МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.А. ИЛЬИНА

РАЗРАБОТКА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2022

УДК 330.4(075)
ББК 65в6я7
И 460

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. Н. М. Т ю к а в к и н,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Р а д ч е н к о

Ильина, Елена Алексеевна

И 460 **Разработка экономико-математических моделей методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений:** учебное пособие / *Е.А. Ильина*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2022. – 96 с.

ISBN 978-5-7883-1797-7

В публикуемом учебном пособии представлены основные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложения для разработки различных математических моделей экономики.

Подробно рассмотрены модель освоения предприятием производственных мощностей, модель развития предприятия за счет внутренних инвестиций, динамическая модель Кейнса, модель диффузии инноваций, модель установления равновесной цены, задача прогнозирования равновесной цены, модель взаимодействия связанных отраслей экономики.

Предназначено для бакалавров направления подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика.

Подготовлено на кафедре математики и бизнес-информатики.

УДК 330.4(075)
ББК 65в6я7

ISBN 978-5-7883-1797-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование, являясь важным направлением научного познания, широко применяется практически во всех областях научной деятельности человека. Оно широко используется в техническом конструировании, строительстве и архитектуре, астрономии, физике, химии, биологии, экономике и т.д. Одним из эффективных инструментов экономико-математического моделирования социально-экономических систем и процессов являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

При построении экономико-математической модели исследуемый объект-оригинал заменяется с помощью системы знаков объектом-моделью, который сохраняет основные свойства объекта-оригинала.

Исследование построенной модели способно генерировать новые знания об исходном объекте.

Особая актуальность математического моделирования проявляется при исследовании поведения экономических объектов, для которых невозможно реально оценить их экономическую эффективность. К таким объектам относятся, например, строящиеся предприятия. Проводить натурные эксперименты с такими объектами чревато огромными временными и финансовыми затратами, тогда как применение экономико-математического моделирования позволяет получать достоверные и сравнительно дешевые оценки.

Процессы развития социально-экономических систем относятся к динамическим процессам, в которых главной характеристикой является скорость их протекания. Поэтому адекватное описание таких процессов всегда приводит к дифференциальным уравнениям и системам дифференциальных уравнений.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Понятие о дифференциальном уравнении

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в которое входит хотя бы одна производная искомой функции. Например,

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t), \; x = x(t);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x,t).$$

Дифференциальное уравнение может записываться с помощью дифференциалов переменных, но такая форма должна обязательно сводиться к обычной форме с производными искомых функций.

Например,

$$\begin{cases} x \cdot dy + y \cdot dx = 0, \\ x \cdot \dfrac{dy}{dx} + y = 0, \\ x \cdot y' + y = 0. \end{cases}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение.

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если искомой является функция одной переменной.

Если же искомой является функция нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется **уравнением в частных производных**.

Общий вид дифференциального уравнения произвольного порядка n записывается следующим образом:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.1.1)$$

Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно $y^{(n)}$, то получаем:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (1.1.2)$$

Решением или **интегралом ДУ** называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство для всех рассматриваемых значений x.

Решение ДУ может задаваться в неявном виде – $\Phi(x, y) = 0$. Процедура отыскания решения называется **интегрированием ДУ**.

Пример: Не сложно проверить, что решениями дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ являются следующие функции:

$$y = A \cdot \sin x \Rightarrow y' = A \cdot \cos x \Rightarrow y'' = -A \cdot \sin x,$$
$$y = B \cdot \cos x \Rightarrow y' = -B \cdot \sin x \Rightarrow y'' = -B \cdot \cos x,$$
$$y = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x \Rightarrow y' = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'' = -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x.$$

Очевидно, что дифференциальные уравнения имеют бесчисленное множество решений, константы A, B называются произвольными постоянными интегрирования.

1.2. Задача Коши для уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка получаются из дифференциальных уравнений произвольного порядка (1.1.1) и (1.1.2) при $n = 1$

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{1.2.1}$$

или

$$y' = f\left(x, y\right). \tag{1.2.2}$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется его решение, содержащее одну произвольную постоянную

$$y = \phi\left(x, C\right) \tag{1.2.3}$$

или

$$\Phi\left(x, y, C\right) = 0. \tag{1.2.4}$$

Геометрически общее решение представляет собой однопараметрическое семейство кривых линий, которые называются **интегральными кривыми**.

Легко видеть, что решением дифференциального уравнения первого порядка $y' - 2 \cdot y = 0$ является функция $y = C \cdot e^{2 \cdot x}$.

На рисунке 1 изображено семейство интегральных кривых для различных значений произвольной постоянной C.

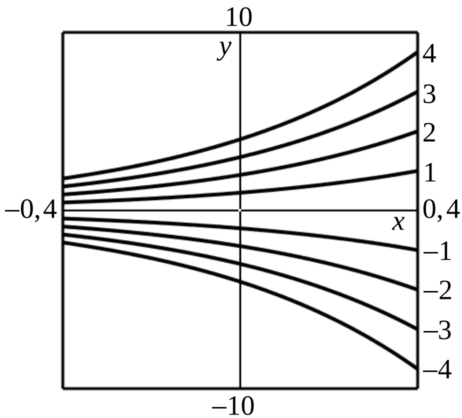

Рисунок 1 – Семейство интегральных кривых
для различных значений произвольной постоянной C

Если в общее решение вместо произвольной постоянной C подставить конкретное числовое значение $C = C_0$, то получится **частное решение** дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = \phi\left(x, C_0\right) \qquad (1.2.5)$$

или

$$\Phi\left(x, y, C_0\right) = 0. \qquad (1.2.6)$$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка состоит в том, чтобы найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \qquad (1.2.7)$$

Начальное условие (1.2.7) определяет на координатной плоскости точку $\left(x_0, y_0\right)$, через которую должна пройти искомая интегральная кривая.

Пример: Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + y = 0, \\ y\big|_{x=1} = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что общее решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид:

$$y = C \cdot e^{-x}.$$

Подставляя эту функцию в начальное условие, находим:

$$2 = C \cdot e^{-1} \Rightarrow C = 2 \cdot e.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид:

$$y = 2 \cdot e^{x+1}.$$

1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0. \qquad (1.3.1)$$

Убедимся, что дифференциальное уравнение (1.3.1) эквивалентно дифференциальному уравнению (1.2.2):

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0\Rightarrow M(x,y)+N(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=-M(x,y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка (1.3.1) называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ имеют вид:

$$\begin{cases}M(x,y)=M_1(x)\cdot M_2(y),\\ N(x,y)=N_1(x)\cdot N_2(y).\end{cases}$$

Умножим обе части дифференциального уравнения (1.3.1) на множитель $\dfrac{1}{M_2(y)\cdot N_1(x)}$:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\cdot dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\cdot dy=0.$$

Применим известную формулу математического анализа $dy=y'\cdot dx$:

$$\left(\frac{M_1(x)}{N_1(x)}+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\cdot y'\right)\cdot dx=0.$$

Поскольку оператор интегрирования и оператор дифференцирования являются взаимно обратными, то имеет место соотношение:

$$d\int\left(\frac{M_1(x)}{N_1(x)}+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\cdot y'\right)\cdot dx=0\ .$$

Если дифференциал некоторого выражения равен нулю, то само выражение тождественно равно константе, поэтому

$$\int\left(\frac{M_1(x)}{N_1(x)}+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\cdot y'\right)\cdot dx=C\ ,$$

или

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\cdot dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\cdot dy=C\ . \qquad (1.3.2)$$

Формула (1.3.2) представляет собой общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Пример: Решить дифференциальное уравнения первого порядка:

$$3\cdot e^x\cdot\operatorname{tg}y+\left(1-e^x\right)\cdot\frac{y'}{\cos^2 y}=0\ .$$

Выразим производную искомой функции через дифференциалы:

$$3\cdot e^x\cdot\operatorname{tg}y+\left(1-e^x\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}=0\ .$$

Умножим обе части полученного дифференциального уравнения на множитель $\dfrac{dx}{\left(1-e^x\right)\cdot\operatorname{tg}y\cdot dy}$:

$$\frac{3\cdot e^x}{1-e^x}\cdot dx+\frac{dy}{\operatorname{tg}y\cdot\cos^2 y}=0\ .$$

Проинтегрируем полученное соотношение:

$$\int \frac{3\cdot e^x}{1-e^x}\cdot dx+\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y\cdot \cos^2 y}=3\cdot \int \frac{e^x}{1-e^x}\cdot dx+\int \frac{d\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y}=$$

$$=-3\cdot \int \frac{d\left(1-e^x\right)}{1-e^x}+\int \frac{d\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y}=-3\cdot \ln\left|1-e^x\right|+\ln\left|\operatorname{tg} y\right|=\ln|C|.$$

Таким образом,

$$\ln\left|\frac{\operatorname{tg} y}{\left(1-e^x\right)^3}\right|=\ln|C|\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} y}{\left(1-e^x\right)^3}=C,$$

или

$$\operatorname{tg} y=C\cdot\left(1-e^x\right)^3\Rightarrow y=\operatorname{arctg}\left(C\cdot\left(1-e^x\right)^3\right).$$

1.4. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y'+p(x)\cdot y=q(x). \qquad (1.4.1)$$

Дифференциальное уравнение (1.4.1) решается методом замены переменной

$$y(x)=u(x)\cdot v(x). \qquad (1.4.2)$$

Вместо искомой функции $y(x)$ будем искать функцию $u(x)$, а вспомогательную функцию $v(x)$ подберем так, чтобы уравнение (1.4.1) максимально упростилось.

Подставим функцию (1.4.2) в уравнение (1.4.1):

$$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+p(x)\cdot u(x)\cdot v(x)=q(x),$$

или

$$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\left(v'(x)+p(x)\cdot v(x)\right)=q(x). \qquad (1.4.3)$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось условие:

$$v'(x)+p(x)\cdot v(x)=0.$$

Найдем самое простое решение этого уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx}=-p(x)\cdot v,$$

или

$$\frac{dv}{v}=-p(x)\cdot dx.$$

Интегрируем:

$$\ln v=-\int p(x)\cdot dx,$$

или

$$v=e^{-\int p(x)\cdot dx}. \qquad (1.4.4)$$

Уравнение (1.4.3) принимает вид:

$$u'(x)\cdot v(x)=q(x). \qquad (1.4.5)$$

Подставляя в уравнение (1.4.5) функцию (1.4.4), получаем:

$$u'(x)=\frac{q(x)}{v(x)},$$

или

$$u'(x)=q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}.$$

Интегрируя это соотношение, находим:

$$u(x)=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx+C.$$

Таким образом, окончательно решение линейного дифференциального уравнения (1.4.1) принимает вид:

$$y(x)=\left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot dx}\cdot dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}. \qquad (1.4.6)$$

Пример: Решить линейное дифференциальное уравнение:

$$y' + 2 \cdot x \cdot y = x \cdot e^{-x^2} .$$

С помощью подстановки $y = u \cdot v$ получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2 \cdot x \cdot u \cdot v = x \cdot e^{-x^2} ,$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + 2 \cdot x \cdot v \right) = x \cdot e^{-x^2} ,$$

$$v' + 2 \cdot x \cdot v = 0 ,$$

$$\frac{dv}{dx} = -2 \cdot x \cdot v ,$$

$$\frac{dv}{v} = -2 \cdot x \cdot dx ,$$

$$\ln v = -x^2 ,$$

$$v = e^{-x^2} .$$

Находим $u(x)$:

$$u' \cdot v = x \cdot e^{-x^2} ,$$

$$u' = \frac{x \cdot e^{-x^2}}{v} ,$$

$$\frac{du}{dx} = x ,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C .$$

Таким образом,

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \cdot e^{-x^2} .$$

1.5. Дифференциальное уравнение первого порядка Бернулли

Дифференциальным уравнением первого порядка Бернулли называется уравнение:

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{a}. \qquad (1.5.1)$$

Как и линейное дифференциальное уравнение первого порядка это уравнение решается с помощью подстановки $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Вместо функции $y(x)$ снова будем искать функцию $u(x)$, а вспомогательную функцию $v(x)$ подберем так, чтобы уравнение (1.5.1) максимально упростилось.

Технику решения уравнения (1.5.1) рассмотрим на примере.

Пример: Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x\cdot y' - 4\cdot y = x^{2}\cdot\sqrt{y}.$$

С помощью подстановки $y = u\cdot v$ получаем:

$$x\cdot u'\cdot v + x\cdot u\cdot v' - 4\cdot u\cdot v = x^{2}\cdot\sqrt{u\cdot v}.$$

Преобразуем результат:

$$x\cdot u'\cdot v + u\cdot\left(x\cdot v' - 4\cdot v\right) = x^{2}\cdot\sqrt{u\cdot v}.$$

Найдем функцию $v(x)$:

$$x\cdot v' - 4\cdot v = 0,$$

или

$$x\cdot\frac{dv}{dx} - 4\cdot v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = 4\cdot\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = 4 \cdot \frac{dx}{x},$$

$$\ln v = 4 \cdot \ln x,$$

$$v = x^4.$$

Запишем дифференциальное уравнение для функции $u(x)$:

$$x \cdot u' \cdot x^4 = x^2 \cdot \sqrt{u \cdot x^4},$$

$$x \cdot u' = \sqrt{u},$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{u},$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},$$

$$2 \cdot \sqrt{u} = \ln x + 2 \cdot C,$$

$$\sqrt{u} = \frac{\ln x}{2} + C,$$

$$u = \left(\frac{\ln x}{2} + C\right)^2,$$

$$y = u \cdot v = \left(\frac{\ln x}{2} + C\right)^2 \cdot x^4.$$

1.6. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

Функция двух переменных $Q(x, y)$ называется однородной функцией порядка m если для значений переменных x, y выполняется соотношение:

$$Q(\lambda \cdot x,\ \lambda \cdot y) = \lambda^m \cdot Q(x, y), \qquad (1.6.1)$$

в котором число m называется показателем однородности.

Рассмотрим примеры однородных и неоднородных функций.

1) Функция $Q(x,y)=x+y$ является однородной функцией первого порядка, поскольку:

$$Q(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y=\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot Q(x,y).$$

2) Функция $Q(x,y)=x^2+7\cdot x\cdot y-2\cdot y^2$ является однородной функцией второго порядка, поскольку:

$$Q(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=(\lambda\cdot x)^2+7\cdot(\lambda\cdot x)\cdot(\lambda\cdot y)-2\cdot(\lambda\cdot y)^2=$$
$$=\lambda^2\cdot\left(x^2+7\cdot x\cdot y-2\cdot y^2\right)=\lambda^2\cdot Q(x,y).$$

3) Очевидно, что функция $Q(x,y)=x^2\cdot y+3\cdot x\cdot y^2-2\cdot y^3$ является однородной функцией третьего порядка.

