МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

О.П. ЧОСТКОВСКАЯ, И.В. ЧЕРНЯКИНА, О.Л. СТАРИНОВА

РЕШЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева» в качестве учебно-методического пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.02 Системы управления движением и навигация и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов

САМАРА

Издательство Самарского университета
2023

УДК 517.925(075)
ББК В161.61я7
Ч-756

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук А. А. Б у х а н ь к о,
д-р тех. наук П. К. К у з н е ц о в

Чостковская, Ольга Петровна

Ч-756 Решение и применение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем: учебно-методическое пособие / *О.П. Чостковская, И.В. Чернякина, О.Л. Старинова*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 126 с.

ISBN 978-5-7883-1901-8

Рассмотрены основные виды обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, а также методы их решения. Рассмотрены способы применения обыкновенных дифференциальных уравнений для решения задач геометрического, физического и технического характера. Разработаны задания для самостоятельного решения и приведены ответы.

Рекомендовано в качестве учебно-методического пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.02 Системы управления движением и навигация и специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов.

Разработано на кафедре высшей математики Самарского университета.

УДК 517.925(075)
ББК В161.61я7

ISBN 978-5-7883-1901-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений относится к числу дисциплин, формирующих фундаментальное математическое образование обучающихся специальностей инженерной направленности. Учебно-методическое пособие разработано на кафедре высшей математики Самарского университета и посвящено, в основном, методикам аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков и их систем. Рассматриваются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли и Эйлера, уравнения в полных дифференциалах, системы линейных дифференциальных уравнений с переменными и постоянными коэффициентами. По всем темам приведены задания для самостоятельного решения и ответы к ним.

Кроме того, в учебно-методическом пособии приведены подходы к решению различных задач геометрического, физического и инженерного содержания, сводящихся к решению дифференциальных уравнений и их систем. Отдельно рассмотрены задачи механики полёта и космонавтики, в решении которых используются дифференциальные уравнения и их системы.

Рекомендовано в качестве учебно-методического пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.02 Системы управления движением и навигация.

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Основные понятия

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее функцию, независимые переменные и производные или дифференциалы этой функции.

Если искомая функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**.

Наивысший порядок производной от искомой функции, входящей в уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Уравнение вида $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ - это дифференциальное уравнение n-го порядка. Искомая функция y, независимая переменная - x.

В первой части учебного пособия мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка, т.е. в уравнении будет участвовать только производная первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0,$$

или уравнение разрешённое относительно производной

$$y' = f(x, y).$$

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать независимая переменная или/и искомая функция, но это не существенно - важно, чтобы в ДУ была первая производная y' и не было производных высших порядков y'', y''' и т.д.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид $y=\varphi(x,\ c)$, где c - произвольная постоянная, которое называется **общим решением дифференциального уравнения**.

Решение дифференциального уравнения в неявном виде $\Phi(x,y,c)=0$ называется **общим интегралом дифференциального уравнения**.

Придавая константе c различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным **начальным условиям** (НУ) $y(x_0)=y_0$ называется **задачей Коши**.

Т.е. из всего множества функций, являющихся решениями данного ДУ, требуется выделить одно, проходящее через заданную точку.

Пример 1

Проверить, что функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ является частным решением дифференциального уравнения $xy'+y=\cos x$.

Решение:

Найдём производную от данной функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ и подставим её в уравнение $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,

$$x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}=\cos x,\ \ \frac{x\cos x-\sin x+\sin x}{x}=\cos x,\ \ \cos x\equiv\cos x.$$

Получили верное тождество. Таким образом, наша функция удовлетворяет данному ДУ.

Пример 2

Составить дифференциальное уравнение первого порядка, для которого кривая $y = cx^3$ является решением.

Решение:

Чтобы построить ДУ, которому удовлетворяют кривые семейства $F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$, надо продифференцировать это равенство n раз, считая y функцией от x, а затем из полученных уравнений и исходного уравнения исключить произвольные постоянные.

В нашей задаче дано семейство функций с одной константой c, поэтому надо найти только первую производную $y' = 3cx^2$, а затем из этого уравнения и заданной кривой исключить постоянную c.

$$\begin{cases} y = cx^3 \\ y' = 3cx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{y}{x^3} \\ y' = 3\dfrac{y}{x^3}x^2 \end{cases} \Rightarrow y' = 3\frac{y}{x} \Rightarrow \text{получим ответ}$$

$xy' = 3y$.

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения первого порядка представляет собой семейство кривых на плоскости xOy, зависящее от одной произвольной постоянной c. Эти кривые называются **интегральными кривыми** данного уравнения.

Частному решению соответствует одна интегральная кривая, проходящая через заданную точку.

Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешённое относительно первой производной: $y' = f(x, y)$. Это уравнение для каждой точки $M(x, y)$ определяет значение производной y', т.е. задаёт угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Таким образом, рассматриваемое дифференциальное уравнение даёт совокупность направлений или, определяет поле направлений или **поле изоклин**.

Геометрическое место точек плоскости xOy, в которых наклон касательных к интегральным кривым уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется **изоклиной**. **Уравнение изоклины** имеет вид $c = f(x, y)$, где c - постоянная.

Задача интегрирования такого уравнения, с геометрической точки зрения, заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля изоклин в соответствующих точках.

Пример 3

Рассмотрим уравнение $xy' + y = 3$. Выразим производную $y' = \dfrac{3-y}{x}$. Обозначим $y' = c$. Получим уравнение изоклин $c = \dfrac{3-y}{x} \Rightarrow cx = 3 - y \Rightarrow y = 3 - cx$.

В таблице 1 приведены уравнения изоклин и значения углов наклона касательной для различных значений константы c.

Таблица 1. К построению изоклин

$c = y' = tg\alpha$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	0	$\pm 1/\sqrt{3}$
Уравнение изоклины	$y = 3 \mp x$	$y = 3 \mp \sqrt{3}x$	$y = 3$	$y = 3 \mp \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$
Угол между касательной и положительным направлением оси OX	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$0°$	$\pm 30°$

Угол наклона касательной вычисляется как $arctg(c)$. Обратите внимание, что верхние знаки в таблице 1 соответствуют положительным значениям константы c, а нижние – отрицательным. Построенное поле изоклин и интегральная кривая, проходящую через точку $M(4,4)$, показаны на рисунке 1.

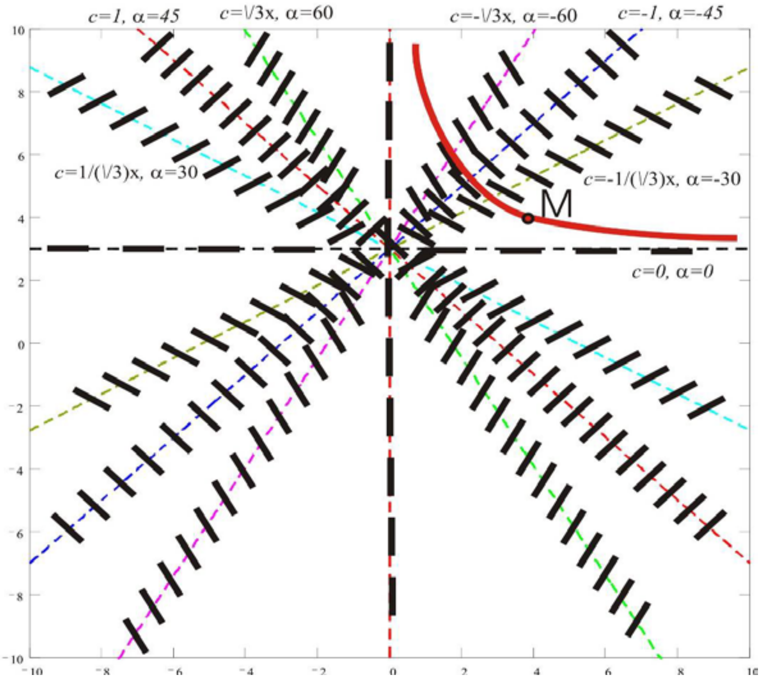

Рисунок 1. Поле изоклин и интегральная кривая для Примера 3

Задания для самостоятельного решения

Показать, что заданные выражения являются общим решением соответствующих ДУ:

1. $y = x\left(c - \ln|x|\right)$, $\quad (x-y)dx + xdy = 0$;

2. $2x + y - 1 = ce^{2y-x}$, $\quad (2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$.

В заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющее заданному НУ:

3. $y\left(\ln\left|x^2-1\right| + c\right) = 1$, $\quad y(0) = 1$;

4. $y(1-cx) = 1$, $\quad y(1) = 0{,}5$;

5. $y = 2 + c\cos x$, $\quad y(0) = -1$.

Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий:

6. $y = e^{cx}$;

7. $y = (x - c)^3$;

8. $cy = \sin(cx)$;

9. $x^2 + cy^2 = 2y$;

10. $(x - a)^2 + by^2 = 1$;

11. $y = ax^2 + be^x$;

12. $x = ay^2 + by + c$.

13. Центры окружностей радиуса 1, лежат на прямой $y = 2x$. Составить ДУ этих окружностей.

14. Составить ДУ парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

15. Составить ДУ всех окружностей, касающихся оси абсцисс.

16. С помощью изоклин начертить (приближённо) решения данных уравнений:

17. $y' = y - x^2$;

18. $2(y + y') = x + 3$;

19. $xy' = 2y$;

20. $yy' + x = 0$.

Ответы

3. $y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1$;

4. $y(1 + x) = 1$;

5. $y = 2 - 3\cos x$;

6. $y = e^{\frac{xy'}{y}}$;

7. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$;

8. $y' = \cos\dfrac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}$;

9. $x^2y' - xy = yy'$;

10. $\left(yy'' + y'^2\right)^2 = -y^3y''$;

11. $x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$;

12. $y'''y' = 3y''^2$;

13. $(y-2x)^2(y'^2+1) = (2y'+1)^2$;

14. $xy'^2 = y(2y'-1)$;

15. $(yy'' + y'^2 + 1)^2 = (y'^2+1)^3$.

1.2 ДУ с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.1}$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \tag{1.2}$$

называются дифференциальными уравнениями первого порядка **с разделяющимися переменными**.

Для решения такого уравнения надо «разделить переменные», т.е. добиться того, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую - только y, и затем проинтегрировать обе части.

Для уравнения вида (1.1). Мы знаем, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Подставляем в уравнение и получаем $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. Умножаем на dx и делим на $g(y)$: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. И теперь интегрируем $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Для уравнения (1.2). Перенесём первое слагаемое вправо $P(x)Q(y)dy = -M(x)N(y)dx$, разделим уравнение на $P(x)$ и на $N(y)$ $\frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\frac{M(x)}{P(x)}dx$ и проинтегрируем

$$\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = -\int \frac{M(x)}{P(x)}dx .$$

Пример 1

Решить уравнение $dy = (8x^3 - 5)dx$.

Решение:

Это уравнение с разделёнными переменными, т.е. левая часть уравнения содержит только *y*, а правая - только *x*. Чтобы его решить возьмём интегралы от левой и правой части уравнения:

$$\int dy = \int (8x^3 - 5)dx,$$

$$y = 2x^4 - 5x + c.$$

Как мы помним, любой интеграл – это множество первообразных. Здесь два интеграла, но константу c достаточно поставить один раз. В большинстве случаев её записывают в правую часть решения (там, где x). Если добавить постоянные и в левой, и в правой части, то потом надо будет перенести их в одну сторону и сложить *(константа + константа = другая константа)*.

Мы получили множество функций. Это общее решение.

Пример 2

Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение:

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные: все, что с y оставляем слева, а с x переносим вправо: $ydy = -xdx$.

Получили уравнение с разделёнными переменными.

Теперь можно проинтегрировать левую и правую часть

$$\int ydy = -\int xdx,$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c.$$

Ответ получился в виде неявно заданной функции, а вернее семейства функций. Т.е. мы получили общий интеграл.

Пример 3

Решить уравнение $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Решение:

Здесь в уравнение в явном виде входит производная, а не дифференциалы. Что бы проинтегрировать уравнение, нам нужны дифференциалы. Перейдём к дифференциалам и разделим переменные:

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + 1 = y,\ \ x^2 y^2 dy = (y-1)dx,\ \ \frac{y^2 dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2}.$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Теперь можно интегрировать:

$$\int \frac{y^2 dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2},\ \ \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c.$$

При делении могли быть потеряны корни. $y - 1 = 0 \ \Rightarrow \quad y = 1, \quad x = 0$. Однако, они также могут быть решениями. Проверим это. Для этого подставим эти функции в рассматриваемое ДУ. Очевидно, что $y = 1$ - решение, а $x = 0$ - нет. Причём $y = 1$ не при каких значениях постоянной c не может содержаться в найденном решении (так как не входит в область определения функции $\ln|y-1|$). Такие решения называют особыми и их нужно записывать в ответ отдельно.

Выполним проверку для общего интеграла. Запишем общий интеграл в виде $\dfrac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| + \dfrac{1}{x} = c$ и продифференцируем его:

$$d\left(\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|+\frac{1}{x}\right)=dc,\ \ ydy+dy+\frac{1}{y-1}dy-\frac{1}{x^2}dx=0,$$

$$\frac{y(y-1)+y-1+1}{y-1}dy-\frac{1}{x^2}dx=0,\ \ y^2x^2dy-(y-1)dx=0,$$

$$y^2x^2y'-y+1=0.$$

Мы получили наше уравнение, значит решение найдено верно. Итак, ответ: $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|+\frac{1}{x}=c$ - общий интеграл, $y=1$ - особое решение.

Пример 4

Решить уравнение $xydx+(x+1)dy=0$.

Решение:

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$(x+1)dy=-xydx,\ \ \frac{dy}{y}=-\frac{xdx}{x+1}.$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Теперь интегрируем.

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{xdx}{x+1},\ \ \ln|y|=-x+\ln|x+1|+c^*,\ \ \ln\left|\frac{y}{x+1}\right|=c^*-x,$$

$$y=\pm(x+1)e^{c^*-x}, y=\pm(x+1)e^{c^*}e^{-x}, y=c(x+1)e^{-x}.$$

В последней строке мы обозначили $\pm e^{c^*}=c$. Получили общее решение.

Однако в процессе решения мы делили на выражения, содержащие переменные, а это значит, что мы могли потерять особые решения. Надо проверить! Во-первых, мы делили на $x+1$. Значит, могли потерять $x+1=0,\ \ x=-1$. Подставляем в уравнение и это корень. Во-вторых, $y=0$. И это тоже решение. НО! Это решение входит в общее решение при $c=0$, а $x=-1$ как раз-таки $y=0$.

Поэтому ответ: $y = c(x+1)e^{-x}$.

Пример 5

Решить задачу Коши $y' = -\frac{y}{x}, \qquad y(1) = 2$.

Решение:

Нам дано ДУ и НУ, т.е. это задача Коши.

Сначала мы находим общее решение

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \ln c, \qquad y = \frac{c}{x}.$$

Теперь подставляем заданные начальные условия и находим c:

$$y = \frac{c}{x}, \qquad 2 = \frac{c}{1}, \qquad c = 2.$$

Найденное значение c подставляем в общее решение и получаем $y = \frac{2}{x}$ - частное решение. Это одна из множества функций, проходящая через заданную точку.

Сделаем проверку. Проверка частного решения включает в себя два этапа.

Первое: проверяем, а действительно ли найденное частное решение $y = \frac{2}{x}$ удовлетворяет начальному условию $y(1) = 2$? Подставляем в найденное частное решение $x = 1$. Получаем $y(1) = \frac{2}{1} = 2$ - верно, значит, начальное условие выполняется.

Второе: является ли эта функция решением нашего уравнения? Подставляем полученное частное решение $y = \frac{2}{x}$ и его производную $y' = -\frac{2}{x^2}$ в исходное уравнение $y' = -\frac{y}{x}$: $\quad -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$.

Получили верное равенство.

Таким образом, частное решение найдено правильно.

Уравнения **вида** $y' = f(ax+by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными **заменой** $z = ax+by$ (или $z = ax+by+c$, где c - любое)

Задания для самостоятельного решения

1. $xy(x^2+1)y' = 1+y^2$;
2. $(y^2+1)dx + yxdy = 0$;
3. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0)=1$;
4. $xy^2y' + x^2 - 1 = 0$;
5. $ydx + \operatorname{ctg} xdy = 0$;
6. $y'\sin^2 x - y\ln y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$;
7. $(x^2-1)y' + 2y^2x = 0, \quad y(0)=1$;
8. $xydx + (x+1)dy = 0$;
9. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$;
10. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1$;
11. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0$;
12. $2x^2yy' + y^2 = 2$;
13. $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right) = 1$;
14. $z' = 10^{x+z}$;
15. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0{,}5$;
16. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$;
17. $(xy^2+x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;
18. $xyy' = 1 - x^2$;

19. $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$;

20. $y'\sin x = y\ln y, \quad y\big|_{x=\pi/2} = e$;

21. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y\big|_{x=0} = 1$;

22. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$;

23. $y' - y = 2x - 3$;

24. $y' = \cos(y-x)$;

25. $(x+2y)y' = 1, \quad y(0) = -1$.

Ответы

1. $(1+y^2) = \dfrac{cx^2}{1+x^2}$;

2. $(1+y^2)x^2 = c$;

3. $y^2 = 2\ln\left|1+e^x\right| + 1 - \ln 4$;

4. $\dfrac{y^3}{3} = -\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + c$;

5. $y = c \cdot \cos x$;

6. $\ln|\ln y| = -\operatorname{ctg} x$;

7. $y(\ln\left|x^2-1\right|+1) = 1$;

8. $\ln|y| = x - \ln|x+1| + c, \quad x = -1$;

9. $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + c$;

10. $y = 2 - 3\cos x$;

11. $y = (x-2)^3$;

12. $\ln\left|2-y^2\right| = \dfrac{1}{x} + c$;

13. $\ln\left|\frac{e^s-1}{e^s}\right|=t+c$;

14. $10^{-z}=-10^x+c$;

15. $\frac{y-1}{y}=-x$;

16. $x^2+t^2-2t=c$;

17. $1+y^2=c(1-x^2)$;

18. $x^2+y^2=\ln\left(cx^2\right)$;

19. $y=\sqrt[3]{c+3x-3x^2}$;

20. $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;

21. $y=\frac{1+x}{1-x}$;

22. $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+c$;

23. $2x+y-1=ce^x$;

24. $\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=x+c$;

25. $x+2y+2=0$.

