

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*А.В. СЕДЕЛЬНИКОВ, А.В. АЛЕКСЕЕВ*

## СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ИНЖЕНЕРНЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2022

УДК 531.01(075)+519.876(075)

ББК 22.21я7

С284

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. Н. Б л и н о в,

д-р техн. наук, проф. В. Р. К а р г и н

*Седельников, Андрей Валерьевич*

**С284**

**Системный анализ инженерных методов в задачах прикладной и теоретической механики: учебное пособие / А.В. Седельников, А.В. Алексеев. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 69 с.: 8 ил.**

**ISBN 978-5-7883-1800-4**

В данном пособии проводится системный анализ инженерных методов математического моделирования при численном решении задач прикладной и теоретической механики. Рассматривается метод конечных элементов и вычислительный эксперимент. Приведены примеры решения классических задач теории упругости, теоретической механики и теплопроводности.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование, в рамках дисциплины «Инженерные методы механики деформируемого твёрдого тела» и выполнения выпускной квалификационной работы.

Разработано на кафедре теоретической механики.

УДК 531.01(075)+519.876(075)

ББК 22.21я7

ISBN 978-5-7883-1800-4

© Самарский университет, 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Метод конечных элементов.....	7
1.1. Общие замечания.....	7
1.2. Основные понятия классической теории упругости.....	9
1.3. Статические соотношения классической теории упругости .	12
1.4. Геометрические соотношения классической теории упругости.....	14
1.5. Физические соотношения классической теории упругости	16
1.6. Практикум первой главы .....	18
Задача 1. О вертикальном стержне в поле силы тяжести .....	18
Задача 2. О полом шаре с различным внутренним и внешним давлением .....	22
Задача 3. О бесконечном полом цилиндре с разным внутренним и внешним давлением .....	31
Задача 4. О равномерном вращающемся цилиндре .....	35
2. Метод вычислительного эксперимента.....	39
2.1. Общие замечания.....	39
2.2. Этапы вычислительного эксперимента .....	40
2.3. Вычислительный эксперимент в задачах теплопроводности .....	44
2.4. Математическое моделирование температурного поля в рамках вычислительного эксперимента .....	45
2.5. Основные типы граничных условий в задачах теплопроводности.....	51

2.6. Практикум второй главы .....	54
Задача 1. Описание конвективного теплообмена .....	54
Задача 2. Описание теплового излучения .....	56
Задача 3. Описание термоупругости.....	58
Задача 4. Обезразмеривание уравнений теплопроводности.....	62
Заключение.....	67
Библиографический список .....	68

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно паспорта специальности 01.02.04, Механика деформируемого твёрдого тела – область науки и техники, изучающая закономерности процессов деформирования, повреждения и разрушения материалов различной природы, а также напряжённо-деформированное состояние твердых тел из этих материалов, при механических, тепловых, радиационных, статических и динамических воздействиях в пассивных и активных, газовых и жидких средах и полях различной природы.

В паспорте специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела» обозначены цели дисциплины:

- установление законов деформирования, повреждения и разрушения материалов;
- разработка методов постановки и методов решения краевых задач для прогноза поведения деформируемых твёрдых тел различной природы при разнообразных воздействиях;
- выявление новых связей между структурой материалов, характером внешних воздействий и процессами деформирования и разрушения;
- решения технологических проблем деформирования и разрушения, а также предупреждения недопустимых деформаций и трещин в конструкциях различного назначения;
- планирование, проведение и интерпретация экспериментальных данных по изучению деформирования, повреждения и разрушения материалов.

В контексте основной образовательной программы 01.03.03 Механика и математическое моделирование предусмотрена широкая подготовка бакалавров в области механики деформируемого твёрдого тела. Ряд дисциплин (Теория упругости, Метод конечных элементов в задачах механики, Численное решение задач механики жидкости и газа в пакете прикладных программ Mathcad, Информационные технологии в задачах механики) формируют базу компетенций для решения отдельных задач механики деформируемого твёрдого тела. Для обобщения и систематизации полученных отдельных знаний в данной области бакалаврам профиля «Математическое моделирование в

механике» читается дисциплина Инженерные методы в механике деформируемого твёрдого тела.

Целью освоения дисциплины овладение основными понятиями механики деформируемого твёрдого тела для корректной постановки задач механики деформируемого твёрдого тела и их решения инженерными методами.

Поставленная цель достигается выполнением задач освоения дисциплины:

- приобретение начальных навыков использования понятийного аппарата механики деформируемого твёрдого тела и арсенала приёмов построения математических моделей;
- получения представления об инженерных методах решения задач механики деформируемого твёрдого тела.

Дисциплина осваивается бакалаврами в течение одного учебного семестра.

# 1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

## 1.1. Общие замечания

Метод конечных элементов (МКЭ) является мощным современным инженерным средством приближенного решения разнообразных задач математической физики, ориентированным на эффективное использование ЭВМ. В задачах механики деформируемого твёрдого тела он позволяет распространить принципы расчета стержневых систем на случай непрерывных тел и сложных конструкций.

Рассмотрим произвольно нагруженное тело, разбив его с помощью сетки секущих плоскостей на отдельные части. Эти части имеют хотя и малые, но всё же конечные размеры. Отсюда и название самого метода. Таким образом, непрерывное тело представлено в виде совокупности конечных элементов, свойства каждого из которых рассматриваются затем независимо от остальных. На границах конечных элементов выбираются некоторым образом точки, которые называются **узлами** (рис. 1).

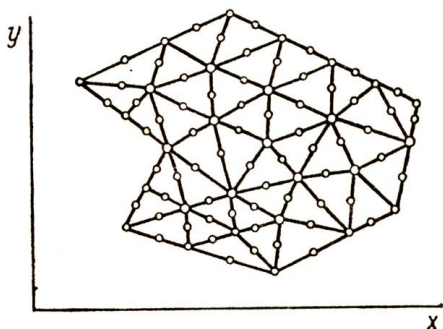


Рисунок 1 – Разбиение тела на конечные элементы

Здесь узлы представлены в виде пустых точек. В качестве основных неизвестных выбираются либо перемещения узлов в направлении координатных осей, либо силы взаимодействия между конечными элементами. Возможна также и смешанная формулировка задачи.

По перемещениям узлов определяется положение каждого конечного элемента, а, следовательно, и всего тела. Однако возникает вопрос о том, как найти перемещения внутри каждого конечного элемента, зная перемещения принадлежащих к нему узлов. Этот вопрос можно решить только с помощью дополнительных гипотез о характере поля перемещений в элементе. Речь идет о некоторой совокупности функций, которые позволяют аппроксимировать поля перемещений внутри конечного элемента по известным узловым перемещениям. Выбор аппроксимирующих функций является одним из наиболее ответственных и важных этапов в методе конечных элементов. Он позволяет однозначно определять напряжённо-деформированное состояние тела узловыми перемещениями.

**Поэтому конечный элемент – область тела в совокупности с заданными в ней аппроксимирующими функциями.**

Вторая проблема – это объединение конечных элементов в единую систему. В общем случае, задаваясь распределением перемещений внутри каждого элемента независимо от других, возникает ситуация, когда пограничных зон смежных конечных элементов не совпадают. Это приводит к тому, что обеспечить выполнение условий равновесия на всей поверхности, разделяющей конечные элементы, не представляется возможным. Решение этой проблемы видится в замене распределенной вдоль границ элементов системы сил (напряжений) на эквивалентную систему сил, сосредоточенных в узлах элементов на основании 3-й аксиомы статики, исходя из энергетического равновесия: **эквивалентные узловые силы определяются таким образом, что суммарная их работа на узловых перемещениях равна работе исходной системы сил на действительных перемещениях точек граничной поверхности элемента.**

Третья проблема – нагружение упругого тела распределенными поверхностными и объемными силами. Такое нагружение заменяется эквивалентными в энергетическом смысле узловыми внешними сосредоточенными силами.

После решения всех указанных проблем тело можно рассматривать как дискретную систему с шагом дискретизации, соответствующем конечному элементу. Таким образом, от рассмотрения сплошного непрерывного тела с помощью МКЭ



переходят к рассмотрению совокупности элементов, соединенных между собой узловыми точками. Разбиение тела на подобласти и выбор аппроксимирующих функций для каждого из них можно осуществлять различными способами с учётом особенностей геометрии тела. Такой выбор, в конечном счёте, должен привести к достаточно точной аппроксимации перемещений, деформаций и напряжений для всего тела в целом. Естественно, что при уменьшении размера элементов приближенное с помощью МКЭ решение стремится к точному.

## 1.2. Основные понятия классической теории упругости

Рассмотрим некоторое упругое тело в декартовой системе координат. Пусть на тело действуют объёмные силы, интенсивность которых на единицу объема тела характеризуется вектором:  $\vec{R}(R_x; R_y; R_z)$ , и поверхностные силы, интенсивность которых на единицу площади поверхности тела характеризуется вектором:  $\vec{p}(p_x; p_y; p_z)$ . Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 2).

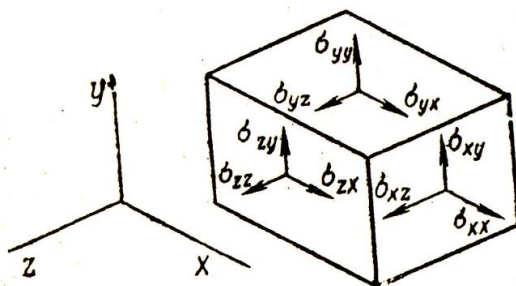


Рисунок 2 – Элементарный параллелепипед с напряжениями на площадках

Обозначим напряжения на его площадках, причем, первый индекс обозначает ось, перпендикулярную площадке, а второй – ось, параллельно которой направлен соответствующий компонент

напряжений. Нормальные напряжения  $\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \sigma_{zz}$  считаются положительными, если они направлены по внешней нормали к площадке (как показано на рис. 2). Касательные напряжения принимаются положительными в случае, если они совпадают с положительным направлением соответствующей координатной оси, когда внешняя нормаль к данной площадке совпадает с направлением координатной оси или противоположно направлены соответствующей координатной оси, когда внешняя нормаль к данной площадке не совпадает с направлением координатной оси.

Вследствие парности касательных напряжений, они инвариантны относительно перестановки индексов:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1)$$

Составленные в одну матрицу, они называются тензором напряжений:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В силу выполнения условия (1) говорят, что тензор напряжений (2) является симметричным тензором, что в свою очередь означает, что из девяти его компонентов только шесть являются независимыми.

Рассмотрим произвольную точку  $M(x, y, z)$  упругого тела. Пусть под действием внешней силовой нагрузки она переместилась в некоторое положение  $M_1$ . Тогда вектор полного перемещения точки  $\overline{MM_1}$  может быть разложен на компоненты ( $u_x; u_y; u_z$ ). Т.к. в классической теории упругости деформация совершается при сохранении непрерывности материала (отсутствие разрушения, трещин), то и компоненты перемещения являются непрерывными функциями координат. Деформация тела в каждой точке характеризуется тремя линейными компонентами: ( $\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{zz}$ ), определяющими относительные изменения длин бесконечно малых отрезков, параллельных до деформации соответствующим координатным осям, и шестью угловыми компонентами: ( $\varepsilon_{xy}; \varepsilon_{xz}; \varepsilon_{yx}; \varepsilon_{yz}; \varepsilon_{zx}; \varepsilon_{zy}$ ), определяющими

повороты указанных отрезков. Например,  $\varepsilon_{xz}$  определяет поворот отрезка, параллельного до деформации оси  $OX$  в направлении к оси  $OZ$ . Из самого смысла этих углов поворота вытекает свойство их симметрии (рис. 3).

