МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА

В.И.Леонов

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАКОНСТРУКЦИЙ ТИПА ОРТОТРОПНЫХ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Утверждено редакционным советом института
в качестве учебного пособия

К У Й Б Ы Ш Е В 1983

УДК 539.3:629.7.023

Л е о н о в В.И. Расчет элементов авиаконструкций типа ортотропных и трехслойных пластин. Учебное пособие. - Куйбышев: КуАИ, 1983, с.62.

В учебном пособии излагается теория тонких ортотропных пластин, а также трехслойных пластин с легким заполнителем. Дается вывод дифференциальных уравнений продольно-поперечного изгиба и рассматриваются методы решения задач изгиба и устойчивости пластин. Рассматривается вопрос приведения подкрепленных ребрами пластин к конструктивно ортотропным.

Пособие предназначено для студентов факультета летательных аппаратов, изучающих курс "Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости".

Ил. 44, библиогр. - 6 назв.

Рецензенты: д.ф.-м. наук, профессор Г.И.Быковцев,
к.т.н., доцент А.Н.Беликов

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено решению задач изгиба и устойчивости ортотропных и трехслойных пластин. Элементы в виде ортотропных и трехслойных пластин находят широкое применение в конструкциях летательных аппаратов благодаря своей эффективности в весовом отношении. Трехслойные конструкции применяются в самолетах различного класса в качестве силовых элементов крыла, фюзеляжа и оперения (обшивки, лонжеронов, шпангоутов, нервюр, стенок); в агрегатах, работающих на распределенную нагрузку (закрылках, элеронах, щитках, рулях, обтекателях, полах грузовых и пассажирских кабин, каналах воздухозаборника и др.), а также в качестве "несиловых" элементов (деталей интерьера, крепления оборудования и т.п.). Несколько характерных примеров применения трехслойных панелей в авиационных конструкциях приведены на рис.I /3/. Все это делает актуальным изучение теории ортотропных и трехслойных пластин и методов их расчета на прочность, жесткость и устойчивость.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс "Строительная механика летательных аппаратов и теория упругости", и состоит из двух частей. В первой части рассматриваются ортотропные и конструктивно-ортотропные пластины. Получены основные соотношения теории ортотропных пластин, основанные на гипотезе Кирхгофа, приведены решения ряда задач прочности и устойчивости прямоугольных пластин. Для подкрепленных пластин рассмотрен вопрос о приведении их к конструктивно ортотропным.

Во второй части излагается теория трехслойных пластин с легким заполнителем. Рассмотрены вопросы, связанные с общей и местной потерей устойчивости трехслойных пластин.

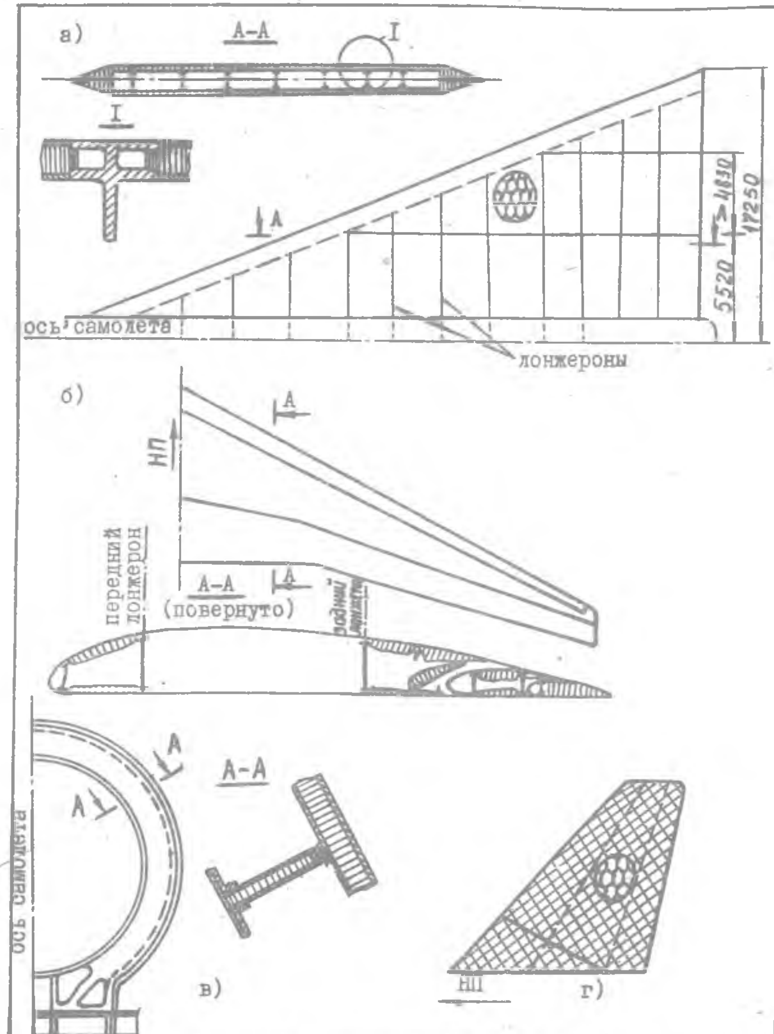

Рис.I. Применение трехслойных конструкций:
а) крыло с сотовым заполнителем самолета В-70;
б) крыло самолета Ил-86; в) сечение фюзеляжа самолета В-70
г) вертикальное оперение самолета В-70

I. ОРТОТРОПНЫЕ ПЛАСТИНЫ

I.I. Закон Гука для анизотропного тела

В отношении упругих свойств все тела можно разделить, с одной стороны, на однородные и неоднородные, а с другой - на изотропные и анизотропные. Под однородными будем подразумевать тела, у которых упругие свойства одинаковы в различных его точках; неоднородным назовем тело с упругими свойствами, различными в разных точках. Изотропным в отношении упругих свойств называется тело, у которого эти свойства одинаковы для всех направлений, проведенных через данную точку; анизотропным называется тело с упругими свойствами, вообще различными для разных направлений, проведенных через рассматриваемую точку.

Рассмотрим однородное тело, обладающее анизотропией самого общего вида. Отнесем его к произвольной декартовой системе координат. При малых деформациях зависимость между компонентами напряжений и деформаций анизотропного тела определяется обобщенным законом Гука. Деформации являются линейными однородными функциями компонентов напряжения. Эту связь можно представить в виде

$$\varepsilon = \Phi \cdot \sigma \qquad \text{(I.I)}$$

или

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} & \Phi_{26} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} & \Phi_{56} \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{65} & \Phi_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}.$$

Матрица Φ содержит 36 различных упругих постоянных, однако в действительности их всегда меньше, как это будет показано ниже.

Рассматривая (I.I) как систему уравнений относительно компонентов напряжения, можно записать

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\varepsilon}\,, \qquad (I.2)$$

где

$$\boldsymbol{\varkappa} = \begin{bmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{12} & \varkappa_{13} & \varkappa_{14} & \varkappa_{15} & \varkappa_{16} \\ \varkappa_{21} & \varkappa_{22} & \varkappa_{23} & \varkappa_{24} & \varkappa_{25} & \varkappa_{26} \\ \varkappa_{31} & \varkappa_{32} & \varkappa_{33} & \varkappa_{34} & \varkappa_{35} & \varkappa_{36} \\ \varkappa_{41} & \varkappa_{42} & \varkappa_{43} & \varkappa_{44} & \varkappa_{45} & \varkappa_{46} \\ \varkappa_{51} & \varkappa_{52} & \varkappa_{53} & \varkappa_{54} & \varkappa_{55} & \varkappa_{56} \\ \varkappa_{61} & \varkappa_{62} & \varkappa_{63} & \varkappa_{64} & \varkappa_{65} & \varkappa_{66} \end{bmatrix} \qquad (I.3)$$

Из теории упругости известно, что компоненты напряжений равны частным производным от удельной энергии деформации по соответствующим компонентам деформации /6/

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (i,j = x,y,z), \qquad (I.4)$$

где $W = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}$ - удельная энергия деформации.

Эти соотношения называются формулами Грина.

С другой стороны, на основании (I.2)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{yy}} = \varkappa_{12}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \varepsilon_{xx}} = \varkappa_{21}. \qquad (I.5)$$

Далее, используя (I.4), будем иметь:

$$\varkappa_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{yy}\,\partial \varepsilon_{xx}}, \quad \varkappa_{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{xx}\,\partial \varepsilon_{yy}}.$$

Так как для непрерывной функции значение второй смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, то

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{21}$$

и вообще, как можно показать аналогично,

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}. \qquad (I.6)$$

Таким образом, матрица $\boldsymbol{\varkappa}$, а следовательно и Φ -симметричные матрицы, поэтому в самом общем случае анизотропии упругого тела мы будем иметь 2I различных упругих постоянных. Если в теле наблюдается некоторая симметрия упругих свойств, то количество этих постоянных уменьшается.

А. Тело с одной плоскостью упругой симметрии

Рассмотрим тело, через каждую точку которого можно провести плоскость, обладающую следующим свойством: любые два направления, симметричные по отношению к этой плоскости, являются одинаковыми в отношении упругих свойств. Направление, нормальное к этой плоскости (плоскости упругой симметрии), будем называть главным направлением упругости. В данном случае через любую точку тела проходит лишь одно главное направление.

