТ предусмотрена сигнализация летчику о наличии шарнирного момента.

## 9.2. Автомат триммирования

Работу и динамические характеристики автомата рассмотрим на примере автомата триммирования АТ-2, который используется в составе автопилота АП-6ЕМ-3П. Считая зависимость шарнирного момента и момента триммера от угла отклонения руля и триммера линейной, структурную схему АТ можно изобразить следующим образом.

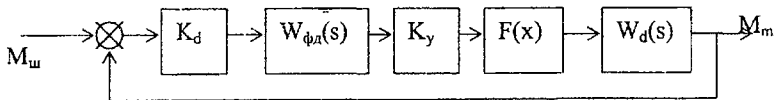


Рис.9.3. Структурная схема автомата триммирования

На схеме обозначено:

$K_d$  – коэффициент передачи датчика усилий;

$W_{фд}(s)$  – передаточная функция фазового детектора;

$K_y$  – коэффициент усиления усилителя;

$W_d(s)$  – передаточная функция исполнительного двигателя.



Включение в схему нелинейного элемента  $F(x)$  объясняется особенностью автомата АТ-2, где исполнительный электродвигатель не охвачен местной обратной связью и для компенсации интегрирующих свойств электродвигателя используется релейное устройство (нуль – контакт), которое отключает электродвигатель при достижении выходного сигнала усилителя значения, близкого нулю. Статическая характеристика нелинейного элемента принята в виде, показанном на рис.9.3.

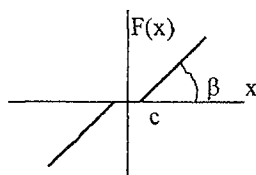


Рис.9.4. Статическая характеристика нелинейного элемента

Передаточная функция фазового детектора имеет вид

$$W_{\phi\delta}(s) = \frac{k_{\phi\delta}}{T_{\phi\delta}s + 1}$$

Передаточная функция электродвигателя записывается обычным образом:

$$W_{\delta}(s) = \frac{k_{\delta}}{s(T_{\delta}s + 1)}$$

Чувствительным элементом является датчик усилий, установленный в тяге управления рулем высоты. Он воспринимает усилия в тяге управления и преобразует их в сигналы переменного тока, амплитуда которых зависит от величины, а фаза – от направления действий усилий. Датчик усилий состоит из двух основных узлов – пружины и индукционного преобразователя. Пружина воспринимает усилия, действующие в тяге управления. Перемещение пружины через передаточный механизм передается на рамку индукционного преобразователя, в которой наводится Э.Д.С, амплитуда которой зависит от величины, а фаза – от направления усилий, действующих на датчик.

Сигналы с датчика усилий поступают на фазовый детектор, который преобразует их в сигналы постоянного тока, величина напряжения которых определяется амплитудой, а полярность – фазой сигналов переменного тока. В качестве усилителя используется магнитный усилитель. Исполнительным устройством в АТ-2 является электродвигатель постоянного тока Д-10Ф последовательного возбуждения.

Передаточная функция замкнутой системы при использовании метода гармонической линеаризации может быть получена в виде

$$\Phi(s) = \frac{k_{\delta} k_{\phi\delta} k_y k_{\delta} q(A)}{T_{\phi\delta} T_{\delta} s^3 + (T_{\phi\delta} + T_{\delta}) s^2 + s + k_{\delta} k_{\phi\delta} k_y k_{\delta} q(A)}, \quad (9.1)$$

где  $q(A)$  – коэффициент гармонической линеаризации.

$$q(A) = k_n - \frac{2k_n}{\pi} \left( \arcsin \frac{c}{A} + \frac{c}{A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \right),$$

$$A \geq c.$$

В этом выражении  $k_n$  – коэффициент усиления нелинейного элемента на линейном участке -  $k_n = \operatorname{tg} \beta$ .

Сделаем в характеристическом уравнении замкнутой системы замену  $s = j\omega$ , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= -(T_{\phi\delta} + T_{\delta})\omega^2 + kq(A) = 0, \\ V(\omega) &= -T_{\phi\delta} T_{\delta} \omega^3 + \omega = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Отсюда следует

$$\omega^2 = \frac{1}{T_{\phi\delta} T_{\delta}},$$

$$q(A) = \frac{T_{\phi\delta} + T_{\delta}}{k T_{\phi\delta} T_{\delta}},$$

где  $k = k_{\delta} k_{\phi\delta} k_y k_{\delta}$ .