Выберем грань параллелепипеда (рис. 2), параллельную плоскости  $XOZ$ . Предположим, что в результате деформации этой грани (имеется в виду изменение длин отрезков и повороты) точка  $A$  осталась на своем месте, а квадрат  $ABCD$  перешел в некоторую фигуру  $A_1B_1C_1D_1$ . Причем, эта фигура может быть либо квадратом, если  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz}$ , либо прямоугольником, если это равенство не выполняется. По определению  $\varepsilon_{zx} = \angle BAB_1$ , а  $\varepsilon_{xz} = \angle DAD_1$ . Поэтому при условии сохранения прямого угла при вершине  $A$  будет очевидным, что  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ , как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

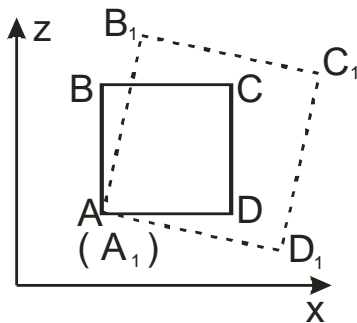


Рисунок 3 – Деформация плоской грани элементарного параллелепипеда

Аналогично тензору напряжений можно построить тензор деформаций:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

который, как уже было сказано выше, тоже обладает свойствами симметрии (1):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (4)$$

Диагональные компоненты тензора деформаций считаются положительными, если отрезки удлиняются (как на рис. 3) и отрицательными, если сокращают свою длину. Объемная деформация  $\theta$ , которая представляет собой отношение изменения объема элементарного единичного параллелепипеда к его первоначальному объему, равна:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(dx + \varepsilon_{xx})(dy + \varepsilon_{yy})(dz + \varepsilon_{zz}) - dx dy dz}{dx dy dz}.$$

Раскрывая скобки в числителе, получим:

$$\theta = \left( dx dy dz + dz dy \varepsilon_{xx} + dx dy \varepsilon_{zz} + dx dz \varepsilon_{yy} + dz \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + dy \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + dx \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - dx dy dz \right) / dx dy dz.$$

Предполагая:  $dx = dy = dz = 1$ , избавимся от бесконечно малых выше первого порядка:

$$\theta = \frac{dz dy \varepsilon_{xx} + dx dz \varepsilon_{yy} + dx dy \varepsilon_{zz}}{dx dy dz} = \frac{\varepsilon_{xx}}{dx} + \frac{\varepsilon_{yy}}{dy} + \frac{\varepsilon_{zz}}{dz}.$$

Подставляя единичные значения длин граней параллелепипеда до деформации, окончательно получим:

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (5)$$

Таким образом, объёмная деформация равна сумме диагональных элементов тензора деформаций.

### 1.3. Статические соотношения классической теории упругости

Если тело в деформированном состоянии находится в равновесии под действием объемных сил, то это означает равенство интенсивностей внешних объемных сил и внутренних, возникающих благодаря деформации тела. Причем, проекцию интенсивности внутренних объемных сил можно найти, используя напряжения. Например, на ось ОХ:

$$F_x = - \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Выражение (6) полностью соответствует понятию силы в потенциальном силовом поле и ее определению в классической механике:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Pi, \quad (7)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия силового поля, а сила  $F$  – сила, действующая в нем на материальную точку единичной массы.

Здесь мы имеем дело со сплошными телами, из которых выделяются бесконечно малые объемы, сходные с материальными точками. Поэтому сила, определяемая соотношением (6) измеряется в  $[H/m^3]$ , а не в  $[H]$ . С другой стороны, мы должны описать целое непрерывное поле сил внутри нашего тела, тогда как применительно к одной точке нам достаточно одного вектора, поэтому векторная размерность уравнения (7) переходит в более сложную тензорную размерность:

$$F_x = R_x,$$

$$F_y = R_y,$$

$$F_z = R_z$$

или с учетом (6) и аналогичных ему выражений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z = 0 \end{cases} \quad (8a)$$

Прибегая к тензорным обозначениям и учитывая свойство симметрии тензора напряжений, (8a) можно записать намного короче:

$$\text{div } \hat{\sigma} + \vec{R} = 0. \quad (8б)$$

Зная тензор напряжений (2) и положение некоторой наклонной площадки (косинусы углов между направлением внешней нормали к площадке и соответствующими координатными осями), можно определить проекции вектора интенсивности внутренних поверхностных сил на координатные

оси. Пусть  $n_x, n_y, n_z$  – косинусы углов между направлением внешней нормали к площадке и осями  $OX, OY$  и  $OZ$  соответственно, тогда проекция на ось  $OX$  будет следующей:

$$\sigma_{nx} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z.$$

Составляя аналогичные выражения для двух оставшихся компонент и переходя к тензорной размерности, получим:

$$\vec{\sigma}_n = \hat{\sigma} \cdot \vec{n}, \quad (9)$$

где  $\vec{n}$  – вектор, составленный из обозначенных выше косинусов.

Из условия равновесия деформированного тела следует также, что на его граничной поверхности выполняется равенство внешних поверхностных сил, приложенных к телу, и внутренних поверхностных сил, обусловленных деформацией тела. Поэтому для любого малого участка поверхности справедливо равенство:

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n} - \vec{p} = 0. \quad (10)$$

#### 1.4. Геометрические соотношения классической теории упругости

Если исключить ситуации разрушения тела под действием нагрузки, то тензор деформации связан с вектором перемещений. При малых деформациях и перемещениях эта связь выражается уравнениями Коши для диагональных элементов тензора деформаций:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (11a)$$

для остальных:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (11b)$$

Возьмем от первого соотношения (11а) двойную частную производную по координате  $y$ , а от второго – аналогичную по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$$

и сложим их

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}.$$

Далее от первого соотношения (11б) возьмем смешанную производную по координатам  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_x}{\partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

Правые части полученных выражений совпадают, следовательно, совпадают и левые:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогичным образом получаются и оставшиеся два соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (12a)$$

Рассчитаем теперь производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right) = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Далее найдем производную:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z}.$$

Таким образом, можно констатировать:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}.$$

Аналогичным образом получаются и оставшиеся два соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (126)$$

Условия (12) связывают между собой различные компоненты тензора деформаций. Это означает, что деформации точек тела при отсутствии разрушения связаны между собой, а (12) представляет собой условие совместности (неразрывности) этих деформаций и носит название **условие совместности деформаций Сен-Венана**.

## 1.5. Физические соотношения классической теории упругости

Это соотношения, устанавливающие связь между тензором напряжений и тензором деформаций. В пределах упругих деформаций эта связь описывается **законом Гука**:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \sigma_{ij} - \mu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (13a)$$

в тензорной размерности. В (13a) деформации выражены через напряжения. Напряжения через деформации будут выглядеть следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \mu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (13б)$$



В (13а) и (13б)  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, который равен единице при  $i = j$  и нулю при  $i \neq j$ .

Поскольку выражения (13а) и (13б) часто используются для практических расчетов, то их разумно представить и в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]; \end{aligned} \quad (13в)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{xy}; & \varepsilon_{xz} &= \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{xz}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{yz}. \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_{xx} + \mu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})]; \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_{yy} + \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})]; \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]; \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_{xy}; & \sigma_{xz} &= \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_{xz}; & \sigma_{yz} &= \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (13г)$$

Совокупность дифференциальных уравнений равновесия (8), условий совместности деформаций (12) и закона Гука (13) образуют систему из пятнадцати уравнений, в которую входят девять элементов тензора деформаций, девять элементов тензора напряжений и три элемента вектора перемещений. Всего получается 21 неизвестная, однако симметрия обоих тензоров (условия (1) и (4)) добавляет недостающие шесть уравнений. Поэтому данная система уравнений является замкнутой. В качестве основных неизвестных в этой системе в зависимости от решаемых задач принимаются либо перемещения, либо напряжения.

## 1.6. Практикум первой главы

### Задача 1. О вертикальном стержне в поле силы тяжести

**Условие:** Определить деформацию и перемещения длинного стержня длины  $l$ , стоящего вертикально в поле силы тяжести.

**Решение:** Направим ось  $z$  по оси стержня, а оси  $x$  и  $y$  – в плоскости его нижнего основания (рис. 4).

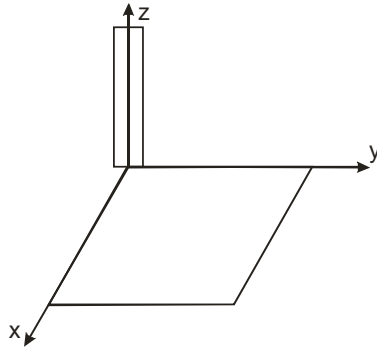


Рисунок 4 – Стержень в поле силы тяжести

Тогда уравнения равновесия (8а) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь граничные условия (10). Выберем бесконечно малую площадку на боковой поверхности стержня так, чтобы направление внешней нормали совпадало с положительным направлением оси  $x$ . Поскольку на боковую поверхность стержня не действуют внешние поверхностные силы, то:  $p_x = p_y = p_z = 0$ .

Для этой площадки (10) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = 0; \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = 0; \\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z = 0. \end{cases}$$

Учитывая условия  $n_x = 1$ , а  $n_y = n_z = 0$  (внешняя нормаль параллельна оси  $x$ ), имеем:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = \sigma_{zx} = 0.$$

Аналогичным образом рассмотрим площадку, внешняя нормаль к которой параллельна оси  $y$ . Условия (10):

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = 0; \\ \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z = 0; \\ \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z = 0. \end{cases}$$

с учетом  $n_y = 1$ , а  $n_x = n_z = 0$  дают:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0.$$

Условие симметрии (1) оставляет отличным от нуля только  $\sigma_{zz}$ . Тогда последнее уравнение (8а) примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g.$$

Интегрируя, получим

$$\sigma_{zz} = \rho g z + C,$$

где  $C$  – константа интегрирования, которая в общем случае может зависеть от  $x$  и  $y$ . Рассмотрим площадку на верхнем торце стержня, внешняя нормаль к которой параллельна оси  $z$ . Третье уравнение (10) запишется в виде:

$$\sigma_{zz} n_z = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = 0 \quad (n_z = 1).$$

Это условие должно выполняться для верхнего торца стержня, т.е. для  $z = l$ . Подставив эти значения в выражение для  $\sigma_{zz}$ , определяем константу  $C$ :

$$0 = \rho g l + C,$$

откуда

$$C = -\rho g l.$$

Тогда окончательно выражение для  $\sigma_{zz}$  можно переписать в виде:

$$\sigma_{zz} = \rho g (z - l).$$

Теперь, используя (13в), определим компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0;$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) = -\frac{\mu}{E} \sigma_{zz} = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z);$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) = -\frac{\mu}{E} \sigma_{zz} = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z);$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \mu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) = \frac{1}{E} \sigma_{zz} = \frac{1}{E} \rho g (z - l).$$

Далее с помощью (11а) формируем вектор перемещений:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z) \Rightarrow u_x = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z) x + C_1.$$

Подставляя очевидные граничные условия:  $u_x(x=0) = 0$ , получим:  $C_1 = 0$ , следовательно

$$u_x = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z) x.$$

Аналогично для  $u_y$ :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z) \Rightarrow u_y = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z) y + C_2.$$