Совместим координатную плоскость xoy с плоскостью упругой симметрии и выделим малый элемент тела, симметричный относительно этой плоскости (рис.I.I). Пусть на элемент тела

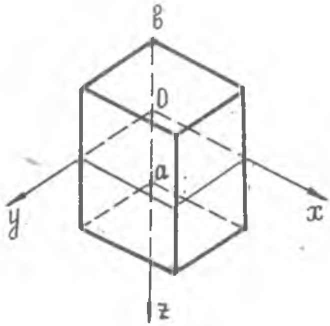

Рис.I.I. Бесконечно малый элемент тела

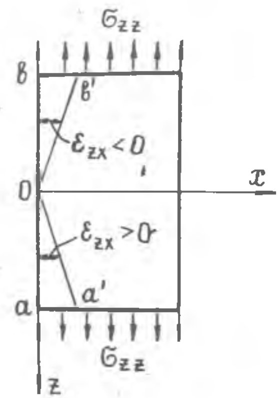

Рис.I.2. Деформирование элемента тела

действуют напряжения, распределенные симметрично относительно плоскости xoy, например нормальные напряжения σ_{zz}. Выясним, возможна ли в этом случае деформация ε_{zx} и ε_{zy}. Отрезки oa и ob при действии напряжений, симметричных относительно плоскости xoy, должны деформироваться симметрично. В результате, если отрезок ob займет в деформированном состоянии положение ob', то симметричный ему отрезок oa должен принять положение oa'. Но такое деформирование приводит к нарушению непрерывности деформаций, следовательно, при действии напряжений

σ_{zz} появление ε_{zx} и ε_{zy} невозможно. Аналогичная картина будет наблюдаться и для остальных напряжений, действующих симметрично относительно плоскости xoy – σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} . Таким образом, можно прийти к выводу, что 8 коэффициентов матрицы $\mathbf{\Phi}$ будут равны нулю:

$$\Phi_{15} = \Phi_{16} = \Phi_{25} = \Phi_{26} = \Phi_{35} = \Phi_{36} = \Phi_{45} = \Phi_{46} = 0 .$$

Следовательно, для тела с одной плоскостью упругой симметрии мы будем иметь 13 различных упругих постоянных. Матрица $\mathbf{\Phi}$ в этом случае имеет вид

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & 0 & 0 \\ & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & 0 & 0 \\ & & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 \\ & & & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ & \text{симметр.} & & & \Phi_{55} & \Phi_{56} \\ & & & & & \Phi_{66} \end{bmatrix} \qquad (I.7)$$

Б. Тело с тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии

Если через каждую точку тела проходят три взаимно перпендикулярных плоскости упругой симметрии, то, направляя оси координат по главным направлениям упругости, получим, что, кроме 8 ранее упомянутых упругих постоянных будут равны нулю еще четыре:

$$\Phi_{24} = \Phi_{14} = \Phi_{34} = \Phi_{56} = 0 .$$

Упругое тело с такими свойствами называется ортогонально - анизотропным или, иначе, ортотропным . В ортотропном теле через любую точку проходят три взаимно перпендикулярных главных направления упругости. Ортотропное тело характеризуется девятью упругими постоянными, и матрица $\mathbf{\Phi}$ для него имеет вид

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Phi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ & \text{симметр.} & & & \Phi_{55} & 0 \\ & & & & & \Phi_{66} \end{bmatrix} \qquad (I.8)$$

Матрицы напряжений и деформаций разобьем на подматрицы следующим образом:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix}.$$

Тогда обобщенный закон Гука можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\varepsilon_1 = \Phi_1 \cdot \sigma_1 \tag{I.9}$$

$$\varepsilon_2 = \Phi_2 \cdot \sigma_2 , \tag{I.10}$$

где на основании (I.8)

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{66} \end{bmatrix} = \lceil \Phi_{44} \;\; \Phi_{55} \;\; \Phi_{66} \rfloor .$$

Введем технические упругие константы E_i , G_{ij} и μ_{ij} (i , j = x , y , z). Тогда соотношение (I.9) запишется:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\mu_{xy}}{E_y} & -\frac{\mu_{xz}}{E_z} \\ -\frac{\mu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\mu_{yz}}{E_z} \\ -\frac{\mu_{zx}}{E_x} & -\frac{\mu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{I.II}$$

Из свойства симметрии матрицы Φ_1 вытекают соотношения

$$\mu_{xy} E_x = \mu_{yx} E_y$$

$$\mu_{yz} E_y = \mu_{zy} E_z$$

$$\mu_{zx} E_z = \mu_{xz} E_x . \qquad (I.I2)$$

Матрица же Φ_2 будет иметь вид:

$$\Phi_2 = \left\lceil \frac{1}{G_{xy}} \quad \frac{1}{G_{yz}} \quad \frac{1}{G_{zx}} \right\rfloor . \qquad (I.I3)$$

<u>В. Трансверсально-изотропное тело</u>

Рассмотрим тело, обладающее следующими свойствами: через все его точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии (плоскости изотропии), в которых все направления являются упруго-эквивалентными. Тело с такими свойствами называется трансверсально-изотропным. Примером такого тела может служить оргстекло.

Направим ось z нормально к плоскости изотропии, а оси x и y произвольно в этой плоскости. Введем технические константы: E , E' – модули Юнга для растяжения-сжатия в плоскости изотропии и нормальном к ней направлении; μ – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; μ' – то же при растяжении в направлении, нормальном к плоскости изотропии; G' – модуль сдвига для плоскости изотропии и любой другой плоскости, перпендикулярной к ней. Тогда соотношения (I.II) и (I.I3) примут вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu'}{E'} \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu'}{E'} \\ -\frac{\mu'}{E'} & -\frac{\mu'}{E'} & \frac{1}{E'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad (I.I4)$$

и

$$\Phi_2 = \left\lceil \frac{2(1+\mu)}{E} \quad \frac{1}{G'} \quad \frac{1}{G'} \right\rfloor . \qquad (I.I5)$$

Таким образом, трансверсально-изотропное тело характеризуется пятью упругими постоянными.

Г. Изотропное тело

Если в теле все направления являются упруго-эквивалентными и главными, то, полагая в (I.I4) и (I.I5)

$$E' = E, \quad \mu' = \mu, \quad G' = G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

мы получим известные соотношения обобщенного закона Гука для изотропного тела, которые содержат две независимые упругие постоянные.

I.2. Основные определения и гипотезы теории пластин

П л а с т и н о й называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размером в плане. Высота h такого тела называется т о л щ и н о й пластинки.

Плоскость, делящая пластину пополам по толщине, называется с р е д и н н о й п л о с к о с т ь ю. При изгибе пластины срединная плоскость превращается в изогнутую срединную поверхность пластины.

Линия пересечения боковой поверхности пластины со срединной плоскостью называется к о н т у р о м п л а с т и н ы.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы координатная плоскость xoy совпадала со срединной плоскостью пластины, а ось z была направлена вниз (рис.I.3). Составляющие полного перемещения произвольной точки пластины по трем координатным осям x, y и z будем обозначать через u_x, u_y и W соответственно.

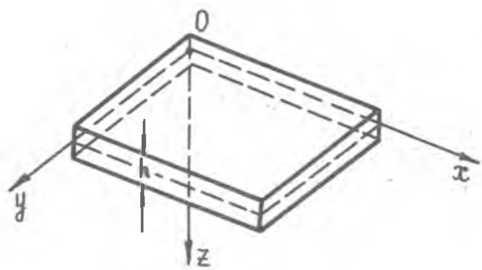

Рис.I.3. Прямоугольная пластина и система координат, связанная с ней

Пластины разделяются на тонкие и толстые. К тонким относятся пластины, у которых отношение толщины к наименьшему размеру основания в плане составляет меньше I/5. Большинство пластин, используемых в конструкциях летательных аппаратов, относятся именно к этой категории.

Пластины могут испытывать отдельно или в совокупности нагрузки двоякого рода: I) действующие в срединной плоскости и вызывающие плоское напряженное состояние; 2) действующие нормально к срединной плоскости и вызывающие изгиб пластины. Плоское напряженное состояние пластин рассматривается в теории упругости. В настоящем пособии рассматриваются задачи изгиба и устойчивости пластин.

С точки зрения работы пластины подразделяются на три класса: I) мембраны (абсолютно гибкие); 2) гибкие; 3) жесткие.

Абсолютно гибкой пластиной (мембраной) называется пластина, у которой перемещения W (прогибы) значительно превосходят толщину h. Эти пластины обладают малой жесткостью на изгиб и работают в основном на растяжение в срединной плоскости. Поэтому при расчете подобных пластин обычно пренебрегают их изгибом.

Гибкой пластиной называется пластина, у которой прогиб соизмерим с ее толщиной. В силу этого при расчете гибких пластин необходимо учитывать как работу их на изгиб, так и на растяжение-сжатие в срединной плоскости.

Жесткой называется пластина, у которой прогибы малы по сравнению с ее толщиной:

$$\frac{W_{max}}{h} \leq \frac{1}{4}.$$

В силу этого при расчете жестких пластин учитывается только их работа на изгиб.

Тонкие жесткие пластины, являющиеся предметом нашего дальнейшего рассмотрения, можно рассчитывать по приближенной теории - технической теории изгиба пластин, основанной на следующих гипотезах, предложенных Кирхгофом.

I. Гипотеза прямой нормали: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластины, остается прямолинейным, сохраняет свою длину и превращается в нормаль к срединной поверхности пластины после ее деформации:

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0.$$

2. Гипотеза об отсутствии давления между слоями. В силу

этой гипотезы напряжениями σ_{zz} по сравнению с напряжениями σ_{xx} и σ_{yy} можно пренебречь.