1.3 Однородные ДУ 1-го порядка

ДУ 1-го порядка называется **однородным,** если его можно привести к виду

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.3}$$

или к виду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{1.4}$$

где $M(x,y),\ N(x,y)$ - однородные функции одного и того же порядка, т.е. существует такое $k \in Z,\ \lambda \neq 0,$ что $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y)$ и $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x,y)$.

Для решения однородного уравнения делаем замену $\frac{y}{x} = u(x)$, тогда $y = u \cdot x, \quad y' = u'x + u$. После подстановки, уравнение преобразовывается в ДУ с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \tag{1.5}$$

где $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ приводится к однородным с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Делаем ***замену*** $y = z + y_0, \quad x = t + x_0$, где x_0, y_0 - решение системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$.

Если же эти выражения равны, то с помощью замены $u(x) = a_1 x + b_1 y(x)$ уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Некоторые уравнения можно привести к однородному, с помощью **замены** $y = z^m$. Показатель нам не известен, мы будем его подбирать так, чтобы уравнение стало однородным. Если это невозможно, то уравнение не приводится к однородному.

Пример 1

Найти общее решение ДУ $y' = \frac{x+y}{x}$.

Решение:

Проверим, что данное уравнение однородное. Для этого вместо x подставим λx и вместо y - λy:

$y' = \dfrac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x}, \quad y' = \dfrac{\lambda(x+y)}{\lambda x}, \quad y' = \dfrac{x+y}{x}$. Выражение в правой части не изменилось, значит это однородная функция 0-го порядка и наше ДУ — однородное.

Положим $\dfrac{y}{x} = u(x)$. Тогда $y' = u'x + u$. Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$u'x + u = 1 + u, \ u'x = 1, \ \frac{du}{dx}x = 1,$$

$$du = \frac{dx}{x}, \ \int du = \int \frac{dx}{x}, \ u = \ln|x| + \ln c, \ u = \ln c|x|.$$

И возвращаемся к старой переменной:

$$\frac{y}{x} = \ln c|x|, \ y = x\ln c|x|..$$

Получили общее решение.

Пример 2

Решить уравнение $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

Решение:

Проверим, что данное уравнение однородное. Для этого вместо x подставим λx и вместо y - λy: $2\lambda^3x^3y' = \lambda y\left(2\lambda^2x^2 - \lambda^2y^2\right)$

Выражение в правой и левой части сокращаются на λ^3, значит это однородное уравнение 3-го порядка. Преобразуем исходное уравнение:

$$y' = \frac{y(2x^2 - y^2)}{2x^3}, \ y' = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{2x^3}.$$

Положим $\dfrac{y}{x} = u(x)$. Тогда $y' = u'x + u$. Подставляя это в уравнение, получим

$$u'x+u=u-\frac{1}{2}u^3,\ u'x=-\frac{1}{2}u^3,\ \frac{du}{dx}x=-\frac{1}{2}u^3,$$

$$\frac{du}{u^3}=-\frac{dx}{2x},\ \int\frac{du}{u^3}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2u^2}=-\frac{1}{2}\ln|x|+\ln c,\ \frac{1}{u^2}=\ln\frac{|x|}{c}.$$

Сделаем обратную замену:

$$\frac{x^2}{y^2}=\ln\frac{|x|}{c},\quad y^2=\frac{x^2}{\ln\frac{|x|}{c}}.$$

Получили общий интеграл. Из-за деления уравнения на x, мы могли потерять решение $x=0$. Проверяем, видим, что решением не является. Ещё мы делили на $u=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$. Проверяем и видим, что $y=0$ - особое решение.

Пример 3

Решить уравнение $2x^2y'=y^3+xy$.

Решение:

Оно не однородное, но его можно привести к однородному с помощью **замены** $y=z^m$. Показатель нам не известен, мы будем его подбирать так, чтобы уравнение стало однородным. Подставим в уравнение:

$$2mx^2z^{m-1}z'=z^{3m}+xz^m.$$

Это уравнение будет однородным, если степени всех его членов будут равны между собой, т.е.

$$2+m-1=3m=1+m \quad \Rightarrow \quad m=\frac{1}{2}.$$

Итак, данное уравнение приводится к однородному с помощью замены $y = z^{\frac{1}{2}}$.

$$x^2 z^{-\frac{1}{2}} z' = z^{\frac{3}{2}} + x z^{\frac{1}{2}},\ z' = \frac{z^{\frac{3}{2}} + x z^{\frac{1}{2}}}{x^2 z^{-\frac{1}{2}}},\ z' = \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{z}{x}.$$

Делаем замену $\frac{z}{x} = u(x)$. Тогда $z' = u'x + u$. Подставляем в уравнение и получаем

$$u'x + u = u^2 + u,\ u'x = u^2,\ \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},\ -\frac{1}{u} = \ln c|x|,\ -\frac{x}{z} = \ln\frac{|x|}{c},\ -\frac{x}{y^2} = \ln\frac{|x|}{c}.$$

Получили общий интеграл. Из-за деления чуть не потеряли ещё решение $y = 0$.

Пример 4

Решить уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

Решение:

Это **уравнение вида** $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, где $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Найдём точку пересечения прямых $2x - y + 1 = 0$ и $2y - x - 1 = 0$.

$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$. Таким образом, для приведения уравнения к однородному необходимо сделать замену $x = t - \frac{1}{3},\quad y = z + \frac{1}{3},\quad dx = dt,\quad dy = dz$.

Подставляем в исходное уравнение и получаем $(2t-z)dt+(2z-t)dz=0$ - это однородное уравнение 0-го порядка. Значит, делаем замену $\dfrac{z}{t}=u(t), \quad z=ut$. Тогда $z'=u't+u$. Подставляя это в уравнение, получим

$$(2t-ut)+(2ut-t)(u't+u)=0,\ u't+u=\frac{u-2}{2u-1},$$

$$u't=\frac{-2u^2+2u-2}{2u-1},\ \frac{(2u-1)du}{u^2-u+1}=\frac{-2dt}{t},$$

$$\int\frac{(2u-1)du}{u^2-u+1}=-2\int\frac{dt}{t},$$

$$\ln\left|u^2-u+1\right|=\ln Ct^{-2},\ u^2-u+1=\frac{C}{t^2}.$$

Делаем обратную замену

$\left(\dfrac{z}{t}\right)^2-\dfrac{z}{t}+1=\dfrac{c}{t^2}, \quad z^2-zt+t^2=c$, и возвращаемся к нашим переменным $y^2-yx+x^2-y+x=c.$ Получили общий интеграл.

Задания для самостоятельного решения

1. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$;
2. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$;
3. $y^2+x^2y'=xyy'$;
4. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}, \quad y(1)=1$;
5. $\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0, \quad y(1)=1$;
6. $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0, \quad y(1)=0$;

7. $(x^2+xy)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$;

8. $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$;

9. $(y+2)dx-(2x+y-4)dy=0$;

10. $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$;

11. $(x^2+y^2)y'=2xy$;

12. $2y+(x^2y+1)xy'=0$;

13. $2y'+x=4\sqrt{y}$;

14. $(2x-y+4)y'+x-2y+5=0$;

15. $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$.

Ответы:

1. $e^{-y/x}=\ln\dfrac{1}{cx}$;

2. $2\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln c(x^2+y^2)$;

3. $y=x\ln cy$;

4. $y=xe^{1-x}$;

5. $\ln|y|+2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2$;

6. $y=\dfrac{1}{2}(x^2-1)$;

7. $\arcsin\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=c$;

8. $\sin\dfrac{y}{x}=cx$;

9. $x+y-1=c(y+2)^2$;

10. $(y-2x)^3 = c(x-y-1)^2$;

11. $y^2 - x^2 = cy, \quad y = 0$;

12. $\ln\dfrac{c}{\sqrt{y}} = -\dfrac{1}{2yx^2}$;

13. $\left(2\sqrt{y}-x\right)\ln c\left(2\sqrt{y}-x\right) = x, \quad 2\sqrt{y} = x$;

14. $y - x - 3 = c(x+y-1)^3, \quad y + x - 1 = 0$;

15. $1 + y^2x^2 = cy, \quad y = 0$.

1.4 Линейные ДУ 1-го порядка и уравнение Бернулли

Линейным ДУ 1-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной. Оно имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Методы решения. Существует два метода решения уравнений такого вида – метод Бернулли и метод Лагранжа. Рассмотрим первый из них – метод Бернулли. Искать решение данного уравнения будем в виде произведения двух функций $y(x) = u(x)\cdot v(x)$, тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим эти выражения в наше уравнение:

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x).$$

Функцию $v = v(x)$ выберем таким образом, чтобы выражение в круглой скобке обратилось в ноль, т.е. $v' + p(x)v = 0$. Учитывая равенство нулю выражения в скобках, получим уравнение $u'v(x) = q(x)$. Таким образом, мы получили систему двух уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v(x) = q(x). \end{cases}$$

Решая первое уравнение, определяем какое-либо частное решение (значение произвольной постоянной возьмём любое, которое нам нравиться) – функцию $v = v(x)$. Подставим её в исходное уравнение получим $u'v(x) = q(x)$. Это тоже уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим $u = u(x) + c$. Тогда общее решение исходного уравнения равно произведению найденных решений первого и второго уравнения системы $y = v(x)\left(u(x) + c\right)$.

Таким же способом можно решать и ещё один близкий вид уравнений – уравнение Бернулли.

Уравнением Бернулли называется ДУ 1-го порядка вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

где $m \neq 0, m \neq 1$.

При $m = 0$ уравнение становится линейным, а при $m = 1$ - уравнением с разделяющимися переменными.

Метод решения такой же, как и для линейного. Или можно свести к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-m}$, но этот путь сложнее, так как приходится делать лишнюю замену переменной и дополнительные преобразования, в которых легко запутаться.

Мы упоминали, что линейное уравнение можно решать и другим способом, предложенным Лагранжем. Этот же метод часто называется методом вариации произвольной постоянной. Лагранж предложил на первом этапе считать, что правая часть исходного уравнения (функция $q(x)$) равна нулю. Получаем общее решение получившегося уравнения с разделяющимися переменными

$$y' + p(x)y = 0$$

в виде $c \cdot y_0\left(x\right)$ где c - произвольная постоянная. Затем, считая, что c является функцией, находим её выражение, подставляя $y\left(x\right) = c\left(x\right) \cdot y_0\left(x\right)$ в исходное уравнение.

Уравнением Риккати называется ДУ 1-го порядка вида

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x).$$

В общем случае оно не решается. Но, если нам известно одно какое-либо частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения, то общее решение можно найти с **помощью замены** $z = y - y_1(x)$. При этом, уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли. Иногда частное решение удаётся подобрать по виду свободного члена уравнения (члена, который не содержит y).

Пример 1

Найти общее решение уравнения $xy' - y = x^2 \cos x$.

Решение:

Сначала приведём уравнение к стандартному виду. Для этого разделим его на икс (x=0 не является корнем уравнения): $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$. Мы получили линейное уравнение, в котором $p(x) = \dfrac{1}{x},\quad q(x) = x\cos x$. Ищем его решение методом Бернулли: $y = u(x)\cdot v(x),\quad y' = u'v + v'u$. Подставляем в наше уравнение $u'v + u\left(v' - \dfrac{1}{x}v\right) = x\cos x$ и формируем систему уравнений:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{1}{x}v = 0, \\ u'v = x\cos x, \end{cases}$$

Решаем первое уравнение

$$v' - \frac{1}{x}v = 0,\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},\ \ln|v| = \ln|x|,\ v = x.$$

Напоминаем, что мы ищем любое частное решение, поэтому не добавляем никакую произвольную постоянную.

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы и решаем его.

$u'x = x\cos x,\ u' = \cos x,\ du = \cos x dx,$

$\int du = \int \cos x dx,\ u = \sin x + c.$

Теперь мы можем записать общее решение $y = uv = x(\sin x + c)$

Пример 2

Решить уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y}$.

Решение:

Это уравнение Бернулли. Ищем его решение в виде произведения функций $y = u(x)\cdot v(x),\quad y' = u'v + v'u$. Подставляем в наше уравнение $u'v + u\left(v' - \dfrac{v}{x}\right) = \dfrac{x^2}{uv}$ и получаем систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{x^2}{uv}. \end{cases}$$

Берём первое уравнение системы и находим его частное решение:

$v' - \dfrac{1}{x}v = 0,\ \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x},\ \ln|v| = \ln|x|,\ v = x.$

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы и находим вторую неизвестную функцию

$u'x = \dfrac{x^2}{ux},\ u' = \dfrac{1}{u},\ udu = dx,$

$\int udu = \int dx,\ \dfrac{u^2}{2} = x + c,\ u = \pm\sqrt{2x + c}.$

Записываем общее решение: $y = uv = \pm x\sqrt{2x + c}$.

Пример 3

Найти общее решение уравнения $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$.

Решение:

Разделим уравнение на коэффициент при производной (он не обращается в ноль).

$$y' + \frac{1}{x} y + y^2 = \frac{4}{x^2}.$$

Видим, что это уравнение Риккати. Чтобы в левой части уравнения были члены, аналогичные членам в правой части, частное решение подбираем в виде $y = \frac{a}{x}$. Эту функцию подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при подобных членах. Находим a.

$$y' = -\frac{a}{x^2},\ -\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2},\ \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2},\ a = \pm 2$$

Нам требуется всего лишь одно частное решение. Возьмём $y = \frac{2}{x}$. Мы подобрали частное решение ДУ. Делаем замену: $z = y - \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad y = z + \frac{2}{x}, \quad y' = z' - \frac{2}{x^2}$. Подставляем в уравнение:

$$z' - \frac{2}{x^2} + \frac{z}{x} + \frac{2}{x^2} + \left(z + \frac{2}{x} \right)^2 = \frac{4}{x^2}.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные и получаем уравнение Бернулли:

$$z' + \frac{5z}{x} = -z^2.$$

Решая его, получим $z = \frac{4}{cx^5 - x}$. Осталось вернуться к нашей переменной: $y = \frac{4}{cx^5 - x} + \frac{2}{x}$. Мы получили общий интеграл.

Задания для самостоятельного решения

1. $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$;
2. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$;
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
4. $y' = 2y - x + e^x, \quad y(0) = 1/4$;
5. $y' + 2y = y^2 e^x$;
6. $y' = y^4 \cos x + y\operatorname{tg} x$;
7. $xydy = (y^2 + x)dx$;
8. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$;
9. $y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2$;
10. $3dy = (1-3y^3)y\sin x dx, \quad y(\pi/2) = 1$;
11. $2y = (xy' - 1)\ln x$;
12. $y = (2x + y^3)y'$;
13. $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0, \quad y\left(1/2\right) = 1$;
14. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Решить уравнения Риккати:

15. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$;
16. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$;
17. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$;
18. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

Ответы:

1. $y = \sin x$;
2. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}} + c\right)$;
3. $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$;
4. $y = e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$;
5. $y(e^x + ce^{2x}) = 1, \quad y = 0$;
6. $y^{-3} = c \cdot \cos^3 x - 3\sin x \cos^2 x, \quad y = 0$;
7. $y^2 = cx^2 - 2x, \quad x = 0$;
8. $y^2 = 2x^2 - 2 + c\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}$;
9. $y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c\right)$;
10. $y^3 = \frac{1}{3 - 2e^{\cos x}}$;
11. $y = c\ln^2 x - \ln x$;
12. $x = y^2(y + c)$;
13. $x^2 = \frac{1}{y + 3y^2}$;
14. $y = x^4 \ln^2 cx, \quad y = 0$;
15. $y = x + \frac{x}{x + c}, \quad y = x$;
16. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + cx^{\frac{2}{3}}}, \quad y = \frac{1}{x}$;

17. $y = x + 2 + \dfrac{4}{ce^{4x} - 1}, \quad y = x + 2$;

18. $y = e^{x} - \dfrac{1}{x + c}, \quad y = e^{x}$.

1.5 Уравнения в полных дифференциалах

ДУ 1-го порядка вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. выполняются условия

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{1.6}$$

Тогда уравнение в полных дифференциалах можно записать в следующем виде $du(x,y) = 0$. Общий интеграл этого уравнения - $u(x,y) = c$.

<u>Метод решения:</u>

Необходимо найти функцию $u(x,y)$. Для этого проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, полагая y фиксированным. Произвольная константа, получившаяся при интегрировании, в этом случае будет зависеть от игрека

$$\partial u = M(x,y)\partial x, \;\; u(x,y) = \int M(x,y)\partial x + c(y). \tag{1.7}$$

Теперь из равенства $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ получаем

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + c'(y) = N(x,y)$. Из этого уравнения находим $c(y)$. Подставляем в (1.7) и получаем функцию $u(x,y)$.

Пример 1

Решить уравнение $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$.

Решение:

Для начала выясним, будет ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Проверим выполняется ли условие (1.6).

$M(x,y) = \dfrac{y}{x}, \quad N(x,y) = y^3 + \ln x$.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Итак, условие (1.6) выполнено и наше уравнение — это уравнение в полных дифференциалах. Найдём функцию $u(x,y)$.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = \frac{y}{x}, \;\; \partial u = \frac{y}{x}\partial x,$$

$$\int \partial u = \int \frac{y}{x}\partial x, \;\; u = y\ln x + c(y), \tag{1.8}$$

Далее найдём производную этой функции по игреку $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\big(y\ln x + c(y)\big) = \ln x + c'(y)$. Т.к. в левой части уравнения стоит полный дифференциал функции $u(x,y)$, то $N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Приравняем наши выражения:

$$y^3 + \ln x = \ln x + c'(y), \;\; c'(y) = y^3,$$

$$\frac{dc(y)}{dy} = y^3, \;\; \int dc(y) = \int y^3 dy, \;\; c(y) = \frac{y^4}{4} + c_1.$$

Подставим найденную функцию в (1.8):

$u = y\ln x + \dfrac{y^4}{4} + C_1$. Мы нашли функцию, полный дифференциал которой стоит в левой части нашего уравнения, т.е. исходное уравнение приняло вид: $d\left(y\ln x + \dfrac{y^4}{4} + c_1 \right) = 0$. Значит $y\ln x + \dfrac{y^4}{4} + c_1 = c_2$. Обозначим $c_2 - c_1 = c$ и получим общий интеграл исходного уравнения: $y\ln x + \dfrac{y^4}{4} = c$.