4) Функция $Q(x,y)=\frac{x}{y}\cdot\sin\frac{x}{y}$ является однородной функцией нулевого порядка.

5) Функция $Q(x,y)=x^2+7\cdot x^2\cdot y+y^3$ не является однородной функцией.

Дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0. \tag{1.6.2}$$

называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка если обе функции $M(x,y),N(x,y)$ являются однородными функциями с одним и тем же показателем однородности.

Очевидно, что дифференциальное уравнение

$$y'=f(x,y). \tag{1.6.3}$$

будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка если функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка решаются с помощью подстановки

$$z = \frac{y}{x},$$

или

$$y = x \cdot z .$$

Преобразуем дифференциальные уравнения первого порядка (1.6.2):

$$M(x, y) = x^m \cdot M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^m \cdot M(1, z),$$

$$N(x, y) = x^m \cdot N\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^m \cdot N(1, z),$$

$$y = x \cdot z,\ dy = z \cdot dx + x \cdot dz .$$

Дифференциальные уравнения первого порядка (1.6.2) принимает вид:

$$M(1, z) \cdot dx + N(1, z) \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz) = 0 .$$

или

$$\left(M(1, z) + z \cdot N(1, z)\right) \cdot dx + x \cdot N(1, z) \cdot dz = 0 .$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + z \cdot N(1, z)} \cdot dz = 0 .$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + z \cdot N(1, z)} \cdot dz + \ln|x| + \ln|C| = 0 .$$

Окончательно решение однородного дифференциального уравнения первого порядка (1.6.2) принимает вид:

$$\int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+z\cdot N(1,z)}\cdot dz+\ln C\cdot x=0\,. \qquad (1.6.4)$$

Здесь знак модуля можно опустить за счет произвольности константы интегрирования. После вычисления интеграла следует вспомогательную переменную z заменить выражением $z=\frac{y}{x}$.

Пример: Решить уравнение: $y'=\frac{x\cdot y}{x^2-y^2}$.

Решение:

1) Проверяем функцию $f(x,y)$ на однородность:

$$f(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=\frac{\lambda\cdot x\cdot\lambda\cdot y}{(\lambda\cdot x)^2-(\lambda\cdot y)^2}=\frac{x\cdot y}{x^2-y^2}=f(x,y)\,.$$

2) Применим формулы подстановок $z=\frac{y}{x}$ и $y=x\cdot z$:

$$y'=z+x\cdot z'=\frac{x^2\cdot z}{x^2-x^2\cdot z^2}\,,$$

$$x\cdot z'=\frac{z}{1-z^2}-z\,,$$

$$x\cdot z'=\frac{z-z+z^3}{1-z^2}\,,$$

$$x\cdot z'=\frac{z^3}{1-z^2}\,,$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{z^3}{1-z^2}\,,$$

$$\frac{1-z^2}{z^3}\cdot dz=\frac{dx}{x}\,,$$

$$\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cdot dz=\frac{dx}{x},$$

$$\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cdot dz=\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cdot dz=\ln|x|+\ln|C|=\ln|C\cdot x|=\ln C\cdot x,$$

$$-\frac{1}{2\cdot z^2}-\ln z=\ln C\cdot x,$$

$$-\frac{1}{2\cdot z^2}=\ln C\cdot x\cdot z,$$

$$e^{-\frac{1}{2\cdot z^2}}=C\cdot x\cdot z,$$

$$e^{-\frac{x^2}{2\cdot y^2}}=C\cdot y.$$

1.7. Дифференциальное уравнение первого порядка в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=0. \tag{1.7.1}$$

Предположим, что существует такая функция $U(x,y)$, что выполняются условия:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y),\\ \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y).\end{cases} \tag{1.7.2}$$

Тогда дифференциальное уравнение первого порядка (1.7.1) записывается в виде:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\cdot dy=0,$$

или

$$dU(x,y)=0.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения первого порядка (1.7.1) принимает вид:

$$U(x,y)=C. \qquad (1.7.3)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка (1.7.1), для которого существует функция $U=U(x,y)$, удовлетворяющая условиям (1.7.2), называется **уравнением в полных дифференциалах**.

Теорема.

Пусть $M(x,y)$, $N(x,y)$ – дифференцируемые функции. Для того чтобы выражение $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $U=U(x,y)$, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \qquad (1.7.4)$$

Доказательство:

1) Необходимость. Пусть выражение $M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy$ является полным дифференциалом. Тогда,

$$dU(x,y)=M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy,$$

$$\begin{cases} M(x,y)=\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \\ N(x,y)=\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y}, \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

2) Достаточность. Построим функцию $U = U(x,y)$ при выполнении условий (1.7.4):

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

$$U(x,y) = \int M(x,y) \cdot dx + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \cdot dx + \varphi'(y) = N(x,y),$$

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \cdot dx .$$

Убедимся в том, что правая часть полученного соотношения действительно не зависит от переменной x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \cdot dx \right) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \int M(x,y) \cdot dx =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Вычислим функцию x:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) \cdot dx \right) \cdot dy .$$

Таким образом, окончательно решение уравнения в полных дифференциалах имеет вид:

$$U(x,y)=\int M(x,y)\cdot dx+\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\cdot dx\right)\cdot dy\ . \qquad (1.7.5)$$

Пример: Решить уравнение:

$$M(x,y)\cdot dx+N(x,y)\cdot dy=$$

$$=\left(y\cdot\cos x+x^2\right)\cdot dx+\left(\sin x+2\cdot y\right)\cdot dy=0.$$

Проверяем условие (1.7.4):

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\cos x=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\cos x\ ,$$

Построим функцию $U=U(x,y)$:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=y\cdot\cos x+x^2,$$

$$U(x,y)=\int\left(y\cdot\cos x+x^2\right)\cdot dx+\varphi(y),$$

$$U(x,y)=y\cdot\sin x+\frac{x^3}{3}+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\sin x+\varphi'(y)=N(x,y)=\sin x+2\cdot y\ ,$$

$$\varphi'(y)=2\cdot y\ ,\ \varphi(y)=y^2\ ,$$

$$U(x,y)=y\cdot\sin x+\frac{x^3}{3}+y^2\ .$$

Таким образом, решение уравнения в неявной форме имеет вид:

$$y\cdot\sin x+\frac{x^3}{3}+y^2=C\ .$$

1.8. Огибающая однопараметрического семейства кривых

Однопараметрическое семейство (множество) кривых на плоскости можно задать в виде уравнения

$$F(x,y,C)=0\ . \qquad (1.8.1)$$

Здесь кривая линия задается в неявной форме, каждой кривой соответствует свое значение параметра C .

Линия на плоскости называется огибающей этого семейства кривых, если она в каждой своей точке касается одной из кривых семейства, причем в различных точках она касается различных кривых.

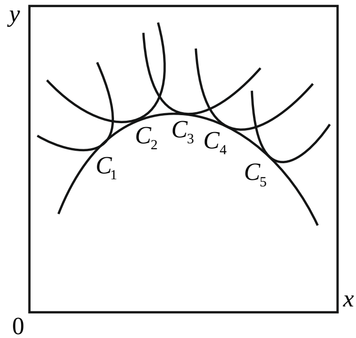

Рисунок 2 – Огибающая семейства кривых

Направление касательной к любой кривой (1.8.1) определяется угловым коэффициентом

$$k=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y,C)}{F_y'(x,y,C)}. \qquad (1.8.2)$$

Поскольку каждой точке огибающей соответствует свое значение величины C , то уравнение огибающей будем искать в виде $C=C(x,y)$.

Вычислим полный дифференциал левой и правой частей равенства (1.8.1)

$$F_x'(x,y,C)\cdot dx+F_y'(x,y,C)\cdot dy+F_C'(x,y,C)\cdot dC=0\,. \qquad (1.8.3)$$

Переписывая соотношение (1.8.2) в виде:

$$F_x'(x,y,C)\cdot dx+F_y'(x,y,C)\cdot dy=0\,,$$

находим

$$F_C'(x,y,C)\cdot dC = 0\,. \qquad (1.8.4)$$

Таким образом, огибающая семейства кривых определяется системой уравнений (1.8.1) и (1.8.4):

$$\begin{cases} F(x,y,C) = 0, \\ F_C'(x,y,C) = 0, \end{cases} \qquad (1.8.5)$$

из которой следует исключить величину C .

Пример. Найти огибающую семейства кривых $(x-C)^2 + y^2 = r^2$.

Решение: Составим систему уравнений (1.8.5)

$$\begin{cases} F(x,y,C) = (x-C)^2 + y^2 - r^2 = 0, \\ F_C'(x,y,C) = x - C = 0. \end{cases}$$

Исключая отсюда параметр C , находим:

$$C = x,$$

$$y^2 = r^2,.$$

$$y = \pm r\,.$$

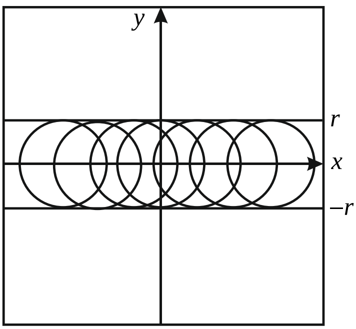

Рисунок 3 – Огибающие $y = \pm r$ семейства кривых $y^2 = r^2$

1.9. Уравнение Клеро. Особые решения дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение первого порядка Клеро имеет вид:

$$y = x \cdot y' + \varphi(y'). \qquad (1.9.1)$$

Выполняя замену переменной $y' = p$, получим:

$$y = x \cdot p + \varphi(p). \qquad (1.9.2)$$

Продифференцируем равенство (1.9.2):

$$y' = p + x \cdot p' + \varphi'(p) \cdot p'$$

или

$$p' \cdot \left(x + \varphi'(p)\right) = 0. \qquad (1.9.3)$$

Если $p' = 0$, то $p = C$ и из формулы (1.9.2) получаем общее решение:

$$y = C \cdot x + \varphi(C), \qquad (1.9.4)$$

которое представляет собой семейство прямых линий.

Если $x + \varphi'(p) = 0$, то решение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} y = C \cdot x + \varphi(C), \\ x + \varphi'(C) = 0, \end{cases} \qquad (1.9.5)$$

и представляет собой огибающую семейства прямых (1.9.4).

Решение (1.9.5) не получается из общего решения (1.9.4) ни при каких значениях C. Такое решение дифференциального уравнения называется особым решением.

Пример. Решить уравнение $y = x \cdot y' + y'^2$.

Решение: По формуле (1.9.4) находим общее решение

$$y = C \cdot x + C^2.$$

По формулам (1.9.5) находим особое решение:

$$\begin{cases} y = C \cdot x + C^2, \\ x + 2 \cdot C = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$C = -\frac{x}{2}, \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}, \quad y = -\frac{x^2}{4}.$$

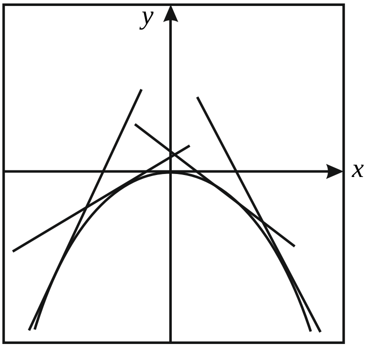

Рисунок 4 – Графики функций общего и особого решений дифференциального уравнения

1.10. Уравнение Лагранжа

Рассмотренный выше метод интегрирования уравнения Клеро применяется для решения более общего и более сложного уравнения Лагранжа

$$y = f\left(y'\right) \cdot x + \varphi\left(y'\right). \qquad (1.10.1)$$

Пример. Решить уравнение $y = x \cdot y'^2 + y'^3$.

Решение: Выполним замену переменной $y' = p$,

$$y = x \cdot p^2 + p^3.$$

Продифференцируем это уравнение

$$y' = p^2 + 2 \cdot x \cdot p \cdot p' + 3 \cdot p^2 \cdot p'.$$

Подставим $y' = p$ и преобразуем:

$$p \cdot (1 - p) = 2 \cdot x \cdot p \cdot p' + 3 \cdot p^2 \cdot p' .$$

Получим уравнение:

$$(1 - p) = (2 \cdot x + 3 \cdot p) \cdot \frac{dp}{dx} .$$

Воспользуемся формулой $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}}$ и получим линейное дифференциальное уравнение первого прядка относительно функции $x = x(p)$

$$(1 - p) \cdot \frac{dx}{dp} = 2 \cdot x + 3 \cdot p ,$$

или

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p - 1} \cdot x = -\frac{3 \cdot p}{p - 1} .$$

Решим линейное уравнение

$$x(p) = u(p) \cdot v(p),$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{2}{p - 1} \cdot u \cdot v = -\frac{3 \cdot p}{p - 1},$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{2}{p - 1} \cdot v \right) = -\frac{3 \cdot p}{p - 1} ,$$

$$v' + \frac{2}{p - 1} \cdot v = 0 ,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2 \cdot dp}{p - 1} ,$$

$$\ln v = -2 \cdot \ln(p - 1),$$

$$v=\frac{1}{(p-1)^2},$$

$$u'\cdot\frac{1}{(p-1)^2}=-\frac{3\cdot p}{p-1},$$

$$u'=-3\cdot p\cdot(p-1),$$

$$u'=-3\cdot p^2+3\cdot p,$$

$$u=-p^3+\frac{3}{2}\cdot p^2+C,$$

$$x=u\cdot v=\frac{C+\frac{3}{2}\cdot p^2-p^3}{(p-1)^2}.$$

Подставляя эту функцию в исходное уравнение, находим его решение в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\dfrac{C+\frac{3}{2}\cdot p^2-p^3}{(p-1)^2}, \\ y=\dfrac{C+\frac{3}{2}\cdot p^2-p^3}{(p-1)^2}\cdot p^2+p^3. \end{cases}$$

1.11. Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков

Рассмотрим сначала общее уравнение второго порядка:

$$F(x,y,y',y'')=0. \qquad (1.11.1)$$

Если его можно разрешить относительно старшей производной, оно примет вид:

$$y''=f(x,y,y'). \qquad (1.11.2)$$

Из структуры уравнения (1.11.2) видно, что одного начального условия $y\big|_{x=x_0} = y_0$, для однозначного определения интегральной кривой недостаточно, поскольку остается неопределенной (и в силу этого произвольной) величина y'. Поэтому, для уравнения (1.11.1) или (1.11.2) нужно еще одно начальное условие $y'\big|_{x=x_0} = y_1$.