3. Прогиб пластины, ввиду его малости, не влияет на распределение усилий в срединной плоскости пластины.

1.3. Дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба ортотропной пластины

1.3.1. Рассмотрим тонкую жесткую ортотропную пластину, нагруженную распределенной поперечной нагрузкой p и силами N_x, N_y и T, действующими в срединной плоскости пластины(рис.1.4). Оси координат будем предполагать направленными по главным направлениям упругости. Под действием внешних нагрузок пластина получит перемещения. Рассмотрим сечение пластины $y = const$ и точку A в этом сечении на расстоянии z от срединной плоскости до и после деформации (рис.1.5). Под действием сил, действующих в срединной плоскости, точка

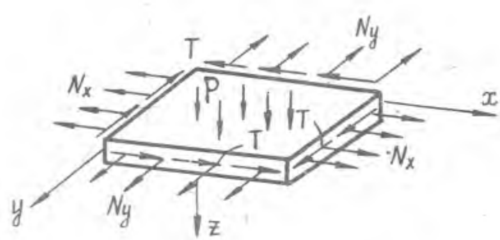

Рис.1.4. Нагрузки, действующие на пластину

B получит перемещение в направлении оси x – u_x^c. Согласно гипотезе прямых нормалей отрезок AB, нормальный к срединной плоскости, займет после деформации положение A_1B_1 и останется прямым и нормальным к срединной поверхности пластины. При этом он окажется повернутым относительно первоначального положения на угол α, который вследствие малости прогибов будем считать равным производной от прогиба W:

$$\alpha = \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Учитывая сказанное, можно легко записать выражение для перемещения u_x произвольной точки A (рис.1.5):

$$u_x = u_x^{\circ} - z\,\frac{\partial W}{\partial x}. \qquad (1.16)$$

Проводя через точку B сечение $x = const$, аналогично получим перемещение точки A вдоль оси y :

$$u_y = u_y^\circ - z\frac{\partial W}{\partial y}. \tag{I.17}$$

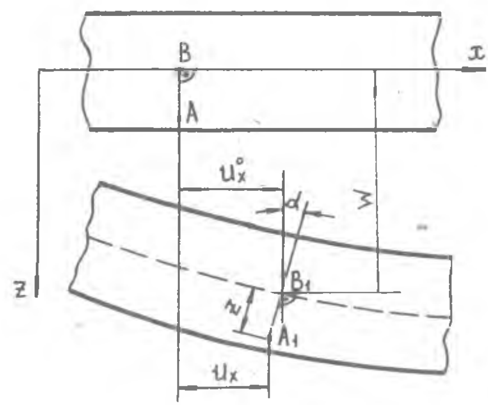

Рис.I.5. Перемещения точки A

I.3.2. Для нахождения деформаций пластинки подставим (I.16) и (I.17) в соотношения Коши

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x^\circ}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_y^\circ}{\partial y} - z\frac{\partial^2 W}{\partial y^2};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x^\circ}{\partial y} + \frac{\partial u_y^\circ}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

или

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^\circ - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^\circ - z\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^\circ - 2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \tag{I.18}$$

где

$$\varepsilon_{xx}^\circ = \frac{\partial u_x^\circ}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yy}^\circ = \frac{\partial u_y^\circ}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{xy}^\circ = \frac{\partial u_x^\circ}{\partial y} + \frac{\partial u_y^\circ}{\partial x}.$$

Величины ε_{xx}° , ε_{yy}° , ε_{xy}° представляют собой деформации срединной плоскости пластины и зависят лишь от координат x и y.

Так как согласно гипотезе о ненадавливании слоев $\sigma_{zz} = 0$, то из закона Гука (I.II) следует:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_x}\sigma_{xx} - \frac{\mu_{xy}}{E_y}\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\mu_{yx}}{E_x}\sigma_{xx} + \frac{1}{E_y}\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G_{xy}}\sigma_{xy}.$$

Разрешая эту систему относительно напряжений, получим:

$$\sigma_{xx} = \varkappa_x \varepsilon_{xx} + \varkappa_{xy} \varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{yy} = \varkappa_{yx} \varepsilon_{xx} + \varkappa_y \varepsilon_{yy} ,$$

где

$$\varkappa_x = \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} , \qquad \varkappa_y = \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}} ,$$

а $\varkappa_{xy} = \varkappa_{yx} = \mu_{xy}\varkappa_x = \mu_{yx}\varkappa_y$ в силу соотношений (I.I2).

Тогда будем иметь

$$\sigma_{xx} = \varkappa_x (\varepsilon_{xx} + \mu_{xy} \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \varkappa_y (\varepsilon_{yy} + \mu_{yx} \varepsilon_{xx})$$

$$\sigma_{xy} = G_{xy} \varepsilon_{xy} . \qquad \text{(I.I9)}$$

Подставим в (I.I9) выражения для деформаций (I.I8):

$$\sigma_{xx} = \sigma^{\circ}_{xx} - \varkappa_x z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma^{\circ}_{yy} - \varkappa_y z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma^{\circ}_{xy} - 2 z G_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} . \qquad \text{(I.20)}$$

Здесь

$$\sigma^{\circ}_{xx} = \varkappa_x (\varepsilon^{\circ}_{xx} + \mu_{xy} \varepsilon^{\circ}_{yy})$$

$$\sigma^{\circ}_{yy} = \varkappa_y (\varepsilon^{\circ}_{yy} + \mu_{yx} \varepsilon^{\circ}_{xx})$$

$$\sigma^{\circ}_{xy} = G_{xy} \varepsilon^{\circ}_{xy} .$$

Таким образом, перемещения, деформации и напряжения в пластине согласно (I.I6), (I.I7), (I.I8) и (I.20) выражены через значения этих величин в срединной плоскости и прогиб пластины $W(x, y)$.

I.3.3. Рассмотрим, какие усилия создаются напряжениями (I.20) в сечениях пластины, нормальных к ее срединной плоскости. На рис.I.6 изображен бесконечно малый элемент пластины, вырезанный сечениями, перпендикулярными осям x и y.

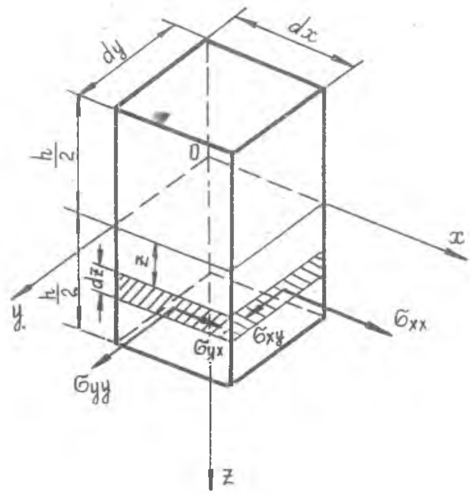

Рис.I.6. Бесконечно малый элемент пластины

Обозначим через N_x и N_y погонные, т.е. приходящиеся на единицу длины сечения, нормальные силы в сечениях с нормалями x и y соответственно.
Они определяются через сумму проекций на оси x и y элементарных усилий в рассматриваемых сечениях.

На ось x проектируется только нормальное напряжение σ_{xx}. Равнодействующая элементарных усилий на бесконечно малой площадке $dy\,dz$ будет равна $\sigma_{xx}\,dy\,dz$. При этом на единицу длины сечения приходится сила, равная $\sigma_{xx}\,dz$. Аналогично, на единицу длины сечения, перпендикулярного оси y, приходится сила $\sigma_{yy}\,dz$. Суммируя эти силы по всей толщине пластины, получим выражения для погонных нормальных сил:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\,dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy}\,dz.$$

Погонные сдвигающие силы, ввиду парности касательных напряжений, в сечениях с нормалями x и y одинаковы и могут быть подсчитаны по формуле:

$$T_{xy} = T_{yx} = T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy}\,dz.$$

Используя выражения (I.20), будем иметь:

$$N_x = h\,\sigma^{\circ}_{xx} - \varkappa_x\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz$$

$$N_y = h\,\sigma^{\circ}_{yy} - \varkappa_y\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu_{yx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz$$

$$T = h\,\sigma^{\circ}_{xy} - 2\,G_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz.$$

Замечая, что
$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz = 0, \tag{I.21}$$
получим окончательно, что
$$N_x = h\sigma^{\circ}_{xx}, \quad N_y = h\sigma^{\circ}_{yy}, \quad T = h\sigma^{\circ}_{xy}. \tag{I.22}$$

Далее подсчитаем изгибающие и крутящие моменты. Обозначим через M_x и M_y погонные изгибающие моменты в сечениях с нормалями x и y соответственно. Изгибающий момент в сечении с нормалью x создается нормальными напряжениями σ_{xx}. Элементарное усилие, создаваемое этим напряжением на площадке единичной длины и высотой dz, равно $\sigma_{xx}dz$, а изгибающий момент – $\sigma_{xx}dz\cdot z$. Аналогично, изгибающий момент на площадке с нормалью y будет равен $\sigma_{yy}dz\cdot z$. Суммируя моменты элементарных усилий на всех таких площадках по толщине пластинки, получим выражения для погонных изгибающих моментов
$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z\,dz, \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z\,dz.$$

Погонные крутящие моменты M_{xy} и M_{yx}, в силу парности касательных напряжений, будут одинаковы и определятся интегралом
$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z\,dz.$$

Подставим сюда выражения для напряжений из (I.20):
$$M_x = \sigma^{\circ}_{xx}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz - æ_x\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz$$
$$M_y = \sigma^{\circ}_{yy}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz - æ_y\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu_{yx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz$$
$$M_{xy} = \sigma^{\circ}_{xy}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz - 2G_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz.$$

Имея в виду (I.21) и $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz = \frac{h^3}{12}$, получим формулу для погонных изгибающих и крутящих моментов в следующем виде:
$$M_x = -D_x\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D_y\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu_{yx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$
$$M_{xy} = -2D_k\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}, \tag{I.23}$$

где

$$D_x = \frac{æ_x h^3}{12} = \frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}$$

$$D_y = \frac{æ_y h^3}{12} = \frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_k = \frac{G_{xy} h^3}{12}. \qquad (I.24)$$

Не найденными для нас пока остались только формулы для погонных перерезывающих сил

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz}\, dz \qquad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz}\, dz$$

в сечениях с нормалями x и y соответственно. Это объясняется тем, что у нас отсутствуют выражения для входящих в них касательных напряжений. Мы найдем Q_x и Q_y в дальнейшем из условий равновесия элемента пластины.