Задания для самостоятельного решения

1. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0, \quad y(2) = -1$;
2. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$;
3. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$;
4. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$;
5. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$;
6. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$;
7. $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$;
8. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0, \quad y(1) = \pi/2$;
9. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y} \right)dy$.

Ответы:

1. $x^2+xy+y^2=3$;
2. $3x^2y-y^3=c$;
3. $xe^{-y}-y^2=c$;
4. $x^2-3x^3y^2+y^4=c$;
5. $x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}=c$;
6. $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=c$;
7. $x-y^2\cos^2 x=c$;
8. $4x^2\cos^2 y+4y^2=\pi^2$;
9. $x^3+x^3\ln y-y^2=c$.

2 Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

В этой части учебного пособия мы займемся дифференциальными уравнениями, в которые входят производные порядка выше первого.

Рассмотрим несколько дифференциальных уравнений высших порядков, порядок которых может быть понижен с помощью некоторых замен.

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Метод решения:

Общее решение данного уравнения находится n-кратным последовательным интегрированием:

$$y^{(n)} = f(x) \quad \Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + c_1\right)dx + c_2 \quad \Rightarrow \ldots \quad \Rightarrow \quad y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

2. Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Как мы видим, в уравнение <u>не входит искомая функция y</u>.

Метод решения:

Заменяем низшую из производных от неизвестной функции, входящую в уравнение, на новую неизвестную функцию того же аргумента $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \quad y^{(k+2)} = z''(x)$ и т.д.

В частности, *ДУ 2-го порядка* $F(x, y', y'') = 0$ с помощью замены $y' = z(x), \quad y'' = z'(x)$ сводится к уравнению 1-го порядка для неизвестной функции $z = z(x)$: $F_1(x, z, z') = 0$.

3. Уравнения вида $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.

В этом случае в уравнение не входит независимая переменная x.

Метод решения:

Для уравнений этого вида мы меняем переменную дифференцирования. В роли новой независимой переменной будет выступать *y*. Для этого делаем замену $y' = p(y)$. При этом нужно внимательно вычислить все производные, входящие в дифференциальное уравнение, не забывая о том, что *y* зависит от *x*. Например, *для уравнения 2-го порядка* $F(y, y', y'') = 0$ имеем: $y' = p(y)$, $y''_{xx} = p'_y(y) \cdot y'_x = p'_y p\left(y\right)$ (производную от $y' = p(y)$ вычисляем как производную сложной функции) получаем уравнение 1-го порядка для функции $p = p(y)$: $F_1(y, p, p') = 0$.

4. Уравнения вида $\dfrac{d}{dx}F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = 0$.

В уравнении левая часть представлена как полная производная по *x* от некоторой функции $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$.

Метод решения:

Проинтегрируем уравнение по *x*. Получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения.

5. Уравнения $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, однородные относительно функции и её производных, то есть выполняется:

$$F(x, ty, ty', ty'', ..., ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}), \quad t \neq 0.$$

Метод решения:

Используем замену $y' = yz, \quad z = z(x)$. Вычисляем старшие производные, входящие в уравнение $y'' = y'z + z'y = yzz + z'y = y(z^2 + z'), \quad \dots$. Порядок уравнения при этом понижается на единицу.

Пример 1

Найти общее решение ДУ $y''' = e^{2x}$.

Решение:

$$y''' = e^{2x}; \quad \frac{dy''}{dx} = e^{2x}; \qquad dy'' = e^{2x}dx;$$

$$\int dy'' = \int e^{2x}dx, \ \ y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1, \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1,$$

$$dy' = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1\right)dx, \ \int dy' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1\right)dx, \ \ y' = \frac{1}{4}e^{2x} + c_1x + c_2,$$

$$dy = \left(\frac{1}{4}e^{2x} + c_1x + c_2\right)dx, \ \int dy = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + c_1x + c_2\right)dx,$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3.$$

Получили общее решение.

Пример 2

Найти общее решение обыкновенного ДУ $x^2y'' = (y')^2$.

Решение:

Видим, что в нашем уравнении отсутствует искомая функция $y = y(x)$. Поэтому делаем замену $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$ и уравнение принимает вид $x^2z' = z^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его.

$$x^2z' = z^2, \ \ \frac{x^2dz}{dx} = z^2, \ \ \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2},$$

$$\int\frac{dz}{z^2} = \int\frac{dx}{x^2}, \ \ -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + c_1, \ \ z = \frac{x}{1 - c_1x}.$$

Выполняем обратную замену $y' = \dfrac{x}{1 - c_1x}$. Опять получили уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$dy=\frac{xdx}{1-c_1x},\ \int dy=\int\frac{xdx}{1-c_1x},\ y=-\frac{x}{c_1}-\frac{\ln\left|c_1x-1\right|}{c_1^2}+c_2.$$

Пример 3

Найти общее решение ДУ $2yy''=(y')^2$

Решение:

В данное уравнение не входит x. Поэтому делаем замену $y'_x=p(y)$, $y''_{xx}=p'_y p$ и получаем уравнение $2yp'_y p=p^2$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его.

$$2yp'_y=p,\ \frac{2ydp}{dy}=p,\ \frac{2dp}{p}=\frac{dy}{y},$$

$$\int\frac{2dp}{p}=\int\frac{dy}{y},\ 2\ln\left|p\right|=\ln\left|c_1y\right|,\ p^2=c_1y,\ p=\pm\sqrt{c_1y}.$$

Делаем обратную замену: $y'=\pm\sqrt{c_1y}$. Мы вновь получили ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{c_1y},\ \frac{dy}{\sqrt{c_1y}}=\pm dx,\ \int\frac{dy}{\sqrt{c_1y}}=\pm\int dx,\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{c_1}}=c_2\pm x.$$

Получили общее решение.

Пример 4

Найти общее решение ДУ $yy''+y'^2=x$.

Решение:

Заметим, что левая часть уравнения есть полная производная по x от функции yy', а правая - от функции $\frac{x^2}{2}$, т.е. уравнение можно записать так: $\left(yy'\right)'=\left(\frac{x^2}{2}\right)'$. Интегрируем уравнение и получаем $yy'=\frac{x^2}{2}+C_1$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его.

$$ydy=\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)dx,\ \int ydy=\int\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)dx,\ \frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2.$$

Получили общий интеграл.

Пример 5

Найти общее решение ДУ $xyy''-xy'^2+2yy'=0$.

Решение:

Видим, что это уравнение однородное относительно функции и её производных. Поэтому делаем замену $y'=yz,\ z=z(x)$, $y''=y(z^2+z')$. Уравнение примет вид $xy^2(z^2+z)-xy^2z^2+2y^2z=0$. Сокращаем на y^2 (не теряем решение $y=0$). Получили

$$x(z^2+z')-xz^2+2z=0,\ xz'+2z=0,$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{2dx}{x},\ \int\frac{dz}{z}=-\int\frac{2dx}{x},\ z=c_1x^{-2}.$$

Делаем обратную замену:

$$y'=yc_1x^{-2},\ \frac{dy}{y}=c_1x^{-2}dx,\ \int\frac{dy}{y}=\int c_1x^{-2}dx,\ \ln|y|=-\frac{c_1}{x}+c_2.$$

Получили общий интеграл.

Задания для самостоятельного решения

1. $y'''=\sin 2x,\qquad y(0)=\frac{1}{4},\quad y'(0)=\frac{1}{8},\quad y''(0)=-\frac{3}{8};$
2. $y^{(10)}=e^{ax};$
3. $xy^{\mathrm{IV}}=1;$
4. $y^{V}=\frac{3600}{x^7};$
5. $y'''=60x^2,\qquad y(-1)=1,\quad y'(-1)=0,\quad y''(-1)=4;$
6. $y'''=\frac{\ln x}{x^2},\qquad y(1)=0,\quad y'(1)=1,\quad y''(1)=2;$

7. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \qquad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4$;

8. $(x-3)y'' + y' = 0$;

9. $(1-x)y'' = y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

10. $(y''+1)x + y' = 0$;

11. $x^2 y''' = y''^2$;

12. $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$;

13. $y^3 y'' = 1$;

14. $yy'' = y'^2 - y'^3$;

15. $y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

16. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$;

17. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$;

18. $y''y(1-\ln y) + y'^2(1+\ln y) = 0$;

19. $y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;

20. $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$;

21. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$;

22. $y^3 y'' + 1 = 0$;

23. $yy'' - 2yy' \ln y - (y')^2 = 0$;

24. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

25. $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2yy'}{1+y^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

26. $y'' = 2yy'$;

27. $y''' = (y'')^2$;

28. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

29. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$;

30. $y'' = \dfrac{y - xy'}{x^2}$;

31. $\dfrac{y''^2 - y'y''}{y'^2} = \dfrac{1}{x^2}$;

32. $xy'' - y' = x^2 yy'$;

33. $y'y''' = 2y''^2$;

34. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$;

35. $xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4 y^3$;

36. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$;

37. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

Ответы:

1. $y = \dfrac{1}{8}\cos 2x + \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{8}$;

2. $y = \dfrac{e^{ax}}{a^{10}} + P_9(x)$;

3. $y = \dfrac{1}{6}x^3 \ln|x| + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$;

4. $y = -\dfrac{5}{x^2} + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5$;

5. $y = x^5 + 12x^2 + 19x + 9$;

6. $y = -\dfrac{x}{2}\ln^2 x + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{2}$;

7. $y = \dfrac{2\sqrt{2}x^2\sqrt{x}}{5} - \dfrac{16}{5}$;

8. $y = c_1 \ln|x - 3| + c_2, \quad y = c$;

9. $y = -\ln|1 - x|$;

10. $y=-\dfrac{x^2}{4}+c_1\ln|x|+c_2$;

11. $y=\dfrac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3-(c_1^2x+c_1^3)\ln|x+c_1|$;

12. $2y=c_1\cos 2x+(1+2c_1)x^2+c_2x+c_3$;

13. $\dfrac{\sqrt{c_1y^2-1}}{c_1}=\pm x+c_2$;

14. $y+c_1\ln|y|=x+c_2,\qquad y=c$;

15. $y=-\ln|x-1|$;

16. $e^y+c_1=\left(x+c_2\right)^2$;

17. $\operatorname{ctg} y=c_2+c_1x$;

18. $\dfrac{1}{1-\ln y}=c_1x+c_2$;

19. $y=(x-2)e^x+x+3$;

20. $y=c_2-\cos(x+c_1)$;

21. $y=\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^2}{2}+c_1x\ln|x|+c_2x+c_3$;

22. $\dfrac{1}{c_1}\sqrt{c_1y^2+1}=c_2\pm x$;

23. $\ln y=c_1\operatorname{tg}(C_1x+c_2),\ \ln\left|\dfrac{\ln y-c_1}{\ln y+c_1}\right|=2c_1x+c_2,$;

$(c-x)\ln y=1,\ \ y=c.$

24. $y=(c_1+\operatorname{arctg} x)x-\ln\sqrt{1+x^2}+c_2$;

25. $y=\operatorname{tg} x,\quad -\pi/2<x<\pi/2$;

26. $y = c_1 \operatorname{tg}(c_1 x + c_2), \quad \ln\left|\dfrac{y - c_1}{y + c_1}\right| = 2c_1 x + c_2,$

$y(c - x) = 1, \quad y = c.$

27. $y = c_3 - (x + c_1)\ln c_2 (x + c_1), \quad y = c_1 x + c_2;$

28. $y = 2\ln|x + 1| - x + 1;$

29. $y = \dfrac{1}{c_1} e^{c_1 x + 1}\left(x - \dfrac{1}{c_1}\right) + c_2, \quad y = \dfrac{ex^2}{2} + c;$

30. $y = \dfrac{c_1 x}{2} + \dfrac{c_2}{x};$

31. $y = c_2\left(x e^{c_1 x} - \dfrac{1}{c_1} e^{c_1 x}\right) + c_3;$

32. $y = 4c_1 \operatorname{tg}(c_1 x^2 + c_2), \quad 2\ln\left|\dfrac{y - c_1}{y + c_1}\right| = c_1 x^2 + c_2,$;

$y(c - x^2) = 4, \quad y = c;$

33. $y = -\dfrac{1}{c_1}\ln|c_1 x + c_2| + c_3, \quad y = c_1 x + c_2;$

34. $\ln|y| = \ln|x| - \dfrac{c_1}{x^2} + c_2;$

35. $y = c_2 e^{\frac{1}{3}\left(x^2 + c_1\right)^{3/2}};$

36. $y = \dfrac{c_2}{\cos^2(c_1 + x)};$

37. $\ln|y| = 4x^{5/2} + c_1 x + c_2.$

2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ)

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (2.1)$$

называется **линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка**.

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ уравнения (2.1) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения. Тогда, **общее решение** данного уравнения имеет вид

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x), \qquad (2.2)$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - произвольные постоянные.

Для выяснения вопроса о линейной независимости системы из n функций используется *определитель Вронского*:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Если всюду на интервале (a,b) *определитель Вронского равен нулю*, то система функций на этом интервале *линейно зависима*. Если же хотя бы в одной точке этого интервала определитель *отличен от нуля*, то система функций *линейно независима* на интервале (a,b).

2.2.1 ЛОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами

Запишем ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \qquad (2.3)$$

Пусть нам известно одно из его частных решений $y_1(x)$. Тогда второе решение, входящее в фундаментальную систему решений, можно найти по **формуле Лиувилля-Остроградского**

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx,$$

где x_0 - любое число из области непрерывности коэффициентов уравнения (2.3).

Пример 1

Дана система функций $x, \quad \cos x, \quad \sin x$. Убедиться в том, что на некотором интервале эта система линейно независима. Составить линейное однородное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений и запишем общее решение уравнения.

Решение:

Составим определитель Вронского и вычислим его:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x.$$

Так как определитель не равен нулю, то наша система функций линейно независима всюду, кроме $x = 0$, и, следовательно, образует фундаментальную систему решений для некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Запишем его общее решение (2.2) $y_{общ} = c_1 x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

Теперь составим требуемое уравнение. Для этого найдём производные общего решения до третьего порядка включительно и исключим произвольные постоянные:

$$y = c_1 x + c_2 \cos x + c_3 \sin x,$$
$$y' = c_1 - c_2 \sin x + c_3 \cos x,$$
$$y'' = -c_2 \cos x - c_3 \sin x,$$
$$y''' = c_2 \sin x - c_3 \cos x.$$

Умножаем первое и третье равенство на -1, а второе и четвёртое - на x и складываем все четыре равенства. Получаем

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0\,.$$

Осталось избавиться от коэффициента при старшей производной

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0\,.$$

Это и есть искомой уравнение. Область непрерывности коэффициентов $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, т.е. область, на которой определитель Вронского всюду отличен от нуля.

Пример 2

Проверить является ли функция $y_1(x) = x$ частным решением уравнения $y''(1+2x) + 4xy' - 4y = 0$. Найти общее решение этого уравнения.

Решение:

Приведём наше уравнение к стандартному виду. Для этого разделим обе части данного уравнения на $1 + 2x \neq 0$: $y'' + \dfrac{4xy'}{1+2x} - \dfrac{4y}{1+2x} = 0$. Коэффициенты этого уравнения $a_1(x) = \dfrac{4x}{1+2x}$, $a_2(x) = -\dfrac{4}{1+2x}$ непрерывны при $x \neq -\dfrac{1}{2}$, следовательно, решение дифференциального уравнения существует в области $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

Подставим $y_1(x) = x$ в наше уравнение и проверим является ли эта функция решением:

$$y_1'(x) = 1, \quad y_1''(x) = 0,$$

$$0 + \frac{4x}{1+2x} \cdot 1 - \frac{4}{1+2x} \cdot x = 0, \ \ 0 \equiv 0.$$

Итак, $y_1(x) = x$ является частным решением. Найдём второе частное решение по формуле Лиувилля-Остроградского.

$$\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{4x}{1+2x} dx = 2x - \ln(2x+1).$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{-2x+\ln(2x+1)}}{x^2} dx =$$

$$= x \int \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x^2} dx = x \cdot \left(-\frac{e^{-2x}}{x} \right) = -e^{-2x}.$$

Произвольную постоянную при вычислении неопределённого интеграла можно не писать, так как нас интересует любое частное решение.

Проверим полученную систему решений на линейную независимость. Вычислим определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x & -e^{-2x} \\ 1 & 2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-2x}(2x+1) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \neq -\frac{1}{2},$$ следовательно, решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимы.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1 x + c_2 e^{-2x}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми:

а) $x-2, \quad x+2$;

б) $\sin x, \quad \cos x$;

в) $1, \quad x, \quad x^2$;

г) $x^2 - x + 3, \quad 2x^2 + x, \quad 2x - 4$;

д) $1, \quad \sin^2 x, \quad \cos 2x$;

е) $\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} x, \quad 2 + e^x$;

ж) $2^x, \quad 3^x, \quad 6^x$;

з) $\ln x^2, \quad \ln 3x, \quad 7$;

и) $x, \quad e^x, \quad xe^x$.

2. Решить уравнение $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

3. Уравнение $\left(2x - x^2\right) y'' + \left(x^2 - 2\right) y' + 2\left(1 - x\right) y = 0$ имеет частное решение $y = e^x$. Найти решения уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = 0, \ y'\big|_{x=1} = 1$.

4. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$, если функция $y = e^x$ есть его частное решение.

5. Найти общее решение уравнения $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$, если функция $y = x$ - его частное решение.

6. Найти общее решение уравнения $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$. Первое частное решение найти путём подбора (в виде показательной или степенной функции).

7. Найти общее решение уравнения $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$. Первое частное решение найти путём подбора (в виде показательной или степенной функции).