Таким образом, для уравнения второго порядка задача Коши принимает вид

$$\begin{cases} y'' = f\left(x, y, y'\right), \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1. \end{cases} \tag{1.11.3}$$

Общее решение уравнений (1.11.1) или (1.11.2) зависит от двух произвольных постоянных

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2\right) = 0, \tag{1.11.4}$$

или в явной форме

$$y = \phi\left(x, C_1, C_2\right). \tag{1.11.5}$$

Совершенно аналогично формулируется задача Коши для уравнения произвольного порядка.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.11.6}$$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{1.11.7}$$

$$
\begin{cases}
y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\
y\big|_{x=x_0} = y_0, \\
y'\big|_{x=x_0} = y_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_{n-1}
\end{cases}
\qquad (1.11.8)
$$

Приведем без доказательства теорему существования и единственности задачи Коши (1.11.8).

Теорема

Если для дифференциального уравнения (1.11.7) функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ и ее все частные производные непрерывны в области $D \subset R^n$, то в этой области задача Коши (1.11.8) всегда имеет единственное решение.

1.12. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка уравнения

Рассмотрим сначала уравнения второго порядка:

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \qquad (1.12.1)$$

или

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \qquad (1.12.2)$$

В таком общем виде для этих уравнений универсального алгоритма решения не существует. Понизить порядок уравнения (1.12.2) можно только в том случае, если его правая часть является неполной. Рассмотрим эти случаи подробно.

Пусть в уравнении (1.12.2) отсутствуют величины y, y' и оно имеет вид:

$$y'' = f\left(x\right). \qquad (1.12.3)$$

Тогда его решение получается непосредственным интегрированием:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2. \qquad (1.12.4)$$

Аналогично решается уравнение:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Пусть теперь в уравнении (1.12.2) отсутствует величина y, и оно имеет вид:

$$y'' = f(x, y'). \qquad (1.12.5)$$

Понижение порядка этого уравнения достигается с помощью подстановки $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'$ и уравнение (1.12.5) принимает вид $z' = f(x, z)$.

Решая его рассмотренными выше методами для уравнений первого порядка, получаем:

$$z = \varphi(x, C_1),$$

откуда

$$y' = \varphi(x, C_1) \Rightarrow y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2. \qquad (1.12.6)$$

Пример. Решить уравнение: $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

Выполняя замену переменной $y'(x) = z(x)$, $y''(x) = z'(x)$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$(1 + x^2) \cdot z' + z^2 + 1 = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{1 + z^2} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0,$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} C_1,$$

$$\operatorname{arctg} z = -\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C_1,$$

решим относительно z:

$$z = -\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} C_1\right),$$

воспользуемся формулой тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

$$z = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x},$$

$$y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x},$$

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} \cdot dx + A_2,$$

$$y = -\frac{1}{C_1} \int \frac{1 + C_1 \cdot x - \left(C_1^2 + 1\right)}{1 + C_1 x} \cdot dx + A_2,$$

$$y = -\frac{1}{C_1} \int dx + \frac{1 + C_1^2}{C_1^2} \cdot \int \frac{C_1 \cdot dx}{1 + C_1 \cdot x} + A_2,$$

$$y = -\frac{x}{C_1} + \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \cdot \ln\left|1 + C_1 x\right| + A_2.$$

Выберем теперь произвольную константу A_2 в виде:

$$A_2 = \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \cdot \ln\left|C_2\right|.$$

Тогда окончательно получаем:

$$y = -\frac{x}{C_1} + \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \cdot \ln C_2 \cdot \left(1 + C_1 x\right).$$

Знак модуля опущен в силу произвольности констант C_1 и C_2.

Совершенно аналогично можно понизить на единицу порядок уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Пусть теперь в уравнении (1.12.2) отсутствует величина x, и оно имеет вид:

$$y'' = f\left(y, y'\right). \tag{1.12.7}$$

Понижение порядка такого уравнения достигается с помощью подстановки $y' = p(y)$. Вычислим вторую производную y'':

$$y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y) = p' \cdot p.$$

Уравнение (1.12.7) принимает вид:

$$p \cdot p' = f\left(y, p\right).$$

Решая его одним из методов для уравнений первого порядка, получаем:

$$p = \varphi(y, C_1),$$

$$y' = \varphi(y, C_1),$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример. Решить уравнение: $2 \cdot y \cdot y'' = y'^2 + 1$.

Выполняя замену переменной $y' = p(y)$, $y'' = pp'$, получим:

$$2 \cdot y \cdot p \cdot p' = p^2 + 1,$$

$$\frac{2p \cdot dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y},$$

$$\ln\left(1 + p^2\right) = \ln y + \ln C_1,$$

$$1 + p^2 = C_1 \cdot y,$$

$$p = \pm\sqrt{C_1 \cdot y - 1}\,,$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1 \cdot y - 1}\,,$$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx\,,$$

$$\pm\frac{2}{C_1}\cdot\sqrt{C_1 \cdot y - 1} = x + C_2\,,$$

$$\frac{4}{C_1^2}\cdot\left(C_1 \cdot y - 1\right) = \left(x + C_2\right)^2,$$

$$y = \frac{1}{4\cdot C_1}\cdot\left(C_1\cdot x + C_1\cdot C_2\right)^2 + \frac{1}{C_1}\,,$$

$$y = \frac{C_1^2\cdot\left(x + C_2\right)^2 + 4}{4\cdot C_1}\,.$$

Если левая часть дифференциального уравнения (1.12.7) является точной производной некоторой функции:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)\right),$$

то порядок уравнения сразу же понижается на единицу

$$\Phi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C_1\,.$$

Укажем несколько примеров точных производных:

1. $\dfrac{y'}{y} = \left(\ln y\right)'$,

2. $\dfrac{y''}{y'} = \left(\ln y'\right)'$,

3. $x\cdot y'' + y' = \left(x\cdot y'\right)'$,

4. $\dfrac{x\cdot y'' - y'}{x^2} = \left(\dfrac{y'}{x}\right)'$,

5. $y \cdot y'' + y'^2 = (y \cdot y')'$,

6. $\dfrac{y \cdot y'' - y'^2}{y^2} = \left(\dfrac{y'}{y}\right)'$.

Пример. Решить уравнение: $x^2 \cdot \left(y \cdot y'' - y'^2\right) = y^2$.

Решение:

$$x^2 \cdot \left(y \cdot y'' - y'^2\right) = y^2,$$

$$\frac{y \cdot y'' - y'^2}{y^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} + C_1,$$

$$\frac{dy}{y} = \left(-\frac{1}{x} + C_1\right) \cdot dx,$$

$$\ln y = -\ln x + C_1 x + \ln C_2,$$

$$y = \frac{C_2}{x} \cdot e^{C_1 \cdot x}.$$

Пример. Решить уравнение: $x \cdot y'' + y' = 3 \cdot x + 1$.

Решение:

$$x \cdot y'' + y' = 3 \cdot x + 1,$$

$$(x \cdot y')' = 3 \cdot x + 1,$$

$$x \cdot y' = \frac{3}{2} \cdot x^2 + x + C_1,$$

$$y' = \frac{3 \cdot x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x},$$

$$y=\frac{3\cdot x^2}{4}+x+C_1\cdot\ln|x|+\ln|C_2|,$$

$$y=\frac{3\cdot x^2}{4}+x+\ln\left(C_2\cdot x^{C_1}\right).$$

1.13. Структура решения линейного однородного дифференциального уравнения произвольного порядка

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение:

$$\begin{gathered}y^{(n)}+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}+p_2(x)\cdot y^{(n-2)}+\ldots\\ \ldots+p_{n-1}(x)\cdot y'+p_n(x)\cdot y=0.\end{gathered}\tag{1.13.1}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n}p_k(x)\cdot y^{(n-k)}=0.\tag{1.13.2}$$

Здесь $p_0(x)\equiv 1$, под однородностью понимается равенство левой части нулю.

Очевидно, что если $y_1(x), y_2(x)$ – частные решения уравнений (1.13.1), (1.13.2), то функции $y_1(x)\pm y_2(x)$, $a_1\cdot y_1(x), a_2\cdot y_2(x)$ и $a_1\cdot y_1(x)+a_2\cdot y_2(x)$ тоже будут решениями этих уравнений.

Теорема (о структуре общего решения линейного однородного уравнения).

Если $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ – линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения n-го порядка, то его общее решение можно представить в виде:

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot y_i.\tag{1.13.3}$$

Доказательство:

Очевидно, что в силу линейной структуры уравнения (1.13.2) функция (1.13.3) является решением уравнения как линейная комбинация частных решений.

Покажем, что с помощью формулы (1.13.3) можно решить любую задачу Коши.

Рассмотрим произвольные начальные условия:

$$\begin{cases} y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_{n-1}. \end{cases} \quad (1.13.4)$$

Подставляя функцию (1.13.3) в условия (1.13.4), получаем линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n'(x_0) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 \cdot y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 \cdot y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (1.13.5)$$

для вычисления значений C_1, C_2, …, C_n. Главным определителем системы (1.13.5) является определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

в точке x_0. Так как система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ является линейно независимой, то определитель Вронского отличен от нуля, следовательно система (1.13.5) имеет единственное решение. Таким образом, мы решили произвольную задачу Коши, что и требовалось доказать.

1.14. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим сначала уравнение второго порядка

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = 0, \qquad (1.14.1)$$

где $p_1, p_2 \in R$ числовые коэффициенты.

Будем искать частное решение уравнения в виде $y = e^{k \cdot x}$.

Вычислим производные:

$$y' = k \cdot e^{k \cdot x},$$
$$y'' = k^2 \cdot e^{k \cdot x}.$$

Подставляя результаты в уравнение (1.14.1), находим:

$$k^2 \cdot e^{kx} + p_1 \cdot k \cdot e^{k \cdot x} + p_2 \cdot e^{k \cdot x} = 0,$$

или

$$k^2 + p_1 \cdot k + p_2 = 0. \qquad (1.14.2)$$

Уравнение (1.14.2) называется характеристическим уравнением для уравнения (1.14.1).

Корни этого уравнения вычисляются по формуле:

$$k_{1,2} = -\frac{p_1}{2} \pm \sqrt{\frac{p_1^2}{4} - p_2}. \qquad (1.14.3)$$

Рассмотрим три варианта решения уравнения (1.14.2).

1. Пусть дискриминант квадратного уравнения строго положителен:

$$D = \frac{p_1^2}{4} - p_2 > 0.$$

Тогда уравнение (1.14.2) имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$, а уравнение (1.14.1) имеет два частных решения $y_1 = e^{k_1 \cdot x}$, $y_2 = e^{k_2 \cdot x}$.

С помощью определителя Вронского легко проверяется их линейная независимость. В самом деле,

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1 \cdot x} & e^{k_2 \cdot x} \\ k_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} & k_2 \cdot e^{k_2 \cdot x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2)\cdot x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) \cdot e^{(k_1 + k_2)\cdot x} \neq 0 .$$

Таким образом, общим решением уравнения (1.14.1) является функция:

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x} . \qquad (1.14.4)$$

2. Пусть дискриминант квадратного уравнения равен нулю:

$$D = \frac{p_1^2}{4} - p_2 = 0 .$$

Тогда уравнение (1.14.2) имеет один действительный корень:

$$k_1 = k_2 = k = -\frac{p_1}{2} ,$$

а уравнение (1.14.1) имеет одно частное решение:

$$y_1 = e^{k \cdot x} .$$

Покажем, что вторым частным решением в этом случае является функция

$$y_2 = x \cdot e^{k \cdot x} .$$

Вычислим производные:

$$y_2' = e^{k \cdot x} \cdot (1 + k \cdot x),$$

$$y_2'' = e^{k \cdot x} \cdot (2 \cdot k + k^2 \cdot x),$$

подставим их в уравнение (1.14.1):

$$e^{k \cdot x} (2 \cdot k + k^2 \cdot x) + p_1 \cdot e^{k \cdot x} \cdot (1 + k \cdot x) + p_2 \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = 0 ,$$

или

$$\left(2\cdot k+p_2\right)+x\cdot\left(k^2+p_1\cdot k+p_2\right)=0.$$

Полученное равенство выполняется для всех значений x.

С помощью определителя Вронского легко проверяется линейная независимость частных решений $y_1=e^{k\cdot x}$ и $y_2=x\cdot e^{k\cdot x}$. В самом деле:

$$W=\begin{vmatrix} e^{k\cdot x} & x\cdot e^{k\cdot x} \\ k\cdot e^{k\cdot x} & \left(1+x\cdot k\right)\cdot e^{k\cdot x}\end{vmatrix}=e^{2\cdot k\cdot x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ k & \left(1+x\cdot k\right)\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общим решением уравнения (1.14.1) является функция

$$y=\left(C_1+C_2\cdot x\right)\cdot e^{k\cdot x}. \qquad (1.14.5)$$

3. Пусть дискриминант квадратного уравнения строго отрицателен:

$$D=\frac{p_1^2}{4}-p_2<0.$$

Тогда уравнение (1.14.2) не имеет действительных корней. Его решение можно представить в виде:

$$k_{1,2}=-\frac{p_1}{2}\pm\sqrt{\frac{p_1^2}{4}-p_2},$$

$$k_{1,2}=-\frac{p_1}{2}\pm\sqrt{\left(p_2-\frac{p_1^2}{4}\right)\cdot\left(-1\right)},$$

$$k_{1,2}=-\frac{p_1}{2}\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{p_2-\frac{p_1^2}{4}},$$

$$k_{1,2}=\alpha\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{p_2-\frac{p_1^2}{4}},$$

$$k_{1,2}=\alpha\pm\sqrt{-1}\cdot\beta=\alpha\pm i\beta.$$

Такие корни квадратного уравнения называют **комплексными** или **комплексно-сопряженными**.