Положительные направления погонных усилий и моментов показаны на рис.I.7.

Формулы (I.22) и (I.23) позволяют определить погонные усилия и моменты в любой точке срединной плоскости пластины. По ним можно найти напряжения в любой точке пластины:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{h} + M_x \frac{z\, æ_x}{D_x} = \frac{N_x}{h} + \frac{M_x z}{h^3/12}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{N_y}{h} + M_y \frac{z\, æ_y}{D_y} = \frac{N_y}{h} + \frac{M_y z}{h^3/12}.$$

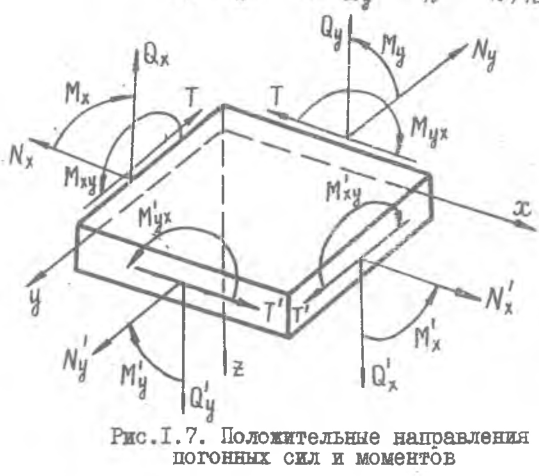

Рис.I.7. Положительные направления погонных сил и моментов

Из полученных ранее формул видно, что погонные усилия и моменты так же, как напряжения и деформации, выражены через прогибы срединной плоскости пластины $w(x,y)$. Следовательно, для определения напряжений и усилий необходимо знать функцию прогибов срединной плоскости пластины.

I.3.4. Вырежем из срединной плоскости пластины бесконечно малый элемент с размерами $dx\,dy$ и покажем действующие на него силы (рис.I.8).

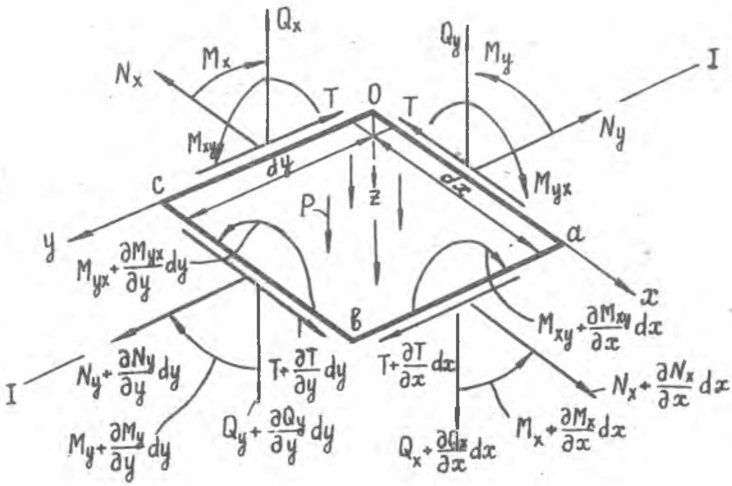

Рис.I.8. Бесконечно малый элемент срединной плоскости пластины

На грани oc элемента срединной плоскости действует погонная нормальная сила N_x. На грани ab, отстоящей от грани oc на расстоянии dx, нормальная сила получает приращение и равна ($N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx$). Аналогично на гранях oa и bc элемента срединной плоскости действуют соответственно погонные нормальные силы N_y и $N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y}dy$. Нормально к срединной плоскости пластины действует поверхностная нагрузка интенсивностью p.

Рассматриваемый элемент срединной плоскости пластины находится в равновесии. Следовательно, для него должны выполняться шесть условий равновесия: три уравнения проекций сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих же осей.

Составим сумму проекций всех сил на оси x и y. При этом на основании третьей гипотезы о невлиянии прогибов на закон изменения сил, действующих в срединной плоскости, будем пренебрегать проекциями сил Q_x и Q_y на эти оси. Это равно-сильно рассмотрению равновесия элемента срединной плоскости пластины в недеформированном состоянии.

Проектируем все силы на ось x и результат приравниваем нулю:

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy - N_x dy + (T + \frac{\partial T}{\partial y} dy) dx - T dx = 0,$$

откуда после упрощений находим:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{I.25}$$

Аналогично из уравнения равновесия сил в проекции на ось y получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \tag{I.26}$$

Уравнения (I.25) и (I.26) совпадают с дифференциальными уравнениями равновесия элемента пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния.

Уравнение равновесия моментов всех рассматриваемых сил относительно оси z в силу закона парности касательных напряжений с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости удовлетворяются тождественно.

Уравнение равновесия моментов всех сил относительно оси I - I (рис.I.8) дает:

$$(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy - M_x dy + (M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy) dx -$$

$$- M_{yx} dx - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2} - Q_x dy \frac{dx}{2} = 0.$$

Вклад сил, действующих в срединной плоскости пластины в величину момента относительно оси I-I, является величиной высшего порядка малости и не учитывается. После упрощения и отбрасывания слагаемого $\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{dx}{2}$, которое является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с остальными, получим

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \tag{I.27}$$

Аналогично из уравнения равновесия моментов относительно оси x выводим:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \tag{I.28}$$

Формулы (I.27) и (I.28) позволяют выразить погонные перерезывающие силы через прогибы пластины. Для этого подставим

(I.23) в (I.27) и (I.28):

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right). \qquad (I.29)$$

Здесь

$$D_{xy} = 2D_K + \mu_{xy} D_x = 2D_K + \mu_{yx} D_y . \qquad (I.30)$$

Перейдем теперь к рассмотрению проекции сил на ось z. При проектировании учтем, что угол поворота нормали к срединной поверхности пластины с осью z мал, поэтому косинус малого угла будем заменять единицей, а синус – самим углом.

Найдем составляющую, которую дают на ось z погонные перерезывающие силы Q_x, Q_y и распределенная поперечная нагрузка p (рис.I.8 и I.9):

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dx - Q_y dx + p\,dx\,dy .$$

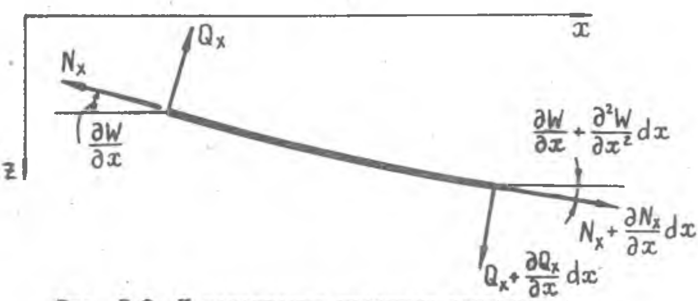

Рис. I.9. К нахождению проекции погонных нормальных и перерезывающих сил на ось z

После упрощения получим такое выражение:

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p\right)dx\,dy . \qquad (I.31)$$

Вычислим теперь составляющую на ось z нормальных погонных сил N_x (рис.I.9):

$$-N_x \frac{\partial W}{\partial x}dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}dx\right).$$

После упрощения и отбрасывания величины третьего порядка малости будем иметь:

$$\left(N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x}\,\frac{\partial W}{\partial x}\right)dx\,dy . \qquad (I.32)$$

Аналогично можно получить проекцию на ось z нормальных погонных сил N_y :

$$\left(N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{I.33}$$

Направление погонных касательных сил после деформирования пластины показано на рис.I.10. Там же показаны углы, составляемые этими силами с координатной плоскостью xoy . Спроектируем касательные силы на ось z :

$$\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)dy\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}dx\right) - T\frac{\partial W}{\partial y}dy +$$

$$+\left(T + \frac{\partial T}{\partial y}dy\right)dx\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}dy\right) - T\frac{\partial W}{\partial x}dx.$$

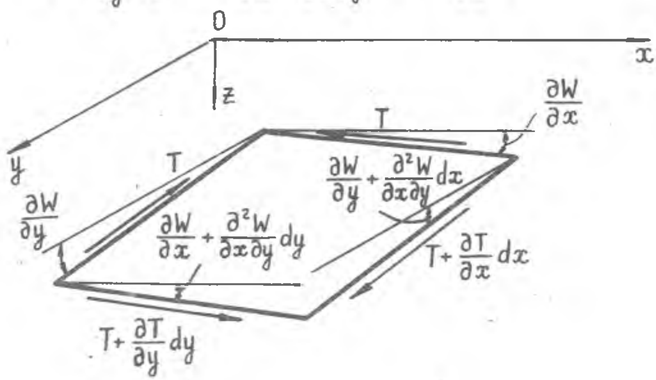

Рис.I.10. К нахождению проекции погонных касательных сил на ось z

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости получаем

$$\left(2T\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\right)dx\,dy. \tag{I.34}$$

Складывая (I.31), (I.32), (I.33), (I.34) и приравнивая результат нулю, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p + N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2T\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} +$$

$$+\frac{\partial W}{\partial x}\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial W}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\right) = 0.$$

Выражения, стоящие в круглых скобках, согласно (I.25) и (I.26) равны нулю.