Предельные циклы могут возникать только, если  $q(A) < k_n$ . Допустим, что  $\beta = 45^\circ$  и  $k_n = 1$ . Тогда условие возможности возникновения предельных циклов, а возможно, и автоколебаний примет вид

$$k > \frac{T_{\phi\delta} + T_{\delta}}{T_{\phi\delta} T_{\delta}}. \quad (9.3)$$

Выбором коэффициентов усиления и других параметров элементов АТ можно добиться невыполнения условия (9.3) и обеспечить отсутствие предельных циклов. Например, для  $k = 3$ ,  $T_{\phi\delta} = 0.1$ ,  $T_{\delta} = 0.1$ ,  $k_n = 1$ ,  $c = 0.05$  переходный процесс в автомате триммирования при входном воздействии  $M_{\text{ш}} = 0.5 * 1(t)$  имеет вид, показанный на рис.9.5.

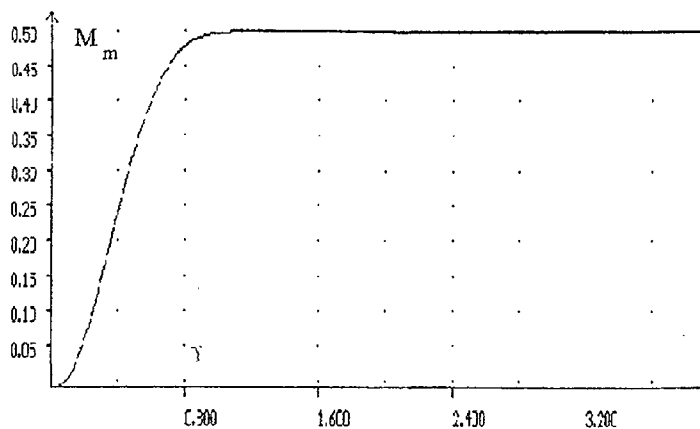


Рис.9.5. Переходный процесс в автомате триммирования

Показатели качества такой системы высокие:  $t_p < 0.3\text{с}$ ,  $\sigma = 0$ .

Принципиальная схема АТ содержит также концевые выключатели, ограничивающие предельный угол поворота триммера, и другие устройства, не влияющие на динамические характеристики автомата.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аэромеханика самолета/ Под ред. А.Ф.Бочкарева и В.В. Андриевского. М.: Машиностроение, 1985. 357с.
2. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964. 698с.
3. Горбатенко С.А. и др. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. Инженерный справочник. М.: Машиностроение, 1971. 352с.
4. Гусев А.Н., Слесаренко Ю.М. Элементы автоматики ракетного оружия. Баку: КВВМКУ, 1987. 319с.
5. Гусев А.Н., Воробьев В.М., Подгорный Б.С. Теоретические основы систем управления ракетами. Баку: КВВМКУ, 1980. 304с.
6. Гусев А.Н., Ишков С.А. Основы теории автоматического управления: Учеб. пособие/ Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2001. 164с.
7. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 560с.
8. Кузовков Н.Г. Системы стабилизации летательных аппаратов. М.: Высш. шк., 1976. 304с.
9. Козлов А.С. Теория авиационных гироскопических приборов. М.: Оборонгиз, 1956. 256с.
10. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1965. 527с.
11. Михалев И.А., Окоемов Б.И. и др. Системы автоматического управления самолетом. М.: Машиностроение, 1971. 464с.
12. Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 584с.
13. Савченко Н.М., Анненков Н.П. Бортовая система управления БСУ – ЗП. М.: Транспорт, 1974. 210с.
14. Репников А.В., Сачков Г.П., Черноморский А.И. Гироскопические системы. М.: Машиностроение, 1983. 320с.
15. Топчеев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г. Системы стабилизации. М.: Машиностроение, 1974. 248с.
16. Шаталов А.С., Топчеев Ю.И., Кондратьев В.С. Летательные аппараты как объекты управления. М.: Машиностроение, 1972. 240с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
<b>Элементы систем автоматического управления самолетом.....</b>	<b>4</b>
Глава 1. Измерительные устройства автопилотов.....	4
1.1. Основы теории гироскопических устройств.....	4
1.2. Уравнения движения гироскопа.....	9
1.3. Движение гироскопа под действием экваториального момента.....	11
1.4. Гироскоп с тремя степенями свободы на подвижном основании.....	14
1.4.1. Вертикальное расположение главной оси гироскопа.....	17
1.4.2. Горизонтальное расположение главной оси гироскопа.....	18
1.5. Погрешности гироскопа с тремя степенями свободы.....	19
1.5.1. Матрицы взаимных поворотов.....	21
1.5.2. Методика определения карданных ошибок.....	24
1.6. Гироскопические указатели курса.....	26
1.6.1. Гирокомпас.....	26
1.6.2. Гирополукомпас.....	31
1.7. Гироскопы с двумя степенями свободы.....	36
1.7.1. Гироскопы с двумя степенями свободы на шариковых подшипниках.....	36
1.7.2. Поплавковые интегрирующие гироскопы.....	38
1.7.3. Датчик угловой скорости.....	39
1.8. Силовая гироскопическая стабилизация. Гиростабилизированные платформы.....	42
1.8.1. Понятие о силовой гироскопической стабилизации.....	42
1.8.2. Динамические характеристики одноосного силового гиростабилизатора.....	43
1.8.3. Силовая гироскопическая вертикаль.....	47
1.9. Измерители линейных величин.....	56
1.9.1. Устройство и принцип действия акселерометра.....	56
1.9.2. Гироскопический интегратор линейных ускорений.....	57
1.9.3. Барометрический измеритель высоты полета.....	59