Граничные условия:  $u_y(y=0) = 0$ , получим:  $C_2 = 0$ , следовательно

$$u_y = \frac{\mu}{E} \rho g (l - z) y.$$

Проверим условие (11б), которое для решаемой задачи имеет вид:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{E} \rho g x [l - z] \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{E} \rho g y [l - z] \right) = 0.$$

Определим третью компоненту вектора перемещений:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{E} \rho g (z - l) \Rightarrow u_z = \frac{1}{2E} \rho g (z - l)^2 + C_3.$$

Подстановка граничных условий  $u_z(z=0) = 0$ , следовательно  $C_3 = 0$ , приведет к решению:

$$u_z = \frac{1}{2E} \rho g (z - l)^2,$$

которое не удовлетворяет условиям Коши (11б). Действительно:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{E} \rho g x [l - z] \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2E} \rho g [l - z]^2 \right) = -\frac{\mu}{E} \rho g x \neq 0,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{E} \rho g y [l - z] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2E} \rho g [l - z]^2 \right) = -\frac{\mu}{E} \rho g y \neq 0.$$

Эта ситуация наглядно демонстрирует все те трудности, о которых говорилось выше. Чтобы снять сложившиеся противоречия, необходимо отказаться от вывода:  $C_3 = 0$ . Для удовлетворения условий Коши требуется, чтобы:

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\mu}{E} \rho g x; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\mu}{E} \rho g y.$$

Это возможно в случае, когда

$$C_3 = \frac{\mu}{2E} \rho g (x^2 + y^2).$$

Тогда выражение для  $u_z$  будет следующим:

$$u_z = \frac{1}{2E} \rho g (z - l)^2 + \frac{\mu}{2E} \rho g (x^2 + y^2) = \frac{1}{2E} \rho g \left[ (z - l)^2 + \mu (x^2 + y^2) \right].$$

Однако это решение теперь полностью не удовлетворяет граничному условию:  $u_z(z=0) = 0$  ни в одной точке. Можно добиться того, чтобы компонента перемещений  $u_z$  удовлетворяла граничному условию хотя бы в начале координат. Согласно полученному выражению, значение компоненты  $u_z$  в начале координат будет следующим:

$$u_z(0;0;0) = \frac{1}{2E} \rho g \left[ (0 - l)^2 + \mu (0^2 + 0^2) \right] = \frac{1}{2E} \rho g l^2.$$

Если мы исправим значение  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{\mu}{2E} \rho g (x^2 + y^2) - \frac{1}{2E} \rho g l^2$$

и, соответственно, выражение для  $u_z$ :

$$u_z = \frac{1}{2E} \rho g (z-l)^2 + \frac{\mu}{2E} \rho g (x^2 + y^2) - \frac{1}{2E} \rho g l^2 = \\ = \frac{1}{2E} \rho g \left[ (z-l)^2 - l^2 + \mu(x^2 + y^2) \right]$$

то  $u_z(0;0;0) = 0$ . Однако, большего добиться не удастся, поэтому можно констатировать тот факт, что найденное решение неприменимо вблизи нижнего торца стержня.

**Ответ:**

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{E} \rho g (l-z) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{E} \rho g (l-z) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho g}{E} (z-l) \end{bmatrix},$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{E} \rho g (l-z) x \\ \frac{\mu}{E} \rho g (l-z) y \\ \frac{\rho g}{2E} \left[ (z-l)^2 - l^2 + \mu(x^2 + y^2) \right] \end{bmatrix}.$$

## Задача 2. О полой сфере с различным внутренним и внешним давлением

**Условие:** Определить деформацию полого шара с наружным радиусом  $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$ , давление внутри которого равно  $p_1$ , а снаружи – равно  $p_2$ . Силу тяжести не учитывать.

**Решение:** Для решения данной задачи удобнее всего использовать сферические координаты (рис. 5). Выберем произвольным образом точку  $M$ , тогда расстояние  $OM$  будет сферическим радиусом  $r$ , а полярный и азимутальный углы  $\varphi$  и  $\theta$  соответственно показаны на рис. 5. В этой системе координат

вектор перемещений будет всегда направлен по радиусу, поэтому:

$$u_r = |\vec{u}|; u_\varphi = u_\theta = 0.$$

Запишем выражения компонентов тензора деформаций через вектор перемещений (11) в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right]; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2r} \left[ \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right]; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right); \quad \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - u_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (11в)$$

Тогда, учитывая ориентацию вектора перемещений, можно записать, преобразовав (11в):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0.$$

Выразим компоненты тензора напряжений через компоненты вектора перемещений и перепишем условия равновесия (8а) без учета объемно распределенных сил ( $R_x = R_y = R_z = 0$ ). Рассмотрим первое уравнение (8а) без учета объемно распределенных сил:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0.$$

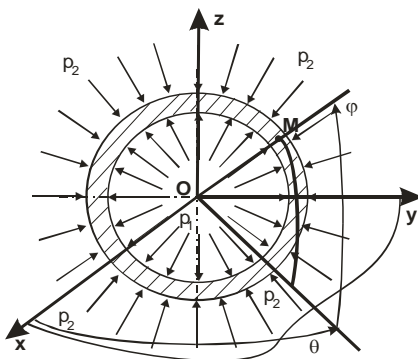


Рисунок 5 – Полый невесомый шар под воздействием внутреннего и внешнего давления

Согласно (13Г):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_{xx} + \mu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-2\mu)\varepsilon_{xx} + \right. \\ &+ \left. \mu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = \\ &= \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right].\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \right].$$

Определим второе и третье слагаемое (8а):

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right);$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right);$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right).$$

Подставим найденные выражения в уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) = 0\end{aligned}$$

и преобразуем его:



$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \right] = \\
& = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \right] = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\mu}{1-2\mu} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие векторные операции:

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{u} &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{u} = \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \\
&+ \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}. \\
\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{\nabla} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \vec{i} + \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \vec{k} = \\
&= \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} + \\
&+ \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}.
\end{aligned}$$

Тогда первое уравнение (8а) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\mu}{1-2\mu} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \right] = \\
& = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} (\Delta \vec{u})_x + \left( \frac{2\mu+1-2\mu}{2(1-2\mu)} \right) \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) \right)_x \right] = \\
& = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( (\Delta \vec{u})_x + \frac{\left( \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) \right)_x}{1-2\mu} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаются два оставшихся уравнения (8а). Тогда вместо трех скалярных уравнений можно записать одно векторное:

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left( \Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{u}) \right) = 0. \quad (8\text{в})$$

Рассмотрим векторную операцию:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} &= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} = \\
&= \vec{\nabla} \times \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right] = \\
&= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) \vec{j} +$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} \right) \vec{k}.$$

Тогда, прибавив к компонентам вектора  $\Delta \vec{u}$  компоненты вектора  $\overrightarrow{\text{rot rot } \vec{u}}$ , получатся компоненты вектора  $\overrightarrow{\text{grad}(\text{div } \vec{u})}$ . Например, для первой компоненты:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}.$$

Таким образом

$$\overrightarrow{\text{grad}(\text{div } \vec{u})} = \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\text{rot rot } \vec{u}}.$$

Следовательно, (8) можно переписать в виде:

$$\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \left( 2\Delta \vec{u} (1-\mu) + \overrightarrow{\text{rot rot } \vec{u}} \right) = 0. \quad (8\Gamma)$$

В случае, когда вектор перемещений имеет только одну отличную от нуля компоненту, справедливо равенство:

$$\overrightarrow{\text{rot rot } \vec{u}} = 0.$$

Поэтому для решаемой задачи можно записать, используя (8Г):

$$\Delta \vec{u} = 0.$$

Следовательно, согласно (8В):

$$\overrightarrow{\text{grad}(\text{div } \vec{u})} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\text{div } \vec{u}) = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{u} = \text{const}.$$

Таким образом

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{const}$$

или в полярных координатах, учитывая, что только компонента  $u_r$  отлична от нуля:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const.}$$

Определим отсюда  $u$ , обозначив константу через  $C_1$ :

$$d(r^2 u) = C_1 r^2 dr.$$

Интегрируем

$$r^2 u = C_1 \frac{r^3}{3} + C_2 \Rightarrow u = \frac{1}{3} C_1 r + \frac{C_2}{r^2}.$$

Определим теперь с помощью (11с) три отличные от нуля компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{3} C_1 - \frac{2C_2}{r^3}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = \frac{1}{3} C_1 + \frac{C_2}{r^3}.$$

Для определения констант интегрирования  $C_1, C_2$  найдем радиальное напряжение, используя выражения (13г):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] = \\ &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \left( \frac{1}{3} C_1 - \frac{2C_2}{r^3} \right) + 2\mu \left( \frac{1}{3} C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) \right] = \\ &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{3} C_1 - \frac{2C_2}{r^3} - \frac{1}{3} \mu C_1 + \mu \frac{2C_2}{r^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \mu C_1 + \mu \frac{2C_2}{r^3} \right] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{3} C_1 (1+\mu) - \frac{2C_2}{r^3} (1-2\mu) \right], \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{3(1-2\mu)} C_1 - \frac{2E}{(1+\mu)} \frac{C_2}{r^3}.$$

Теперь можно найти константы, используя граничные условия:

$$\sigma_{rr}(r = R_1) = -p_1; \quad \sigma_{rr}(r = R_2) = -p_2.$$

Тогда

$$-p_1 = \frac{E}{3(1-2\mu)} C_1 - \frac{2E}{(1+\mu)} \frac{C_2}{R_1^3}; \quad -p_2 = \frac{E}{3(1-2\mu)} C_1 - \frac{2E}{(1+\mu)} \frac{C_2}{R_2^3}.$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$p_1 - p_2 = \frac{2EC_2}{(1+\mu)} \left( \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) = \frac{2EC_2}{(1+\mu)} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_1^3 R_2^3}.$$

Откуда

$$C_2 = \frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)R_1^3 R_2^3}{2E(R_2^3 - R_1^3)}.$$

Выразим  $C_1$ :

$$\begin{aligned} -p_1 &= \frac{E}{3(1-2\mu)} C_1 - \frac{2E}{(1+\mu)} \frac{1}{R_1^3} \frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)R_1^3 R_2^3}{2E(R_2^3 - R_1^3)}; \\ -p_1 + \frac{(p_1 - p_2)R_2^3}{(R_2^3 - R_1^3)} &= \frac{E}{3(1-2\mu)} C_1. \end{aligned}$$

Таким образом

$$C_1 = \left[ \frac{(p_1 - p_2)R_2^3}{(R_2^3 - R_1^3)} - p_1 \right] \frac{3(1-2\mu)}{E} = \frac{(p_1 - p_2)R_2^3 - p_1(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)} \frac{3(1-2\mu)}{E}.$$

Окончательно, преобразуя числитель, получим:

$$C_1 = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{(R_2^3 - R_1^3)} \frac{3(1-2\mu)}{E}.$$

Тогда модуль вектора перемещений примет вид:

$$|\vec{u}| = u_r = \frac{1}{3} r \left[ \frac{3(p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu)}{E(R_2^3 - R_1^3)} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)R_1^3 R_2^3}{2E(R_2^3 - R_1^3)}$$

или

$$|\vec{u}| = u_r = \frac{r}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right].$$

Компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{3} \frac{3(p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu)}{E(R_2^3 - R_1^3)} - \frac{2}{r^3} \frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)R_1^3 R_2^3}{2E(R_2^3 - R_1^3)} = \\
&= \frac{1}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) - \frac{R_1^3 R_2^3}{r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right]; \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right].
\end{aligned}$$

**Ответ:**

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) - \frac{R_1^3 R_2^3}{r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right]; \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right]; \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right]; \\
\bar{u} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{E(R_2^3 - R_1^3)} \left[ (p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3)(1-2\mu) + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2)(1+\mu) \right] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### Задача 3. О бесконечном полой цилиндре с разным внутренним и внешним давлением

**Условие:** Определить деформацию полой цилиндрической трубы с наружным радиусом  $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$ , если давление во внутренней полости равно  $p_1$ , а давление снаружи равно  $p_2$ . Длину трубы считать постоянной.