Тогда: $$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p+N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2T\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=0. \qquad (I.35)$$

Подставим сюда выражения для погонных перерезывающих сил через прогиб W (I.29). В результате получим дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности ортотропной пластины, находящейся под действием поперечных сил и сил в ее срединной плоскости:

$$D_x\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2D_{xy}\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=p+N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2T\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}. \qquad (I.36)$$

Усилия в срединной плоскости пластины $N_x=N_x(x,y)$, $N_y=N_y(x,y)$ и $T=T(x,y)$ находятся из решения уравнений плоской задачи теории упругости (I.25) и (I.26) и предполагаются в уравнении (I.36) известными.

Для изотропной пластинки $E_x=E_y=E$, $\mu_{xy}=\mu_{yx}=\mu$

$$D_x=D_y=D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$D_{xy}=2D_к+\mu_{xy}D_x=\frac{2Eh^3}{2(1+\mu)12}+\mu\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=D.$$

При этом уравнение (I.36) принимает вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 W=p+N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2T\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}, \qquad (I.37)$$

где $\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор Лапласа.

Если силы, действующие в срединной плоскости пластины, отсутствуют, то уравнение (I.37) превращается в известное дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины, которое обычно называют уравнением Софи Жермен:

$$D\nabla^2\nabla^2 W=p. \qquad (I.38)$$

Погонные изгибающие и крутящие моменты, а также перерезывающие силы для изотропной пластины в соответствии с (I.23) и (I.29) запишутся:

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$
$$M_{xy}=-D\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}$$
$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 W \qquad (I.39)$$
$$Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 W.$$

При интегрировании дифференциальных уравнений (I.36), (I.37) или (I.38) появляются произвольные постоянные, которые могут быть определены из условий на контуре пластины, зависящих от характера ее закрепления.

I.4. Граничные условия на контуре пластины

На контуре пластины в зависимости от характера закрепления ее краев могут быть заданы прогибы и углы поворота нормали к срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты и перерезывающие силы. Условия, при которых на контуре задаются перемещения, т.е. прогибы или углы поворота нормали, называются кинематическими. Статическими называются условия, при которых на контуре задаются усилия, т.е. изгибающие моменты, перерезывающие силы. Если же на контуре заданы одновременно и перемещения, и усилия, условия называются смешанными. На каждом краю пластины должно быть задано по два независимых граничных условия, что определяется порядком дифференциального уравнения (I.36).

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис.I.II), два края которой свободно оперты (OC и AB), край OA жестко защемлен, а край BC – свободный. Сформулируем граничные условия для всех краев рассматриваемой пластинки.

З а щ е м л е н н ы й к р а й OA . В защемлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси x . В связи с этим имеем следующие условия:

при $y = 0$ $\quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$

Если бы защемленным был край OC , то мы имели

при $x = 0$ $\quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

С в о б о д н о о п е р т ы е к р а я OC и AB . На свободно опертых краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т.е. $W = 0$ и $M_x = 0$. Выражая изгибающий момент через прогибы пластины согласно формулам (I.23), последнее условие можно представить так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Однако в силу равенства нулю прогиба пластины на рассматриваемых краях $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ тождественно. Поэтому граничные условия на свободно опертых краях OC и AB принимают следующий вид:

при $x = 0$ $\quad w = 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

при $x = a$ $\quad w = 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

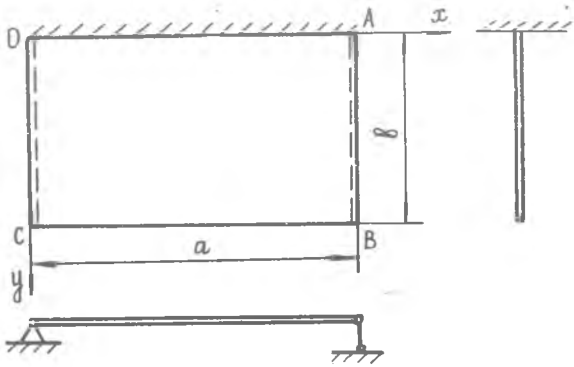

Рис. I.II. Прямоугольная пластина

Если бы свободно опертым был край, параллельный оси x, то мы бы там имели:

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Свободный край CB. На свободном, ненагруженном крае должны обращаться в нуль изгибающие моменты M_y, перерезывающая сила Q_y и крутящий момент M_{xy}, т.е. вместо двух необходимых условий здесь появляются три. Такое противоречие связано с тем, что теория изгиба пластин является приближенной, и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако это обстоятельство можно устранить, объединив два последних условия в одно.

Покажем, что крутящий момент и перерезывающую силу на контуре пластины можно заменить одной силой, статически им эквивалентной. Рассмотрим крутящий момент M_{xy}, распределенный вдоль грани CB, параллельной оси x (рис.I.I2а). На длине dx действует крутящий момент, равный $M_{xy}\,dx$. Этот момент можно представить в виде пары сил M_{xy} с плечом dx (рис.I.I2б). На соседнем элементе dx крутящий момент будет больше на бесконечно малую величину и равен $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx\right)dx$. Его также можно представить в виде пары сил $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx$ с плечом dx. Такую замену крутящих моментов вертикальными силами можно осуществить по всей длине грани CB. На границе каждого бесконечно малого участка dx, за исключением крайних точек C и B, будут действовать по две противоположно направленные силы, разность между которыми равна $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$. Следовательно, вдоль грани CB будет действовать вертикальная распределенная по длине нагрузка интенсивностью $\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ (рис.I.I2в). В точках же C и B будут возникать сосредоточенные силы M_{xy}^{c} и M_{xy}^{B}. Полученную вертикальную нагрузку можно объединить с перерезывающей силой Q_y и считать, что на грани CB действует так называемая обобщенная перерезывающая сила Q_y^* в смысле Кирхгофа:

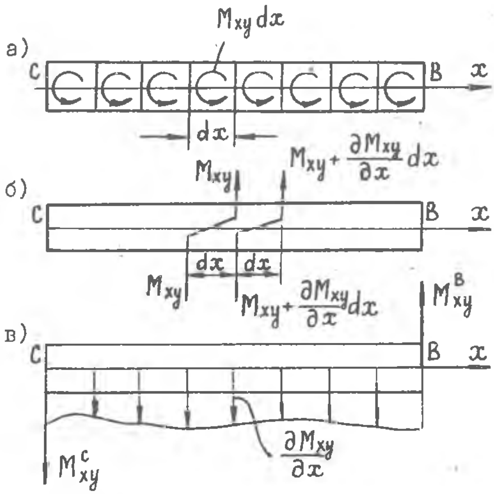

Рис.I.I2. К определению обобщенной перерезывающей силы

$$Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Аналогично на грани контура пластины, параллельной оси y, можно получить обобщенную перерезывающую силу с интенсивностью

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}.$$

Следовательно, на свободном от закрепления крае вместо трех условий, указанных выше, следует удовлетворить лишь двум:

$$M_y = 0 \qquad \text{и} \qquad Q_y^* = 0$$

Вносия в эти условия выражения сил и моментов через прогиб (I.23) и (I.29), получим граничные условия на свободном крае CB в виде:

при $y = b$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$D_y\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_{xy} + 2D_k)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

I.5. Цилиндрический изгиб пластины

Рассмотрим изотропную прямоугольную пластину с размерами a и b ($b \geqslant a$) под действием давления, не изменяющегося вдоль координаты y : $p = p(x)$ (рис.I.13). Изогнутую поверхность такой пластины (исключая небольшие области, примыкающие к коротким сторонам) можно считать цилиндрической; образующие этого цилиндра направлены параллельно длинной стороне пластины. В силу этого прогиб w не будет зависеть от координаты y , и тогда $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$. При этом дифференциальное уравнение изгиба пластины (I.38) примет вид

$$\frac{d^4 W}{\partial x^4} = \frac{P}{D} = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} P. \qquad (I.40)$$

Отсюда видно, что для исследования характера деформирования пластины достаточно рассмотреть только изгиб полосы единичной ширины, вырезанной из пластины двумя сечениями, перпендикулярными оси y (рис.I.13). Все остальные элементы пластины будут изгибаться подобным же образом.