Здесь $\alpha = -\frac{p_1}{2}$ – действительная часть комплексного корня, $\beta = \sqrt{p_2 - \frac{p_1^2}{4}} > 0$ – мнимая часть комплексного корня, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Покажем, что в этом случае уравнение (1.14.1) имеет два частных решения:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x, \\ y_2 = e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x. \end{cases}$$

Вычислим производные функции $y_1 = e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x$:

$$y_1' = \alpha\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x - \beta\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x,$$

$$y_1'' = \alpha^2\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x - \alpha\cdot\beta\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x -$$
$$-\alpha\cdot\beta\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x - \beta^2\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x.$$

Подставим функцию $y_1 = e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x$ и ее производные в уравнение (1.14.1)

$$\alpha^2\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x - \alpha\cdot\beta\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x -$$
$$-\alpha\cdot\beta\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x - \beta^2\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x +$$
$$+p_1\cdot\alpha\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x - p_1\cdot\beta\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin\beta x +$$
$$+p_2\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos\beta x = 0.$$

Сократим на множитель $e^{\alpha\cdot x}$, который всегда отличен от нуля.

$$\alpha^2\cdot\cos\beta x - \alpha\cdot\beta\cdot\sin\beta x - \alpha\cdot\beta\cdot\sin\beta x - \beta^2\cdot\cos\beta x +$$
$$+p_1\cdot\alpha\cdot\cos\beta x - p_1\cdot\beta\cdot\sin\beta x + p_2\cdot\cos\beta x = 0.$$

Приведем подобные члены:

$$\left(\alpha^2 - \beta^2 + p_1\cdot\alpha + p_2\right)\cdot\cos\beta x - \left(2\cdot\alpha + p_1\right)\cdot\beta\cdot\sin\beta x = 0.$$

Подставляя сюда выражения $\alpha = -\frac{p_1}{2}$ и $\beta = \sqrt{p_2 - \frac{p_1^2}{4}}$, получаем:

$$2 \cdot \alpha + p_1 = -2 \cdot \frac{p_1}{2} + p_1 = -p_1 + p_1 = 0,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + p_1 \cdot \alpha + p_2 = \frac{p_1^2}{4} - p_2 + \frac{p_1^2}{4} - p_1 \cdot \frac{p_1}{2} + p_2 = 0.$$

Таким образом, функция $y_1 = e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos \beta x$ действительно является частным решением уравнения (1.14.1). Совершенно аналогично показывается, что функция $y_2 = e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin \beta x$, также является решением уравнения (1.14.1). (Доказать самостоятельно).

Проверим линейную независимость функций: $y_1 = e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin \beta x$. Составим определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos \beta x & e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin \beta x \\ \alpha \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos \beta x - \beta \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin \beta x & \alpha \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin \beta x + \beta \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos \beta x \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множители $e^{\alpha \cdot x}$:

$$W = e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ \alpha \cdot \cos \beta x - \beta \cdot \sin \beta x & \alpha \cdot \sin \beta x + \beta \cdot \cos \beta x \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель:

$$W = e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot (\alpha \cdot \sin \beta x \cdot \cos \beta x + \beta^2 \cdot \cos^2 \beta x -$$
$$-\alpha \cdot \sin \beta x \cdot \cos \beta x + \beta^2 \cdot \sin^2 \beta x) = e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot \beta^2 \neq 0.$$

Таким образом, общим решением уравнения (1.14.1) является функция

$$y = e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x \right). \qquad (1.14.6)$$

Полученные результаты для уравнения второго порядка легко обобщаются на аналогичные уравнения любого порядка

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + p_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y = 0, \qquad (1.14.7)$$

где $p_i \in R$ – числовые коэффициенты.

Характеристическое уравнение для уравнения (1.14.7) имеет вид:

$$k^n + p_1 \cdot k^{n-1} + p_2 \cdot k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} \cdot k + p_n = 0. \qquad (1.14.8)$$

При решении уравнения (1.14.8) могут возникнуть четыре варианта:

1. если k – простой корень уравнения (1.14.8), то в общем решении ему отвечает слагаемое вида:

$$C \cdot e^{k \cdot x};$$

2. если k – корень уравнения (1.14.8) кратности m, то в общем решении ему отвечает слагаемое вида:

$$e^{k \cdot x} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + \ldots + C_m \cdot x^{m-1} \right);$$

3. если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – простая пара комплексных корней уравнения (1.14.8), то в общем решении ей отвечает слагаемое вида:

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(C \cdot \cos \beta x + D \cdot \sin \beta x \right);$$

4. если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексных корней уравнения (1.14.8) кратности m, то в общем решении ей отвечает слагаемое вида

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_m \cdot x^{m-1} \right) \cdot \cos \beta x +$$
$$+ e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(D_1 + D_2 \cdot x + \ldots + D_m \cdot x^{m-1} \right) \cdot \sin \beta x.$$

Примеры:

1. Решить уравнение $y'' + y' - 2 \cdot y = 0$.

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 1,$$

$$y = C_1 \cdot e^{-2\cdot x} + C_2 \cdot e^x.$$

2. Решить уравнение $y'' - 4 \cdot y' + 4 \cdot y = 0$.

$$k^2 - 4 \cdot k + 4 = 0,$$

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 4},$$

$$k_1 = 2, \ k_2 = 2,$$

$$y = \left(C_1 + C_2 \cdot x\right) \cdot e^{2\cdot x}.$$

3. Решить уравнение $y'' - 6 \cdot y' + 13 \cdot y = 0$.

$$k^2 - 6 \cdot k + 13 = 0,$$

$$k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm 2i,$$

$$y = \left(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x\right) \cdot e^{3\cdot x}.$$

4. Решить уравнение $y^{(4)} + 2 \cdot y'' + y = 0$.

$$k^4 + 2 \cdot k^2 + 1 = 0,$$

$$\left(k^2 + 1\right)^2 = 0,$$

$$k^2 = -1,$$

$$m = 2,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

$$k_1 = k_2 = i,$$

$$k_3 = k_4 = -i,$$

$$y = \left(C_1 + C_2 \cdot x\right) \cdot \cos x + \left(D_1 + D_2 \cdot x\right) \cdot \sin x.$$

1.15. Структура решения линейного неоднородного дифференциального уравнения произвольного порядка

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение:

$$\begin{gathered} y^{(n)} + p_1(x)\cdot y^{(n-1)} + p_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \ldots \\ \ldots + p_{n-1}(x)\cdot y' + p_n(x)\cdot y = f(x). \end{gathered} \tag{1.15.1}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\cdot y^{(n-k)} = f(x). \tag{1.15.2}$$

Здесь, по-прежнему $p_0(x)\equiv 1$, а под неоднородностью понимается равенство левой части некоторой функции $f(x)$.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимые частные решения соответствующего линейного однородного уравнения (1.13.1), а $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i$ – его общее решение, обозначим $y^*(x)$ некоторое частное решение неоднородного уравнения (1.15.1).

Теорема 1 (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения, соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения и некоторого частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$$y = \bar{y} + y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i + y^*. \tag{1.15.3}$$

Доказательство:

Легко видеть, что в силу линейности уравнения функция (1.15.3) является решением уравнения (1.15.1). Функция (1.15.3) будет общим решение только в том случае, если с ее помощью можно будет решить **любую** задачу Коши.

Рассмотрим произвольные начальные условия:

$$\begin{cases} y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ y'\big|_{x=x_0} = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1.15.4}$$

Подставляя функцию (1.15.3) в условия (1.15.4), получаем линейную систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + \dots C_n \cdot y_n(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + \dots C_n \cdot y_n'(x_0) = y_1 - y^{*\prime}(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 \cdot y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots C_n \cdot y_n^{(n-1)} = y_{n-1} - y^{*(n-1)}(x_0), \end{cases} \tag{1.15.5}$$

для вычисления значений $C_1, C_2, \dots, C_n$. Главным определителем системы (1.15.5) является определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

в точке x_0.

Так как система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ является линейно независимой, то определитель Вронского отличен от нуля, следовательно система (1.15.5) имеет единственное решение.

Таким образом, мы решили произвольную задачу Коши, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (о структуре частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения).

Если $f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$, то частное решение уравнения (1.15.2) можно представить в виде $y^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^*$, где y_i^* есть частные решения уравнений:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\cdot y_i^{*(n-k)} = f_i(x), \quad \left(i=\overline{1,m}\right).$$

(Доказать самостоятельно).

1.16. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''(x)+p_1(x)\cdot y'(x)+p_2(x)\cdot y(x)=f(x). \qquad (1.16.1)$$

Предположим, что известно общее решение

$$\bar{y}(x)=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x), \qquad (1.16.2)$$

соответствующего однородного уравнения

$$y''(x)+p_1(x)\cdot y'(x)+p_2(x)\cdot y(x)=0. \qquad (1.16.3)$$

Для решения неоднородного уравнения (1.16.1) выполним замену переменной:

$$y(x)=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x). \qquad (1.16.4)$$

В отличие от формулы (1.16.2) здесь $C_1(x),\ C_2(x)$ – некоторые функции – вариации произвольных постоянных.

Поскольку вместо одной искомой функции $y(x)$ появились две – $C_1(x),\ C_2(x)$, то на них можно будет впоследствии наложить одно вспомогательное упрощающее условие.

Вычислим производную от функции (1.16.4)

$$\begin{gathered} y'(x)=C_1(x)\cdot y_1'(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x)+ \\ +C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x). \end{gathered} \tag{1.16.5}$$

Воспользуемся возможностью наложить упрощающее условие на функции $C_1(x),\ C_2(x)$ и примем

$$C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0. \tag{1.16.6}$$

Тогда производная искомой функции (1.16.5) запишется в виде:

$$y'(x)=C_1(x)\cdot y_1'(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x). \tag{1.16.7}$$

Вычислим вторую производную искомой функции:

$$\begin{gathered} y''(x)=C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)+ \\ +C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x). \end{gathered} \tag{1.16.8}$$

Подставляя формулы (1.16.4), (1.16.7), (1.16.8) в уравнение (1.16.1), находим:

$$\begin{gathered} C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)+C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)+ \\ +p_1(x)\cdot\left(C_1(x)\cdot y_1'(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x)\right)+ \\ +p_2(x)\cdot\left(C_1(x)\cdot y_1+C_2(x)\cdot y_2(x)\right)=f(x), \end{gathered}$$

или

$$C_1(x)\cdot\Big(y_1''(x)+p_1(x)\cdot y_1'(x)+p_2(x)\cdot y_1(x)\Big)+$$
$$+C_2(x)\cdot\Big(y_2''(x)+p_1(x)\cdot y_2'(x)+p_2(x)\cdot y_2(x)\Big)+$$
$$+C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x),$$

Учитывая однородное дифференциальное уравнение (1.16.3), получаем

$$C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \qquad (1.16.9)$$

Таким образом, искомые величины $C_1'(x),\ C_2'(x)$ удовлетворяют системе линейных уравнений (1.16.6), (1.16.9).

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \end{cases} \qquad (1.16.10)$$

Общий вид решения системы (1.16.10) можно представить в виде

$$\begin{cases} C_1'(x)=\varphi_1(x), \\ C_2'(x)=\varphi_2(x). \end{cases}$$

Функции $C_1(x),\ C_2(x)$ находятся с помощью непосредственного интегрирования:

$$\begin{cases} C_1(x)=\int\varphi_1(x)\cdot dx, \\ C_2(x)=\int\varphi_2(x)\cdot dx. \end{cases}$$

Пример: Решить уравнение: $y''+y'=\cos x$.

Решение:

1. Запишем решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y = 0,$$
$$k^2 + 1 = 0,$$
$$k_{1,2} = \pm i,$$
$$y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x.$$

2. Составим систему (1.16.10):

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \cdot \sin x + C_2'(x) \cdot \cos x = \cos x. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных уравнений методом Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\sin x \cdot \cos x = -\frac{\sin 2x}{2},$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Интегрируя полученные функции, находим:

$$C_1(x) = \frac{\cos 2x}{4} + A,$$

$$C_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + B.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x + \frac{x \cdot \sin x}{2} + \frac{\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x}{4}$$

или после преобразования

$$y(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x + \frac{x \cdot \sin x}{2} + \frac{\cos x}{4}.$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение произвольного порядка

$$y^{(n)}+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\cdot y'+p_n(x)\cdot y=f(x), \qquad (1.16.11)$$

решается методом вариации произвольных постоянных по описанной выше схеме. Для уравнения (1.16.11) система (1.16.10) принимает вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+\ldots+C_n'(x)\cdot y_n(x)=0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+\ldots+C_n'(x)\cdot y_n'(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)}(x)=0, \\ C_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases} \qquad (1.16.12)$$

1.17. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+p_1\cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}\cdot y'+p_n\cdot y=f(x). \qquad (1.17.1)$$

Здесь все коэффициенты представляют собой константы $p_i=const$.

Пусть правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(P_n(x)\cdot\cos\beta x+Q_m(x)\cdot\sin\beta x\right), \qquad (1.17.2)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n;

$Q_m(x)$ – многочлен степеней m.

Общее решение уравнения (1.17.1) задается формулой:

$$y=\bar{y}+y^*.$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами;

y^* – некоторое частное решение линейного неоднородного уравнения.

При этом общее решение $\bar{y}$ находится способом, описанном в п. 1.14.

Можно показать, что в этом случае частное решение уравнения (1.17.1) нужно искать в виде:

$$y^*(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(A_k(x) \cdot \cos \beta x + B_k(x) \cdot \sin \beta x\right) \cdot x^s, \quad (1.17.3)$$

где $A_k(x)$ и $B_k(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами;

$$k = \max\{n, m\};$$

s – кратность корня $\alpha \pm i\beta$ среди корней характеристического уравнения (1.14.8).

Пример: Найти частное решение для уравнения вида:

$$y'' - 5 \cdot y' + 6 \cdot y = f(x).$$

Варианты функции $f(x)$ заданы в таблице. Обосновать выбор формы частного решения и вычислить неопределенные коэффициенты.

№	$f(x)$	$y^*(x)$
1	$\sin x$	$A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$
2	$x \cdot \cos x$	$(A \cdot x + B) \cdot \cos x + (C \cdot x + D) \cdot \sin x$
3	e^{-x}	$A \cdot e^{-x}$
4	$e^{2 \cdot x}$	$A \cdot x \cdot e^{2 \cdot x}$

5	$x \cdot e^{2 \cdot x}$	$\left(A \cdot x + B\right) \cdot x \cdot e^{2 \cdot x}$
6	$e^{2 \cdot x} \cdot \sin x$	$e^{2 \cdot x} \cdot \left(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x\right)$
7	$e^{2 \cdot x} \cdot \left(\cos 2x + x \cdot \sin 2x\right)$	$e^{2 \cdot x} \cdot \left(\left(A \cdot x + B\right) \cdot \cos 2x + \left(C \cdot x + D\right) \cdot \sin 2x\right)$
8	2	A
9	x	$A \cdot x + B$

1.18. Уравнение Эйлера

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами всегда можно проинтегрировать.