Ответы:

1. а) нет, б) нет, в) нет, г) да, д) да, е) нет ж) нет, з) да, и) нет;
2. $y_{общ} = c_1 \dfrac{\cos x}{x} + c_2 \dfrac{\sin x}{x}$;
3. $y_ч = x^2 - e^{x-1}$;
4. $y = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$;
5. $y = c_1 x + c_2 \left(\dfrac{1}{2} x \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - 1 \right)$;
6. $y = c_1 x + c_2 \left(x \ln|x| + 1 \right)$;
7. $y = c_1 e^{2x} + c_2 (3x+1) e^{-x}$.

2.2.2 ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (2.4)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - любые действительные числа, называется **линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами**.

Уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \qquad (2.5)$$

полученное заменой производных искомой функции $y^{(m)}$ $(m = 0,1,\ldots,n)$ в уравнении (2.4), степенями k^m, называется **характеристическим уравнением**.

В зависимости от корней характеристического уравнения (2.5), выбираются частные, линейно независимые решения уравнения (2.4). Возможны два случая:

1) Каждому <u>*действительному корню*</u> k <u>*кратности*</u> r уравнения (2.5) соответствует r <u>*линейно независимых решений*</u> уравнения (2.4) $e^{kx}, xe^{kx},..., x^{r-1}e^{kx}$.

2) Каждой <u>*паре комплексных корней*</u> $k = \alpha \pm \beta i$ <u>*кратности*</u> s уравнения (2.5) соответствует s <u>*пар линейно независимых решений*</u> уравнения (2.4):

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Рассмотрим частный случай: **уравнения второго порядка**.

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q - любые действительные числа, называется **линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами**.

<u>Метод решения:</u>

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0.$$

В зависимости от дискриминанта D этого уравнения возможны три случая. Пусть k_1, k_2 корни этого уравнения, тогда

1) $k_1 \neq k_2$ — различные действительные корни ($D > 0$). Кратность этих корней равна 1. Получаем два частных, линейно независимых решения: $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$. Общее решение будет иметь вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

2) $k_1 = k_2 = k$ - равные действительные корни ($D = 0$). То есть, это действительный корень кратности 2. Получаем два частных, линейно независимых решения: e^{kx}, xe^{kx}. Общее решение будет иметь вид $y = c_1 e^{kx} + c_2 xe^{kx}$.

3) $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - пара комплексно-сопряжённых корней ($D < 0$). Кратность – 1. Получаем два частных, линейно независимых решения: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Общее решение будет иметь вид $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение. Заменим вторую производную на k^2, первую - на k, а саму функцию - на k^0, т.е. на 1. Получим квадратное уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$.

Решаем его. Получаем корень $k = -3$ кратности 2. Ему соответствует два линейно независимых решения: $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = xe^{-3x}$. Записываем общее решение:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$.

Решение:

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2i = 0 \pm 2i.$$

Ему соответствует два линейно независимых решения: $y_1 = e^{0 \cdot x} \cos 2x = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x$. Записываем общее решение:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Пример 3

Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение и решим его:

$k^6 + 2k^5 + k^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^4(k^2 + 2k + 1) = 0 \quad \Rightarrow$

1) $k^4 = 0$ - корень $k = 0$ кратности 4. Ему соответствует 4 линейно независимых решения:

$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \quad y_4 = x^3;$

2) $k^2 + 2k + 1 = 0$, имеет корень $k = -1$ кратности 2. Ему соответствует 2 линейно независимых решения: $y_5 = e^{-x}, \quad y_6 = xe^{-x}$.

Записываем общее решение:

$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + e^{-x}(c_5 + c_6 x)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
2. $2y'' - 5y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -\frac{1}{2}$;
3. $y'' - 4y' + 5y = 0$;
4. $y'' + 2y' + 10y = 0$;
5. $y'' - 4y' + 4y = 0$;
6. $y'' - 10y' + 25y = 0$;
7. $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$;
8. $y'' - 10y' + 26y = 0$;
9. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7$;
10. $y'' + 4y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$;
11. $3y'' - 2y' - 8y = 0$;
12. $y'' - 4y' + y = 0$
13. $y^{(4)} + 4y = 0$;
14. $y^{(4)} + y = 0$;

15. $y''' - 8y = 0$;

16. $y''' + 27y = 0$;

17. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$;

18. $y^{(4)} - y'' = 0$;

19. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;

20. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$;

21. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;

22. $y''' - y'' - y' + y = 0$;

23. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$;

24. $y^{(5)} = y', \quad y\big|_{x=0} = 0, \ y'\big|_{x=0} = 1, \ y''\big|_{x=0} = 0, \ y'''\big|_{x=0} = 1, \ y^{(4)}\big|_{x=0} = 2$;

25. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

26. $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y'' = 0$;

27. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Ответы:

1. $y = \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$;
2. $y = 3e^{x/2} - e^{2x}$;
3. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$;
4. $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$;
5. $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$;
6. $y = e^{5x}(c_1 + c_2 x)$;
7. $y = 2 + e^{2x}$;
8. $y = e^{5x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$;
9. $y = e^{-2x}(\cos 3x + 3\sin 3x)$;
10. $y = 2\cos 2x + \sin 2x$;

11. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x/3}$;

12. $y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x}$;

13. $y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$;

14. $$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$+e^{-x/\sqrt{2}}\left(c_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right);$$

15. $y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x)$;

16. $y = c_1 e^{-3x} + e^{3x/2}\left(c_2 \cos\left(3\sqrt{3}x/2\right) + c_3 \sin\left(3\sqrt{3}x/2\right)\right)$;

17. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + e^{3x}(c_4 + c_5 x)$;

18. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$;

19. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$;

20. $y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + x(c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x)$;

21. $y = e^{x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$;

22. $y = e^{x}(c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x}$;

23. $y = 2 + e^{-x}$;

24. $y = e^{x} + \cos x - 2$;

25. $y = e^{x}$;

26. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\cos\frac{x}{2} + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2)\sin\frac{x}{2} + c_7 x + c_8$;

27. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$.

2.3 Линейные неоднородные уравнения (ЛНДУ) n-го порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (2.6)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые действительные числа, $f(x) \neq 0$ называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами**.

Общее решение данного уравнения

$$y = y_o(x) + \tilde{y}(x), \qquad (2.7)$$

где $y_o(x)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ - любое частное решение уравнения (2.6).

Вид частного решения $\tilde{y}(x)$ зависит от вида правой части $f(x)$ уравнения (2.6):

1) Если $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$, где $\alpha = const$, а $P_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$ - многочлен степени n, то

$$\tilde{y}(x) = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}, \qquad (2.8)$$

где r - кратность, с которой α является корнем характеристического уравнения, $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами. Для их нахождения подставляем (2.8) в уравнение (2.6) и применяем метод неопределённых коэффициентов.

2) Если $f(x) = e^{\alpha x}(N_n(x)\cos\beta x + M_m(x)\sin\beta x)$, где $\alpha = const$, а $N_n(x),\ \ M_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно, то

$$\tilde{y}(x) = x^r e^{\alpha x}(Q_l(x)\cos\beta x + H_l(x)\sin\beta x), \qquad (2.9)$$

где r - кратность, с которой $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения, $l = \max\{n, m\}$, $Q_l(x),\ H_l(x)$ - многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами. Для их нахождения подставляем (2.9) в уравнение (2.6) и применяем метод неопределённых коэффициентов.

3) Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ - функции специального вида из пунктов 1) и 2), то подбор частного решения проводим два раза по отдельности для $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Окончательно получаем:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x), \qquad (2.10)$$

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Поэтому решение будем проводить в два этапа. На первом этапе находим общее решение соответствующего однородного уравнения, на втором этапе будем подбирать какое-либо частное решение исходного уравнения.

Приступим

1) Записываем соответствующее однородное уравнение: $y'' - 2y' + y = 0$.

Решаем его. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни $k^2 - 2k + 1 = 0,\ k_{1,2} = 1.$

Записываем решение однородного уравнения с учётом кратности корней характеристического уравнения $y_o = e^x(c_1 + c_2x)$.

Переходим ко второй части решения.

2) Выпишем правую часть нашего уравнения и проанализируем вид функции: $f(x) = xe^x$ - это первый случай.

Экспонента умножена на многочлен первой степени $P_n(x) = x$. Значит, в частном решении тоже должен быть многочлен первой степени с неопределёнными коэффициентами $Q(x) = Ax + B$.

Разберёмся с экспонентой. Раз она есть в правой части уравнения, значит, она обязана быть и в частном решении. Далее, степень экспоненты $e^x = e^{1\cdot x} \Rightarrow \alpha = 1$, но $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения, причём имеет кратность $r = 2$, поэтому необходимо умножить экспоненту в частном решении на x^2. Применяем формулу (2.8) и записываем общий вид частного решения $\tilde{y} = x^2(Ax + B)e^x$.

Теперь нам надо найти коэффициенты многочлена A, B. Применяем метод неопределённых коэффициентов. Найдём первую и вторую производные частного решения:

$$\tilde{y} = x^2(Ax + B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x$$

$$\tilde{y}' = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x$$

$$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2(3A + B)x + 2B)e^x + (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x =$$
$$= (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B)e^x$$

и подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в исходное уравнение:

$$(Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B)e^x -$$
$$-2((Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x) + (Ax^3 + Bx^2)e^x = xe^x$$
$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B - 2Ax^3 -$$
$$-2(3A + B)x^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = x$$
$$6Ax + 2B = x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях «икс» в левой и правой частях:

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = 0. \end{cases}$$

Подставляем найденные коэффициенты и получаем частное решение: $\tilde{y} = \dfrac{x^3}{6}e^x$.

Записываем ответ по формуле (2.7):

$$y_{общ} = e^x(c_1 + c_2 x) + \frac{x^3}{6} e^x .$$

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Решение:

1) Запишем соответствующее однородное уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0$ и решим его.

$$k^2 - 2k + 2 = 0,\ k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2} = 1 \pm i.$$

Получили $y_o = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

2) Выпишем правую часть нашего уравнения и проанализируем вид функции: $f(x) = e^x \sin x$. Мы видим, что в правой части есть синус и экспонента, то есть у нас второй случай. Степень экспоненты $e^x = e^{1 \cdot x} \Rightarrow \alpha = 1$. Чему равен множитель β в аргументе синуса? $\sin x = \sin(1 \cdot x) \Rightarrow \beta = 1$. То есть правой части дифференциального уравнения соответствует комплексно-сопряжённые числа $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$. Смотрим на корни характеристического уравнения. Данная комплексно-сопряжённая пара является корнем характеристического уравнения, причём имеет кратность $r = 1$ (т.е. встретилась нам один раз). И внимание! Хотя в нашей правой части и нет косинуса, но в подбираемом частном решении он должен быть обязательно.

В правой части множитель перед функцией $e^x \sin x$ - единица. Это многочлен нулевой степени, значит, в нашем частном решении тоже должны быть многочлены нулевой степени - $Q(x) = A, \quad H(x) = B$.

Применяем формулу (2.9) и записываем частное решение: $\tilde{y} = xe^x(A\cos x + B\sin x)$. Найдём коэффициенты A, B методом неопределённых коэффициентов. Найдём первую и вторую производные частного решения:

$$\tilde{y} = xe^x(A\cos x + B\sin x),$$

$$\tilde{y}' = e^x\left[\big((A+B)x + A\big)\cos x + \big((B-A)x + B\big)\sin x\right],$$

$$\tilde{y}'' = e^x\left[\big(2Bx + 2B + 2A\big)\cos x + \big(-2Ax - 2A + 2B\big)\sin x\right],$$

подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в исходное уравнение:

$$e^x\left[\big(2Bx + 2B + 2A\big)\cos x + \big(-2Ax - 2A + 2B\big)\sin x\right] -$$
$$-2e^x\left[\big((A+B)x + A\big)\cos x + \big((B-A)x + B\big)\sin x\right] +$$
$$+2xe^x(A\cos x + B\sin x) = e^x \sin x$$

$$\big(2B - 2A - 2B + 2A\big)x\cos x + (2B + 2A - 2A)\cos x +$$
$$+\big(-2A + 2A - 2B + 2B\big)x\sin x + (-2A + 2B - 2B)\sin x = \sin x$$

Приравниваем коэффициенты при слагаемых $x\cos x$, $x\sin x$, $\cos x$, $\sin x$ в левой и правой частях:

$$\begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Подставляем найденные коэффициенты и получаем частное решение: $\tilde{y} = -\dfrac{1}{2}xe^x \cos x$.

Записываем общее решение по формуле (2.7):

$$y_{общ} = y_o + \tilde{y} = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - \frac{1}{2}xe^x \cos x.$$

Имеется ещё один вид уравнений, который с помощью замены переменной тоже может быть приведён к линейному уравнению с постоянными коэффициентами - уравнения Эйлера.

Дифференциальное уравнение Эйлера – это уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad x \neq 0, \qquad (2.11)$$

где $a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ постоянные.

Метод решения.

Вводим **новую переменную *t*** с помощью **подстановки** $x = e^t$ (если $x > 0$) или $x = -e^t$ (если $x < 0$). Тогда неизвестная функция становится заданной параметрически, и её производные вычисляются по формулам $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{e^t} = e^{-t} y'_t$, $\quad y''_{xx} = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$, $y'''_{xxx} = e^{-3t}\left(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t\right)$ и т.д. Уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Если в уравнении (2.11) правая часть равна 0, то мы получаем **однородное уравнение Эйлера:**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0\,. \qquad (2.12)$$

Метод решения.

Решение ищем **в виде** $y = x^\lambda$. Подставляем выражения для $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (2.12), получаем характеристическое уравнение для определения показателей степени λ. В зависимости от решения этого уравнения возможны два случая.

1) λ - действительный корень кратности r. Ему соответствует r линейно независимых решений

$$x^\lambda, \quad x^\lambda \ln x, \quad x^\lambda \ln^2 x, \ldots, \quad x^\lambda \ln^{r-1} x,$$

2) $\alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-сопряжённых корней кратности s. Ей соответствуют s пар линейно независимых решений

$$x^\alpha \cos\left(\beta \ln x\right), \quad x^\alpha \ln x \cos\left(\beta \ln x\right), \ldots, \quad x^\alpha \ln^{s-1} x \cos\left(\beta \ln x\right)$$

$$x^\alpha \sin\left(\beta \ln x\right), \quad x^\alpha \ln x \sin\left(\beta \ln x\right), \ldots, \quad x^\alpha \ln^{s-1} x \sin\left(\beta \ln x\right)$$

Пример 3

Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2 y'' + x y' + 4y = 10x$

Решение:

Делаем замену $x = e^t$. Находим необходимые производные $y'_x = e^{-t} y'_t, \quad y''_{xx} = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$ и подставляем их в уравнение $e^{2t}e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) + e^t e^{-t} y'_t + 4y = 10e^t$. Проводим преобразования и получаем ЛНДУ относительно функции $y(t)$ $y'' + 4y = 10e^t$.

Находим решение данного уравнения

$y_{общ} = y_o + \tilde{y} = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 2e^t$.

Возвращаясь к переменной *x*, получаем

$y_{общ} = c_1 \cos 2\ln x + c_2 \sin 2\ln x + 2x$.

Если учитывать случай $x < 0$, то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая:

$y_{общ} = c_1 \cos 2\ln|x| + c_2 \sin 2\ln|x| + 2x$.

Пример 4

Найти общее решение уравнения $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Решение:

Это однородное уравнение Эйлера. Решение ищем в виде $y = (2x+3)^\lambda$. Найдём производные $y' = 2\lambda(2x+3)^{\lambda-1}$, $y'' = 4\lambda(\lambda-1)(2x+3)^{\lambda-2}$, $y''' = 4\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(2x+3)^{\lambda-3}$, подставим их наше уравнение и, после упрощения, получаем уравнение для λ: $4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0$. Решаем его и находим $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \dfrac{3}{2}, \quad \lambda_3 = \dfrac{1}{2}$. Тогда, общее решение

$$y = c_1(2x+3) + c_2(2x+3)^{3/2} + c_3(2x+3)^{1/2}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Определить вид частных решений неоднородного дифференциального уравнения $y^{(4)} + y'' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

a. $5xe^{-x}$,

b. $10e^{x}\cos x$,

c. $2-3x$,

d. $6x\sin x+2\cos x$,

e. $(x^{3}-2x)e^{2x}$,

f. $x^{2}(1-3\sin 2x)$,

g. $e^{3x}+x^{2}e^{x}$;

2. Определить вид частных решений неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=f(x)$, если $f(x)$ равна:

a. $10e^{-2x}$,

b. $3e^{2x}$,

c. $2\sin x$,

d. $2x^{3}-30$,

e. $2e^{x}\cos\frac{x}{2}-(4x+1)e^{x}\sin\frac{x}{2}$,

f. $e^{x}(3-4x)$,

g. $2e^{x}-e^{-2x}$;

3. Определить вид частных решений неоднородного дифференциального уравнения $y^{IV}-4y'''+5y''=f(x)$, если $f(x)$ равна:

a. $e^{2x}+x^{2}$,

b. $e^{2x}\left(5\cos x+x\sin x\right)$,

c. $5x+3+\sin x$,

d. $6x\cos x+7x^{2}e^{2x}\sin x$,

e. $xe^{x}\sin 2x$,

f. $5xe^{3x}+4e^{-x}$,

g. $5\sin 4x+2$;

Найти общее решение дифференциального уравнения:

4. $y'' + y' = x^2 e^x$;

5. $y'' + y' = x$;

6. $y'' - 3y' + 2y = e^x$;

7. $y'' + 2y' + y = x^2$;

8. $y'' + 2y' + 5y = e^x\left((x+1)\cos 2x + 3\sin 2x\right)$;

9. $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$;

10. $y'' - 6y' + 9y = 6xe^{3x}$;

11. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$;

12. $y'' + 4y' + 3y = chx$;

13. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

14. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$;

15. $y'' + 4y = \cos^2 x$;

16. $y'' + 4y = \cos x \cos 3x$;

17. $y'' - 9y = e^{-3x}\left(x^2 + \sin 3x\right)$;

18. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$;

19. $y'' - 2y' + 2y = \left(x + e^x\right)\sin x$;

20. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$;

21. $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$;

22. $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$;

23. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$;

24. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$;

25. $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$;

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

26. $y'' - 2y' = 2e^x, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0$;

27. $y'' + 4y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \pi/2$;

28. $y''' - y' = -2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 2$;

29. $y^{(4)} - y = 8e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4, \quad y'''(0) = 6$;

30. $y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3$;

31. $y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$;

32. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

33. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$;

34. $y'' + 4y = \sin 2x + 1, \quad y(0) = 1/4, \quad y'(0) = 0$.