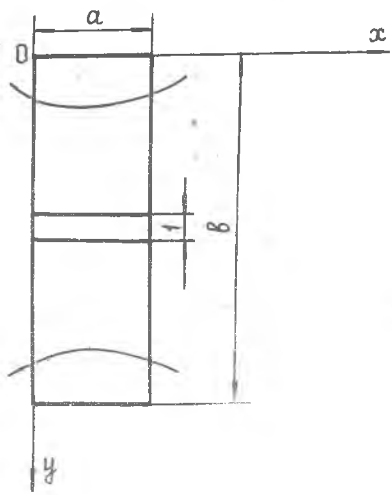

Рис.I.13. К задаче о цилиндрическом изгибе пластины

Сопоставим деформацию такой полоски с деформацией балки того же самого поперечного сечения и с той же распределенной нагрузкой. Из курса сопротивления материалов известно уравнение изгиба балки, которое в наших обозначениях запишется так:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = \frac{P}{EJ} = \frac{12}{Eh^3} P. \qquad (I.41)$$

Единственным отличием в уравнениях (I.40) и (I.41) является множитель $(1-\mu^2)$, показывающий, что жесткость полоски, вырезанной из пластины, больше жесткости изолированной балки того же поперечного сечения.

Физической причиной этого отличия является отсутствие поперечных удлинений в сечениях полоски; этим удлинениям препятствуют соседние элементы пластины, благодаря чему по боковым плоскостям $y = const$ развиваются напряжения σ_{yy}. В сечениях же балки, лишенной таких ограничений по боковым граням, эти удлинения развиваются свободно.

На рис.I.I4 для сравнения показаны поперечные сечения рассматриваемой полоски и балки в недеформированном состоянии (сплошная линия) и после деформации (пунктир). Как видно из рисунка, сечение полоски перемещается вдоль оси z без деформации ($\varepsilon_{yy} = 0$, $\sigma_{yy} \neq 0$), тогда как для балки форма сечения изменяется ($\varepsilon_{yy} \neq 0$, $\sigma_{yy} = 0$): в верхней сжатой зоне появляется поперечное удлинение, в нижней растянутой зоне - поперечное укорочение. Результатом указанного кинематического различия и является некоторое повышение жесткости полосы.

Рис.I.I4. Деформация поперечного сечения полоски и балки при изгибе

Величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{E}{1-\mu^2} J, \tag{I.42}$$

где $J = \frac{h^3}{12}$, называется цилиндрической жесткостью пластины или жесткостью пластины на изгиб.

I.6. Изгиб прямоугольной пластины равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину (рис.I.I5), шарнирно опертую по контуру и загруженную постоянной поперечной нагрузкой $p = const$. Размер пластинки вдоль оси x равен a, вдоль оси y - b. Главные направления упругости будем предполагать совпадающими с направлениями осей координат x и y. Согласно (I.36) дифференциальное уравнение изгиба такой пластины будет иметь вид

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p. \tag{I.43}$$

Функция прогиба пластины должна удовлетворять следующим граничным условиям по контуру:

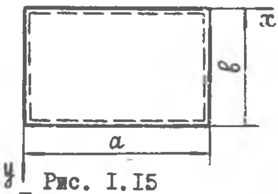

Рис. I.15 Прямоугольная, шарнирно опертая пластина

при $x = 0,\ x = a,\ w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$

при $y = 0,\ y = b,\ w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

Решение уравнения (I.43) будем искать в виде двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y, \qquad (I.44)$$

где A_{mn} – коэффициенты ряда, m и n – целые положительные числа.

Легко убедиться, что ряд (I.44) удовлетворяет граничным условиям задачи.

Для определения коэффициентов A_{mn} подставим ряд (I.44) в уравнение (I.43):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \mathcal{K} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y = p, \qquad (I.45)$$

где $\mathcal{K} = \frac{\pi^4}{a^4}(D_x m^4 + 2D_{xy} m^2 n^2 \gamma^2 + D_y n^4 \gamma^4), \quad \gamma = \frac{a}{b}.$

Чтобы найти коэффициенты A_{mn}, нагрузку p разложим в двойной тригонометрический ряд:

$$P_{(x,y)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y. \qquad (I.46)$$

Коэффициенты этого ряда определяются следующим образом:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b P_{(x,y)} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y\,dx\,dy. \qquad (I.47)$$

Подставляя ряд (I.46) в (I.45), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\mathcal{K} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y.$$

Отсюда

$$A_{mn} = \frac{B_{mn}}{\frac{\pi^4}{a^4}(D_x m^4 + 2D_{xy} m^2 n^2 \gamma^2 + D_y n^4 \gamma^4)}. \qquad (I.48)$$

При $p = const$ соотношение (I.47) примет вид:

$$B_{mn} = \frac{4P}{ab}\int_0^a \sin\frac{\pi m}{a}x\,dx \int_0^b \sin\frac{\pi n}{b}y\,dy;$$

$$\int_0^a \sin\frac{\pi m}{a}x\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при четных значениях } m \\ \dfrac{2a}{\pi m} & \text{при нечетных значениях } m \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin\frac{\pi n}{b}y\,dy = \begin{cases} 0 & \text{при четных значениях } n \\ \dfrac{2b}{\pi n} & \text{при нечетных значениях } n \end{cases}$$

Поэтому

$$B_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{при четных значениях } m \text{ и } n \\ \dfrac{16p}{\pi^2 mn} & \text{при нечетных значениях } m \text{ и } n \end{cases}$$

Тогда из (I.48)

$$A_{mn} = \frac{16pa^4}{\pi^6(D_x m^4 + 2D_{xy}m^2n^2\gamma^2 + D_y n^4\gamma^4)mn} \text{ при нечетных } m \text{ и } n$$

и $A_{mn} = 0$ при четных m, n.

После подстановки полученных коэффициентов в ряд (I.44) находим выражение для функции прогиба:

$$w = \frac{16pa^4}{\pi^6}\sum_{m=1,3,5...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y}{mn(D_x m^4 + 2D_{xy}m^2n^2\gamma^2 + D_y n^4\gamma^4)}. \quad (I.49)$$

Изгибающие моменты найдем, подставляя в формулы (I.23) функцию прогиба (I.49):

$$M_x = \frac{16pa^2D_x}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{m^2 + \mu_{xy}\gamma^2n^2}{mn(D_x m^4 + 2D_{xy}m^2n^2\gamma^2 + D_y n^4\gamma^4)}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y$$

$$M_y = \frac{16pa^2D_y}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5...}^{\infty}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{\gamma^2n^2 + \mu_{yx}m^2}{mn(D_x m^4 + 2D_{xy}m^2n^2\gamma^2 + D_y n^4\gamma^4)}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y. \quad (I.50)$$

Для изотропной пластинки выражения (I.49) и (I.50) несколько упростятся:

$$w = \frac{16pa^4}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y}{mn(m^2+\gamma^2n^2)^2}$$

$$M_x = \frac{16pa^2}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{m^2+\mu\gamma^2n^2}{mn(m^2+\gamma^2n^2)^2}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y$$

$$M_y = \frac{16pa^2}{\pi^4}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{\gamma^2n^2+\mu m^2}{mn(m^2+\gamma^2n^2)^2}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y. \quad (I.51)$$

Ряды для прогиба сходятся достаточно хорошо. Ряды же для изгибающих моментов обладают несколько худшей сходимостью. Так, для квадратной изотропной пластинки с удержанием только четырех членов ряда

$$\binom{m=1}{n=1} \quad \binom{m=1}{n=3} \quad \binom{m=3}{n=1} \quad \binom{m=3}{n=3}$$

получим в центре пластины для прогиба величину

$$w^{max} = 0{,}0443\frac{pa^4}{Eh^3},$$

что соответствует значению, приводимому в справочной литературе, а для моментов

$$M_x^{max} = 0{,}0469\, pa^2 ,$$

в то время как точное значение момента равно $0{,}0479 pa^2$.

I.7. Устойчивость прямоугольной пластины при сжатии в одном направлении

Читателю знаком простейший вид потери устойчивости – продольный изгиб прямого стержня. Если прямой стержень из однородного упругого материала сжимать центрально приложенными силами, то в начале процесса нагружения стержень будет оставаться прямым, прямая форма является для него единственно возможной формой равновесия. Однако при некотором значении сжимающей силы становится возможной, кроме прямой, еще и другая, искривленная, форма равновесия. Иначе говоря, наступает разветвление состояния равновесия. То значение силы, при котором кроме прямой становится возможной искривленная форма равновесия стержня, называется критической силой.

Аналогичные явления происходят и при сжатии пластины силами, действующими в ее срединной плоскости.

При решении задач устойчивости пластинок применяются различные методы. Остановимся на наиболее простом из них – методе статического равновесия. По этому методу определяют, при каких нагрузках наряду с начальной плоской формой равновесия пластинки возникают другие искривленные формы равновесия. Важно подчеркнуть, что эта множественность положений равновесия может быть обнаружена только в том случае, когда уравнения равновесия составляются для деформированного, отклоненного от своего исходного ненагруженного положения пластинки. В качестве такого уравнения будем использовать дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба пластины (I.36) при $p = 0$. Значения внешних нагрузок (N_x , N_y , T) входят в параметры этого уравнения. Решая это уравнение, будем находить критические значения нагрузок. Это так называемая концепция Эйлера. Согласно этой концепции признаком неустойчивости формы равновесия служит существование смежной (т.е. сколько угодно близкой к исходной), отклоненной формы равновесия при неизменной нагрузке. При этом подразумевается, что устойчивой является именно эта новая форма равновесия, а исходная форма неустойчива. Такая постановка задачи предполагает, что потеря устойчивости выражается в переходе системы к смежной форме равновесия, причем для этого перехода достаточно любого малого возмущения формы равновесия.