Для уравнений с переменными коэффициентами общих методов интегрирования не существует.

Рассмотрим классическое уравнение Эйлера, допускающее аналитическое решение

$$x^2 \cdot y'' + p_1 \cdot x \cdot y' + p_2 \cdot y = f\left(x\right). \qquad (1.18.1)$$

Здесь все коэффициенты представляют собой константы $p_i = const$.

Сделаем замену переменной $x = e^t$. Тогда,

$$t = \ln x, \quad t_x' = \frac{1}{x}.$$

Установим связь между производными искомой функции по переменной x и переменной t:

$$\begin{cases} y_x' = y_t' \cdot t_x' = \dfrac{y_t'}{x}, \\ y_{xx}'' = \left(\dfrac{y_t'}{x}\right)_t' \cdot t_x' = \dfrac{y_{tt}'' \cdot x - y_t' \cdot x_t'}{x^2} = \dfrac{y_{tt}'' - y_t'}{x^2}. \end{cases} \qquad (1.18.2)$$

Подставляя формулы (1.18.2) в уравнение (1.18.1) получаем:

$$y_{tt}'' + (p_1 - 1)\cdot y_t' + p_2 \cdot y = f\left(e^t\right), \qquad (1.18.3)$$

уравнение с постоянными коэффициентами.

Совершенно аналогично решается уравнение Эйлера любого порядка:

$$x^n \cdot y^{(n)} + p_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} \cdot x \cdot y' + p_n \cdot y = f(x). \quad (1.18.4)$$

Здесь все коэффициенты представляют собой константы $p_i = const$.

Пример. Решить уравнение: $x^2 \cdot y'' - 2\cdot y = 2\cdot x$.

Решение:

1) Выполним замену переменой $x = e^t$ и применим формулы (1.18.2):

$$y_{tt}'' - y_t' - 2\cdot y = 2\cdot e^t.$$

2) Найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 2,$$

$$\bar{y} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{2t} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot x^2.$$

3) Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y^* = A\cdot e^t.$$

4) Вычислим производные функции $y^* = A\cdot e^t$

$$y^{*\prime} = A\cdot e^t,$$

$$y^{*\prime\prime} = A\cdot e^t,$$

и подставим их в исходное уравнение

$$\left(A-A-2\cdot A\right)\cdot e^{t}=2\cdot e^{t}, \quad A=-1.$$

5) Таким образом,

$$y^{*}=-x,$$

и общее решение записывается в виде

$$y=C_1\cdot\frac{1}{x}+C_2\cdot x^2-x.$$

1.19. Системы дифференциальных уравнений

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система:

$$\begin{cases} y_1'=f_1\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n\right), \\ y_2'=f_2\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'=f_n\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n\right). \end{cases} \qquad (1.19.1)$$

Системы в нормальной форме, таким образом, характеризуются тремя признаками:

1) число уравнений совпадает с числом искомых функций, число n называют порядком системы;

2) все уравнения – только первого порядка;

3) все уравнения разрешены относительно соответствующих производных.

Совокупность функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется решением системы (1.19.1), если при подстановке этих функций в уравнения системы все уравнения превращаются в тождества.

Кривая, описываемая решением $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ в многомерном пространстве переменных x, $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется **интегральной**.

Общее решение системы (1.19.1) зависит от n произвольных постоянных:

$$y_i = \varphi_i\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right). \qquad (1.19.2)$$

Задача Коши для системы (1.19.1) ставиться добавлением следующих начальных условий

$$\begin{cases} y_1\big|_{x=x_0} = y_1^0, \\ y_2\big|_{x=x_0} = y_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n\big|_{x=x_0} = y_n^0. \end{cases} \qquad (1.19.3)$$

Можно показать, что система (1.19.1) сводится к одному уравнению порядка n.

Пример. Решить нормальную систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2. \end{cases} \qquad (1.19.4)$$

Решение:

Применим метод исключения.

1) Вычислим вторую производную искомой функции $y_2(x)$:

$$y_1'' = y_2' - y_1' = -y_1 - 3\cdot y_2 - y_2 + y_1 = -4\cdot y_2. \qquad (1.19.5)$$

2) Выразим функцию $y_2(x)$ из первого уравнения системы (1.19.4):

$$y_2 = y_1' + y_1. \quad (1.19.6)$$

3) Подставим уравнение (1.19.6) в уравнение (1.19.5):

$$y_1'' = -4 \cdot y_1' - 4 \cdot y_1. \quad (1.19.7)$$

4) Решим уравнение (1.19.7):

$$y_1'' + 4 \cdot y_1' + 4 \cdot y_1 = 0. \quad (1.19.8)$$

5) Находим характеристическое уравнение для уравнения (1.19.8):

$$k^2 + 4 \cdot k + 4 = 0, \ \ k_1 = k_2 = -2.$$

6) Записываем общее решение для (1.19.8):

$$y_1 = e^{-2 \cdot x} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x\right). \quad (1.19.9)$$

7) По формуле (1.19.6) вычисляем функцию $y_2\left(x\right)$:

$$y_2 = y_1' + y_1 = e^{-2 \cdot x} \cdot \left(-2 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot x + C_2 + C_1 + C_2 \cdot x\right)$$

или

$$y_2 = e^{-2 \cdot x} \cdot \left(C_2 - C_1 - C_2 \cdot x\right). \quad (1.19.10)$$

8) Окончательно, функции (1.19.9) и (1.19.10) записываем в виде решения системы уравнений (1.19.4)

$$\begin{cases} y_1 = e^{-2 \cdot x} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot x\right), \\ y_2 = e^{-2 \cdot x} \cdot \left(C_2 \cdot \left(1 - x\right) - C_1\right). \end{cases} \quad (1.19.11)$$

Нормальную систему дифференциальных уравнений (1.19.1) можно записать в матричной форме. Для этого следует ввести следующие обозначения:

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad Y'(x)=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix},$$

$$F(x,Y)=\begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \\ f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \end{pmatrix}, \quad Y_0=Y(x_0)=\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}.$$

Нормальная система дифференциальных уравнений (1.19.1) и начальные условия (1.19.3) можно записать в виде:

$$\begin{cases} Y' = F(x,Y), \\ Y(x_0) = Y_0. \end{cases} \tag{1.19.12}$$

С помощью систем дифференциальных уравнений можно строить различные математические модели.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

2.1. Экономико-математическая модель освоения предприятием производственных мощностей

Рассмотрим производственное предприятие, выпускающее некоторую однородную продукцию.

Пусть $V(t)$ – объем выпуска продукции предприятием в момент времени t, V_∞ – производственная мощность предприятия (предельное значение объема выпуска продукции предприятием).

Следует отметить, что имеет место очевидное неравенство

$$V(t) \le V_\infty .$$

За малый промежуток времени Δt объем выпуска продукции предприятием $V(t)$ получит прирост:

$$\Delta V(t) = V(t + \Delta t) - V(t).$$

Будем предполагать, что прирост производства $\Delta V(t)$ пропорционален недоиспользованной мощности предприятия $V_\infty - V(t)$:

$$\Delta V(t) = \lambda \cdot \left(V_\infty - V(t)\right) \cdot \Delta t , \qquad (2.1.1)$$

где λ – коэффициент пропорциональности.

Выполняя в уравнении (2.1.1) предельный переход при $\Delta t \to 0,$ получаем дифференциальное уравнение первого порядка для освоения производственной мощности:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \lambda \cdot \left(V_\infty - V(t)\right). \qquad (2.1.2)$$

Начальное условие для уравнения (2.1.2) может быть записано в виде:

$$V\big|_{t=0} = V(0) = V_0 . \qquad (2.1.3)$$

Уравнение (2.1.2) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Его можно записать в виде:

$$\frac{dV}{(V_\infty - V)} = \lambda \cdot dt .$$

Интегрируя полученное уравнение, находим:

$$-\ln(V_\infty - V) - \ln C = \lambda \cdot t ,$$

$$\ln C \cdot (V_\infty - V) = -\lambda \cdot t ,$$

$$C \cdot (V_\infty - V) = e^{-\lambda \cdot t} .$$

Воспользуемся начальным условием (2.1.3):

$$C \cdot (V_\infty - V_0) = 1 .$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{V_\infty - V_0} ,$$

и решение уравнения принимает вид:

$$\frac{V_\infty - V}{V_\infty - V_0} = e^{-\lambda \cdot t} .$$

Таким образом, получаем формулу для закона освоения производственных мощностей:

$$V(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty) \cdot e^{-\lambda \cdot t} . \qquad (2.1.4)$$

Закон освоения производственных мощностей (2.1.4) показывает, что процесс выпуска предприятием продукции завершается выходом на заданный размер мощности:

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = V_\infty . \qquad (2.1.5)$$

Для нулевого начального условия формула (2.1.4) принимает вид:

$$V(t)=V_{\infty}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot t}\right). \tag{2.1.6}$$

На рисунке 5 изображено семейство интегральных кривых, построенных по формуле (2.1.4) для различных значений параметра λ.

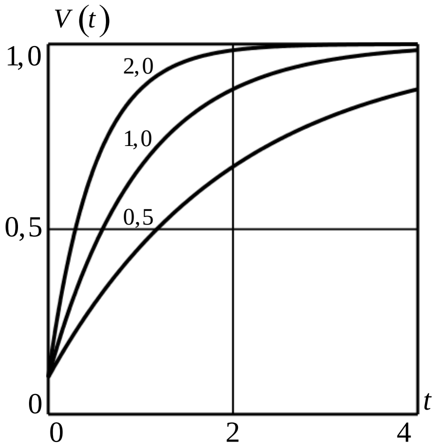

Рисунок 5 – Семейство интегральных кривых, построенных по формуле (2.1.4) для различных значений параметра λ. Цифры у кривых – значения параметра λ

Параметр λ характеризует скорость освоения предприятием производственных мощностей. Вычислим скорость роста выпуска продукции. Для этого продифференцируем соотношение (2.1.4):

$$\frac{dV}{dt}=\lambda\cdot\left(V_{\infty}-V_0\right)\cdot e^{-\lambda\cdot t}. \tag{2.1.7}$$

В начальный момент времени $t=0$ угловой коэффициент касательной линии к графику функции $V=V(t)$ определяется формулой:

$$DV=\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0}=\lambda\cdot\left(V_{\infty}-V_0\right). \tag{2.1.8}$$

Уравнение касательной линии в точке $t = 0$ к графику функции $V = V(t)$ имеет вид:

$$VK = V_0 + \lambda \cdot (V_\infty - V_0) \cdot t . \qquad (2.1.9)$$

На рисунке 6 показаны интегральные кривые, построенных по формуле (2.1.4) для различных значений параметра λ и касательные к ним в начальный момент времени $t = 0$. Значения параметра λ задают темп роста выпуска продукции предприятием.

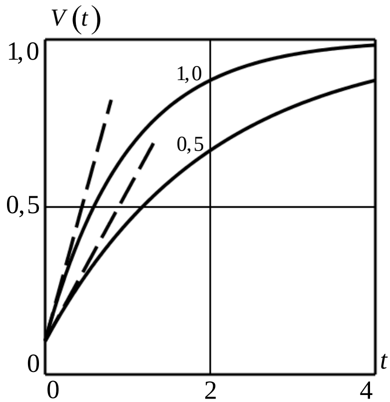

Рисунок 6 – Интегральные кривые, построенные по формуле (2.1.4) для различных значений параметра λ и касательные к ним в начальный момент времени $t = 0$.
Цифры у кривых – значения параметра λ

Построенная здесь экономико-математическая модель освоения предприятием производственных мощностей проста и удобна. Однако использовать ее для конкретных расчётов весьма проблематично. Она не может ответить на вопросы:

– где брать значение предельного объема выпуска продукции предприятием V_∞?

– насколько обосновано предположение о том, что прирост производства $\Delta V(t)$ пропорционален недоиспользованной мощности предприятия $V_\infty - V(t)$?

Очевидно, чтобы не возникало подобных вопросов нужно строить более сложные экономико-математические модели для предприятий.

2.2. Экономико-математическая модель освоения предприятием производственных мощностей за счет внутренних инвестиций

Рассмотрим теперь более сложную модель производственного предприятия, выпускающего некоторую однородную продукцию.

Объем выпуска продукции предприятием V обеспечивается объемами некоторых ресурсов. Эти ресурсы включают в себя объем основного капитала, производственные фонды, трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, применяемые технологиями, инновации и т.д.

Все эти ресурсы можно условно объединить в один интегральный ресурс в виде некоторого объема фактора производства Q.

Выпуск продукции предприятием V полностью определяется фактором производства Q с помощью производственной функции. В качестве такой производственной функции ограничимся классической производственной функцией Кобба–Дугласа

$$V = P \cdot Q^a. \qquad (2.2.1)$$

Здесь показатель степени a – представляет собой эластичность выпуска $\left(0 < a < 1\right)$, P – стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса.

Объем фактора производства $Q = Q\left(t\right)$ предполагается непрерывной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной величиной на числовой полуоси $\left(0 < t < \infty\right)$ функцией непрерывного аргумента времени t. Единицей измерения времени t служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год). Ограниченная функция $Q = Q\left(t\right)$ удовлетворяет неравенству:

$$Q_0 < Q\left(t\right) < Q_\infty ,$$

где $Q_0 = Q\left(0\right)$ – известное начальное значение фактора производства;

Q_∞ – его предельное значение, которое подлежит вычислению.

Для наблюдения за динамикой развития рассматриваемого предприятия следует составить уравнение баланса для объема фактора производства $Q = Q\left(t\right)$.

Приращение объема фактора производства $\Delta Q = Q\left(t + \Delta t\right) - Q\left(t\right)$ за некоторый малый промежуток времени Δt может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta Q\left(t\right) = \Delta Q^A\left(t\right) + \Delta Q^I\left(t\right) , \qquad (2.2.2)$$

где $\Delta Q^A\left(t\right)$ – частичная амортизация фактора производства;

$\Delta Q^I\left(t\right)$ – частичное восстановление фактора производства за счет внутренних инвестиций в рассматриваемое предприятие.