**Решение:** Для решения данной задачи удобнее всего использовать цилиндрические координаты (рис. 6).

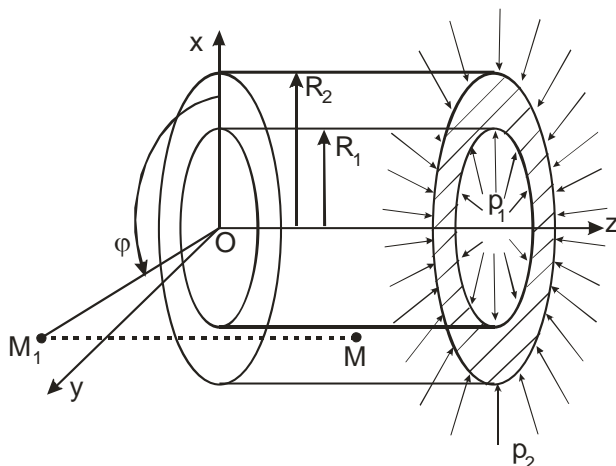


Рисунок 6 – Полая невесомый цилиндр под воздействием внутреннего и внешнего давления

Выберем произвольным образом точку  $M$  и спроецируем ее на плоскость  $Oxy$  (точка  $M_1$ ), тогда расстояние  $OM_1$  будет полярным радиусом  $r$ , расстояние  $MM_1$  – координатой  $z$ , а полярный угол  $\varphi$  показан на рисунке 6. При неучёте изменения длины трубы в цилиндрических координатах отличной от нуля будет только компонента  $u_r$  вектора перемещений. Если считать, что давление одинаково в каждой точке, то:  $u_r = u(r)$ . Тогда, аналогично предыдущей задаче:

$$\Delta \bar{u} = 0$$

и

$$\overline{\text{grad}(\text{div} \bar{u})} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\text{div} \bar{u}) = 0 \Rightarrow \text{div} \bar{u} = \text{const}.$$

Выражение для дивергенции в цилиндрических координатах при условии отличности от нуля примет  $u_r$  вид:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = C_1$$

или

$$d(ru) = C_1 r dr.$$

Интегрируем

$$ru = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2.$$

Откуда

$$u = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}.$$

Запишем выражения компонентов тензора деформаций через вектор перемещений (11) в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}; \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (11g)$$

В решаемой задаче отличны от нуля будут только две компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}.$$

Тогда радиальное напряжение:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] = \\ &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \left( \frac{1}{2}C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) + \mu \left( \frac{1}{2}C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \right] = \\ &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2}C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1}{2}\mu C_1 + \mu \frac{C_2}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\mu C_1 + \mu \frac{C_2}{r^2} \right] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2}C_1 - \frac{C_2}{r^2}(1-2\mu) \right]. \end{aligned}$$

Теперь можно найти константы, используя граничные условия:



$$\sigma_{rr}(r = R_1) = -p_1; \quad \sigma_{rr}(r = R_2) = -p_2.$$

Подставляем в выражение для радиального напряжения:

$$-p_1 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{R_1^2} (1-2\mu) \right];$$

$$-p_2 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{R_2^2} (1-2\mu) \right].$$

Выражаем неизвестные константы. Вычтем из второго уравнения первое:

$$p_1 - p_2 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{R_2^2} (1-2\mu) \right] -$$

$$-\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{R_1^2} (1-2\mu) \right];$$

$$\frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)}{E} = \frac{1}{(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2} C_1 - \frac{C_2}{R_2^2} (1-2\mu) - \frac{1}{2} C_1 + \frac{C_2}{R_1^2} (1-2\mu) \right];$$

$$\frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)}{E} = C_2 \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) = C_2 \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Откуда получаем константу  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2 (1+\mu)}{E (R_2^2 - R_1^2)}.$$

Теперь определим  $C_1$ , подставив выражение для  $C_2$ :

$$-p_1 = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{R_1^2} (1-2\mu) \frac{(p_1 - p_2) R_1^2 R_2^2 (1+\mu)}{E (R_2^2 - R_1^2)} \right];$$

$$-p_1 = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} C_1 - \frac{(p_1 - p_2) R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)};$$

$$\frac{(p_1 - p_2) R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} - \frac{p_1 (R_2^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} C_1;$$

$$\frac{p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{E}{2(1 + \mu)(1 - 2\mu)} C_1.$$

Откуда получаем константу  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{2(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Тогда выражение для модуля вектора перемещений преобразуется к виду:

$$u = \frac{(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)r}{E(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{(p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 (1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r}$$

или, приводя к общему знаменателю:

$$u = u_r = \frac{(1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r} \left[ (p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 - 2\mu)r^2 + (p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 \right].$$

Компоненты тензора напряжений будут следующими:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)} - \frac{(p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 (1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r^2} = \\ &= \frac{(1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r^2} \left[ (p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 - 2\mu)r^2 - (p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 \right] \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{(p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{(p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 (1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r^2} = \\ &= \frac{(1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r^2} \left[ (p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 - 2\mu)r^2 + (p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 \right] \end{aligned}$$

**Ответ:**

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{(1 + \mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r^2} \left[ (p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1 - 2\mu)r^2 - (p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 \right];$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{(1+\mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r^2} \left[ (p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1-2\mu)r^2 + (p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 \right]$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\mu)}{E(R_2^2 - R_1^2)r} \left[ (p_1 R_1^2 - p_2 R_2^2)(1-2\mu)r^2 + (p_1 - p_2)R_1^2 R_2^2 \right] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### Задача 4. О равномерно вращающемся цилиндре

**Условие:** Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Силой тяжести пренебречь.

**Решение:** Для решения данной задачи удобнее всего воспользоваться цилиндрическими координатами (рис. 7).

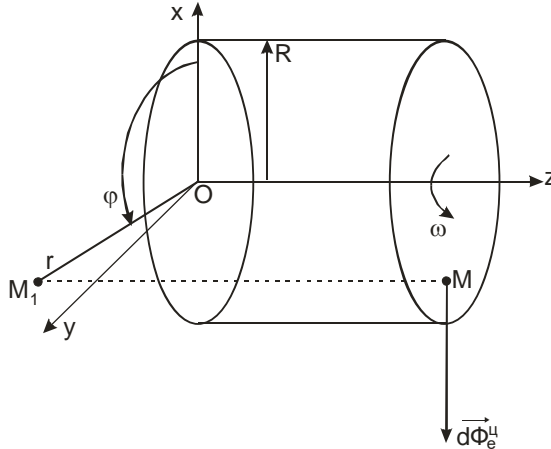


Рисунок 7 – Однородный сплошной цилиндр, равномерно вращающийся вокруг своей продольной оси OZ

Тогда на каждую точку цилиндра будет действовать центробежная сила инерции. На рис. 7 показана элементарная центробежная сила инерции, действующая на точку M. Если не учитывать действие

силы тяжести, то вся деформация цилиндра, как и в предыдущей задаче, будет сведена к радиальной деформации, которая будет функцией координаты  $r$ . В такой постановке задача о деформации пространственного цилиндра не отличается от задачи о деформации плоского диска, которую можно решать в полярных координатах.

Уравнение (8г) для этого случая примет вид:

$$\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)} \left( 2\Delta \vec{u}(1-\mu) + \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \right) = -\rho\omega^2 r \vec{e}_r,$$

где  $\vec{e}_r$  – единичный вектор, направленный вдоль полярного радиуса  $r$ . Или, учитывая, что  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = 0$ :

$$\Delta u_r = -\rho\omega^2 r \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}.$$

Зная, что остальные компоненты вектора перемещений равны нулю, можно записать:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) = -\rho\omega^2 r \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}.$$

Интегрируем полученное выражение, разделяя переменные:

$$\begin{aligned} d \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right) &= -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} r dr; \\ \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} &= -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} r^2 + C_1; \\ \frac{d(ru_r)}{dr} &= -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} r^3 + C_1 r. \end{aligned}$$

Еще раз интегрируем, разделяя переменные:

$$\begin{aligned} d(ru_r) &= \left( -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2E(1-\mu)} r^3 + C_1 r \right) dr; \\ ru_r &= -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)} r^4 + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2; \\ u_r &= -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)} r^3 + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \end{aligned}$$

Чтобы найти константы интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , необходимо использовать граничное условие:  $\sigma_{rr}(r=R)=0$ , а также тот факт, что при  $r=0$  решение должно быть конечным. Второе условие выполняется, если положить:  $C_2=0$ , перепишем последнее выражение без константы  $C_2$ :

$$u_r = -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)} r^3 + \frac{C_1 r}{2}$$

и определим отличные от нуля компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = -\frac{3}{8}\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} r^2 + \frac{C_1}{2};$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = -\frac{1}{8}\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} r^2 + \frac{C_1}{2}.$$

Тогда радиальное напряжение будет равно:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu\varepsilon_{\varphi\varphi} \right].$$

Подставим выражения для компонентов тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ (1-\mu) \left( -\frac{3\rho\omega^2 r^2}{8} \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} + \frac{C_1}{2} \right) - \right. \\ &- \mu \left( \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} - \frac{C_1}{2} \right) \left. \right] = -\frac{3(1-\mu)}{8} \rho\omega^2 r^2 - \mu \frac{1}{8} \rho\omega^2 r^2 + \\ &+ \frac{E[(1-\mu)C_1 + \mu C_1]}{2(1+\mu)(1-2\mu)} = -\frac{(3-2\mu)}{8} \rho\omega^2 r^2 + \frac{E C_1}{2(1+\mu)(1-2\mu)}. \end{aligned}$$

Откуда находим константу  $C_1$ , учитывая, что  $\sigma_{rr}(r=R)=0$ :

$$0 = -\frac{3-2\mu}{8} \rho\omega^2 R^2 + \frac{E C_1}{2(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Следовательно

$$C_1 = \frac{(3-2\mu)(1+\mu)(1-2\mu)}{4E} \rho\omega^2 R^2.$$

Подставив теперь найденную константу в выражение для радиального перемещения:

$$u_r = -\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E(1-\mu)} r^3 + \frac{(3-2\mu)(1+\mu)(1-2\mu)}{4E} \rho\omega^2 R^2 \frac{r}{2}.$$

Преобразовывая, окончательно получим:

$$u_r = \rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} r \left[ R^2(3-2\mu) - \frac{r^2}{(1-\mu)} \right].$$

Теперь запишем выражения для отличных от нуля компонентов тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= -\frac{3}{8}\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} r^2 + \frac{(3-2\mu)(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} \rho\omega^2 R^2 = \\ &= \frac{\rho\omega^2(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} \left( R^2(3-2\mu) - \frac{3r^2}{1-\mu} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{8}\rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} r^2 + \frac{(3-2\mu)(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} \rho\omega^2 R^2 = \\ &= \frac{\rho\omega^2(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} \left( R^2(3-2\mu) - \frac{r^2}{1-\mu} \right). \end{aligned}$$

**Ответ:**

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} \left[ (3-2\mu)R^2 - \frac{3r^2}{1-\mu} \right];$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\rho\omega^2(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} \left[ (3-2\mu)R^2 - \frac{r^2}{1-\mu} \right],$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{8E} r \left[ R^2(3-2\mu) - \frac{r^2}{(1-\mu)} \right] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 2. МЕТОД ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

### 2.1. Общие замечания

В настоящее время теоретические и экспериментальные исследования реализуются достаточно автономно. Существует объективная сложность проверки результатов теоретических исследований натурными испытаниями. Так, например, разработанная более ста лет назад теория относительности до сих пор не прошла натурных испытаний. Однако появление и бурное развитие компьютерной техники, с одной стороны, и построение и апробация фундаментальных базовых моделей изучаемых процессов и явлений, с другой стороны, определило появление новой технологии научных исследований. Она интегрирует теоретические и экспериментальные исследования, налаживая связи между ними. Такая технология научных исследований получает всё более широкое распространение в современных условиях и носит название *вычислительного эксперимента*.