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину с размерами сторон $a \times b$, свободно опертую по краям и сжимаемую силами N в направлении оси x (рис.I.16):

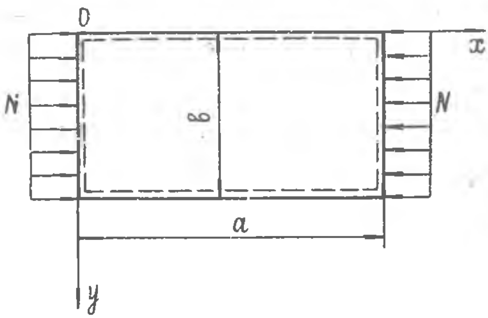

Рис.I.16. Прямоугольная пластина, сжатая в одном направлении

$$N_x = -N, N_y = T = 0.$$

Дифференциальное уравнение (I.36) в нашем случае примет вид

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (I.52)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям

$$\text{при} \quad x = 0, \quad x = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
$$\text{при} \quad y = 0, \quad y = b \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (I.53)$$

Предположим, что при критическом значении сжимающей нагрузки $N = N_{кр}$ кроме исходной плоской формы равновесия пластины появляется новая форма равновесия, которую можно представить в виде выражения

$$w = A \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \quad (I.54)$$

которое удовлетворяет граничным условиям (I.53).

Подставляя (I.54) в дифференциальное уравнение (I.52) и приравнивая коэффициенты при тригонометрических функциях, получим

$$A \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \left\{ \frac{\pi^2}{b^2} \left[D_x \frac{m^2}{\gamma^2} + 2D_{xy} n^2 + D_y n^4 \frac{\gamma^2}{m^2} \right] - N_{кр} \right\} = 0.$$

Здесь $\gamma = \frac{a}{b}$. Случай $A = 0$ нас не интересует, так как он соответствует исходной плоской форме равновесия. Следовательно, должно обращаться в нуль выражение, стоящее в фигурных скобках. Тогда

$$N_{кр}=\frac{\pi^2}{b^2}\left[D_x\frac{m^2}{\gamma^2}+2D_{xy}n^2+D_y n^4\frac{\gamma^2}{m^2}\right]. \qquad (I.55)$$

Наибольший интерес для нас представляет минимальное из всех возможных значение критической силы, зависящее от m и n. Как видно из (I.55), величина $N_{кр}$ будет наименьшей, когда n = I, то есть:

$$N_{кр}=\frac{\pi^2}{b^2}\left[D_x\frac{m^2}{\gamma^2}+2D_{xy}+D_y\frac{\gamma^2}{m^2}\right]. \qquad (I.56)$$

Равенство n = I означает, что при выпучивании в поперечном направлении пластины образуется одна полуволна (рис.I.17).

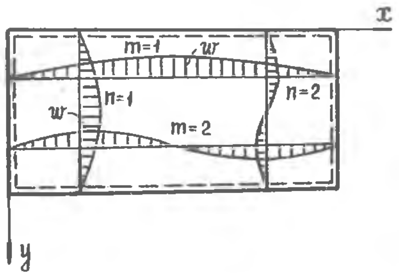

Рис.I.17. Волнообразование в продольном и поперечном направлениях пластины, соответствующее различным значениям m и n

Если чисто условно предположить, что m в выражении (I.56) изменяется непрерывным образом, то можно найти его значение, обеспечивающее минимум $N_{кр}$ из условия

$$\frac{\partial N_{кр}}{\partial m}=0,$$

из которого следует

$$\left(\frac{m}{\gamma}\right)^2=\sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \qquad (I.57)$$

Подставляя найденное выражение в (I.56), получим минимальное значение критической нагрузки в виде

$$N_{кр}^{min}=\frac{\pi^2}{b^2}\sqrt{D_x D_y}\cdot K_{min}, \qquad (I.58)$$

где

$$K_{min}=2\left(1+\frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}\right). \qquad (I.59)$$

Следовательно, для достижения минимального значения критической нагрузки отношение сторон пластины согласно (I.57) должно подчиняться условию

$$\gamma=m\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}, \qquad \text{где} \quad m = 1,2,3\ldots$$

В противном случае критическая нагрузка будет несколько выше, чем $N_{кр}^{min}$, подсчитываемое по формуле (I.58).

Для изотропной пластинки

$$D_x=D_y=D_{xy}=D,$$

тогда
$$N_{кр} = K \cdot \frac{\pi^2 D}{b^2}, \qquad (I.60)$$

где
$$K = \left(\frac{m}{\gamma} + \frac{\gamma}{m}\right)^2. \qquad (I.61)$$

Минимум коэффициента K получается согласно (I.57) при $m = \gamma$
$$K_{min} = 4.$$

Таким образом, минимальное значение критической нагрузки достигается при отношении сторон пластины, равном целому числу. Если это не выполняется, необходимо исследовать поведение коэффициента K в зависимости от γ.

На рис.I.18 построены графики зависимости коэффициента K от отношения сторон пластинки γ для различных значений m. Жирной линией проведена огибающая этих кривых, которая определяет наименьшие значения коэффициента K в зависимости от отношения сторон γ. Анализируя этот график, можно записать:

при $\gamma < 1$
$$K_{min} = \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right)^2, \qquad (I.62)$$

а при $\gamma \geqslant 1$ с некоторым запасом можно принять
$$K_{min} = 4 \qquad (I.63)$$

Зная $N_{кр}$, можно определить и критическое напряжение $\sigma_{кр}$:
$$\sigma_{кр} = \frac{N_{кр}}{h} = K \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \frac{E}{(b/h)^2}. \qquad (I.64)$$

Если принять значение коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}3$, то формулу (I.64) можно представить в виде
$$\sigma_{кр} = K \frac{0{,}9 E}{(b/h)^2}. \qquad (I.65)$$

Аналогичным образом решаются задачи и при других видах граничных условий по контуру пластины. Критические напряжения и в этих случаях определяются по формуле (I.65), в которой коэффициент K зависит от вида граничных условий и от параметра γ.

График изменения коэффициента K в зависимости от параметра γ при различных условиях закрепления пластины, сжатой в одном направлении, приведен на рис.I.19 /2/. Графический способ обозначения вида закрепления контура пластины, используемый на рис.I.19, совпадает с принятыми нами на рис.I.II.

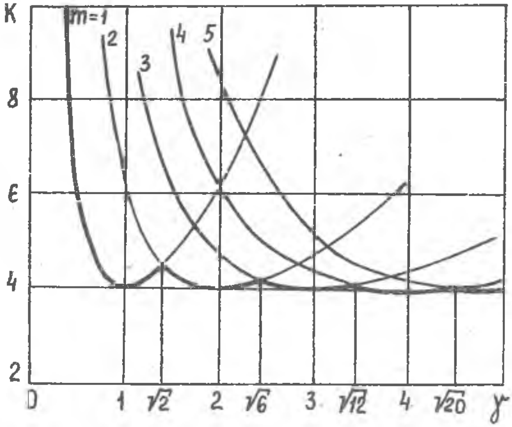

Рис.I.I8. Коэффициент K для свободно опертой пластины, сжатой в одном направлении

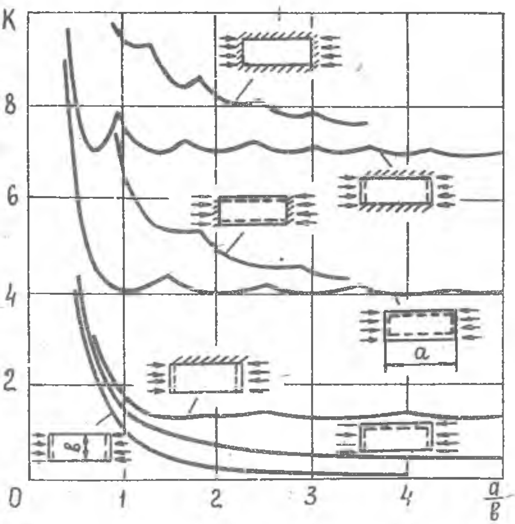

Рис.I.I9. Коэффициент K при различных условиях закрепления пластины, сжатой в одном направлении

I.8. Устойчивость пластины при других видах нагружения

В случае действия на пластину касательных усилий T (рис.I.20) в уравнении (I.36) остается член, содержащий смешанную производную $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, поэтому даже для свободно опертой по всему контуру пластины с конечным отношением сторон точное решение задачи получить не удается. Решение этого уравнения в замкнутом виде известно только для удлиненной пластинки при $\gamma \to \infty$ /2/. Приближенное решение при конечном отношении сторон пластинки можно найти методом Бубнова - Галеркина /2/ . Критическое касательное напряжение при этом определяется по формуле

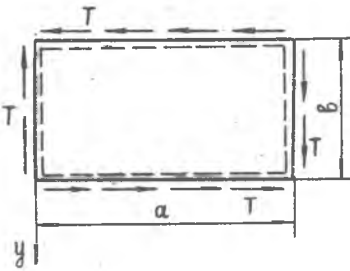

Рис.I.20. Прямоугольная пластина, нагруженная сдвигающими усилиями

$$\tau_{кр} = K\frac{0{,}9E}{(b/h)^2} \qquad (I.66)$$

Значение коэффициента K зависит от способа закрепления пластины и отношения сторон. Для свободно опертой по всему контуру пластины коэффициент K можно определить по приближенной формуле

$$K = 5{,}34 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 ,$$

где a - длинная сторона пластинки ($a > b$).