Ответы:

1. a) $(Ax + B)e^{-x}$;

   b) $e^x(A\cos x + B\sin x)$;

   c) $Ax^3 + Bx^2$;

   d) $(Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$;

   e) $(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{2x}$;

   f) $a_1x^2 + a_2x + a_3 + (a_4x^2 + a_5x + a_6)\cos 2x +$
   $+(a_7x^2 + a_8x + a_9)\sin 2x$;

   g) $Ae^{3x} + (Bx^2 + Cx + D)e^x$;

2. a) Ae^{-2x};

   b) Axe^{2x};

   c) $A\cos x + B\sin x$;

d) Ax^3+Bx^2+Cx+D;

e) $e^x\left((Ax+B)\cos\dfrac{x}{2}+(Cx+D)\sin\dfrac{x}{2}\right)$;

f) $(Ax+B)xe^x$;

g) Axe^x+Be^{-2x};

3. a) $Ae^{2x}+Bx^4+Cx^3+Dx^2$;

b) $xe^{2x}\left((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right)$;

c) $Ax^3+Bx^2+C\cos x+D\sin x$;

d) $$(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x+$$ $$+xe^{2x}\left(M_2(x)\cos x+N_2(x)\sin x\right);$$

e) $e^x\left((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x\right)$;

f) $(Ax+B)e^{3x}+Ce^{-x}$;

g) $A\cos 4x+B\sin 4x+Cx^2$;

4. $y=c_1+c_2e^{-x}+e^x\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{7}{4}\right)$;

5. $y=c_1+c_2e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}-x$;

6. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$;

7. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2-4x+6$;

8. $$y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+$$ $$+e^x\left(\left(\frac{1}{15}x-\frac{82}{225}\right)\cos 2x+\left(\frac{2}{15}x+\frac{51}{225}\right)\sin 2x\right);$$

9. $y=e^{-x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)-0{,}5\cos 2x-2\sin 2x$;

10. $y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+x^3e^{3x}$;

11. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3-\dfrac{1}{4}x^2\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x$;

12. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{4}xe^{-x}+\frac{1}{16}e^{x}$;

13. $y=e^{2x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)+0,25e^{2x}+0,1\cos 2x+0,05\sin 2x$;

14. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$;

15. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}\left(1+x\sin 2x\right)$;

16. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}x\sin 2x-\frac{1}{24}\cos 4x$;

17. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}-e^{-3x}\left(\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{36}+\frac{x}{108}-\frac{2}{45}\cos 3x+\frac{1}{45}\sin 3x\right)$;

18. $y=e^{2x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)+e^{2x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cos 2x\right)$;

19. $y=e^{x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)+\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{25}\right)\sin x+\left(\frac{2}{5}x+\frac{14}{25}\right)\cos x-$
$-\frac{x}{2}e^{x}\cos x;$

20. $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+xe^{-x}+x^3-3x^2$;

21. $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{x^2}{12}(x^2+2x-12)$;

22. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+c_5e^{x}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}-4x$;

23. $y=\left(c_1+c_2x\right)e^{x}+c_3e^{2x}-x-4$;

24. $y=\left(c_1+c_2x\right)\cos 2x+\left(c_3+c_4x\right)\sin 2x+\frac{1}{9}\cos x$;

25. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{x^2-3x}{8}e^{x}-\frac{x}{4}\sin x$;

26. $y=e^{2x-1}-2e^{x}+e-1$;

27. $y=\frac{x}{4}+\cos 2x+\frac{2\pi-1}{8}\sin 2x$;

28. $y=e^{x}-e^{-x}+x^{2}$;

29. $y=2xe^{x}$;

30. $y=2\cos x-5\sin x+2e^{x}$;

31. $y=\operatorname{sh} x-2x$;

32. $y=1-\cos x-\sin x$;

33. решений нет;

34. $y=\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}$.

2.4 Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных

Метод подбора частного решения, который рассматривался в предыдущем параграфе, подходит лишь в ограниченном числе случаев, когда в правой части $f(x)$ находятся многочлены, экспоненты, синусы, косинусы. А как же быть, если справа, например, дробь, логарифм, тангенс?

Для таких уравнений общее решение ЛНДУ находится методом вариации произвольных постоянных, который всегда даёт возможность найти общее решение ЛНДУ, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения. Этот метод уже рассматривался при решении линейных неоднородных уравнений первого порядка. Рассмотрим теперь применение этого метода для **ЛНДУ 2-го порядка**

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x), \tag{2.13}$$

где $f(x)$ произвольная функция.

Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{одн}=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. Известно, что **общее решение**

ЛНДУ (2.13) можно записать в таком же виде, полагая, что произвольные константы зависят от x. т.е.

$$y_{общ} = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x). \tag{2.14}$$

$c_1(x),\quad c_2(x)$ можно определить из системы

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}. \tag{2.15}$$

Это система двух уравнений с двумя неизвестными $c_1'(x),\quad c_2'(x)$. Выпишем определитель матрицы данных

$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$, т.к. функции линейно независимы. Значит, для решения системы мы можем воспользоваться формулами Крамера:

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \varphi_1(x),\quad c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \varphi_2(x).$$

Конечно, систему (2.15) можно решить и любым другим методом, например, метом исключения. То есть выразить из первого уравнений $c_2'(x)$ и подставить во второе. После того, как мы получили решение (2.15) для определения $c_1(x),\quad c_2(x)$ нужно проинтегрировать полученные выражения:

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \tilde{c}_1,\quad c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \tilde{c}_2,$$

где $\tilde{c}_1,\quad \tilde{c}_2$ - произвольные постоянные.

Подставляем найденные $c_1(x),\quad c_2(x)$ в (2.14) и получаем общее решение ЛНДУ (1).

Теперь рассмотрим **ЛНДУ n-го порядка**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{2.16}$$

где $f(x)$ произвольная функция.

Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{одн} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$.

Общее решение ЛНДУ (2.16) будем искать в таком же виде, полагая, что произвольные константы зависят от x, т.е.

$$y_{общ} = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x). \qquad (2.17)$$

Производные функций $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ находим из системы

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \ldots + c_n'(x) y_n(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \ldots + c_n'(x) y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (2.18)$$

Проинтегрировав полученные $c_1'(x), c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$ находим $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$.

Подставляем найденные $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ в (2.17) и получаем общее решение ЛНДУ.

Рассмотренный метод решения - общий. Это означает, что им можно решать ЛНДУ любого порядка с правой частью любого вида, а также и ЛНДУ с переменными коэффициентами, но, как и любой общий метод, в частных случаях он более сложен в исполнении, чем методы, рассмотренные нами ранее.

Пример 1

Найти решение задачи Коши

$y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x, \quad y(\pi/4) = 3, \quad y'(\pi/4) = 2$.

Решение:

Видим, что правая часть не имеет специального вида. Поэтому решать будем методом вариации произвольных постоянных. Находим решение соответствующего однородного уравнения $y_o = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Его фундаментальная система решений $y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \sin 2x$. Запишем общее решение ЛНДУ по формуле (2.14) $y_{общ} = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$. Для нахождения $c_1(x),\quad c_2(x)$ составим систему (2.15):

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2c_1'(x)\sin 2x + 2c_2'(x)\cos 2x = 4\operatorname{ctg} 2x \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 4\operatorname{ctg} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -4\cos 2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & 4\operatorname{ctg} 2x \end{vmatrix} = \frac{4\cos^2 2x}{\sin 2x}.$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4\cos 2x}{2} = -2\cos 2x,$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4\cos^2 2x}{2\sin 2x} = \frac{2\cos^2 2x}{\sin 2x}.$$

$$c_1(x) = -2\int \cos 2x dx = -\sin 2x + \tilde{c}_1,$$

$$c_2(x) = 2\int \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}dx = 2\int \frac{1-\sin^2 2x}{\sin 2x}dx = \ln\left|tgx\right| + \cos 2x + \tilde{c}_2.$$

$$y_{общ} = \left(-\sin 2x + \tilde{c}_1\right)\cos 2x + \left(\ln\left|\operatorname{tg} x\right| + \cos 2x + \tilde{c}_2\right)\sin 2x.$$

Теперь определим значения констант с использованием начальных условий.

$$y'_{общ} = -2\tilde{c}_1 \sin 2x + 2 + 2\cos 2x \ln\left|\operatorname{tg} x\right| + 2\tilde{c}_2 \cos 2x.$$

$$\begin{cases} 3 = \tilde{c}_2 \\ 2 = -2\tilde{c}_1 + 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2 = 3. \quad .$$

Частное решение:

$$y_ч = -\sin 2x \cos 2x + \left(\ln\left|tgx\right| + \cos 2x + 3\right)\sin 2x.$$

Задания для самостоятельного решения

1. $xy'' + y' = x^2$;
2. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$;
3. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;
4. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$;
5. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{1 + x^2}$;
6. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$;
8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$;
9. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$;
10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$
11. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.

Ответы:

1. $y=\dfrac{x^3}{9}+\tilde{c}_1\ln x+\tilde{c}_2$;

2. $y=\dfrac{1}{4}\Big(\big(\sin 2x-\ln\left|\mathrm{tg}(x+\pi/4)\right|+c_1\big)\cos 2x+\big(c_2-\cos 2x\big)\sin 2x\Big)$;

3. $y=\big(c_1-x\big)\cos x+(\ln\left|\sin x\right|+c_2)\sin x$;

4. $y=c_1e^x+c_2+(e^x+1)\ln(e^{-x}+1)$;

5. $y=\left(c_1-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)e^{-2x}+(c_2+\mathrm{arctg}\,x)xe^{-2x}$;

6. $y=\big(c_1-\ln\left|\sin x\right|\big)\cos 2x+(c_2-x-\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\,x)\sin 2x$;

7. $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$;

8. $y=\big(c_1+c_2x+x\ln\left|x\right|\big)e^x$;

9. $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{3x}+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}x\right)e^{2x}+\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{26x}{27}$;

10. $y=\left(c_1+c_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\dfrac{x}{2}\right)e^x$;

11. $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+x^3-3x^2+xe^{-x}$.

3 Системы дифференциальных уравнений

3.1 Системы дифференциальных уравнений. Решение методом исключения

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right) \\ \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right) \end{cases} \qquad (3.1)$$

называется нормальной системой ДУ n-го порядка. Здесь $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ - неизвестные функции.

Решить систему (3.1), значит найти такие функции

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ y_1 = y_2(x, c_1, c_2, ..., c_n) \\ .... \\ y_n = y_n(x, c_1, c_2, ..., c_n) \end{cases},$$

которые при подстановке в (3.1) при любых значениях констант обращают её в тождество.

Систему (3.1) можно переписать в векторном виде:

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = f(x, \overline{y}), \text{ где } \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \; \bar{f}\left(x, \overline{y}\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right) \\ ... \\ f_n\left(x, y_1, ... y_n\right) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

тогда она называется векторным дифференциальным уравнением.

Не все системы дифференциальных уравнений могут быть приведены к нормальному виду. В общем случае система дифференциальных уравнений это система вида:

$$\begin{cases} G_1\left(x, y_1,..., y_n, y_1',...y_n', y_1'',...y_n'',..., y_1^{(n)},..., y_n^{(n)}\right) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ G_{n1}\left(x, y_1,..., y_n, y_1',...y_n', y_1'',...y_n'',..., y_1^{(n)},..., y_n^{(n)}\right) = 0 \end{cases} . \quad (3.3)$$

Эта система не разрешена относительно старших производных. Если система разрешена относительно старших производных, то она имеет вид:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = F_1\left(x, y_1,..., y_n, y_1',...y_n', y_1'',...y_n'',..., y_1^{(n-1)},..., y_n^{(n-1)}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ y_n^{(n)} = F_n\left(x, y_1,..., y_n, y_1',...y_n', y_1'',...y_n'',..., y_1^{(n-1)},..., y_n^{(n-1)}\right) \end{cases} \quad (3.4)$$

Система вида (3.4) всегда может быть приведена к нормальному виду.

Пример 1

Движение планет в центральном гравитационном поле Солнца описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\bar{y}|^3}\bar{y},$$

или в скалярном виде тремя дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = -\dfrac{\mu}{\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)^{3/2}} y_1 \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} = -\dfrac{\mu}{\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)^{3/2}} y_2 \\ \dfrac{d^2y_3}{dt^2} = -\dfrac{\mu}{\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)^{3/2}} y_3 \end{cases} .$$

Эта система разрешена относительно старших производных, но не является нормальной системой.

Приведём её к нормальному виду. Обозначим:

$$z_1 = y_1, \ z_2 = y_2, \ z_3 = y_3, \ z_4 = \frac{dy_1}{dt}, \ \ z_5 = \frac{dy_2}{dt}, \ z_6 = \frac{dy_3}{dt}.$$

Тогда система уравнений движений запишется в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_4 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = z_5 \\ \dfrac{dz_3}{dt} = z_6 \\ \dfrac{dz_4}{dt} = -\dfrac{\mu}{\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)^{3/2}} z_1 \\ \dfrac{dz_5}{dt} = -\dfrac{\mu}{\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)^{3/2}} z_2 \\ \dfrac{dz_6}{dt} = -\dfrac{\mu}{\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)^{3/2}} z_3 \end{cases}.$$

Теперь видно, что движение планет в центральном гравитационном поле Солнца описывается нормальной системой дифференциальных уравнений шестого порядка.

Нормальная система дифференциальных уравнений вида (3.1) с начальными условиями

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ \quad \dots \\ y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases} \tag{3.5}$$

называется задачей Коши.

Не существует регулярных аналитических методов решения систем дифференциальных уравнений общего вида. Однако некоторые из них решаются с использованием приведения к одному дифференциальному уравнению.

Пример 2

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = \dfrac{y_2^2}{y_1} \end{cases} \text{ с начальными условиями } \begin{cases} y_1(1) = 1 \\ y_2(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Решение:

Продифференцируем первое уравнение системы $y_1'' = -y_2'$. Подставим из второго уравнения выражение для $y_2' = \dfrac{y_2^2}{y_1}$, а из первого $y_2 = -y_1'$. Получим дифференциальное уравнение второго порядка

$y'' = -\dfrac{(-y')^2}{y}$ (y_1 заменено на y) не зависящее от x.

Порядок этого уравнения понижается при помощи замены $y'(x) = p(y)$, $y''(x) = \dfrac{dp(y)}{dx} = \dfrac{dp(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p_y' \cdot p$. При помощи этой замены уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными

$$p'p = -\frac{p^2}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln p = -\ln y + \ln c \quad \Rightarrow$$

$$p = \frac{c_1}{y} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \;\Rightarrow\; ydy = c_1 dx \;\Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{2c_1 x + 2c_2}\,.$$

Вернёмся к системе уравнений $y_1 = \pm\sqrt{2c_1 x + 2c_2} \Rightarrow$ $y_2 = -y_1' = \mp \dfrac{c_1}{\sqrt{2c_1 x + 2c_2}}$.

Найдём постоянные $\begin{cases} 1 = \pm\sqrt{2c_1 + 2c_2} \\ -\dfrac{1}{2} = \mp \dfrac{c_1}{\sqrt{2c_1 + 2c_2}} \end{cases} \Rightarrow c_1 = \dfrac{1}{2},\ c_2 = 0$.

Получено решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y_1(x) = \sqrt{x} \\ y_2(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}.$$

Система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = a_{11}y + a_{12}x \\ \dfrac{dx}{dt} = a_{21}y + a_{22}x \end{cases}, \qquad (3.6)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - постоянные числа, называется *системой двух линейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными*.

Найти *общее решение* данной системы (3.6), означает указать такую пару функций $\begin{cases} y = \varphi(t, c_1, c_2) \\ x = \psi(t, c_1, c_2) \end{cases}$, которая при любых значениях произвольных констант обращает систему в верное равенство.

Системы дифференциальных уравнений можно решать различными способами. Чаще всего используются следующие методы решений:

- метод исключения (метод сведения системы n уравнений к одному уравнению n -го порядка);
- метод интегрируемых комбинаций;
- метод, использующий понятие матричной экспоненты (с определением собственных значений и собственных векторов).

Рассмотрим ещё несколько Примеров применение первого метода решения систем. Решение этой системы может быть сведено к решению ЛДУ соответствующего порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 3

Решить систему ЛОДУ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y + x \\ \dfrac{dx}{dt} = 3y + 4x \end{cases}$ с начальными условиями $y(0) = 5, \quad x(0) = 3$ (решить задачу Коши).

Решение:

В этой системе неизвестны функции $x(t)$ и $y(t)$, где t - независимая переменная. Порядок нормальной системы ДУ равен количеству уравнений, входящих в систему. В данном случае порядок системы 2, следовательно, она может быть сведена к уравнению второго порядка.

Продифференцируем первое уравнение системы $y'' = 2y' + x'$ и подставим в него x' из второго уравнения: $y'' = 2y' + 3y + 4x$. Осталось исключить из уравнений функцию $x(t)$. Для этого из первого уравнения системы выразим $x = y' - 2y$ и подставим в полученное уравнение $y'' = 2y' + 3y + 4(y' - 2y)$. Выполним приведение подобных членов: $y'' - 6y' + 5y = 0$. Решаем полученное ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$y = c_1 e^{5t} + c_2 e^{t}.$$

Определим теперь вторую неизвестную функцию $x(t)$. Для этого у нас уже уравнение $x = y' - 2y$. Подставляем туда найденную функцию y. Для этого сначала найдём её производную: $y' = 5c_1 e^{5t} + c_2 e^{t}$ и, после упрощения, имеем

$$x = 5c_1e^{5t} + c_2e^t - 2c_1e^{5t} - 2c_2e^t y,$$
$$x = 3c_1e^{5t} - c_2e^t.$$

Обе неизвестные функции найдены, общее решение системы:
$$\begin{cases} y = c_1e^{5t} + c_2e^t \\ x = 3c_1e^{5t} - c_2e^t. \end{cases}$$

Определим произвольные постоянные, чтобы выполнялись начальные условия задачи Коши: $\begin{cases} 5 = c_1 + c_2 \\ 3 = 3c_1 - c_2. \end{cases}$ Решаем систему, находим константы: $c_1 = 2,\quad c_2 = 3$ и выписываем окончательное решение:
$$\begin{cases} y(t) = 2e^{5t} + 3e^t \\ x(t) = 6e^{5t} - 3e^t. \end{cases}$$

Пример 4

Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$

Решение:

Здесь неизвестными функциями являются y и z, а x - независимая переменная. И мы видим, что данная система - неоднородная. Ход решения от этого не меняется. Так же, методом исключения, будем сводить систему к одному уравнению второго порядка. Только получим мы не ЛОДУ, а ЛНДУ.