В широком методологическом смысле под вычислительным экспериментом понимается метод изучения реальных объектов исследования с помощью математического моделирования. В узком смысле в качестве основы вычислительного эксперимента можно выделить следующую триаду: «модель–алгоритм–программа». В вычислительном эксперименте в роли своеобразной опытной установки выступает не определённое физическое устройство, а компьютерная программа. Поэтому вычислительный эксперимент занимает промежуточное место в ряду натурных экспериментов и аналитических исследований.

Натурный физический эксперимент даёт исчерпывающие и надежные результаты. Несмотря на это сегодня во многих случаях отдаётся предпочтение именно вычислительному эксперименту. Дело в том, что построение и модификация компьютерной программы существенно проще, чем реальных испытательных стендов и установок. Поэтому изменение параметров компьютерной программы даёт значительно большую область исследований, чем изменение настроек реального оборудования.

Кроме того, воссоздание некоторых режимов или условий в опытной установке зачастую просто невозможно. Тогда математическое моделирование становится единственно возможным методом исследования. Легко себе представить изучение стационарных режимов при  $t \rightarrow \infty$  с помощью математических моделей, однако реализовать бесконечное время в условиях натурального физического эксперимента невозможно.

В рамках аналитического подхода, как и в рамках вычислительного эксперимента, строится математическая модель. Однако её исследование осуществляется только посредством аналитических выкладок. Численные методы при этом не применяются. В случае достаточности аналитических выкладок подход даёт строгое точное решение поставленной задачи. На практике, как правило, аналитическому подходу отводится роль метода для получения быстрых и грубых оценок. Это можно объяснить тем, что аналитическими выкладками удаётся описать существенно упрощённые модели реальных объектов исследования. Поэтому полученное строгое аналитическое решение в этого упрощения оказывается достаточно далёким от совершенства. Численные методы, наоборот, дают возможность изучения более сложных моделей, которые достаточно точно и полно отражают реальные объекты исследования.

## 2.2. Этапы вычислительного эксперимента

Отмеченные в предыдущем разделе достоинства вычислительного эксперимента как метода исследований вывели его в число основных методов решения ряда физических и инженерно-технических проблем, например, задачи ядерной энергетики, механики деформируемого твёрдого тела, изучения космического пространства и др. Современные программные комплексы, которые обслуживают вычислительные эксперименты, объёмны, сложны и постоянно совершенствуются. В их создание и модернизацию вовлечено много самых разных специалистов ИТ-сферы. Рассмотрим цикл вычислительного эксперимента и выделим пять основных его этапов (рис. 8).





Рисунок 8 – Основные этапы вычислительного эксперимента

#### Э т а п 1. Математическая модель.

Заключается в построении математической модели объекта исследований путём его математической формализации (составление уравнений или систем уравнений, формирование начальных и граничных условий, выделение областей допустимых изменений параметров).

#### Э т а п 2. Численные методы.

Предполагает выбор численных методов для последующего проведения расчётов (построение дискретной модели в рамках выбранного численного метода, аппроксимирующей математическую модель, построение разностной схемы приближённых расчётов, выбор шага дискретизации).

#### Э т а п 3. Алгоритм.

Включает в себя разработку вычислительного алгоритма, который в дальнейшем будет реализован при написании программы.

#### Э т а п 4. Программа.

Заключается в создании программы или программного комплекса, реализующей разработанный вычислительный алгоритм (выбор языка программирования, написание текста программы, её отладка и тестирование на корректность работы).

#### Э т а п 5. Получение и анализ результатов.

Охватывает весь спектр работ, связанный с результатами вычислительного эксперимента (введение значений параметров в программу или программный комплекс, получение результатов, их обработка, сравнение с другими оценками или результатами, анализ и выработка рекомендаций).

После пятого этапа исследователь может вносить коррективы на основе выработанных рекомендаций. Например, рекомендации по усложнению математической модели объекта исследований влекут за собой повторение цикла вычислительного эксперимента в полном объёме. При отсутствии необходимости усложнять модель рекомендации по повышению точности полученных результатов могут затрагивать выбор численных методов. В этом случае цикл повторяется, начиная со второго этапа. Требования оценки дополнительных параметров приводят к корректировке алгоритма и повторению этапов 3–5 вычислительного эксперимента. Повышение наглядности полученных результатов касается изменения программы или программного комплекса в части построения графиков или визуализации протекающих процессов, например, деформации.

Создание программных комплексов в рамках вычислительного эксперимента обладает рядом важных особенностей. Циклы, подобные описанному выше циклу вычислительного эксперимента, присутствуют практически в любом программном проекте. Самая первая начальная версия программы, как правило, не в полной мере удовлетворяет разработчика или заказчика этой программы. Поэтому приходится её дорабатывать, уточняя при этом постановку задачи, улучшая отдельные алгоритмы и т.д. Однако чаще всего требуется совершить несколько циклов, которые требуют относительно небольших усилий. После чего программа обретает приемлемый вид.

Совершенно иначе выглядит картина для вычислительного эксперимента. Здесь сама программа замышляется как своеобразная экспериментальная установка. Причём от первых опытов с ней вряд ли следует ожидать значимых результатов. Результаты первых вычислительных экспериментов, скорее всего, могут послужить отправной точкой в длительном процессе изменений и усовершенствований этой виртуальной

экспериментальной установки. Только реализация такого процесса способна привести к адекватным и корректным заключениям об объекте исследований.

Поэтому разработка первоначальной версии программного комплекса только в общих чертах определяет направление будущих исследований. Основная работа по программированию, связанная с модификациями комплекса, которые отражают эволюцию, как самой математической модели, так и методов ее расчета, ещё впереди. При этом количество циклов вычислительного эксперимента (рис. 8) может достигать десятков тысяч.

Подобно натурным испытаниям, где обычно не спешат совсем избавиться от отдельных узлов, изъятых или замененных в экспериментальной установке во время проведения очередной серии экспериментов, поскольку они ещё могут пригодиться в дальнейшем, решения и соответствующие этим решениям фрагменты программ, перерабатываемые на очередном цикле эксперимента вычислительного, обычно, не отбрасываются, а могут быть использованы затем в других расчетах. Например, численный метод, оказавшийся неприемлемым для одной модели, вполне может быть применён для расчёта по уточнённой модели объекта исследований и т.д.

Таким образом, можно сделать вывод, что главным направлением деятельности программиста, специализирующегося на реализации вычислительного эксперимента, является не создание новых, а развитие существующих программных комплексов. Причём такое развитие происходит, как правило, не путём замены созданных модулей программного комплекса их более совершенными версиями, а путём расширения, включения в программный комплекс новых модулей, которые моделируют различные решения и ситуации, возникающие в ходе вычислительного эксперимента.

Накапливаемые в единую базу модули могут быть скомбинированы в разнообразных сочетаниях, позволяя исследователю провести систематический и глубокий анализ объекта. Непрерывно возникающие изменения или уточнения диктуют необходимость подобных манипуляций над модулями. Таким образом, следует отметить многовариантность программ

вычислительного эксперимента как закономерное следствие многовариантности самой модели объекта исследований.

### 2.3. Вычислительный эксперимент в задачах теплопроводности

Рассмотрим на примере одномерной модели теплопроводности типы вычислительного эксперимента и основные классы задач прикладного моделирования. Исследуем тонкий стержень цилиндрической формы, боковая поверхность которого является теплоизолированной. Полагаем, что один конец стержня также теплоизолирован, а на другом конце реализован некоторый заданный температурный режим.

Для одномерной модели теплопроводности справедливо уравнение:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l; t > 0, \quad (14)$$

где  $c$  и  $\rho$  – соответственно теплоёмкость и плотность вещества стержня, а  $k$  – коэффициент теплопроводности.

Граничные условия:

$$T(0, t) = v(t) \quad (15)$$

для конца стержня ( $x = 0$ ) с заданным тепловым режимом;

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (16)$$

для теплоизолированного конца стержня ( $x = l$ ).

Начальное условие, определяющее начальное распределение температуры в стержне:

$$T(x, 0) = T_0(0). \quad (17)$$

Математически формализованное описание процесса теплопроводности (14)–(17) в рамках поставленной задачи называется начально-краевой задачей. Даже в простой задаче теплопроводности можно наблюдать необычные явления, связанные с существенной нелинейностью математической модели. К таким явлениям можно отнести, например, эффекты конечной скорости распространения тепла. Одномерная модель

теплопроводности хорошо изучена, поэтому исследование нелинейных эффектов можно связать с *поисковым* вычислительным экспериментом.

Представим себе, что требуется решить задачу оптимизации в рамках поставленной начально-краевой задачи (14)–(17). Она будет заключаться в том, что на теплоизолированном конце стержня ( $x = l$ ) необходимо удерживать заданную температуру, определяемую некоторой функцией  $g(t)$ , управляя температурой на другом конце стержня ( $x = 0$ ). Такая задача носит название задачи граничного управления и является классической вариационной задачей. Её решением является управление  $v(t)$ , доставляющее минимум функционалу качества:

$$V[v(t)] = \int_0^{t_{\max}} [T(l, t) - g(t)]^2 dt, \quad (18)$$

где  $t_{\max}$  – время наблюдений.

Температура  $T(x, t)$  определяется из решения (14) с учётом (15)–(17). Такая задача является характерной для *оптимизационного* вычислительного эксперимента.

Поставим задачу определение граничного режима изменения температуры  $v(t)$  на конце стержня ( $x = 0$ ), который недоступен для прямых измерений. При этом измеряют температуру на конце стержня ( $x = l$ ) с некоторой погрешностью  $g(t)$ . Необходимо отыскать такую функцию  $v(t)$ , которая доставляла минимум функционалу (18) при дополнительных ограничениях (15)–(17). Эта типичная обратная задача в экстремальной постановке, называемая в теории обратных задач теплообмена как граничная обратная задача теплопроводности, может быть основой для *диагностического* вычислительного эксперимента.

#### **2.4. Математическое моделирование температурного поля в рамках вычислительного эксперимента**

Деформации упругих тел обуславливаются либо действием на эти тела внешних нагрузок (об этом речь шла в предыдущей главе), либо изменяющимся температурным режимом. Для

полноты охвата задач механики деформируемого твёрдого тела и наглядности применения инженерных методов решения этих задач рассмотрим температурные деформации упругих тел.