Приращение частичной амортизации $\Delta Q^A(t)$ за промежуток времени Δt имеет вид:

$$\Delta Q^A(t) = -A \cdot Q(t) \cdot \Delta t\,, \qquad (2.2.3)$$

где A – коэффициент амортизации, доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства.

Приращение внутренних инвестиций $\Delta Q^I(t)$ за промежуток времени Δt определяется соотношением:

$$\Delta Q^I(t) = I(t) \cdot \Delta t\,,$$

или

$$\Delta Q^I(t) = B \cdot V(t) \cdot \Delta t\,,$$

где $I(t) = B \cdot V(t)$ – инвестиции, сделанные в момент времени t,

B – норма накопления внутренних инвестиций.

Подстановка в приращение $\Delta Q^I(t)$ производственной функции (2.2.1) окончательно дает:

$$\Delta Q^I(t) = B \cdot P \cdot Q^a(t) \cdot \Delta t\,. \qquad (2.2.4)$$

Подстановка формул (2.2.3) и (2.2.4) в уравнение баланса (2.2.2), дает:

$$\Delta Q(t) = \left(-A \cdot Q(t) + B \cdot P \cdot Q^a(t)\right) \cdot \Delta t\,. \qquad (2.2.5)$$

Переходя к пределу в соотношении (2.2.5) при условии $\Delta t \to 0,$ получаем нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -A \cdot Q(t) + B \cdot P \cdot Q^a(t)\,, \qquad (2.2.6)$$

с начальным условием

$$Q\big|_{t=0} = Q(0) = Q_0\,. \qquad (2.2.7)$$

Структура уравнения баланса (2.2.6) показывает, что предприятие будет развиваться при условии $\frac{dQ(t)}{dt} \geq 0$, которое означает что, объем внутренних инвестиций $I_Q = B \cdot P \cdot Q^a$ превосходит объем амортизационных отчислений $A_Q = -A \cdot Q$.

Предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ находится из уравнения:

$$I_Q + A_Q = -A \cdot Q + B \cdot P \cdot Q^a = 0, \qquad (2.2.8)$$

и равно

$$Q_\infty = \left(\frac{B \cdot P}{A} \right)^{\frac{1}{1-a}}. \qquad (2.2.9)$$

На рисунке 7 показаны графики функций A_Q, I_Q и $A_Q + I_Q$.

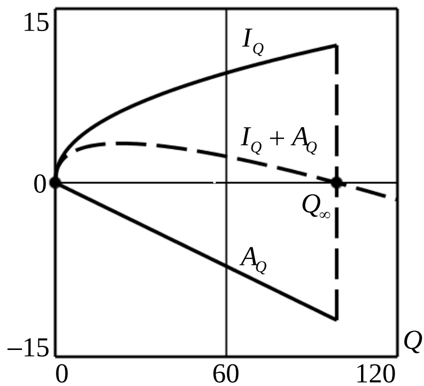

Рисунок 7 – Графики функций A_Q, I_Q и $A_Q + I_Q$. Сплошные линии соответствуют функциям A_Q и I_Q, штриховая линия соответствует функции $A_Q + I_Q$. Расчетные значения: $P = 10$; $a = 0,45$; $A = 0,12$; $B = 0,2$; $Q_0 = 10$

Предельное значение ресурса, вычисленное по формуле (2.2.9), составило $Q_\infty = 98,7147$. Производственная мощность предприятия, вычисленная по формулам (2.2.1) и (2.2.9), составила $V_\infty = 78,9718$.

Дифференциальное уравнение первого порядка (2.2.6) является уравнением Бернулли. Перепишем его в виде

$$Q' + A \cdot Q = B \cdot P \cdot Q^a .$$

Для решения этого уравнения выполним замену переменной.

$$Q = U \cdot W ,$$

$$Q' = U' \cdot W + U \cdot W' ,$$

$$U' \cdot W + U \cdot W' + A \cdot U \cdot W = B \cdot P \cdot U^a \cdot W^a ,$$

$$U' \cdot W + U \cdot \left(W' + A \cdot W \right) = B \cdot P \cdot U^a \cdot W^a ,$$

$$W' + A \cdot W = 0 ,$$

$$\frac{dW}{dt} + A \cdot W = 0 ,$$

$$\frac{dW}{dt} = -A \cdot W ,$$

$$\frac{dW}{W} = -A \cdot dt ,$$

$$\ln W = -A \cdot t ,$$

$$W = e^{-A \cdot t} ,$$

$$U' \cdot W = B \cdot P \cdot U^a \cdot W^a ,$$

$$U' \cdot e^{-A \cdot t} = B \cdot P \cdot U^a \cdot e^{-A \cdot a \cdot t} ,$$

$$U' = B \cdot P \cdot U^a \cdot e^{A \cdot (1-a) \cdot t} ,$$

$$\frac{dU}{dt} = B \cdot P \cdot U^a \cdot e^{A \cdot (1-a) \cdot t} ,$$

$$\frac{dU}{U^a} = B \cdot P \cdot e^{A \cdot (1-a) \cdot t} \cdot dt ,$$

$$\frac{U^{1-a}}{1-a} = B \cdot P \cdot \frac{e^{A\cdot(1-a)\cdot t}}{A\cdot(1-a)} + \frac{C}{1-a},$$

$$U^{1-a} = \frac{B \cdot P}{A} \cdot e^{A\cdot(1-a)\cdot t} + C,$$

$$U = \left(\frac{B \cdot P}{A} \cdot e^{A\cdot(1-a)\cdot t} + C \right)^{\frac{1}{1-a}},$$

$$Q = e^{-A\cdot t} \cdot \left(\frac{B \cdot P}{A} \cdot e^{A\cdot(1-a)\cdot t} + C \right)^{\frac{1}{1-a}}. \qquad (2.2.10)$$

Получили общее решение дифференциального уравнения Бернулли (2.2.6). Воспользуемся теперь начальным условием (2.2.7):

$$Q_0 = \left(\frac{B \cdot P}{A} + C \right)^{\frac{1}{1-a}},$$

$$Q_0^{1-a} = \frac{B \cdot P}{A} + C,$$

$$C = Q_0^{1-a} - \frac{B \cdot P}{A},$$

$$Q = e^{-A\cdot t} \cdot \left(\frac{B \cdot P}{A} \cdot \left(e^{A\cdot(1-a)\cdot t} - 1 \right) + Q_0^{1-a} \right)^{\frac{1}{1-a}},$$

$$Q = e^{-A\cdot t} \cdot \left(\frac{B \cdot P}{A} \cdot \left(e^{A\cdot(1-a)\cdot t} - 1 \right) + Q_0^{1-a} \right)^{\frac{1}{1-a}},$$

$$Q = \left(\frac{\frac{B \cdot P}{A} \cdot \left(e^{A\cdot(1-a)\cdot t} - 1 \right) + Q_0^{1-a}}{e^{A\cdot(1-a)\cdot t}} \right)^{\frac{1}{1-a}}.$$

Получили решение задачи Коши (2.2.6.), (2.2.7). Легко видеть, что при $t=0$, мы получаем $Q=Q_0$, при $t\to\infty$, мы получаем $Q\to Q_\infty=\left(\dfrac{B\cdot P}{A}\right)^{\frac{1}{1-a}}$ в соответствии с формулой (2.2.9).

Выпуск продукции предприятием описывается с помощью формул (2.2.1) и (2.2.11)

$$V=P\cdot\left(\frac{\dfrac{B\cdot P}{A}\cdot\left(e^{A\cdot(1-a)\cdot t}-1\right)+Q_0^{1-a}}{e^{A\cdot(1-a)\cdot t}}\right)^{\frac{a}{1-a}}. \qquad (2.2.11)$$

Производственная мощность предприятия рассчитывается по формуле:

$$V_\infty=\lim_{t\to\infty}V(t)=P\cdot\left(\frac{B\cdot P}{A}\right)^{\frac{a}{1-a}}. \qquad (2.2.12)$$

На рисунке 8 показаны графики функций $Q(t)$ и $V(t)$.

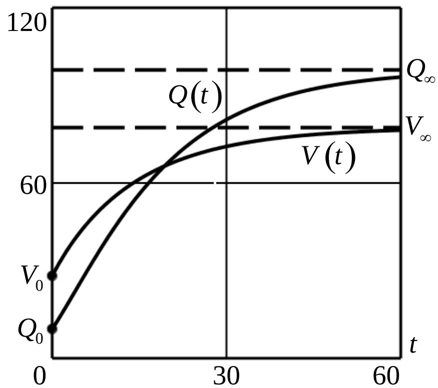

Рисунок 8 – Графики функций $Q(t)$ и $V(t)$.
Сплошные линии соответствуют функциям $Q(t)$ и $V(t)$, штриховые линии соответствую значениям Q_∞ и V_∞.
Расчетные значения: $P=10$; $a=0,45$; $A=0,12$; $B=0,2$; $Q_0=10$

2.3. Динамическая модель Кейнса

Рассмотрим основные компоненты расходной и доходной частей экономической государственной системы.

Введем обозначения:

$Y(t)$ – национальный доход,

$G(t)$ – государственные расходы,

$S(t)$ – общее потребление,

$I(t)$ – инвестиции.

Все эти величины являются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями времени t.

Для составления соотношения баланса доходов и расходов экономики государства примем следующие допущения:

1. Сумма всех расходов равна национальному доходу

$$Y(t) = S(t) + I(t) + G(t). \qquad (2.3.1)$$

2. Общее потребление состоит из производственного потребления некоторой части национального дохода $A(t) \cdot Y(t)$ и непроизводственного (автономного, конечного) потребления $B(t)$:

$$S(t) = A(t) \cdot Y(t) + B(t), \qquad (2.3.2)$$

где $A(t)$ – коэффициент склонности к потреблению $\left(0 < A(t) < 1\right)$.

3. Размер инвестиций пропорционален скорости роста национального дохода

$$I(t) = K(t) \cdot \frac{dY(t)}{dt}, \qquad (2.3.3)$$

где $K(t)$ – норма акселерации.

Все характеристики функционирования и развития государства $A(t), B(t), K(t), G(t)$ считаются известными.

Подставляя уравнения (2.3.2) и (2.3.3) в уравнение (2.3.1), получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции национального дохода $Y(t)$:

$$\frac{dY(t)}{dt} - \frac{1-A(t)}{K(t)} \cdot Y = -\frac{B(t)+G(t)}{K(t)}. \qquad (2.3.4)$$

Общее решение уравнения (2.3.4) можно записать с помощью формулы (1.4.6).

Начальным условием для уравнения (2.3.4) является условие:

$$Y(0) = Y_0. \qquad (2.3.5)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда все характеристики функционирования и развития государства являются константами:

$$\begin{cases} A(t) = A = const, \\ B(t) = B = const, \\ K(t) = K = const, \\ G(t) = G = const. \end{cases}$$

Тогда решение уравнения (2.3.4) с начальным условием (2.3.5) будет иметь вид:

$$Y(t) = Y_\infty + (Y_0 - Y_\infty) \cdot e^{\frac{1-A}{K}t}, \qquad (2.3.6)$$

где $Y_\infty = \dfrac{B+G}{1-A}$ – равновесное (стационарное) решение исходного уравнения.

На рисунке 9 изображено семейство интегральных кривых, построенных по формуле (2.3.6) для различных значений начального условия Y_0.

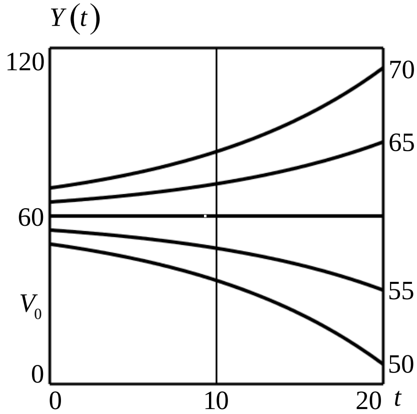

Рисунок 9 – Семейство интегральных кривых, построенных по формуле (2.3.6) для различных значений параметра Y_0. Цифры у кривых – значения параметра Y_0. Расчетные значения: $A = 0,5$; $B = 10$; $G = 20$; $K = 6$

Из рисунка видно, что если $Y_0 < Y_\infty$, то национальный доход со временем падает. И наоборот, если $Y_0 > Y_\infty$, то национальный доход со временем возрастает.

2.4. Диффузия инноваций

Пусть на некотором рынке появляется абсолютно новый продукт в виде товара, технологии, идеи или услуги.

Для такого инновационного оригинального продукта характерно отсутствие аналогов и конкуренции со стороны других обычных продуктов.

Возникающий вместе с этим продуктом новый спрос генерирует определенное количество потребителей U, осуществивших его покупку.

Величина U является функцией времени $U=U(t)$, которая предполагается непрерывной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной на числовой полуоси $(0<t<\infty)$.

Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год).

Функция $U=U(t)$ удовлетворяет неравенству:

$$0<U(t)<U_\infty ,$$

где $U_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}U(t)$ – максимальное число потенциальных покупателей продукта, определяющее потенциал рыночного спроса.

Приращение числа покупателей инновационного товара ΔU за некоторый промежуток времени Δt можно представить в виде двух слагаемых

$$\Delta U=\Delta U^N+\Delta U^I , \qquad (2.4.1)$$

где ΔU^N – частичное приращение за промежуток времени Δt числа покупателей-новаторов, ориентирующихся на рекламу и средства массовой информации;

ΔU^I – частичное приращение за промежуток времени Δt числа покупателей-имитаторов, полагающихся на отзывы уже совершивших приобретение людей.

Величины ΔU^N, ΔU^I можно представить в виде:

$$\begin{cases} \Delta U^N(t)=p\cdot V(t)\cdot\left(1-\dfrac{U(t)}{U_\infty}\right)\cdot\Delta t, \\ \\ \Delta U^I(t)=q\cdot U(t)\cdot\left(1-\dfrac{U(t)}{U_\infty}\right)\cdot\Delta t. \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

где p – коэффициент инновации, определяющий долю покупателей-новаторов от общего числа потенциальных покупателей U_∞;

q – коэффициент имитации, определяющий долю покупателей-имитаторов от числа покупателей, уже совершивших покупку $U(t)$.

Множитель $\left(1-\frac{U(t)}{U_\infty}\right)$ – описывает процесс насыщения рынка до некоторого предельного значения U_∞.