Дифференцируем первое уравнение по x:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 4\,. \qquad (*)$$

Из второго уравнения системы выражаем

$$\frac{dz}{dx} = -y + z + \frac{3}{2}x^2 \qquad (**).$$

Из первого уравнения системы определяется

$$z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right) \qquad (***)$$

и подставляя это выражение в (**) будем иметь $\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$.

Подставляя z и $\frac{dz}{dx}$ в уравнение (*), полученное после дифференцирования, приходим к ЛНДУ 2-го порядка с одной неизвестной y: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = -6x^2 - 4x + 3$. Решим его

$$k^2 + k - 6 = 0,\ k_1 = 2,\ k_2 = -3,$$

$$y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

$$y_ч = Ax^2 + Bx + C,\ y'_ч = 2Ax + B,\ y''_ч = 2A$$

$$A = 1,\ B = 1,\ C = 0,$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + x^2 + x.$$

Из (***) $z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right) = -c_1 e^{2x} + \frac{c_2}{4}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2$.

Пример 5

Решить систему $\begin{cases} x' = x + z - y \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

Решение:

Здесь неизвестными функциями являются x, y и z, а t - независимая переменная. Это система трёх уравнений. Поэтому она сводится к уравнению третьего порядка. Действия наши будут аналогичны действиям в первом и втором Примерах. Берём первое уравнение системы и дифференцируем его $x'' = x' + z' - y'$. В правую часть этого уравнения подставляем $x', \quad z', \quad y'$ из нашей системы: $x'' = x + z - y + 2x - y - x - y + z$. После приведения подобных получаем:

$$x'' = 2x - 3y + 2z. \qquad (*)$$

Дифференцируем уравнение (*) ещё раз: $x''' = 2x' - 3y' + 2z'$. И, опять, подставляем первые производные. После упрощения получаем

$$x''' = 3x - 7y + 5z. \qquad (**)$$

Теперь берём первое уравнение нашей системы и уравнение (*). И из них выражаем y и z: $\begin{cases} x' = x + z - y \\ x'' = 2x - 3y + 2z \end{cases}$, умножим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе. Получим $y = 2x' - x''$. Теперь выразим $z = x' - x + y,\ z = x' - x + 2x' - x'', \quad z = 3x' - x - x''$ подставим y и z в уравнение (**) $x''' = 3x - 7(2x' - x'') + 5(3x' - x - x'')$. Проводим простейшие преобразования и получаем $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$.

Это ЛОДУ 3-го порядка. Решаем его и получаем $x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}$. Осталось найти ещё две функции. Для этого вычислим производные функции $x(t)$. $x' = c_1e^t - c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t}, \quad x'' = c_1e^t + c_2e^{-t} + 4c_3e^{2t}$. Находим $y(t)$. $y = 2x' - x'' = 2c_1e^t - 2c_2e^{-t} + 4c_3e^{2t} - c_1e^t - c_2e^{-t} - 4c_3e^{2t} = c_1e^t - 3c_2e^{-t}$. Теперь $z(t)$.

$$z = 3x' - x - x'' = 3c_1e^t - 3c_2e^{-t} + 6c_3e^{2t} - c_1e^t - c_2e^{-t} - c_3e^{2t} -$$
$$-c_1e^t - c_2e^{-t} - 4c_3e^{2t} = c_1e^t - 5c_2e^{-t} + c_3e^{2t}.$$

Записываем общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-t} \\ z(t) = c_1 e^t - 5c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

Решить системы методом исключения

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x, \end{cases} \quad x(0) = 6, \quad y(0) = 4$;

3. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0 \\ \dot{y} - y - x = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + y + 3x = 0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$;

6. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$;

8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$;

9. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$;

10. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^{t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases};$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z \\ \dot{y} = y - x + z \\ \dot{z} = x - z \end{cases};$

12. $\begin{cases} \dot{x} = z + y - x \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = x + y + z, \end{cases}$

$x\big|_{t=0} = 1, \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad z\big|_{t=0} = 0.$

Ответы:

1. $\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} \\ y(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{3t} \end{cases};$

2. $\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} + 2e^{3t} \\ y(t) = 8e^{-t} - 4e^{3t} \end{cases};$

3. $\begin{cases} x(t) = (2c_2 - c_1)\cos 2t - (2c_1 + c_2)\sin 2t \\ y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \end{cases};$

4. $\begin{cases} x(t) = (c_1 + 3c_2 t)e^{2t} \\ y(t) = (c_2 - c_1 - 3c_2 t)e^{2t} \end{cases};$

5. $\begin{cases} x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ y(t) = e^{2t}((c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t) \end{cases};$

6. $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + te^{t} - t^2 - 2 \\ y(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} - e^{t}(t-1) - 2t \end{cases};$

7. $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 2\sin t - \cos t \\ y(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} + \sin t + 3\cos t \end{cases};$

8. $$\begin{cases} x(t) = c_1\cos 2t - c_2\sin 2t + 2t + 2 \\ y(t) = (c_1 + 2c_2)\cos 2t + (2c_1 - c_2)\sin 2t + 10t \end{cases};$$

9. $$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + te^{2t} \\ y(t) = -2c_1 e^{2t} - c_2 e^{3t} - 2te^{2t} + 2e^{2t} \end{cases};$$

10. $$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - (12t + 13)e^t \\ y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - (8t + 6)e^t \end{cases};$$

11. $$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \\ y(t) = -\dfrac{2}{3}c_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2}c_3 e^{-t} \\ z(t) = c_1 + \dfrac{1}{3}c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{cases};$$

12. $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{6}e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ y(t) = \dfrac{1}{6}e^{2t} + \dfrac{1}{3}e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ z(t) = \dfrac{1}{3}e^{2t} - \dfrac{1}{3}e^{-t}. \end{cases}$$

3.2 Решение линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами матричным способом

Если функции $f_1(x, y_1, ..., y_n)$, ..., $f_n(x, y_1, ..., y_n)$ линейны относительно неизвестных функций, то система (1) называется **системой линейных дифференциальных уравнений** (СЛДУ) n-го порядка. Такую систему можно записать в скалярном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + ... + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + ... + a_{n1n}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

или в векторном виде:

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = A(x) \cdot \overline{y}(x) + \overline{b}(x), \tag{3.8}$$

где $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов СЛДУ,

$\overline{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ ... \\ b_x(x) \end{pmatrix}$ - известные функции аргумента.

Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ - постоянные величины, то система (3.7) называется линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если функции $b_i(x)$ тождественно равны нулю (отсутствуют), то система (3.7) называется линейной однородной системой дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + ... + a_{1n}(x)y_n \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + ... + a_{n1n}(x)y_n \end{cases}. \tag{3.9}$$

Линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{cases}$$

можно представить в матричном виде

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y ,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов системы;

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных функций, $\dfrac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \\ ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$ - вектор производных от неизвестных функций.

Согласно матричному методу решение системы можно представить в виде $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & ... & v_1^{(n)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & ... & v_2^{(n)} \\ ... & ... & ... & ... \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & ... & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{k_1 x} \\ c_2 e^{k_2 x} \\ ... \\ c_n e^{k_n x} \end{pmatrix}$, где числа $k_1,\ k_2,\ ..., k_n$ являются собственными значениями матрицы A, а числа $v_i^{(j)}$ - координатами собственных векторов матрицы A.

Таким образом, при решении системы дифференциальных уравнений можно использовать следующий алгоритм.

1) Собственные значения матрицы A определяем по формуле $\det\left(A-\lambda E\right)=0$.

2) Найдём собственные вектора матрицы A. Для каждого не повторяющегося собственного значения λ_i собственные вектор $\overline{v}_i$ определяем по формуле $\left(A-\lambda_i E\right)\cdot\overline{v}_i=0$. Если собственное значение λ_i повторяется, то для повторяющихся значений используем формулу $\left(A-\lambda_i E\right)\cdot\overline{v}_{i+1}=\overline{v}_i$.

3) H – матрица линейного преобразования, которая преобразует A в верхнюю треугольную форму. Матрица H составляется из столбцов, являющихся координатами собственных векторов матрицы A $H=\left(\overline{v}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \ldots \quad \overline{v}_n\right)$.

4) Преобразуем матрицу A к жордановой форме по формуле $J=H^{-1}AH$.

5) Найдём матричную экспоненту жордановой формы матрицы A по таблице 2.

Таблица 2. Матричная экспонента для матриц в жордановой форме

Жорданова форма J	Матрица e^{tJ}
$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t}\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}=e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

6) Теперь вычислим матричную экспоненту e^{At} с помощью обратного к H преобразования $e^{At} = He^{Jt}H^{-1}$.

7) Выпишем общее решение системы в виде $\overline{X} = e^{At} \cdot \overline{c}$.

Для решения системы неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x).$$

матричным методом проводится обычно методом вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу решение системы ищется в виде

$$Y = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) + \ldots + C_n(x)Y_n(x),$$

где $C_i(x)$ некоторые непрерывно-дифференцируемые функции. Подставив это решение в систему, с учётом $\dfrac{dY}{dx} = A \cdot Y$, функции $C_i(x)$ находим из системы

$$C_1'(x)Y_1(x) + C_2'(x)Y_2(x) + \ldots + C_n'(x)Y_n(x) = F(x).$$

Пример 1

Решить систему уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}.$$

Решение:

Это однородная система уравнений. Выпишем матрицу коэффициентов системы $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Найдём собственные значения и вектора матрицы.

1) Собственные значения матрицы А

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\left(2-\lambda\right)^2-9=0,$$

$$2-\lambda=\pm3,\quad \lambda_1=5,\ \lambda_2=-1.$$

Итак, мы имеем два различных собственных значения.

2) Найдём собственные вектора матрицы *A*.

Рассмотрим первое собственное значение $\lambda_1=5$.

Найдём его собственный вектор из решения матричного уравнения $\left(A-\lambda_1 E\right)\cdot\overline{v}_1=0,\ \left(A-5E\right)\cdot\overline{v}_1=0,$

$$\begin{pmatrix}2-5 & 3\\ 3 & 2-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-3v_{11}+3v_{21}\\ 3v_{11}-3v_{21}\end{pmatrix}\Rightarrow 3v_{11}-3v_{21}=0\Rightarrow v_{11}=v_{21}.$$

Поскольку собственный вектор определяется с точностью до постоянной одну из его координат можно задать произвольно. Возьмём, например, $v_{21}=1$, тогда $v_{11}=1$. Итак, мы нашли собственный вектор, соответствующий первому собственному значению $\overline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим второе собственное значение $\lambda_2=-1$ и найдём его собственный вектор $\left(A+E\right)\cdot\overline{v}_2=0,$

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$3v_{12} + 3v_{22} = 0$, $v_{12} = -v_{22}$. Выберем $v_{22} = 1$, тогда $v_{12} = -1 \Rightarrow$ $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Составим из координат собственных векторов матрицы коэффициентов системы матрицу линейного преобразования, которое преобразует A в верхнюю треугольную форму $H = (\overline{v}_1 | \overline{v}_2)$.

$$H = (\overline{v}_1 | \overline{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу, обратную матрице H. Определитель матрицы $\Delta(H) = \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2$.

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta H}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Преобразуем матрицу А к жордановой форме

$$J = H^{-1}AH = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+3 & 3+2 \\ -2+3 & 3+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+5 & -5+5 \\ 1-1 & -1-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы, как и ожидалось, получили диагональную матрицу, по главной диагонали которой стоят собственные значения исходной матрицы $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5) Найдём матричную экспоненту жордановой формы матрицы A по таблице 2 $e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

6) Теперь вычислим матричную экспоненту e^{tA} с помощью обратного к H преобразования

$$e^{tA}=He^{Jt}H^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{5t}-0 & 0-e^{t} \\ e^{5t}+0 & 0+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{5t}+e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} \\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+e^{-t} \end{pmatrix}$$

7) Выпишем общее решение системы в виде

$$\overline{X}=e^{5t}\cdot\overline{c}$$

$$X(t)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{At}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{5t}+e^{-t} & e^{5t}-e^{-t} \\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1\left(e^{5t}+e^{-t}\right)+c_2\left(e^{5t}-e^{-t}\right) \\ c_1\left(e^{5t}-e^{-t}\right)+c_2\left(e^{5t}+e^{-t}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{c_1+c_2}{2}e^{5t}+\dfrac{c_1-c_2}{2}e^{-t} \\ \dfrac{c_1+c_2}{2}e^{5t}+\dfrac{-c_1+c_2}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Пример 2

Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x \\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y \end{cases}$$

Решение:

Выпишем коэффициенты системы уравнений в виде матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Найдём собственные числа матрицы A

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\left(4-\lambda\right)^2=0\Rightarrow$$

$\lambda_1=4$ - корни кратные.

2) Найдём собственные вектора матрицы A для кратных собственных чисел. Первый вектор ищется аналогично Примеру 1

$$\begin{pmatrix}4-4 & 0\\ 1 & 4-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{pmatrix}=0\Rightarrow 1\cdot v_{11}+0\cdot v_{21}=0$$

$$v_{11}=0;\Rightarrow v_{21}=1,\ \overline{v}_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Второй вектор должен соответствовать тому же собственному значению, поэтому ищем присоединённый вектор $\overline{v}_2$ по формуле $\left(A-\lambda_1 E\right)\overline{v}_2=\overline{v}_1$.

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0\cdot v_{12}+0\cdot v_{22}=0\\ 1\cdot v_{12}+0\cdot v_{22}=1\end{cases},\ v_{22}=0\Rightarrow v_{12}=1,$$

$$\overline{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

3) Составим матрицу H – матрицу перехода от матрицы коэффициентов системы A к нормальной жордановой форме J:

$$H=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу H^{-1}:

$$\Delta\left(H\right)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1,\ H^{-1}=\frac{1}{\Delta\left(H\right)}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix}^T.$$

$$H^{-1}=\frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^T=(-1)\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

4) Жорданова форма J для матрицы A имеет вид:

$$J = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+4 \\ 4+0 & 0+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 & 1+0 \\ 0+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5) Согласно таблице 2, выписываем матрицу e^{tJ} :

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Вычислим матричную экспоненту:

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = e^{4t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 0+0 & 0+1 \\ 1+0 & t+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{4t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+t & 1+0 \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Общее решение системы записывается как

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA}C = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{4t} \\ c_1te^{4t} + c_2e^{4t} \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 - произвольные константы.

Пример 3

Решить систему уравнений с использованием матричной экспоненты:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$$

Решение:

В данном случае матрица коэффициентов A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим её собственные значения:

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\left(1-\lambda\right)^2+1=0\Rightarrow$$

$$\left(\lambda-1\right)^2=-1,\Rightarrow \lambda-1=\pm i\Rightarrow \lambda_{1,2}=1\pm i.$$

Собственные значения матрицы A - пара комплексно-сопряжённых собственных значений. Найдём для каждого собственного числа собственный вектор $\overline{v}_i=\begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix}$. В этом случае он будет иметь комплексные координаты.

Первому собственному значению $\lambda_1=1+i$ соответствует собственный вектор $\overline{v}_1$. Его координаты удовлетворяют следующему уравнению $\left(A-\lambda_1 E\right)\cdot\overline{v}_1=0$:

$$\begin{pmatrix} 1-\left(1+i\right) & 1 \\ -1 & 1-\left(1+i\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{cases} -iv_1^{(1)}+v_2^{(1)}=0 \\ -v_1^{(1)}-iv_2^{(1)}=0 \end{cases},\ \begin{cases} v_1^{(1)}+iv_2^{(1)}=0 \\ -iv_1^{(1)}+iv_1^{(1)}=0 \end{cases},\ \begin{cases} v_1^{(1)}+iv_2^{(1)}=0 \\ 0=0 \end{cases},\quad v_1^{(1)}+iv_2^{(1)}=0.$$

Полагаем $v_2^{(1)}=1$. Тогда $v_1^{(1)}=-i$. Следовательно собственный вектор $\overline{v}_1$ равен:

$$\overline{v}_1=\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично найдём собственный вектор $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$, ассоциированный с числом $\lambda_2 = 1 - i$:

$$\begin{pmatrix} 1-(1-i) & 1 \\ -1 & 1-(1-i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0, \ \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0, \ \begin{cases} iv_1^{(2)} + v_2^{(2)} = 0 \\ -v_1^{(2)} + iv_2^{(2)} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} v_1^{(2)} - iv_2^{(2)} = 0 \\ iv_1^{(2)} + v_2^{(2)} = 0 \end{cases}, \ \begin{cases} v_1^{(2)} - iv_2^{(2)} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}, \ v_1^{(2)} - iv_2^{(2)} = 0.$$

Здесь полагаем $v_2^{(2)} = 1$. Следовательно, $v_1^{(2)} = i$. Тогда вектор $\overline{v}_2$ будет равен:

$$\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу H из найденных собственных векторов $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$:

$$H = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу H^{-1} по формуле

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta(H)}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}^T,$$

где $\Delta(H)$ - определитель матрицы H, H_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы H. В результате получаем:

$$\Delta(H) = \begin{vmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - i = -2i,$$

$$H^{-1} = \frac{1}{(-2i)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix}^T = \frac{1}{(-2i)}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{(2i)}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём нормальную жорданову форму J по формуле $J = H^{-1}AH.$

Выполняя вычисления, находим:

$$J = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i-1-1+i & -i+1-1+i \\ -i-1+1+i & i+1+1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2i-2 & 0 \\ 0 & 2i+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{i-1}{i} & 0 \\ 0 & \dfrac{i+1}{i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Составим теперь матрицу e^{tJ}:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t e^{it} & 0 \\ 0 & e^t e^{-it} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем матричную экспоненту e^{tA}:

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = \frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Экспоненциальные функции e^{it}, e^{-it}, разложим по формуле Эйлера: $e^{it} = \cos t + i\sin t,\ e^{-it} = \cos t - i\sin t.$

Получаем следующий результат:

$$e^{tA} = \frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} -i\cos t + \sin t & i\cos t + \sin t \\ \cos t + i\sin t & \cos t - i\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} -i\cos t - \sin t - i\cos t + \sin t & \cos t + i\sin t - \cos t + i\sin t \\ -\cos t - i\sin t + \cos t - i\sin t & i\cos t - \sin t + i\cos t + \sin t \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{e^t}{2i}\begin{pmatrix} 2i\cos t & 2i\sin t \\ -2i\sin t & 2i\cos t \end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы уравнений выражается формулой:

$$Y(t)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{tA}C=e^t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^t\cos t+c_2e^t\sin t \\ -c_1e^t\sin t+c_2e^t\cos t \end{pmatrix},$$

где $C=(c_1,c_2)^T$ - произвольный вектор.