Таким образом, в качестве объекта исследований для проведения вычислительного эксперимента выбирается температурное поле упругого тела. В общем случае оно определяется функцией четырёх переменных:  $T = T(x, y, z, t)$ , где  $x$ ,  $y$  и  $z$  – это декартовы координаты некоторой точки, принадлежащей упругому телу, а  $t$  – временной параметр. В классическом случае поток тепла имеет направление из той области, где температура тела выше в область, где температура ниже.

В теории различают три следующих основных способа переноса тепла:

- теплопроводность (перенос тепла, осуществляемый за счёт взаимодействия молекул соприкасающихся тел, имеющих разную температуру);
- конвекция (перенос тепла, определяемый перемещением молекул в пространстве и относящийся к жидкостям и газам);
- излучение (перенос тепла посредством излучения и поглощения электромагнитных волн).

В ряде задач механики деформируемого твёрдого тела перенос тепла может осуществляться сразу несколькими способами. Так, например, уравнение (14) определяет теплопроводность внутри стержня. Перенос тепла от одного слоя упругого тела к другому осуществляется за счёт соприкосновения слоёв друг с другом и взаимодействия их молекул. Граничные условия (15) определяют взаимодействие стержня с окружающей средой и другими телами. Если конец стержня ( $x = 0$ ) полностью всей площадью поперечного сечения соприкасается с другим телом, то вновь перенос тепла на границе будет осуществляться теплопроводностью. Такие граничные условия носят название граничных условий первого рода.

Если стержень погружен в жидкость или находится в газовой среде, например, в воздухе, то граничные условия (15) будут описывать конвективный перенос тепла за счёт теплового движения молекул жидкости или газа, которые соприкасаются с

концом стержня и нагреваются или охлаждаются от него. Эти граничные условия определяются как граничные условия второго рода.

Наконец, поместив стержень в околоземное космическое пространство, мы будем иметь дело с граничными условиями третьего рода, определяющими перенос энергии в виде излучения стержнем электромагнитных волн в окружающее пространство.

При этом могут быть и более сложные граничные условия. Например, часть сечения стержня соприкасается с другим телом, а часть находится в воздушной среде. Тогда уравнения (15) должны описывать процессы теплопроводности и конвекции. Можно представить себе и динамические граничные условия. Так, помещённая в околоземное космическое пространство пластина, имеющая в качестве недеформированного состояния плоскую форму, под действием солнечного излучения потеряет устойчивость и изогнётся. В этом случае излучение с изогнутого конца пластины может попадать на другие её части, меняя граничные условия третьего рода.

Процесс деформации твёрдых тел при действии температурных полей описывается так называемыми уравнениями термоупругости. В такой модели уравнения теплопроводности дополняются уравнениями упругости.

Основу теории теплопроводности составляет известный закон Фурье, согласно которому тепловой поток прямо пропорционален градиенту температуры, если речь идёт об однородной и изотропной среде:

$$q = -k \operatorname{grad} T . \quad (19)$$

Запишем закон сохранения энергии для некоторого бесконечно малого объёма тела:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} q + f , \quad (20)$$

где  $f$  – тепловыделения в рассматриваемом объёме, определяющие мощность внутренних источников тепла.

Подставим выражение для теплового потока (19) в (20) и получим:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f. \quad (21)$$

Уравнение (21) носит название основного уравнения теплопроводности. В случае одномерной модели теплопроводности, когда  $T = T(x, t)$  и отсутствия внутренних источников теплоты получаем уравнение (14). Если  $k = \text{const}$ , то (14) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (22)$$

где  $a = \sqrt{k/c\rho}$  – коэффициент температуропроводности.

В общей постановке уравнение (21) является параболическим линейным уравнением 2-го порядка. Квазилинейным уравнением теплопроводности уравнение (21) становится в случае, когда теплофизические свойства тела зависят от его температуры, т.е.  $c = c(T)$ ,  $\rho = \rho(T)$ ,  $k = k(T)$ ,  $f = f(T)$ .

Ещё один важный частный случай соответствует установившимся температурным полям. Он обозначается как стационарное уравнение теплопроводности. При этом  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ :

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = -f. \quad (23)$$

Моделирование теплопроводности в подвижной среде основано на переходе от частной производной по времени к полной производной по времени:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f. \quad (24)$$

Распишем полную производную по времени:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T, \quad (25)$$

где  $\vec{v}$  – вектор локальной скорости среды.

Таким образом, с учётом (25) уравнение теплопроводности в подвижной среде (24) примет следующий вид:

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T \right) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + f. \quad (26)$$



При этом слагаемое  $\vec{v} \cdot \text{grad } T$  определяет изменение температуры тела за счёт конвективного переноса, связанного с движением среды.

Закон Фурье (19) предполагает бесконечную скорость распространения тепла в среде, поскольку градиент температуры и плотность теплового потока в любой момент времени соответствуют друг другу. Однако в случае высокоинтенсивных и нестационарных тепловых процессов это не так. Для корректного их описания необходимо учитывать инерцию распространения тепла, т.е. распространение тепла в среде с конечной скоростью. В этом случае вместо (19) нужно записать:

$$q = -k \text{ grad } T - \tau_r \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (27)$$

где  $\tau_r = \text{const}$  – время релаксации тепловых напряжений.

С учётом (27) уравнение теплопроводности примет вид:

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \text{div}(k \text{ grad } T) + f + \tau_r \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (28)$$

В отличие от уравнения (21) уравнение (28) представляет собой уравнение гиперболического типа.

Для получения однозначного решения уравнений теплопроводности необходимы замыкающие соотношения. При интегрировании уравнений в частных производных появляются некоторые неизвестные функции, не позволяющие однозначно определить распределение температур в среде. Чтобы устранить эту неоднозначность, формулируются дополнительные замыкающие соотношения в виде начальных и краевых условий.

Пусть исследование температурного поля производится в некоторой постоянной области пространства  $\Omega$ . Предполагаем, что исследуется процесс теплопередачи от некоторого начального момента времени (обозначим его  $t = 0$ ) до конечного момента времени  $t = t_{\text{max}} > 0$ . В этом случае решение уравнения теплопроводности ищется в четырёхмерном цилиндре  $Q = \{(x, y, z, t) | (x, y, z) \in \Omega, 0 < t < t_{\text{max}}\}$ :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } T) + f, \quad (x, y, z, t) \in Q. \quad (29)$$

Поскольку уравнение (29) содержит частные производные по временной и пространственным координатам, дополнительные замыкающие соотношения должны задаваться на множестве точек пространственной области  $\Omega$  и временного интервала  $t \in (0, t_{\max})$ . Дополнительные соотношения, которые задаются на границе четырёхмерного цилиндра  $Q$ , называются *краевыми условиями*. Они соответствуют соотношениям для пространственных переменных на границе пространственной области  $\Omega$ . По-другому они называются *граничными условиями*. Условия на нижнем основании четырёхмерного цилиндра  $Q$  соответствуют моменту времени  $t = 0$  и называются *начальными условиями*. Задачу, в которой заданы граничные и начальные условия, называют *начально-краевой задачей*.

Возможно задание и более сложных условий. Вместо начального распределения температур  $T_0 = T(x, y, z, 0)$  (начальных условий) могут быть заданы распределения в других сечениях цилиндра  $T_* = T(x, y, z, t_*)$ , где  $t_* \neq 0$ . Исходя из этого, выделяют основные типы задач для уравнений теплопроводности.

Чаще всего считается, что задано начальное температурное поле:

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (30)$$

Для задач, определяемых уравнением теплопроводности (21), при исследовании высокоинтенсивных температурных процессов, подчиняющихся уравнению (28), необходимо иметь в качестве замыкающих соотношений два условия по времени. Помимо начального распределения температур (30), необходимо знание её первой производной:

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \nu(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (31)$$

Если прямые измерения в начальный момент времени невозможны, то вместо начальных условий (30) можно задавать поле температур в некоторый другой момент времени, например, в конечный:

$$T(x, y, z, t_{\max}) = T_m(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (32)$$

Тогда задача теплопроводности с условиями (32) превращается в так называемую ретроспективную задачу восстановления температурного поля в предыдущие моменты времени.

## 2.5. Основные типы граничных условий в задачах теплопроводности

Рассмотрим далее классификацию граничных условий. Выделяют три основных типа граничных условий. *Граничные условия первого рода* заключаются в задании температурного поля на границе  $\partial\Omega$  пространственной области  $\Omega$ :

$$T(x, y, z, t) = g(x, y, z, t), \quad (x, y, z, t) \in \Gamma, \quad (33)$$

где  $\Gamma$  – боковая поверхность четырёхмерного цилиндра:  $\Gamma = \{(x, y, z, t) | (x, y, z) \in \partial\Omega, 0 < t < t_{\max}\}$ .

Условия первого рода (33) по-другому также называются *условиями Дирихле*.

Если на границе задан тепловой поток в виде:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q(x, y, z, t), \quad (x, y, z, t) \in \Gamma, \quad (34)$$

(где  $n$  – внешняя по отношению к области  $\Omega$  нормаль к её границе  $\partial\Omega$ ), то такие граничные условия называются *граничными условиями второго рода* или *условиями Неймана*.

При учёте теплообмена между поверхностью твёрдого тела и окружающей среды, температуру которой обозначим через  $T_c$ , возникают *граничные условия третьего рода*. В рамках этих граничных условий моделируется конвективный теплообмен. Обычно считается, что тепловой поток при конвективном теплообмене пропорционален разности температур между поверхностью тела и окружающей средой. Тогда для изотропной среды имеем:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_c) = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Gamma, \quad (35)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена.

С помощью граничных условий третьего рода описывается и теплообмен посредством излучения. Используя закон Стефана-Больцмана, имеем:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \sigma \varepsilon (T^4 - T_c^4) = 0, \quad (x, y, z, t) \in \Gamma, \quad (36)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана, а  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности тела.

Все приведённые граничные условия можно обобщить в одно выражение:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - g) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_c^4) = q, \quad (x, y, z, t) \in \Gamma. \quad (37)$$

Тогда при  $\alpha = \infty$  получаем граничные условия первого рода (33). При  $\alpha = 0$  и  $\varepsilon = 0$  получаем граничные условия второго рода (34). При  $q = 0$  получаем граничные условия третьего рода, которые при  $\alpha \neq 0$  и  $\varepsilon = 0$  учитывают только конвективный теплообмен, при  $\alpha = 0$  и  $\varepsilon \neq 0$  – только теплообмен посредством излучения и при  $\alpha \neq 0$  и  $\varepsilon \neq 0$  – оба перечисленных выше вида теплообмена.

Сформулируем некоторые основные классы задач для уравнения теплопроводности в соответствие с краевыми задачами, в которых задаются определённые начальные и граничные условия.

*Первая краевая задача* ставится для уравнения теплопроводности (21), если оно дополняется начальным условием (17) и граничным условием первого рода (33). *Вторая краевая задача* подразумевает замену граничных условий первого рода (33) граничными условиями второго рода (34). Дополнение к уравнению теплопроводности (21) и начальному условию (17) граничных условий третьего рода (35) или (36) означает постановку *третьей краевой задачи*. Существуют *смешанные краевые задачи*, в которых на разных частях границы  $\partial\Omega$  заданы граничные условия разного рода. Например, если тело, имеющее кубическую форму, лежит на плоскости, которая имеет заданную температуру, а остальные части поверхности тела находятся в воздушной среде, то мы имеем дело с граничными условиями первого рода на части границы тела, соприкасающейся с плоскостью, и граничные условия третьего рода на остальной части границы.