Подставляя соотношения (2.4.2) в формулу (2.4.1), находим

$$\Delta U(t)=\left(p\cdot U_\infty+q\cdot U(t)\right)\cdot\left(1-\frac{U(t)}{U_\infty}\right)\cdot\Delta t. \qquad (2.4.3)$$

Переходя в соотношении (2.4.3) к пределу при $\Delta t\to 0$, находим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dU(t)}{dt}=\left(p\cdot U_\infty+q\cdot U(t)\right)\cdot\left(1-\frac{U(t)}{U_\infty}\right). \qquad (2.4.4)$$

Начальное условие для уравнения (2.4.4) имеет вид:

$$U(0)=U_0. \qquad (2.4.5)$$

Очевидно, что если процесс диффузии инноваций наблюдается с самого начала, то $U_0=0$. В противном случае значение U_0 может отличаться от нуля.

Уравнение (2.4.4) является классическим уравнением диффузии инноваций. Оно называется уравнением Басса и имеет аналитическое решение.

Решим задачу Коши (2.4.4), (2.4.5), полагая, что $U_0=0$:

$$\frac{dU}{dt}=\left(p\cdot U_\infty+q\cdot U\right)\cdot\left(1-\frac{U}{U_\infty}\right).$$

Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{dU}{\left(p\cdot U_{\infty}+q\cdot U\right)\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)}=dt\,. \qquad (2.4.6)$$

Разложим на простые множители дробь:

$$\frac{1}{\left(p\cdot U_{\infty}+q\cdot U\right)\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)}=\frac{A}{p\cdot U_{\infty}+q\cdot U}+\frac{B}{1-\dfrac{U}{U_{\infty}}}=$$

$$=\frac{A}{p\cdot U_{\infty}+q\cdot U}+\frac{B}{1-\dfrac{U}{U_{\infty}}}=\frac{A\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)+B\cdot\left(a\cdot U_{\infty}+b\cdot U\right)}{\left(p\cdot U_{\infty}+q\cdot U\right)\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)+B\cdot\left(p\cdot U_{\infty}+q\cdot U\right)}{\left(p\cdot U_{\infty}+q\cdot U\right)\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)}=\frac{\left(A+B\cdot p\cdot U_{\infty}\right)+\left(B\cdot q-\dfrac{A}{U_{\infty}}\right)\cdot U}{\left(p\cdot U_{\infty}+q\cdot U\right)\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_{\infty}}\right)}.$$

Сравнивая начало и конец разложения, находим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A+B\cdot p\cdot U_{\infty}=1, \\ B\cdot q-\dfrac{A}{U_{\infty}}=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A+B\cdot p\cdot U_{\infty}=1, \\ B\cdot q\cdot U_{\infty}-A=0. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим:

$$B \cdot q \cdot U_\infty + B \cdot p \cdot U_\infty = 1 .$$

Отсюда находим:

$$B = \frac{1}{(p+q) \cdot U_\infty} .$$

Подставляя эту формулу во второе уравнение системе, находим:

$$A = \frac{q}{p+q} .$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(p \cdot U_\infty + q \cdot U) \cdot \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)} = \frac{\frac{b}{p+q}}{p \cdot U_\infty + q \cdot U} + \frac{\frac{1}{(p+q) \cdot U_\infty}}{1 - \frac{U}{U_\infty}}$$

или

$$\frac{1}{(p \cdot U_\infty + q \cdot U) \cdot \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)} = \frac{1}{p+q} \cdot \left(\frac{b}{p \cdot U_\infty + q \cdot U} + \frac{1}{U_\infty - U} \right).$$

Проинтегрируем уравнение (2.4.6):

$$\int \frac{dU}{(p \cdot U_\infty + q \cdot U) \cdot \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)} = \int dt .$$

Вычислим:

$$\int \frac{dU}{\left(p\cdot U_\infty + q\cdot U\right)\cdot\left(1-\dfrac{U}{U_\infty}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p+q}\cdot\int\left(\frac{b}{p\cdot U_\infty + q\cdot U} + \frac{1}{U_\infty - U}\right)\cdot dU =$$

$$= \frac{1}{p+q}\cdot\int\left(\frac{b}{p\cdot U_\infty + q\cdot U} + \frac{1}{U_\infty - U}\right)\cdot dU =$$

$$= \frac{1}{p+q}\cdot\left(\ln\left(p\cdot U_\infty + q\cdot U\right) - \ln\left(U_\infty - U\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{p+q}\cdot\ln\left(\frac{p\cdot U_\infty + q\cdot U}{U_\infty - U}\right).$$

Уравнение (2.4.6) принимает вид:

$$\frac{1}{p+q}\cdot\left(\ln\left(\frac{p\cdot U_\infty + q\cdot U}{U_\infty - U}\right) + \ln C\right) = t$$

или

$$\ln\left(C\cdot\frac{a\cdot U_\infty + b\cdot U}{U_\infty - U}\right) = \left(a+b\right)\cdot t\,,$$

$$C\cdot\frac{p\cdot U_\infty + q\cdot U}{U_\infty - U} = e^{\left(p+q\right)\cdot t}\,.$$

Воспользуемся начальным условием (2.4.5). При $t=0$, $U=0$.

$$C\cdot a = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{a}\,.$$

Отсюда следует,

$$\frac{p\cdot U_\infty + q\cdot U}{U_\infty - U} = a\cdot e^{\left(p+q\right)\cdot t}\,,$$

$$p \cdot U_\infty + q \cdot U = p \cdot e^{(p+q)\cdot t} \cdot (U_\infty - U),$$

$$\left(p \cdot e^{(p+q)\cdot t} + q\right) \cdot U = p \cdot U_\infty \cdot \left(e^{(p+q)\cdot t} - 1\right).$$

Окончательно

$$U = p \cdot U_\infty \cdot \frac{e^{(p+q)\cdot t} - 1}{p \cdot e^{(p+q)\cdot t} + q}. \qquad (2.4.7)$$

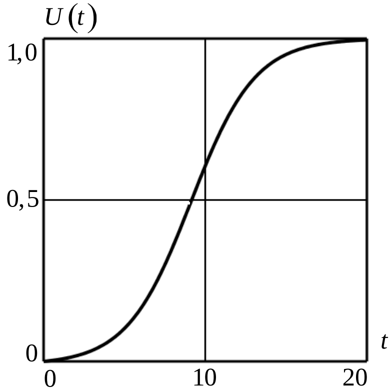

Рисунок 10 – График функции $U = U(t)$, построенный по формуле (2.4.7). Расчетные значения: $a = 0{,}005$; $b = 0{,}5$; $U_\infty = 1$

2.5. Модель Эванса установления равновесной цены

Рассмотрим рынок одного товара. Обозначим:

D – объем необходимого запрашиваемого потребителями товара;

S – предлагаемого производителями товара;

p – цена единицы товара.

Очевидно, что объем спроса на товар и объем предложения товара зависят от его цены. Таким образом, на рассматриваемом рынке складываются две функции.

Функция спроса

$$D = D(p), \qquad (2.5.1)$$

и функция предложения

$$S = S(p). \tag{2.5.2}$$

Рассмотрим сначала простой вариант, при котором спрос $D = D(p)$ и предложение $S = S(p)$ являются линейными функциями от цены p.

$$\begin{cases} S = a + b \cdot p, \\ D = c - d \cdot p, \end{cases} \tag{2.5.3}$$

где $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0,\ c > a$.

Условие, при котором спрос и предложение объемов товара уравновешены имеет вид

$$S = a + b \cdot p^* = D = c - d \cdot p^*.$$

Вычислим равновесную цену:

$$p^* = \frac{c-a}{b+d}. \tag{2.5.4}$$

На рисунке 11 изображены графики функций $D = D(p)$ и $S = S(p)$, построенные по формулам (2.5.3).

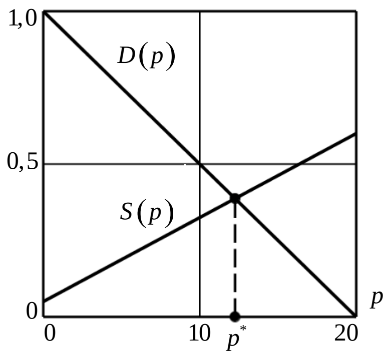

Рисунок 11 – Графики функций $D = D(p)$ и $S = S(p)$, построенные по формулам (2.5.3). Расчетные значения величин: $a = 1$; $b = 2,75$; $c = 20$; $d = 5$; $p^* = 2,4516$

Предположим, что изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением:

$$\Delta p = \lambda \cdot \left(D\left(p \right) - S\left(p \right) \right) \cdot \Delta t . \qquad (2.5.5)$$

Переход в соотношении (2.5.5) к пределу при $\Delta t \to 0$, приводит к линейному дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции времени цены $p\left(t \right)$

$$p'\left(t \right) = \lambda \cdot \left(c - d \cdot p - a - b \cdot p \right),$$

или

$$p'\left(t \right) + \lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot p\left(t \right) = \lambda \cdot \left(c - a \right). \qquad (2.5.6)$$

Начальное условие для уравнения (2.5.6) имеет вид:

$$p\left(0 \right) = p_0 . \qquad (2.5.7)$$

Решим уравнение (2.5.6) с начальным условием (2.5.7):

$$p = u \cdot v ,$$

$$p' = u' \cdot v + u \cdot v' ,$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot u \cdot v = \lambda \cdot \left(c - a \right),$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot v \right) = \lambda \cdot \left(c - a \right),$$

$$v' + \lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot v = 0 ,$$

$$\frac{dv}{dt} + \lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot v = 0 ,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot v ,$$

$$\frac{dv}{v} = -\lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot dt ,$$

$$\ln v = -\lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot t ,$$

$$v = e^{-\lambda \cdot \left(b + d \right) \cdot t} ,$$

$$u' \cdot v = \lambda \cdot (c - a),$$

$$u' \cdot e^{-\lambda \cdot (b+d) \cdot t} = \lambda \cdot (c - a),$$

$$u' = \lambda \cdot (c - a) \cdot e^{\lambda \cdot (b+d) \cdot t},$$

$$u = \frac{c-a}{b+d} \cdot e^{\lambda \cdot (b+d) \cdot t} + C,$$

$$p = u \cdot v = \left(\frac{c-a}{b+d} \cdot e^{\lambda \cdot (b+d) \cdot t} + C \right) \cdot e^{-\lambda \cdot (b+d) \cdot t},$$

$$p = \frac{c-a}{b+d} + C \cdot e^{-\lambda \cdot (b+d) \cdot t},$$

$$p_0 = \frac{c-a}{b+d} + C,$$

$$C = p_0 - \frac{c-a}{b+d} = p_0 - p^*,$$

$$p = \frac{c-a}{b+d} + \left(p_0 - p^* \right) \cdot e^{-\lambda \cdot (b+d) \cdot t}.$$

Таким образом, решение задачи Коши (2.5.6), (2.5.7) принимает вид:

$$p(t) = p^* + \left(p_0 - p^* \right) \cdot e^{-\lambda \cdot (b+d) \cdot t}. \tag{2.5.8}$$

Формула (2.5.8) показывает, что равновесной ценой является точка пересечения прямых спроса и предложения

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = p^* = \frac{c-a}{b+d}. \tag{2.5.9}$$

На рисунке 12 изображены варианты графиков функции $p = p(t)$, построенные по формуле (2.5.8) для разных начальных условий.

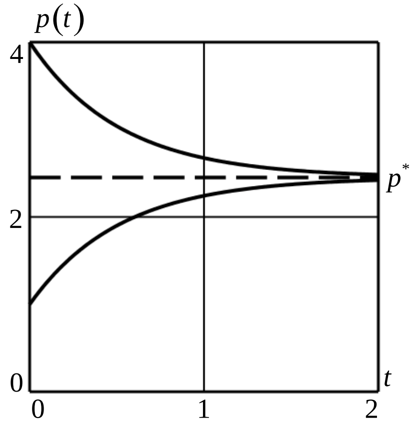

Рисунок 12 – Варианты графиков функции $p = p(t)$, построенные по формуле (2.5.8) для разных начальных условий. Расчетные значения величин: $a = 1$; $b = 2{,}75$; $c = 20$; $d = 5$; $p^* = 2{,}4516$; $\lambda = 1$; $p_0^{(1)} = 1$; $p_0^{(2)} = 4$

2.6. Задача прогнозирования равновесной цены

Рассмотрим рынок одного товара. При изучении модели Эванса для установления равновесной цены в п. 2.5 мы предполагали, что функции спроса и предложения линейно зависят только от цены:

$$\begin{cases} S(p) = a + b \cdot p, \\ D(p) = c - d \cdot p, \\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0, \\ \ \ d > 0,\ c > a. \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

На самом деле на практике, спрос и предложение зависят еще от тенденции ценообразования и темпа изменения цены.

С математической точки зрения это означает, что функции спроса и предложения зависят не только от функции цены, но и от первой и второй производной этой функции. Поэтому вместо соотношений необходимо рассматривать временные функции спроса и предложения:

$$\begin{cases} S(t) = s_0 \cdot p''(t) + s_1 \cdot p'(t) + s_2 \cdot p(t) + s_3, \\ D(t) = d_0 \cdot p''(t) - d_1 \cdot p'(t) - d_2 \cdot p(t) + d_3, \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

где $d_i > 0,\ s_i > 0$ – положительные коэффициенты.

Очевидно, что коэффициенты формул (2.6.1) и (2.6.2) связаны соотношениями:

$$s_3 = a; \quad s_2 = b; \quad d_3 = c; \quad d_2 = d.$$

Положительный коэффициент перед первой производной функции предложения $S(t)$ объясняется тем, что быстрый рост цены увеличивает предложение объема товара на рынке.

Отрицательный коэффициент перед первой производной функции спроса $D(t)$ объясняется тем, что быстрый рост цены отпугивает покупателя и снижает спрос.

Положительные коэффициенты перед первыми производными функций предложения $S(t)$ и функции спроса $D(t)$ свидетельствуют о том, что по мере увеличения темпа роста к товару проявляется больший интерес.

Выясним, как изменяется цена товара с изменением времени, если рынок находится в равновесном состояния, при котором имеет место равенство:

$$D(t) = S(t). \qquad (2.6.3)$$

Подставляя формулы (2.6.2) в условие равновесия (2.6.3) получаем дифференциальное уравнение:

$$\left(d_0 - s_0\right)\cdot p'' - \left(d_1 + s_1\right)\cdot p' - \left(d_2 + s_2\right)\cdot p + \left(d_3 - s_3\right) = 0. \quad (2.6.4)$$

Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (2.6.4) всегда имеет аналитическое решение. Его запись в общем виде весьма громоздка, поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим пример с числовыми коэффициентами.