Пример 4

Решить однородную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+4z=0 \\ \dfrac{dz}{dx}+y-z=0 \end{cases}$$

Решение:

Приводим систему к нормальному виду

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-2y-4z \\ \dfrac{dz}{dx}=-y+z \end{cases},$$

запишем матрицу коэффициентов $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдём собственные значения матрицы A

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=(-2-\lambda)(1-\lambda)-4=\lambda^2+\lambda-6=0,$$

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3.$

Найдём собственные вектора матрицы A

$$\lambda_1 = 2,$$

$$\left(A-\lambda E\right)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a_{11} & -4a_{12} \\ -1a_{11} & -1a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = -a_{21},\ a_{11} = -c_1, a_{21} = c_1$$

$$\lambda_2 = -3,$$

$$\left(A-\lambda_2 E\right)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & -4a_{22} \\ -1a_{12} & 4a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{12} = 4a_{22},\ a_{12} = 4c_2,\ a_{22} = c_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 4c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{-3x}.$$

Вместо определения матрицы преобразований и жордановой формы матрицы коэффициентов можно определить связь между уравнениями системы непосредственно, подставляя выражение

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^{-3x}$ в систему уравнений.

Производные этих функций равны $\begin{matrix} y' = 2Ae^{2x} - 3Ce^{-3x} \\ z' = 2Be^{2x} - 3De^{-3x} \end{matrix}$.

$$\begin{cases} 2Ae^{2x} - 3Ce^{-3x} + 2Ae^{2x} + 2Ce^{-3x} + 4Be^{2x} + 4De^{-3x} = 0 \\ 2Be^{2x} - 3De^{-3x} + Ae^{2x} + Ce^{-3x} - Be^{2x} - De^{-3x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ -C + 4D = 0 \end{cases}, \begin{cases} B + A = 0 \\ C - 4D = 0 \end{cases}, \begin{cases} B = -A \\ C = 4D \end{cases}$$

$$A = c_1, B = -c_1,\ D = c_2,\ C = 4c_2.$$

Пример 5

Решить системы неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных, решение однородной системы выполнить матричным методом

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{-t} \\ y' = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим соответствующую однородную систему $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$, имеющую решение $Y_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$.

Согласно методу Лагранжа общее решение неоднородной системы можно получить, если поварьировать произвольные постоянные

$$Y = c_1(t) \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Методом Крамера решаем систему уравнений

$c_1'(t) \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ относительно неизвестных функций $c_1'(t)$, $c_2'(t)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & e^t \\ -3e^{2t} & -e^t \end{vmatrix} = -2e^{3t} + 3e^{3t} = e^{3t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & 2e^{-t} \\ -3e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} = 2e^t + 6e^t = 8e^t.$$

$$c_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3e^{-3t},\ c_1 = \int -3e^{-3t} dt = e^{-3t} + \tilde{c}_1,$$

$$c_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 8e^{-2t},\ c_2 = \int 8e^{-2t} dt = -4e^{-2t} + \tilde{c}_2.$$

Выпишем общее решение неоднородной системы

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$;

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$;

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$;

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$;

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$;

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$;

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$;

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$;

Ответы

1. $$\begin{cases} x = c_1 \dfrac{e^{5t}+e^t}{4} + c_2 \dfrac{e^{5t}-e^t}{4} \\ y = 3c_1 \dfrac{e^{5t}-e^t}{4} + 3c_2 \dfrac{e^{5t}+e^t}{4} \end{cases};$$

2. $$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^t \\ y = -3c_1 e^{2t} - c_2 e^t \end{cases};$$

3. $$\begin{cases} x = c_1 e^t + 2c_2 e^{6t} \\ y = -2c_1 e^t + c_2 e^{6t} \end{cases};$$

4. $$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} \cos t + c_2 e^{3t} \sin t \\ y = c_1 e^{3t} \left(\cos t - \sin t\right) + c_2 e^{3t} \left(\cos t - \sin t\right) \end{cases};$$

5. $$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t \\ y = \left(c_1 + c_2\right) e^{2t} \cos t + \left(c_2 - c_1\right) e^{2t} \sin t \end{cases};$$

6. $$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ y = -\left(2c_1 + c_2\right) e^t - 2c_2 t e^t \end{cases};$$

7. $$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ y = c_1 e^t - 3c_3 e^{-t} \\ z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 5c_3 e^{-t} \end{cases};$$

8. $$\begin{cases} y = -c_2 e^{-2x} + 2c_3 e^{3x} \\ z = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3c_3 e^{3x} \\ w = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 3c_3 e^{3x} \end{cases}$$

4 Приложение дифференциальных уравнений и систем

4.1 Решение задач геометрического содержания с помощью дифференциальных уравнений

С помощью дифференциальных уравнений и систем удобно решать задачи, в которых требуется найти какую-либо зависимость между переменными. Эта зависимость может в условии задачи обозначена как функция, уравнение, кривая и т.д.

Пример 1

Найти функцию, график которой проходит через точку $A(2;-1)$, а угловой коэффициент касательной в любой её точке с координатой x равен $k = 3y^2$.

Решение:

Рассмотрим произвольную точку $M(x;y)$ функции и сделаем чертёж (Рисунок 2), соответствующий условию задачи.

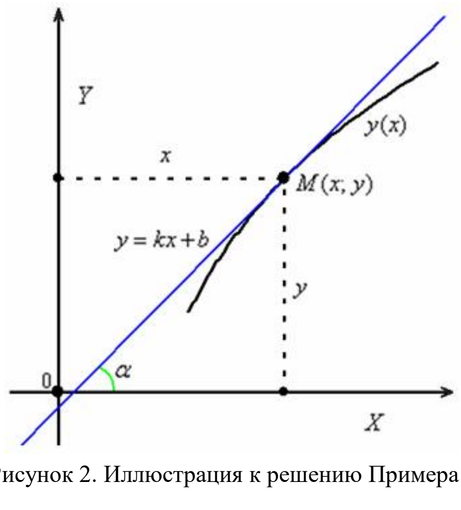

Рисунок 2. Иллюстрация к решению Примера 1

Известно, что угловой коэффициент касательной равен тангенсу её угла наклона к положительному направлению оси OX и значению производной в точке касания $k = \operatorname{tg}\alpha = y'(x;y)$. По условию задачи, $k = 3y^2 \Rightarrow y' = 3y^2$.

Ищем общее решение полученного простейшего ДУ:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2, \ \int \frac{dy}{3y^2} = \int dx, \ -\frac{1}{y} = 3x + c, \ y = -\frac{1}{3x+c}.$$

Мы получили семейство функций, графики которых удовлетворяют условию задачи. Из этого семейства нам нужна только кривая, проходящая через точку $A(2;-1)$. Найдём значение константы, при котором это условие выполняется. Для этого подставим в полученное общее решение координаты точки A

$$-1 = -\frac{1}{3\cdot 2 + c}, \ c = -5.$$

Уравнение, описывающее искомую функцию: $y = \dfrac{1}{5-3x}$.

Пример 2

Найти функцию, график которой проходит через точку $M_0(1;2)$, а отрезок любой её касательной между точкой касания и осью OX делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{1}$ (считая от оси OY).

Решение:

Рассмотрим точку $M_0'(x_0;y_0)$, принадлежащую графику и касательную (Рисунок 3). Обозначим точки пересечения касательной с осью OX и OY K и L соответственно.

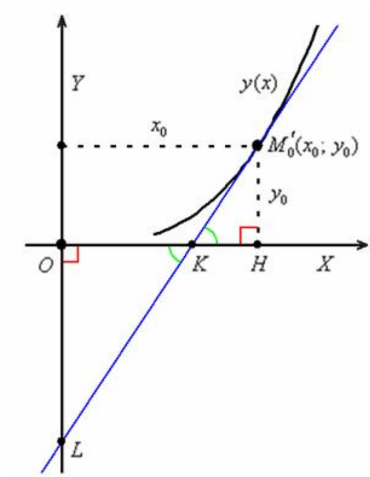

Рисунок 3. Иллюстрация к решению Примера 2

Воспользуемся тем, что треугольники OKL и $HM_0'K$ подобны (H - проекция точки M_0' на ось OX). Из их подобия следует, что $\dfrac{|KL|}{|KM_0'|} = \dfrac{|OK|}{|KH|} = 2$.

Нам известны координаты точек $O(0;0)$ и $H(x_0;0)$, найдём координату точки K. Уравнение касательной к графику функции в заданной точке $M_0'(x_0;y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Найдём координаты точки K, зная, что координата y_K в этой точке равна нулю (касательная пересекает ось абсцисс):

$$\begin{cases} y_K - y_0 = y'(x_0)(x_K - x_0) \\ y_K = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y_0 = y'(x_0)(x_K - x_0), \; x_K = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}.$$

Длины отрезков $|OK| = \left| x - \dfrac{y}{y'} \right|$, $|KH| = \left| x - \left(x - \dfrac{y}{y'} \right) \right| = \left| \dfrac{y}{y'} \right|$.

С учётом условия задачи $\frac{|OK|}{|KH|} = 2$, $\left|x - \frac{y}{y'}\right| = 2\left|\frac{y}{y'}\right|$, $x - \frac{y}{y'} = \pm 2\frac{y}{y'}$.

Получили, что необходимо решить два дифференциальных уравнения:

1) $x - \frac{y}{y'} = 2\frac{y}{y'}$, 2) $x - \frac{y}{y'} = -2\frac{y}{y'}$.

Решаем их

1) $x = 3\frac{y}{y'}$, 2) $x = -\frac{y}{y'}$,

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

$$\ln|y| = \ln\left|cx^3\right|, \ \ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|,$$

$$y_1 = cx^3, \qquad y_2 = \frac{c}{x}.$$

По условию задачи, график должен проходить через точку $M_0(1;2)$. Подставляя координаты точки в полученные решения, в обоих случаях имеем $c = 2$. Получили, что условию задачи удовлетворяют две линии $y_1 = 2x^3$, $y_2 = \frac{2}{x}$.

Пример 3

Найти функцию, график которой проходит через точку $M_0(3;5)$, в каждой точке M которого длина нормального вектора $\overline{MN}$ с концом на оси OY равна $a = 5$ и отрезок MN образует острый угол с положительным направлением оси OY (Рисунок 4).

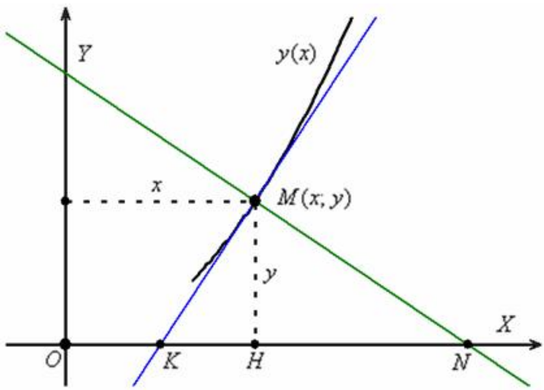

Рисунок 4. Иллюстрация к решению задачи 3

Решение:

Уравнение нормали, проведённой к графику функции через некоторую точку $M_0'\left(x_0;y_0\right)$: $y-y_0=-\dfrac{1}{y'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)$.

Координаты точки N вычислим как пересечение нормали с осью ординат $y_N=y_0+\dfrac{x_0}{y'\left(x_0\right)}$, тогда длина вектора $\left|\overline{M_0'N}\right|=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{x_0}{y'\left(x_0\right)}\right)^2}$.

По условию задачи, для любой точки $M_0'\left(x_0;y_0\right)$ длина вектора $\left|\overline{M_0'N}\right|$=5. Составляем дифференциальное уравнение

$$\sqrt{x^2+\left(\frac{x}{y'}\right)^2}=5,\ x^2\left(1+\frac{1}{y'^2}\right)=25,\ y'=\pm\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}.$$

Используем информацию из условия задачи о том, отрезок нормали образует острый угол с положительным направлением оси OY, то есть $y'<0$.

$y=\sqrt{25-x^2}+c,$ найдём частное решение $5=\sqrt{25-3^2}+c,\ c=1,\ y=\sqrt{25-x^2}+1.$

Задания для самостоятельного решения

1. Угловой коэффициент касательной к каждой точке графика функции обратно пропорционален абсциссе точки касания с коэффициентом пропорциональности $p=1{,}5$. Выписать уравнение данной функции, при условии, что ей принадлежит точка $A(1;0)$.

2. Найти уравнение линии, для которой точка касания равноудалена от начала координат и точки пересечения касательной с осью OY.

3. Найти уравнение кривой, для которой площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания равна 1,5 и проходящей через точку $M(1;0)$.

4. Написать уравнения кривых в полярной системе координат, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

5. Найти кривую, касательная к которой отсекает на осях OX и OY такие отрезки, что сумма величин, обратных квадратам длин этих отрезков, равна 1.

6. Найти уравнение, описывающее такие поверхности вращения, чтобы все лучи, исходящие из источника света, расположенного на оси вращения этой поверхности, отражались параллельно этой оси.

Ответы

1. $y=\frac{3}{2}\ln|x|$;

2. $y_1=cx,\ xy_2=c$;

3. $y_1 = \frac{1}{x} - x^2$, $y_2 = -\frac{1}{x} + x^2$;

4. $r = \frac{c}{1 \pm \cos\varphi}$;

5. $x^2 + y^2 = 1$;

6. параболоиды вращения, у которых источник света находится в фокусе вращающейся параболы с уравнением $x^2 = \frac{2}{c}\left(y - \frac{1}{2c}\right)$.

4.2 Решение задач физического содержания с помощью дифференциальных уравнений и систем

Дифференциальные уравнения и системы широко используются для моделирования поведения различных реальных систем, зависящих от времени. Рассмотрим несколько Примеров использования дифференциальных уравнений для решения таких задач.

Пример 1

Автомобиль массой m движется по прямолинейному горизонтальному пути со скоростью V_0. За какое время и на каком расстоянии от точки начала торможения он остановится, если коэффициент трения колёс с дорогой равен k, а воздух оказывает сопротивление, пропорциональное скорости движения с коэффициентом пропорциональности λ?

Решение:

Составим дифференциальное уравнение движения автомобиля в проекции на направление движения

$$m\frac{dV}{dt} = -kmg - \lambda V, \quad \frac{dV}{dt} = -kg - \frac{\lambda}{m}V, \quad \frac{dV}{dt} + \frac{\lambda}{m}V = -kg.$$

Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение (можно использовать характеристическое уравнение)

$$\chi+\frac{\lambda}{m}=0,\ \chi=-\frac{\lambda}{m},\ V_{одн}=c_1e^{-\frac{\lambda}{m}t}.$$

Исходное неоднородное уравнение имеет правую часть специального вида $(-kg=const)$, поэтому частное решение тоже ищем в виде неопределённой постоянной

$$V_{частн}=A;\ V'_{частн}=0;\ \frac{\lambda}{m}A=-kg;\ A=-\frac{kgm}{\lambda};\ V_{частн}=-\frac{kgm}{\lambda}.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$V(t)=c_1e^{-\frac{\lambda}{m}t}-\frac{kgm}{\lambda}.$$

Определим постоянную и частное решение с учётом начального условия $V(0)=V_0$.

$$c_1=V_0+\frac{kgm}{\lambda},\ V(t)=\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t}-\frac{kgm}{\lambda}.$$

Теперь мы можем найти время торможения $t_{торм}$ из условия $V(t_{торм})=0$.

$$\frac{kgm}{\lambda}=e^{-\frac{\lambda}{m}t_{торм}}\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right);$$

$$-\frac{\lambda}{m}\cdot t_{торм}=\ln\frac{\frac{kgm}{\lambda}}{V_0+\frac{kgm}{\lambda}},\ -\frac{\lambda}{m}\cdot t_{торм}=\ln\frac{1}{\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1},$$

$$-\frac{\lambda}{m}\cdot t_{торм}=-\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right),\ t_{торм}=\frac{m}{\lambda}\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right).$$

Для определения тормозного пути воспользуемся определением перемещения, как интеграла от скорости движения и используем начальное значение перемещения равное нулю.

$$S(t)=\int_0^{t_{торм}}\left(\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t}-\frac{kgm}{\lambda}\right)dt,$$

$$S(t)=\left.\left(\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right)\left(-\frac{m}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}t}-\frac{kgm}{\lambda}t\right)\right|_0^{t_{торм}},$$

$$S(t)=\left(\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right)\left(-\frac{m}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}\frac{m}{\lambda}\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right)}-\frac{kgm}{\lambda}\frac{m}{\lambda}\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right)\right)-$$

$$-\left(\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right)\left(-\frac{m}{\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{m}0}\right),$$

$$S(t)=\left(\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right)\left(-\frac{m}{\lambda}\right)\frac{\frac{kgm}{\lambda}}{V_0+\frac{kgm}{\lambda}}-\frac{kgm}{\lambda}\frac{m}{\lambda}\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right)\right)+\frac{m}{\lambda}\left(V_0+\frac{kgm}{\lambda}\right),$$

$$S(t)=\frac{m}{\lambda}V_0+\cancel{\frac{kgm^2}{\lambda^2}}-\cancel{\frac{kgm^2}{\lambda^2}}-\frac{kgm^2}{\lambda^2}\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right),$$

$$S(t)=\frac{m}{\lambda}\left(V_0-\frac{kgm}{\lambda}\ln\left(\frac{V_0}{\frac{kgm}{\lambda}}+1\right)\right).$$

Пример 2

Тело, температура которого T, за t_0 минут пребывания в термостате, температура которого T_1, охладилось до температуры T_2. Какова будет температура тела через t_2 минут после начала опыта?