Краевая задача считается *корректно поставленной по Адамару*, если выполнены три основных условия:

1. Решение задачи существует.
2. Решение задачи единственно.
3. Решение задачи непрерывно зависит от коэффициентов уравнений и дополнительных условий (начальных и граничных).

Нарушение хотя бы одного из этих условий переводит задачу в класс некорректно поставленных краевых задач. Чаще всего некорректность связана с нарушением третьего условия. Это наблюдается при отсутствии устойчивости решения относительно малых возмущений входных параметров задачи.

Учёт причинно-следственных связей при решении задач теплопроводности позволяет выделить *прямые задачи*. В них задано начальное поле температур и исследуется его динамика. Нарушение причинно-следственных связей приводит к некорректной постановке задачи теплопроводности в виде *обратных задач*. Обратные задачи характерны тем, что замыкающие соотношения заданы не полностью или само уравнение теплопроводности не полностью определено. Однако известна некоторая дополнительная информация о решении.

Простейшим примером обратной задачи является ретроспективная задача, в которой вместо начальных условий (17) задаются другие условия, например, в конечный момент времени. Отдельно следует выделить класс задач, решение которых связано с минимизацией одного или нескольких функционалов. Такие задачи являются задачами оптимизации и носят условный характер в виде дополнительных ограничений, которые накладываются исходя из постановки задачи. Примером таких задач является восстановление граничного режима. Пусть

$$T(x, y, z, t) = v(x, y, z, t), \quad (x, y, z, t) \in \Gamma_2, \quad (38)$$

где  $v(x, y, z, t)$  – искомая функция. При этом решение уравнения теплопроводности (21) дополнено начальными условиями (30) и граничными условиями (33) и (38). Обозначим  $\Phi(v) = \Phi(v; x, y, z, t)$ . Тогда граничный режим на поверхности четырёхмерного цилиндра  $\Gamma$  (функцию  $w$ ) определим из условия:

$$\Phi(w) = \min_{v \in V} \Phi(v), \quad (39)$$

где

$$\Phi(v) = \int_{\partial\Omega_1} \left[ k \frac{\partial T}{\partial n} - q(x, y, z, t) \right]^2 ds, \quad (40)$$

а  $V$  – множество допустимых функций  $v$ .

Таким же образом формулируется задача оптимального управления в теплопроводности. Минимизация функционала (39), (40) на множестве ограничений (21), (30), (33), (38) приводит к необходимости поиска локально оптимального граничного теплового режима (38) с тем, чтобы достигалось требуемое качество (функционал (40)).

## 2.6. Практикум второй главы

### Задача 1. Описание конвективного теплообмена

Если конвективный теплообмен обусловлен движением самой среды, то математические модели теплопроводности в этом случае должны дополняться моделями движения самой среды. Так, при изучении процессов теплопередачи в жидкости или газе следует использовать уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (41)$$

Для несжимаемой жидкости с постоянной в любой момент плотностью (41) будет выглядеть следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (42)$$

Движение вязкой однородной среды описываются уравнениями Навье-Стокса:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right) = -\operatorname{grad} |\vec{p}| + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}, \quad (43)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $|\vec{p}|$  – модуль вектора давления,  $\vec{f}$  – вектор массовых сил, включая силы инерции, связанные с ускоренным движением среды (см. задачу 4 предыдущей главы).

Тогда уравнение непрерывности (41) или (42) и уравнение Навье-Стокса описывают движение самой среды. Уравнение теплопроводности в этом случае будет иметь вид в случае несжимаемой среды:

$$c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } T \right) = \text{div} (k \text{ grad } T) + \eta \Phi, \quad (44)$$

где

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2.$$

Учёт сжимаемости усложняет вид диссипативной функции  $\Phi$  и приводит к появлению дополнительного слагаемого в уравнении (43). Система (42), (43) и (44) является основной для моделирования конвекции в однородной вязкой жидкости. В качестве неизвестных величин выступают температура, скорость и давление. Плотность при этом считается заданной.

Рассмотрим отдельно так называемую *свободную конвекцию* – движение среды в поле силы тяготения, обусловленное неравномерностью температурного поля. Считаем жидкость несжимаемой и учитываем изменение плотности среды только в выражении гравитационных сил. Примем некоторое стационарное состояние, определяемое параметрами:  $T_0 = \text{const}$  и  $\rho_0 = \text{const}$ . Зависимости температуры и плотности представим как возмущения стационарного состояния:  $T = T_0 + T'$  и  $\rho = \rho_0 + \rho'$ . При этом  $T'$  и  $\rho'$  являются малыми величинами. Введём связь между ними в виде:

$$\rho' = -\rho_0 \beta T', \quad (45)$$

где  $\beta$  – коэффициент температурного расширения среды.

Линеаризуем уравнение Навье-Стокса (43) при условии, что  $\vec{\rho f} = \rho \vec{g}$ . Тогда в линейном приближении, которое носит название *приближение Буссинеска*, будем иметь:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \right) = -\text{grad } |\vec{p}'| + \eta \Delta \vec{v} - \beta \rho \vec{g} T'. \quad (46)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае будет иметь вид:

$$c_p \rho \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } T' \right) = \text{div} (k \text{ grad } T') + \eta \Phi. \quad (47)$$

Таким образом, система уравнений (42), (46), (47) в дополнении с соответствующими граничными и начальными условиями описывает свободноконвективные движения несжимаемой жидкости.

## Задача 2. Описание теплового излучения

Известно, что все нагретые тела излучают в пространство энергию в виде электромагнитных волн. Кванты этой энергии характеризуются скоростью  $c$ , длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\nu$ . Для этих параметров справедливо соотношение:  $c = \lambda \nu$ . Энергия одного кванта равна  $h \nu$ , где  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Пусть  $E$  – плотность потока поверхностного излучения через единичную площадь поверхности. Причём она создаётся квантами, имеющими различную частоту. Спектральная или монохроматическая плотность в этом случае будет определяться выражением:

$$E_\nu = \frac{dE}{d\nu}. \quad (48)$$

Абсолютно чёрное тело поглощает всё излучение, падающее на его поверхность. Для реального тела часть излучения поглощается, а часть отражается или проходит сквозь него. В общей постановке математические модели теплопроводности посредством излучения довольно сложны и громоздки. Это связано с многомерными уравнениями переноса, входящими в данные модели. Однако существуют и простые приближения в описании этого явления. В частности, наиболее широко



распространены многогрупповые диффузионные приближения, приближения лучистой теплопроводности и оптически тонкого слоя.

Если исходить из описания процессов теплообмена твёрдых тел, то следует учесть, что большинство из них непрозрачно для тепловых лучей. Это даёт основание предполагать, что сам теплообмен, а также связанные с ним процессы поглощения и отражения энергии излучения протекают только на поверхности твёрдых тел. В этом случае модели описания самого теплообмена существенно упрощаются.

Запишем закон Планка для излучения абсолютно чёрного тела:

$$E_\nu = 2\pi \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{m\nu/T} - 1}, \quad (49)$$

где  $m$  – постоянная величина.

Тогда для интегральной плотности потока имеем закон Стефана-Больцмана:

$$E = \int_0^\infty E_\nu d\nu = \sigma T^4. \quad (50)$$

Поскольку реальные тела поглощают излучение не полностью, то для них используют понятие степени черноты. Она определяет ту часть энергии, которую поглощает тело. Степень черноты в большинстве случаев считают постоянной. В более общей постановке она принимается как функция температуры тела:  $\varepsilon = \varepsilon(T)$ . Поэтому для реальных тел закон Стефана-Больцмана (50) будет иметь вид:

$$E = \varepsilon \sigma T^4. \quad (51)$$

Поскольку теплообмен излучением происходит на поверхности твёрдых тел, то речь идёт о формулировке граничных условий третьего рода при решении задач теплопроводности твёрдых тел с учётом излучения. Рассмотрим одиночное выпуклое твёрдое тело  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ . Теплопроводность внутри тела будет описываться уравнением (21). Учитывая собственное излучение и конвективный теплообмен, сформулируем на границе  $\partial\Omega$  соответствующие условия третьего рода:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_c) + \sigma \varepsilon T^4 = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (52)$$

Граничное условие (52) необходимо уточнять, когда требуется учесть не только собственное излучение тела, но и излучение окружающей среды, а также других тел. То же самое следует сделать в случае, если тело не является выпуклым. Тогда необходимо учесть самооблучение, когда излучение с одних участков поверхности тела попадает на другие участки. Следует также отметить, что граничное условие (52) является существенно нелинейным. С учётом излучения окружающей среды (52) примет вид:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_c) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_c^4) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (53)$$

### Задача 3. Описание термоупругости

При нагреве твёрдые тела расширяются. Рассмотрим учёт этого эффекта в рамках классической теории упругости. Пусть  $\vec{u}$ , как и прежде, – вектор перемещений точек твёрдого тела. Тогда вместо статических уравнений (8), получаем уравнения термоупругости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases}. \quad (54a)$$

Или в векторном виде:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{R} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (54б)$$

Компоненты тензора упругих напряжений будут иметь вид:

$$\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \gamma T; \quad \sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \gamma T; \\ \sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \gamma T. \quad (55)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \quad \sigma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right).$$

Объёмная деформация  $\theta$  определяется формулой (5), а  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламэ, которые характеризуют упругие свойства твёрдого тела.

Слагаемые, содержащие температуру, обуславливают движение точек твёрдого тела за счёт температурного воздействия:

$$\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu). \quad (56)$$

Подставим (55) в (54б), считая твёрдое тело однородным:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} - \gamma \text{grad } T + \vec{R}. \quad (57)$$

Уравнение (57) является уравнением второго порядка гиперболического типа и носит название *уравнения Ламэ*. Оно дополняется начальными и краевыми условиями. В качестве начальных условий можно задавать начальные перемещения и скорости точек твёрдого тела:

$$\vec{u}(x, y, z, 0) = \vec{u}_0(x, y, z), \quad (58)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, y, z, 0) = \vec{u}'_0(x, y, z). \quad (59)$$

Простейшее граничное условие определяет отсутствие перемещений граничных точек твёрдого тела:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega. \quad (60)$$

Тогда при заданном температурном поле  $T = T(x, y, z, t)$  напряжённо-деформированное состояние определяется начально-краевой задачей (57)–(60).

Учёт сжимаемости тела при отсутствии внутренних источников тепла приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{T}{c\rho} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{u} = a \Delta T. \quad (61)$$

Уравнение (61), дополненное соответствующими начальными и граничными условиями, позволяет определить температурное поле твёрдого тела при заданных деформациях. Совместно уравнения (57) и (61) образует систему уравнений термоупругости.

Отдельно выделяют стационарные задачи термоупругости:

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} - \gamma \text{grad } T + \vec{R} = 0. \quad (62)$$

$$\Delta T = 0. \quad (63)$$

В плоском случае  $u_z = 0$ , а оставшихся два компонента вектора перемещений зависят только от  $x$  и  $y$ . Рассмотрим равновесное состояние при отсутствии внешних массовых сил  $\vec{R}$ . Введём функцию напряжений Эйри  $\psi$  такую, что:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \gamma T; \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma T; \\ \sigma_{xy} = -\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (64)$$

Тогда вместо уравнения (62) получим бигармоническое уравнение относительно функции напряжений:

$$\Delta \Delta \psi - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta T = 0, \quad (65)$$

где  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ .

Для случая простейшего стационарного уравнения теплопроводности (61) будем иметь однородное бигармоническое уравнение для функции напряжений:

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (66)$$

В теории упругости уравнение (66) достаточно широко используется для построения базовой математической модели напряжённо-деформированного состояния. В рассматриваемом плоском случае оно имеет вид:

$$\Delta\Delta\psi = \frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = 0. \quad (67)$$

Рассмотрим далее тонкие пластины. Пусть исследуемое тело представляет собой упругий цилиндр малой высоты  $h$ . Выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость  $z = 0$  была бы срединной. Приложим нормальные нагрузки и тепловое воздействие, считая, что прогибы пластинки малы. Запишем уравнение Софии Жермен для тонких пластинок:

$$D\Delta\Delta w = q - \Delta M_T, \quad (68)$$

где  $D$  – цилиндрическая жёсткость на изгиб;  $q = q(x, y)$  – внешняя нагрузка;  $M_T$  – изгибающий момент, вызванный температурными воздействиями:

$$M_T = 2\mu\alpha \int_{-h/2}^{h/2} T(x, y, z)z dz. \quad (69)$$

При этом температурное поле находится из решения уравнения теплопроводности. Например, для случая неравномерного нагрева по толщине, пренебрегая теплообменом в продольном направлении, имеем вместо (63):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (70)$$

Проинтегрируем (70)

$$\frac{\partial T}{\partial z} = T'_z(x, y). \quad (71)$$

Повторно

$$T = T'_z(x, y)z + T_0(x, y). \quad (72)$$

Подставим (72) в (69):

$$\begin{aligned}
M_T &= 2\mu\alpha \int_{-h/2}^{h/2} (T'_z(x, y)z + T_0(x, y))z dz = \\
&= 2\mu\alpha \left[ T'_z(x, y) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz + T_0(x, y) \frac{z^2}{2} \right]_{-h/2}^{h/2} = \\
&= 2\mu\alpha T'_z(x, y) \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} + T_0(x, y) \left( \frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{8} \right) = \\
&= 2\mu\alpha T'_z(x, y) \left( \frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) = \frac{\mu\alpha T'_z(x, y)}{6} h^3.
\end{aligned} \tag{73}$$

Теперь в силу (72) представим производную  $T'_z(x, y)$  в виде:

$$T'_z(x, y) = \frac{T\left(x, y, \frac{h}{2}\right) - T\left(x, y, -\frac{h}{2}\right)}{h}. \tag{74}$$

Подставим (74) в (73) и окончательно получим:

$$M_T = \frac{\mu\alpha h^2}{6} \left[ T\left(x, y, \frac{h}{2}\right) - T\left(x, y, -\frac{h}{2}\right) \right]. \tag{75}$$

Учёт влияния инерционных сил приводит к необходимости уточнения уравнения (68):

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - \Delta M_T, \tag{76}$$

Уравнение (76) дополняется нестационарным уравнением теплопроводности (57).

#### Задача 4. Обезразмеривание уравнений теплопроводности

Использование единой системы единиц упрощает анализ поставленной задачи. В вычислительном эксперименте такой системой единиц является безразмерная система. Приближённое решение задачи с применением средств вычислительной техники связано с проблемой ошибок округления. Чтобы снизить влияние ошибок округления не точность приближённого решения производится его масштабирование. Обезразмеривание

способствует достижению целей масштабирования. При этом безразмерные величины, как правило, изменяются в пределах  $[-1, 1]$ .

Обезразмеривание полезно и при выделении малых и больших параметров задачи. Безразмерные параметры могут корректно сравниваться друг с другом. В некоторых случаях это позволяет упростить решаемую задачу, построив более простую математическую модель.

Третьим преимуществом обезразмеривания является сокращение общего количества параметров математической модели. Это может существенно упростить анализ математической модели.

Проведём обезразмеривание модели теплопроводности однородного цилиндрического стержня с теплоизолированной боковой поверхностью (14). Будем считать, что на одном основании стержня происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна  $T_c$ :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha(T - T_c) = 0, \quad x = 0. \quad (77)$$

На другом конце стержня задан тепловой поток:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad x = l. \quad (78)$$

В начальный момент времени температура стержня не совпадала с температурной окружающей его среды:

$$T(x, 0) = 0. \quad (79)$$

Таким образом, поставлена начально-краевая задача (14), (77) – (79). Она характеризуется двумя переменными и восемью параметрами:  $T = T(x, t; l, c, \rho, k, \alpha, T_c, q)$ . На практике, как правило, нет необходимости проведения параметрического исследования для всех величин. Обычно, это исследование проводится в небольшом диапазоне изменения параметров. При этом часть из них можно вообще считать постоянными.

Обезразмеривание начинается с подбора характерных для решаемой задачи значений величин, на которые масштабируются все остальные. Этот выбор часто неоднозначен и зависит от

конкретики решаемой задачи. Однако существуют сложившиеся традиции обезразмеривания в каждой конкретной области исследований.

В рассматриваемой задаче в качестве масштаба для пространственной переменной  $x$  можно взять длину стержня  $l$ . Тогда размерную переменную  $x$  можно выразить через безразмерную  $x'$  следующим образом:

$$x = x' \cdot l. \quad (80)$$

Аналогично поступим и с временной переменной:

$$t = t' \cdot t_0, \quad (81)$$

где  $t_0$  – характерный масштаб времени, который пока не определён.

Если в решаемой задаче стержень нагревается не очень сильно, то в качестве масштаба температуры можно взять температуру среды:

$$T = T' \cdot T_c. \quad (82)$$

Подстановка выражений (80)–(82) в уравнение (14) даёт следующее уравнение в безразмерных переменных:

$$\frac{c\rho l^2}{kt_0} \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{(\partial x')^2} + Os, \quad 0 < x' < 1, \quad t' > 0, \quad (83)$$

где  $Os = \frac{l^2 f}{kT_c}$  – безразмерный параметр, называемый числом Остроградского.

Теперь, если выбрать масштаб по времени следующим образом:  $t_0 = \frac{c\rho l^2}{k}$ , то уравнение теплопроводности (83) упростится:

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{(\partial x')^2} + Os, \quad 0 < x' < 1, \quad t' > 0. \quad (84)$$

Следует отметить, что уравнение (84) содержит всего один параметр – число Остроградского  $Os$ . Теперь необходимо обезразмерить граничные и начальные условия (77)–(79), используя выражения (80)–(82). Имеем вместо (77):



$$-\frac{\partial T'}{\partial x'} + Bi \cdot (T' - 1) = 0, \quad x' = 0, \quad (85)$$

где  $Bi = \frac{\alpha l}{k}$  – число Био.

Аналогично вместо (78) можно записать граничное условие в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} = Kr, \quad x' = 1, \quad (86)$$

где  $Kr = \frac{ql}{kT_c}$  – число Кирпичева.

Начальное условие (79) преобразуется к виду:

$$T'(x', 0) = 0. \quad (87)$$

Таким образом, размерная начально-краевая задача (14), (77)–(79) была преобразована к безразмерной (84)–(87). При этом от задачи с двумя переменными и восемью параметрами  $T = T(x, t; l, c, \rho, k, \alpha, T_c, q)$  осуществлён переход к задаче с двумя переменными и тремя параметрами  $T' = T'(x', t'; Os, Bi, Kr)$ .

Обратный переход к размерным величинам представляется простым умножением безразмерных решений на размерный масштабные множители. В безразмерных параметрах исследуют подобие задач. Пусть имеется две задачи с различными линейными размерами и теплофизическими свойствами, которые одинаково записываются в безразмерных переменных. В этом случае они подобны и отличаются только масштабными множителями. Поэтому переход от одной задаче к другой не составляет труда.

Проведём далее параметрический анализ рассмотренной задачи. Запись уравнений в безразмерных переменных позволяет выделить малые и большие параметры, а затем упростить задачу. Например, граничные условия (85) представляют собой условия третьего рода. Если  $Bi \gg 1$ , то первым слагаемым (85) можно пренебречь как малым параметром. Тогда имеем:

$$Bi \cdot (T' - 1) = 0, \Rightarrow T' = 1 \quad x' = 0. \quad (88)$$

Граничные условия (88) являются условиями первого рода. Таким образом, задача была упрощена. В обратном случае при  $Bi \ll 1$  можно пренебречь вторым слагаемым как малым параметром. Тогда получим:

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} = 0, \quad x' = 0. \quad (89)$$

Граничные условия (89) являются условиями второго рода.

Другой параметрический анализ может заключаться в том, когда вместо нестационарного уравнения теплопроводности (84) можно использовать стационарное уравнение. Пусть процесс теплопередачи моделируется на временном отрезке  $[0, t_{\max}]$ . Сравним  $t_{\max}$  с временным масштабом  $t_0$ . При  $t_{\max} \gg t_0$  вместо (84) можно записать следующее уравнение:

$$\frac{t_0}{t_{\max}} \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{(\partial x')^2} + Os, \quad 0 < x' < 1, \quad t' > 0. \quad (90)$$

В уравнении (90) присутствует малый параметр  $\varepsilon = \frac{t_0}{t_{\max}}$ . Вдали от начала процесса нестационарностью можно пренебречь. Однако уравнение (90) является сингулярно возмущённым. Поэтому вблизи начала процесса нестационарность будет проявляться. Эта часть называется переходным процессом, затем система выходит на стационарный режим.

Следующий анализ можно провести относительно влияния источника тепла. Если  $Os \ll 1$ , то влиянием источника можно пренебречь. В противном случае при  $Os \gg 1$  задача становится сингулярно возмущённой. В ней можно пренебречь теплопроводностью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии представлен системный анализ основных инженерных методов: метода конечных элементов и метода вычислительного эксперимента. Приведён теоретический материал, способствующий пониманию сути методов и их применения при решении задач прикладной и теоретической механики.

Приведены решённые задачи в рамках классической теории упругости и теоретической механики. Во второй части в качестве задач рассмотрены различные примеры построения уравнений теплопроводности и термоупругости, а также параметрический анализ уравнений теплопроводности в безразмерных переменных.

Материал излагался в рамках курса «Инженерные методы механики деформируемого твёрдого тела» в рамках направления подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Паспорт специальности 01.02.04.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Том 7. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учеб. пособие для студентов авиац. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
4. Самарский А.А., Вабищев П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
5. Горбунов-Посадов М.М., Корягин Д.А., Мартынюк В.В. Системное обеспечение пакетов прикладных программ. – М.: Наука, 1990. – 208 с.
6. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач теплопереноса. – М.: Энергия, 1971. – 384 с.
7. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 341 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики – М.: Наука, 1977. – 736 с.
9. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980. – 688 с.
10. Цой, П.В. Методы расчета задач теплопереноса – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 416 с.

Учебное издание

*Седельников Андрей Валерьевич,  
Алексеев Алексей Владимирович*

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ИНЖЕНЕРНЫХ МЕТОДОВ  
В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

*Учебное пособие*

Текст печатается в авторской редакции  
Редакционно-издательская обработка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 25.10.2022. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печ. л. 4,5.  
Тираж 25 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086, Самара, Московское шоссе, 34.