Пусть

$$d_0 = 3;\ s_0 = 4;\ d_1 = 1;\ s_1 = 1;\ d_2 = 2;\ s_2 = 15;\ d_3 = 28;\ s_3 = 3.$$

В этом случае дифференциальное уравнение (2.6.4) принимает вид:

$$p'' + 2\cdot p' + 17\cdot p = 25. \quad (2.6.5)$$

Его общее решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения уравнения (2.6.5):

$$p(t) = \overline{p}(t) + p^*(t).$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\cdot k + 17 = 0, \quad (2.6.6)$$

имеет корни $k_{1,2} = -1 \pm 4i$, поэтому

$$\overline{p} = e^{-t}\left(C_1\cdot\cos 4t + C_2\cdot\sin 4t\right).$$

Частное решение, согласно п. 1.17 равно константе $p^* = \dfrac{25}{17}$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.6.5) имеет вид:

$$p(t) = e^{-t}\cdot\left(C_1\cdot\cos 2t + C_2\cdot\sin 2t\right) + \frac{25}{17}. \quad (2.6.7)$$

Это решение показывает, что все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $p = \dfrac{25}{17}$ и колеблются около нее.

Все цены стремятся к стационарной цене $p = \frac{25}{17}$, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Если в начальный момент времени известна цена и тенденция ее изменения, мы приходим к задаче Коши:

$$\begin{cases} p\big|_{t=0} = 4, \\ p'\big|_{t=0} = 1. \end{cases} \qquad (2.6.8)$$

Решение (2.6.7) принимает вид:

$$p(t) = \frac{e^{-t}}{17} \cdot \left(43 \cdot \cos 2t + 15 \cdot \sin 2t\right) + \frac{25}{17}. \qquad (2.6.9)$$

На рисунке 13 показан график функции $p = p(t)$, построенный по формуле (2.6.9).

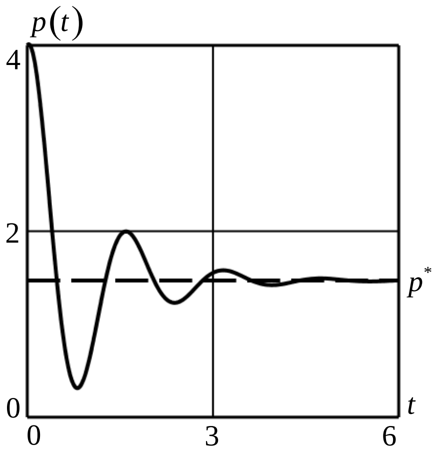

Рисунок 13 – График функции $p = p(t)$, построенный по формуле (2.6.9)

2.7. Модель взаимодействия связанных отраслей экономики

Рассмотрим модель совместного существования и взаимодействия двух отраслей народного хозяйства.

Объемы выручки обеих отраслей V_1 и V_2 обеспечиваются объемами определенных ресурсов. Эти ресурсы включают в себя объемы основных капиталов, производственных фондов, трудовых ресурсов, используемые в производстве материалы, применяемые технологиями, инновации и т.д.

Для каждой отрасли все эти ресурсы объединим в интегральные ресурсы в виде некоторых объемов факторов производства Q_1 и Q_2.

Выпуски продукций отраслями V_1 и V_2 полностью определяются факторами производства Q_1 и Q_2 с помощью производственных функций.

Предполагается, что рассматриваемые взаимосвязанные отрасли существовать отдельно порознь друг от друга не могут. Обнуление ресурсов одной отрасли и прекращение ее деятельности приводит к прекращению деятельности и другой отрасли, поэтому производственные функции для таких отраслей имеют общий вид

$$\begin{cases} V_1 = V_1\left(Q_1, Q_2\right), \\ V_2 = V_2\left(Q_1, Q_2\right). \end{cases} \tag{2.7.1}$$

Ограничимся классической производственной функцией Кобба-Дугласа

$$\begin{cases} V_1 = P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}}, \\ V_2 = P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}}. \end{cases} \tag{2.7.2}$$

где a_{ij} $\left(0 \le a_{ij} \le 1\right)$ – показатели степени, представляют собой эластичности выпуска продукции по соответствующим ресурсам Q_i;

P_i – стоимости продукции, произведенные на единичные объемы ресурсов Q_i.

Объемы факторов производства $Q_i = Q_i\left(t\right)$ предполагаются непрерывными, непрерывно дифференцируемыми и ограниченными величинами на числовой полуоси $\left(0 < t < \infty\right)$ функцией непрерывного аргумента времени t. Единицей измерения времени t служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год). Ограниченные функции $Q_i = Q_i\left(t\right)$ удовлетворяют неравенствам

$$Q_i^0 < Q_i\left(t\right) < Q_i^\infty,$$

где $Q_i^0 = Q_i\left(0\right)$ – известные начальные значения факторов производства;

$Q_i^\infty = Q_i\left(0\right)$ – их предельные значения, которые подлежат вычислению.

Для наблюдения за динамикой развития рассматриваемых отраслей следует составить уравнение баланса для объема фактора производства $Q_i = Q_i\left(t\right)$.

Приращения объемов факторов производства $\Delta Q_i = Q_i\left(t + \Delta t\right) - Q_i\left(t\right)$ за некоторый малый промежуток времени Δt могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых

$$\begin{cases} \Delta Q_1\left(t\right) = \Delta Q_1^A\left(t\right) + \Delta Q_1^I\left(t\right), \\ \Delta Q_2\left(t\right) = \Delta Q_2^A\left(t\right) + \Delta Q_2^I\left(t\right), \end{cases} \qquad (2.7.3)$$

где $\Delta Q_i^A(t)$ – частичные амортизации факторов производства;

$\Delta Q_i^I(t)$ – частичные восстановления факторов производства за счет внутренних инвестиций в рассматриваемые отрасли.

Приращения частичных амортизаций $\Delta Q_i^A(t)$ за промежуток времени Δt имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta Q_1^A(t) = -A_1 \cdot Q_1(t) \cdot \Delta t, \\ \Delta Q_2^A(t) = -A_2 \cdot Q_2(t) \cdot \Delta t, \end{cases} \qquad (2.7.4)$$

где A_i – коэффициент амортизации, доли выбывших за единицу времени объемов факторов производства.

Приращения внутренних инвестиций $\Delta Q_i^I(t)$ за промежуток времени Δt определяются соотношениями:

$$\begin{cases} \Delta Q_1^I(t) = \left(I_{11}(t) + I_{12}(t)\right) \cdot \Delta t, \\ \Delta Q_2^I(t) = \left(I_{21}(t) + I_{22}(t)\right) \cdot \Delta t, \end{cases} \qquad (2.7.5)$$

или

$$\begin{cases} \Delta Q_1^I(t) = \left(B_{11} \cdot V_1(t) + B_{12} \cdot V_2(t)\right) \cdot \Delta t, \\ \Delta Q_2^I(t) = \left(B_{21} \cdot V_1(t) + B_{22} \cdot V_2(t)\right) \cdot \Delta t, \end{cases} \qquad (2.7.6)$$

где $I_{ij}(t) = B_{ij} \cdot V_j(t)$ – инвестиции, вложенные в отрасль с номером i отраслью с номером j в момент времени t;

B_{ij} – нормы накопления внутренних инвестиций.

Подстановка в приращения (2.7.6) производственных функций (2.7.2) окончательно дает:

$$
\begin{cases}
\Delta Q_1^I = \left(B_{11} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{12} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}} \right) \cdot \Delta t, \\
\Delta Q_2^I = \left(B_{21} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{22} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}} \right) \cdot \Delta t.
\end{cases} \qquad (2.7.7)
$$

Подстановка формул (2.7.4) и (2.7.7) в уравнения баланса (2.7.3), дает:

$$
\begin{cases}
\Delta Q_1 = \left(-A_1 \cdot Q_1 + B_{11} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{12} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}} \right) \cdot \Delta t, \\
\Delta Q_2 = \left(-A_2 \cdot Q_2 + B_{21} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{22} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}} \right) \cdot \Delta t.
\end{cases} \qquad (2.7.8)
$$

Переходя к пределу в соотношениях (2.7.8) при условии $\Delta t \to 0$, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dQ_1}{dt} = -A_1 \cdot Q_1 + B_{11} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{12} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}}, \\
\dfrac{dQ_2}{dt} = -A_2 \cdot Q_2 + B_{21} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{22} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}}.
\end{cases} \qquad (2.7.9)
$$

с начальными условиями

$$
\begin{cases}
Q_1\big|_{t=0} = Q_1(0) = Q_1^0, \\
Q_2\big|_{t=0} = Q_2(0) = Q_2^0,
\end{cases} \qquad (2.7.10)
$$

Структура уравнений баланса (2.7.9) показывает, что предприятие будет развиваться при условиях

$$
\begin{cases}
\dfrac{dQ_1(t)}{d\,t} \ge 0, \\
\dfrac{dQ_2(t)}{d\,t} \ge 0,
\end{cases}
$$

которые означают, что объемы внутренних инвестиций превосходят объемы амортизационных отчислений.

Предельные значения Q_i^{∞} объемов производственных факторов $Q_i = Q_i\left(t\right)$ находятся из уравнений:

$$\begin{cases} -A_1 \cdot Q_1 + B_{11} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{12} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}} = 0, \\ -A_2 \cdot Q_2 + B_{21} \cdot P_1 \cdot Q_1^{a_{11}} \cdot Q_2^{a_{12}} + B_{22} \cdot P_2 \cdot Q_1^{a_{21}} \cdot Q_2^{a_{22}} = 0. \end{cases} \tag{2.7.11}$$

Задачу Коши (2.7.9), (2.7.10) и систему уравнений (2.7.11) можно решить только численно.

Варианты развития отраслей, согласно построенной математической модели, определяются коэффициентами норм накопления внутренних инвестиций B_{ij}.

На рисунке 14 показаны графики функций $Q_1 = Q_1\left(t\right)$ и $Q_2 = Q_2\left(t\right)$, построенные по результатам численных решений двух вариантов задачи Коши (2.7.9), (2.7.10).

В первом варианте численных расчетов предполагалось, что обе отрасли работают независимо друг от друга. В этом случае нормы накопления внутренних инвестиций принимались $B_{12} = B_{22} = 0$.

Во втором варианте численных расчетов предполагалось, что первая отрасль является самостоятельной и системообразующей, а вторая отрасль является дотационной. В этом случае нормы накопления внутренних инвестиций принимались $B_{12} = -0,005;\ B_{22} = 0,01$.

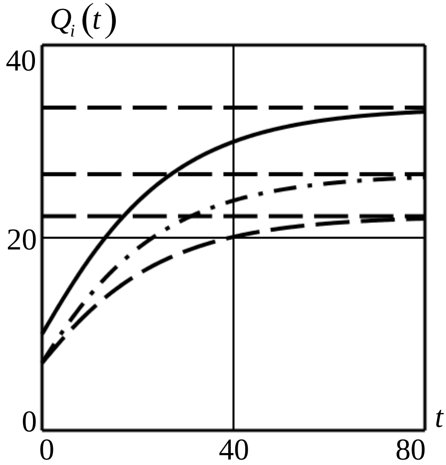

Рисунок 14 – Графики функций $Q_1 = Q_1(t)$ и $Q_2 = Q_2(t)$.
Сплошная линия соответствует развитию первой отрасли $Q_1 = Q_1(t)$, штриховая линия соответствует самостоятельному развитию второй отрасли $Q_2 = Q_2(t)$, штрих-пунктирная линия соответствует дотационному развитию второй отрасли $Q_2 = Q_2(t)$

Расчетные значения: $P_1 = 7,0$; $P_2 = 5,0$; $a_{11} = 0,25$; $a_{12} = 0,22$; $a_{21} = 0,24$; $a_{22} = 0,21$; $A_1 = 0,1$; $A_2 = 0,1$; $B_{11} = 0,1$; $B_{12} = 0,005$; $B_{21} = 0,1$; $B_{22} = 0,01$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов, А.П. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник для вузов / А.П. Аксенов. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 241 с. – ISBN 978-5-9916-7420-1.

2. Аксенов, А.П. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник для вузов / А.П. Аксенов. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 359 с. – ISBN 978-5-9916-7422-5.

3. Боровских, А.В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для вузов / А.В. Боровских, А.И. Перов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 327 с. – ISBN 978-5-534-01777-9.

4. Боровских, А.В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник и практикум для вузов / А.В. Боровских, А.И. Перов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 274 с. – ISBN 978-5-534-02097-7.

5. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 1. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 7-е изд., стер. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 288 с. – ISBN 978-5-9916-8643-3.

6. Зайцев, В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 385 с. – ISBN 978-5-534-02685-6.

7. Зайцев, В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 196 с. – ISBN 978-5-534-02690-0.

8. Королев, А.В. Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов / А.В. Королев. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 280 с. – ISBN 978-5-9916-9896-2.

9. Красс, М.С. Математика в экономике. Базовый курс: учебник для бакалавров / М.С. Красс. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2021. – 470 с. – ISBN 978-5-9916-3137-2.

10. Красс, М.С. Математика в экономике: математические методы и модели: учебник для бакалавров / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; ответственный редактор М.С. Красс. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 541 с. – ISBN 978-5-9916-3138-9.

11. Лобанов, А.И. Математическое моделирование нелинейных процессов: учебник для вузов / А.И. Лобанов, И.Б. Петров. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 255 с. – ISBN 978-5-9916-8897-0.

12. Муратова, Т.В. Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для вузов / Т.В. Муратова. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 435 с. – ISBN 978-5-534-01456-3.

13. Новак, Е.В. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов / Е.В. Новак, Т.В. Рязанова, И.В. Новак; под общей редакцией Т.В. Рязановой. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 112 с. – ISBN 978-5-534-08358-3.

14. Стеклов, В.А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие для вузов / В.А. Стеклов. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 427 с. – ISBN 978-5-534-02124-0.

Учебное издание

Ильина Елена Алексеевна

РАЗРАБОТКА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка И.П. Ведмидской

Подписано в печать 07.10.2022. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 6,0.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-25). Заказ . Арт. – 13(Р2УП)/2022.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.