Решение:

Дифференциальное уравнение уменьшения температуры запишем в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt}=k\left(T-T_1\right),\ \int\frac{dT}{T-T_1}=\int kdt,\ \ln\left|T-T_1\right|=kt+c_1;$$

$$T=T_1+e^{kt+c_1}=T_1+\tilde{c}_1e^{kt}.$$

Таким образом, общее решение уравнения: $T\left(t\right)=T_1+\tilde{c}_1e^{kt}$

Найдём постоянные $\tilde{c}_1$ и k. Имеем два условия

1) при $t=0,\ T=T_0;\ T_0=T_1+\tilde{c}_1e^{k\cdot 0}\Rightarrow\tilde{c}_1=T_0-T_1;$

2) при $t=t_0,\ T=T_2;\ T_2=T_1+\left(T_0-T_1\right)e^{kt_0}$.

Найдём из последнего уравнения константу k.

$$e^{kt_0}=\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1};\ kt_0=\ln\left|\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1}\right|;\ k=\frac{1}{t_0}\ln\left|\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1}\right|$$

С учётом найденных постоянных частное решение будет иметь вид

$$T\left(t\right)=T_1+\underbrace{\left(T_0-T_1\right)}_{c_1}e^{\overbrace{\frac{t}{t_0}\ln\left|\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1}\right|}^{k}}=T_1+\left(T_0-T_1\right)\left(\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1}\right)^{\frac{t}{t_0}}$$

Температура в момент времени t_2:

$$T\left(t_2\right)=T_1+\left(T_0-T_1\right)e^{\frac{t_2}{t_0}\ln\left|\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1}\right|}=T_1+\left(T_0-T_1\right)\left(\frac{T_2-T_1}{T_0-T_1}\right)^{\frac{t_2}{t_0}}.$$

В последнем преобразовании мы использовали известную формулу $e^{x\cdot\ln y}=e^{\ln y^x}=y^x$.

Пример 3

Вещество с начальной массой *m*, разлагается на два вещества P и Q, причём скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Определить закон изменения количества веществ P и Q в зависимости от времени, если известно, что в начальный момент они отсутствуют, а через 60 минут после начала разложения массы веществ P и Q равны m_{p60} и m_{Q60}.

Решение:

Введём следующие обозначения: $m_p(t)$ и $m_Q(t)$ - масса веществ P и Q в момент времени *t*, тогда $m - m_P - m_Q$ - масса неразложившегося вещества. Условию задачи соответствует следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_P}{dt} = k_P\left(m - m_P - m_Q\right) \\ \dfrac{dm_Q}{dt} = k_Q\left(m - m_P - m_Q\right) \end{cases}.$$

Решаем её методом исключения. Выразим из первого уравнения текущую массу вещества $m_Q = m - m_P - \dfrac{1}{k_P}\cdot \dot{m}_P$ и продифференцируем первое уравнение $\ddot{m}_P = k_P\left(-\dot{m}_P - \dot{m}_Q\right)$, $\ddot{m}_P + k_P\dot{m}_P + k_P\dot{m}_Q = 0$. Подставим выражение из второго уравнения системы в последнее уравнение и преобразуем его

$$\ddot{m}_P + k_P\dot{m}_P + k_P\left(k_Q\left(\left(m - m_P - m_Q\right)\right)\right) = 0,$$

$$\ddot{m}_P + k_P\dot{m}_P + k_Pk_Q\left(m - m_P - \left(m - m_P - \frac{1}{k_P}\cdot \dot{m}_P\right)\right) = 0,$$

$$\ddot{m}_P + k_P\dot{m}_P + k_Q\dot{m}_P = 0,\ \underline{\ddot{m}_P + \left(k_P + k_Q\right)\dot{m}_P = 0}.$$

Итак, мы получили однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решим его. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни

$$p^2+\left(k_P+k_Q\right)p=0\Rightarrow \left[\begin{array}{c} p_1=0 \\ p_2=-\left(k_P+k_Q\right) \end{array}\right. .$$

Общее решение уравнения имеет вид $m_P\left(t\right)=c_1+c_2e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}$. Найдём производную $\dot{m}_P\left(t\right)=-c_2\left(k_P+k_Q\right)e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}$ и подставим в уравнение для $m_Q\left(t\right)$:

$$m_Q\left(t\right)=m-c_1-c_2e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}-\frac{1}{k_P}\left(-c_2\left(k_P+k_Q\right)e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}\right)=$$

$$=m-c_1-c_2e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}+c_2e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}+c_2\frac{k_Q}{k_P}e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}.$$

Получили уравнение для изменения массы $m_Q\left(t\right)=m-c_1+c_2\frac{k_Q}{k_P}e^{-\left(k_P+k_Q\right)t}$.

Для определения коэффициентов пропорциональности и постоянных интегрирования имеем 4 условия и 4 неизвестных:

$$m_P\left(0\right)=0,$$

$$m_Q\left(0\right)=0,$$

$$m_P\left(60\right)=m_{P60},$$

$$m_Q\left(60\right)=m_{Q60}.$$

Выпишем систему уравнений для определения констант

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 0}, \\ 0 = m - c_1 + c_2 \dfrac{k_Q}{k_P} e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 0}, \\ m_{P60} = c_1 + c_2 e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 60}, \\ m_{Q60} = m - c_1 + c_2 \dfrac{k_Q}{k_P} e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 60}. \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -c_2 \Rightarrow c_1 = \dfrac{mk_P}{k_P + k_Q}, \\ 0 = m + c_2 \left(1 + \dfrac{k_Q}{k_P}\right) \Rightarrow c_2 = -\dfrac{mk_P}{k_P + k_Q}, \\ m_{P60} = \dfrac{mk_P}{k_P + k_Q}\left(1 - e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 60}\right), \\ m_{Q60} = \dfrac{mk_Q}{k_P + k_Q}\left(1 - e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 60}\right). \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно коэффициентов пропорциональности при конкретных значениях массы, получим частное решение системы.

$$\begin{cases} m_{P60} = \dfrac{mk_P}{k_P + k_Q}\left(1 - e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 60}\right), \\ m_{Q60} = \dfrac{mk_Q}{k_P + k_Q}\left(1 - e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot 60}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{k_P}{k_Q} = \dfrac{m_{P60}}{m_{Q60}}, \\ \dfrac{m - m_{P60} - m_{Q60}}{m} = e^{-60\left(k_P + k_Q\right)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_P = \dfrac{m_{P60}}{m_{Q60}} k_Q, \\ k_P + k_Q = -\dfrac{1}{60} \ln \dfrac{m - m_{P60} - m_{Q60}}{m}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_P = -\dfrac{m_{P60}}{60\left(m_{P60} + m_{Q60}\right)} \ln \dfrac{m - m_{P60} - m_{Q60}}{m}, \\ k_Q = -\dfrac{m_Q}{60\left(m_{P60} + m_{Q60}\right)} \ln \dfrac{m - m_{P60} - m_{Q60}}{m}, \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} m_P(t) = \dfrac{mk_P}{k_P + k_Q}\left(1 - e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot t}\right), \\ m_Q(t) = \dfrac{mk_Q}{k_P + k_Q}\left(1 - e^{-\left(k_P + k_Q\right)\cdot t}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_P(t) = \dfrac{m \cdot m_{P60}}{m_{P60} + m_{Q60}}\left(1 - \left(\dfrac{m - m_{P60} - m_{Q60}}{m}\right)^{\frac{t}{60}}\right), \\ m_Q(t) = \dfrac{m \cdot m_{Q60}}{m_{P60} + m_{Q60}}\left(1 - \left(\dfrac{m - m_{P60} - m_{Q60}}{m}\right)^{\frac{t}{60}}\right). \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Состояние популяции некоторого биологического вида можно охарактеризовать массой популяции, являющейся функцией времени. Считая, что скорость увеличения суммарной массы популяции пропорциональна текущей массе популяции с коэффициентом пропорциональности $k = \dfrac{4}{2t+3}$, найти массу популяции в момент времени $t^* = 2$, если в начальный момент времени популяция имела массу $m_0 = 9$ единиц.

2. Таблетка массой 0,5 г растворяется в жидкости, причём скорость растворения пропорциональна массе таблетки. Известно, что через 10 минут растворилось 80% таблетки. Через какое время останется 1% нерастворённого вещества?

3. Температура печи при включении равномерно повышается в течение часа от температуры окружающей среды до 300 градусов Цельсия. Найти температуру куска стали, который помещён в печь на час. Считать, температура окружающей среды 25 градусов Цель-

сия, а коэффициент пропорциональности в законе изменения температуры для стали равен $k = 0.46$.

4. Сосуд объёмом 30 литра наполнен воздухом. В сосуд втекает 0,2 литра азота в секунду и вытекает то же количество смеси газов, находящихся в сосуде. Через какое время в сосуде будет 90 % азота, если считать, что воздух состоит Примерно из 20% кислорода и 80% азота?

5. За сколько минут вытечет вода из цилиндрического бака с диаметром основания 2 м и высотой 10 м (ось симметрии бака – вертикальна), через закруглённое отверстие в дне сосуда диаметром 0,01 м. Указание: для вычисления объёма вытекающей в секунду воды воспользоваться формулой Торричелли $V = \mu\sqrt{2gh}$, где g - ускорение свободного падения, h - высота столба жидкости, μ - коэффициент, зависящий от формы отверстия. Для закруглённого отверстия $\mu = 0,97$.

Ответы

1. 49 единиц массы;
2. Примерно через 28,6 мин;
3. Примерно 290 градусов Цельсия;
4. через 103,7 с или 1,7 мин.;
5. 2743,6 с или 45,7 мин.

4.3 Решение задач космонавтики и небесной механики с помощью дифференциальных уравнений и систем

При движении тела с переменной массой, например, космический аппарат или ракета, второй закон Ньютона не применим, так как он справедлив только для тел с постоянной массой. В этом случае используют так называемое уравнение Мещерского, описывающее движение тела переменной массы $m(t)$:

$$mV' = F + um', \tag{4.1}$$

где $V(t)$ - его скорость; $F(t)$ - действующая на него сила в момент времени t; $u(t)$ - скорость присоединяющихся или отсоединяющихся частиц (относительно тела); m' - секундный расход рабочего тела равен скорости изменения массы тела. При движении ракеты-носителя или космического аппарата $u(t)$ - это скорость истечения рабочего тела двигателя. Величина um' в космонавтике обычно называется тягой.

Если масса тела постоянна, то $m' = 0$ и уравнение Мещерского превращается во второй закон Ньютона. При расчёте движения летательного аппарата нужно учитывать, что его масса уменьшается, то есть $m' < 0$. В реальности секундный расход и скорость истечения рабочего тела зависят от многих факторов и могут изменяться во время полёта. Например, двигатель может регулироваться или работать по-разному при различных внешних условиях. Однако, в простейших случаях можно считать эти величины постоянными. Это обычно обговаривается в условиях задачи.

Пример 1

Масса космического аппарата с полным запасом топлива равна 600 кг, без топлива 100 кг, скорость истечения продуктов горения равна 3500 м/с. Найти величину, на которую изменится скорость космического аппарата в бессиловом поле, считая, что скорость истечения продуктов горения является постоянной и расход топлива является постоянным.

Решение:

Запишем уравнение Мещерского (4.1). Поскольку по условию задачи на космический аппарат не действуют никакие внешние силы, то $F(t)=0$ и уравнение движения имеет вид: $m\dfrac{dV}{dt}=-u\dfrac{dm}{dt}$.

Решим это уравнение

$$dV=-u\frac{dm}{m},\ \int\limits_{V_0}^{V_k}dV=-u\int\limits_{m_0}^{m_k}\frac{dm}{m},$$

$$V_k-V_0=u\left(\ln m_0-\ln m_k\right),\ V_k-V_0=u\ln\frac{m_0}{m_k}.$$

Фактически мы получили первую формулу Циолковского для изменения скорости космического аппарата $V_k-V_0=u\ln\dfrac{m_0}{m_k}$. Подставим в неё условия задачи, получим, что величина изменения скорости составит

$$\Delta V=V_k-V_0=u\ln\frac{m_0}{m_k}=3500\ln\frac{600}{100}\approx 6271{,}16 \text{ м/с.}$$

Пример 2

Ракета-носитель с начальной массой 250 т на начальном этапе движения поднимается вертикально вверх под действием силы тяги реактивного двигателя и силы притяжения. Скорость истечения и секундный расход рабочего тела двигателей первой ступени можно считать постоянными и равными 3500 м/с и 1000 кг/с соответственно. На какую высоту поднимется ракета-носитель через минуту после старта, если не учитывать сопротивление воздуха, центробежное ускорение от вращения Земли, кориолисовы силы и считать ускорение свободного падения постоянным?

Решение:

Пусть масса и скорость ракеты-носителя в момент времени t равны $m(t)$ и $V(t)$. Уравнение Мещерского для ракеты-носителя с учётом силы тяжести $F(t)=mg$ имеет вид $mV'=-mg+um'$ (сила тяжести направлена против скорости). Разделим полученное уравнение на массу ракеты-носителя

$$V' = -g - u\frac{m'}{m}, \quad \int\limits_{t_0=0}^{t} V'dt = \int\limits_{t_0}^{t}\left(-g - u\frac{m'}{m}\right)dt,$$

$$\int\limits_{V_0=0}^{V} dV = -gt\Big|_{t_0=0}^{t} - u\int\limits_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}, \; V = -gt - u\left(\ln m - \ln m_0\right),$$

$$V = -gt + u\left(\ln\frac{m_0}{m}\right).$$

Теперь для определения закона изменения скорости ракеты нужно определить закон изменения массы ракеты. По условию задачи расход массы рабочего тела – величина постоянная, поэтому $m(t) = m_0 - \beta t$. Здесь β мы обозначили секундный расход топлива, чтобы не путать постоянную величину с производной от массы. Теперь мы имеем уравнение изменения скорости ракеты-носителя:

$$V(t) = -gt + u\left(\ln\frac{m_0}{m_0 - \beta t}\right).$$

Это уравнение можно использовать для определения высоты подъёма ракеты, если проинтегрировать его по времени.

$$\int\limits_{t_0=0}^{t} h'(t)dt = \int\limits_{t_0=0}^{t} -gt + u\int\limits_{t_0}^{t}\ln\frac{m_0}{m_0 - \beta t}dt,$$

$$\int\limits_{h_0=0}^{h} dh(t) = -g\frac{t^2}{2} - u\int\limits_{t_0}^{t}\ln\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)dt$$

$$\int\limits_{h_0=0}^{h} dh(t) = -g\frac{t^2}{2} + u\left(t - \frac{m_0 - \beta t}{\beta}\right)\left(\ln\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)\right),$$

$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + u\left(t - \frac{m_0 - \beta t}{\beta}\cdot\ln\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)\right).$$

При интегрировании мы учли, что в начальный момент времени высота подъёма была равна нулю. Подставим в полученное решение исходные данные задачи:

$$h(60) = -9{,}81\frac{60^2}{2} + 3500\left(60 + \frac{250000 - 1000\cdot 60}{1000}\cdot \ln\left(1 - \frac{1000\cdot 60}{250000}\right)\right),$$

$h(60) = 9841{,}5$ м = 9,8415 км.

Пример 3

Известно, что для перелёта от Земли к Марсу космический аппарат после выхода на границу сферы действия Земли должен увеличить свою скорость на 2,944 км/с. Найти массу топлива, которую он должен истратить на этот манёвр, если его масса (с топливом) на границе сферы действия Земли была 1500 кг, скорость истечения рабочего тела 3500 м/с.

Решение:

Проинтегрируем уравнение Мещерского, как в первом Примере.

$$dV = -u\frac{dm}{m},\ \int_{V_0}^{V_k} dV = -u\int_{m_0}^{m_k}\frac{dm}{m},$$

$$V_k - V_0 = u(\ln m_0 - \ln m_k),\ V_k - V_0 = u\ln\frac{m_0}{m_k}.$$

Выразим из последнего уравнения массу космического аппарата после совершения манёвра $m_k = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{u}}$. И подставим исходные данные задачи.

$$m_k = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{u}} = 1500\cdot e^{-\frac{2944}{3500}} = 646{,}8 \text{ кг}.$$

Мы получили массу космического аппарата после совершения манёвра, то есть масса топлива составит 853,2 кг.

Необходимо отметить, что это не всё топливо, нужное космическому аппарату для перелёта к Марсу, так как оно не включает массу рабочего тела, необходимую для выравнивания скорости космического аппарата и Марса, формирования заданной орбиты в сфере действия Марса, возможной посадки и т.д.

Задания для самостоятельного решения

1. Через какое время ракета-носитель достигнет высоты 10 км от стартового стола, если её стартовая масса равна 100000 кг, секундный расход рабочего тела 500 кг/с, скорость истечения рабочего тела 4000 м/с. Найдите скорость ракеты-носителя в этот момент времени. Использовать допущения Примера 2.

2. Известно, что для перелёта от Земли к Венере космический аппарат после выхода на границу сферы действия Земли должен уменьшить свою гелиоцентрическую скорость на 2,497 км/с. Найти массу топлива, которую КА должен истратить на этот манёвр, если его масса (с топливом) на границе сферы действия Земли была 1500 кг, а для перелёта используется электроракетный двигатель, скорость истечения рабочего тела которого равна 70 км/с. Использовать допущения Примера 3. Объясните, почему полученный результат так существенно отличается от результата, полученного в Примере 3?

Ответы

1. 41,29 сек, 519,9 м/с;

2. 52,6 кг. Отличие объясняется низким расходом рабочего тела электроракетных двигателей.

Список литературы

1. Вся высшая математика. Т. 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

2. Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах; Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1985.

5. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: Наука, 1972.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978.

7. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М.: Просвещение, 1988.

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992.

9. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987.

10. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.

11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.

Учебное издание

Чостковская Ольга Петровна,
Чернякина Марина Владиславовна,
Старинова Ольга Леонардовна

РЕШЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 10.05.2023. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 8,0
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.