1.9.4. Инерциальная вертикаль.....	63
1.9.5. Динамические характеристики инерциальной вертикали.....	64
1.9.6. Демпфирование инерциальной вертикали.....	66
Глава 2. Преобразующие устройства.....	68
2.1. Потенциометрический преобразователь.....	68
2.2. Индуктивные преобразователи.....	70
2.3. Индукционный преобразователь.....	72
Глава 3. Приборы логико – вычислительной и исполнительной подсистем.....	73
3.1. Линейные корректирующие устройства.....	74
3.2. Усилители.....	78
3.3. Исполнительные двигатели.....	79
<b>Автоматическое управление самолетом.....</b>	<b>83</b>
Глава 4. Самолет как объект управления.....	83
4.1. Сущность процесса управления самолетом.....	83
4.2. Самолет как объект управления.....	84
4.2.1. Уравнения продольного движения и передаточные функции самолета в продольном движении.....	84
4.2.2. Уравнения бокового движения и передаточные функции самолета в боковом движении.....	88
4.3. Рулевые приводы систем управления самолетами.....	93
4.4. Летчик в контуре ручного управления.....	95
<b>Автоматы, обеспечивающие потребные характеристики устойчивости и управляемости .....</b>	<b>99</b>
Глава 5. Демпферы.....	100
5.1. Демпфер рыскания.....	100
5.2. Демпфер тангажа.....	103
5.3. Демпфер крена.....	104
5.4. Автомат продольного управления.....	105
5.5. Автомат бокового управления.....	107
<b>Автоматическая стабилизация и управление возмущенным движением самолета.....</b>	<b>108</b>
Глава 6. Автоматическая стабилизация и управление продольным движением самолета.....	108
6.1. Структурная схема и характеристики автомата тангажа.....	108

6.2. Структурная схема и характеристики автомата высоты.....	111
Глава 7. Автоматическая стабилизация и управление боковым движением самолета.....	113
7.1. Структурная схема и характеристики автомата крена.....	114
7.2. Структурная схема и характеристики автомата курса.....	115
Глава 8. Стабилизация скорости полета самолета. Автомат числа $M$ .....	119
8.1. Необходимые условия для осуществления режима полета на максимальную дальность.....	119
8.2. Стабилизация числа $M$ с помощью автомата, воздействующего на руль высоты самолета.....	122
8.3. Автоматическое управление скоростью полета самолета воздействием на сектор газа. Автомат тяги.....	127
Глава 9. Автоматическое триммирование.....	128
9.1. Общие сведения.....	128
9.2. Автомат триммирования.....	130
<b>Библиографический список.....</b>	<b>134</b>

*Учебное издание*

*Гусев Александр Николаевич*

**СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТОМ**

Учебное пособие

Редактор Л. Я. Чегодаева  
Корректор Л. Я. Чегодаева

Подписано в печать 17.02.2004 г. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл.печ.л. 8,13. Усл.кр.-отт. 8,25. Уч. – изд.л. 8,75.  
Тираж 150 экз. Заказ 7. Арт.С-5/2004.

Самарский государственный аэрокосмический  
университет имени академика С.П. Королева.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

РИО Самарского государственного аэрокосмического  
университета. 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.