Для жестко защемленной по всему контуру пластины коэффициент K находится из приближенной зависимости

$$K = 8{,}98 + 5{,}6\left(\frac{b}{a}\right)^2 .$$

Здесь также a - длинная сторона пластины.

Значения коэффициента K в формуле (I.66) для пластин, на которые действуют равномерно распределенные по всем кромкам сдвигающие усилия, при других граничных условиях приведены на рис.I.2I /2/ .

Во многих конструкциях летательных аппаратов на пластины действуют одновременно усилия различного типа. Один из примеров - обшивка крыла летательного аппарата; изгиб крыла вызывает появление сжимающих или растягивающих напряжений в обшивке, кручение - напряжений сдвига. Рассмотрим некоторые виды комбинированных нагрузок.

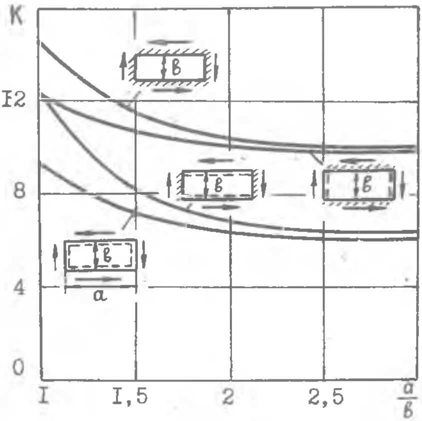

Рис.I.2I. Коэффициент K при различных условиях закрепления пластины, подвергающейся сдвигу

Допустим, что свободно опертая по всем кромкам изотропная пластина сжата одновременно усилиями N_x и N_y, равномерно распределенными вдоль соответствующих сторон (рис.I.22).

Уравнение (I.37) получает вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w = -N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (I.67)$$

Решение уравнения (I.67), соответствующее появлению новой смежной формы равновесия, возьмем в форме тригонометрического ряда (I.44). Повторяя выкладки, аналогичные тому, что были выполнены в предыдущем параграфе, найдем из уравнения (I.67) значение критических напряжений

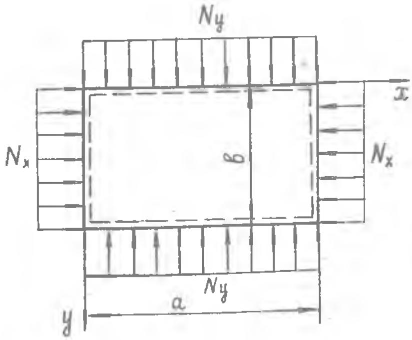

Рис.I.22. Прямоугольная пластина, сжимаемая в двух направлениях

$$\sigma_{xx,кр} = K\frac{0{,}9E}{(в/h)^2},$$

$$\sigma_{yy,кр} = \varphi\,\sigma_{xx,кр},$$

где

$$\varphi = \frac{N_y}{N_x}, \quad \gamma = \frac{a}{в},$$

а величина K определяется по формуле

$$K = \frac{\left[\left(\frac{m}{\gamma}\right)^2 + n^2\right]^2}{\left(\frac{m}{\gamma}\right)^2 + \varphi n^2}.$$

Здесь m и n - число полуволн в продольном и поперечном направлении соответственно.

Минимальные значения К в зависимости от γ и φ представлены на рис.I.23.

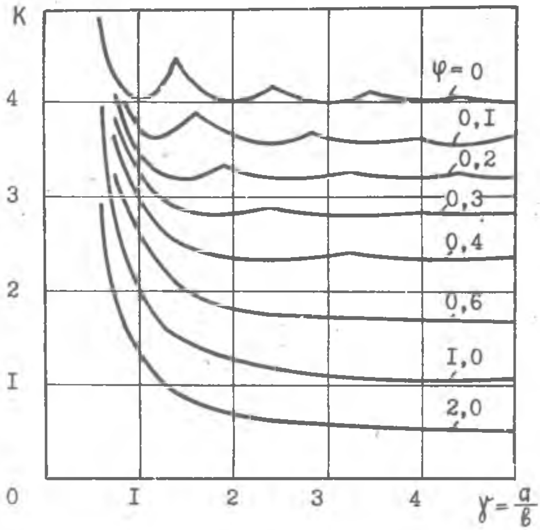

Рис.I.23. Коэффициент К для пластины, сжатой в двух направлениях

Перейдем теперь к случаю совместного действия сжимающих усилий в одном направлении и сдвига (рис.I.24). Края пластины примем свободно опертыми.

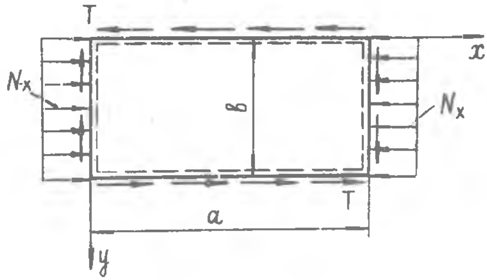

Рис.I.24. Пластина при совместном действии сжатия и сдвига

Приближенная формула для определения критических напряжений в этом случае имеет вид /2/

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma^{\circ}_{кр}} + \left(\frac{\tau_{кр}}{\tau^{\circ}_{кр}}\right)^2 = 1, \quad (I.68)$$

где $\sigma^{\circ}_{кр}$ и $\tau^{\circ}_{кр}$ – критические нормальные и касательные напряжения при раздельном действии сжатия и сдвига. Если задано отношение $\frac{\sigma_{кр}}{\tau_{кр}}$ или известна одна из этих величин, то по уравнению (I.68) находят значения критических напряжений.

В случае, если усилия N_x являются растягивающими, перед первым членом в левой части уравнения (I.68) следует принять знак минус.

Решение других задач устойчивости пластин можно найти в литературе /2/ .

I.9. Конструктивно ортотропные пластины

В конструкциях летательных аппаратов для повышения критических напряжений пластины часто подкрепляют продольными и поперечными ребрами (стрингерами). В точной постановке провести расчет подкрепленной ребрами жесткости пластины очень сложно. Однако эту задачу можно решить приближенно, если подкрепляющих элементов достаточно много. При этом считается, что пластина имеет постоянную толщину, но разные упругие характеристики в различных направлениях. Мы приходим в этом случае к так называемым конструктивно ортотропным пластинам.

Дифференциальное уравнение (I.36) продольно-поперечного изгиба ортотропных пластин было выведено нами ранее. Таким образом, главная задача заключается в нахождении жесткостных характеристик D_x, D_y и D_{xy}, входящих в уравнение (I.36) и в формулы для критических нагрузок (I.58) и (I.59).

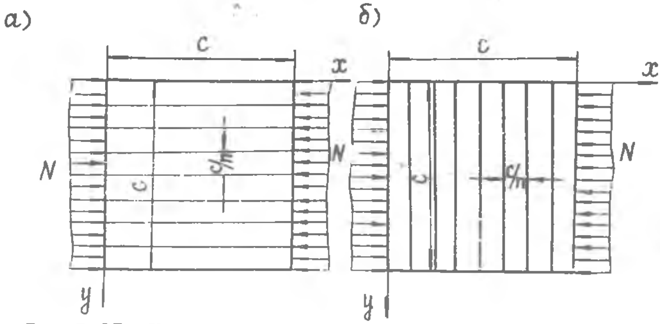

Рис.I.25. Квадратные пластинки, подкрепленные ребрами: а) вдоль оси x ; б) вдоль оси y

Выясним сначала сравнительную выгодность продольных и поперечных ребер при сжатии пластины. Рассмотрим для этого две квадратные пластины с размерами $c \times c$, подкрепленные равномерно в продольном (вдоль оси x) и поперечном (вдоль оси y) направлениях (n + I) абсолютно жесткими ребрами (рис.I.25). Число n мы будем предполагать достаточно большим. В первом случае (рис.I.25,а), пластинка разделяется на n отдельных участков, каждый из которых представляет собой длинную пластину с размерами $a = c$ и $b = \frac{c}{n}$. Пользуясь формулами (I.65) и (I.63), будем иметь:

$$\sigma_{кр,1} = 4\,\frac{0{,}9\,E\,n^2}{(c/n)^2}. \qquad (I.69)$$

Во втором случае (рис.I.25,б) пластинка разделяется на участков, каждый из которых представляет собой короткую пластину с размерами $a = \frac{c}{n}$ и $b = c$. В соответствии с (I.62) и нашим замечанием о величине n $K_{min} = (\frac{1}{\gamma} + \gamma)^2 \approx n^2$. Тогда

$$\sigma_{кр.2} = n^2\,\frac{0{,}9\,E}{(c/n)^2}. \qquad (I.70)$$

Из сравнения (I.69) и (I.70) видно, что подкрепление продольными ребрами в 4 раза повышает критические напряжения в пластине по сравнению с поперечными.

Задачу нахождения жесткостных характеристик рассмотрим на примере пластины с подкрепляющим набором вдоль оси x (рис.I.26).

С этой целью исследуем сначала изгиб длинной прямоугольной подкрепленной пластины, несущей поперечную нагрузку, не изменяющуюся вдоль координаты x, $p = p(y)$. Изогнутую поверхность такой пластины (исключая небольшую область, примыкающую к коротким сторонам) можно считать цилиндрической с образующими, параллельными длинной стороне (рис.I.27). Таким образом, прогиб является функцией только координаты y: $w = w(y)$. В силу этого уравнение (I.36) принимает вид

$$D_y \cdot \frac{d^4 w}{\partial y^4} = p.$$

Так как подкрепляющие ребра ориентированы вдоль оси x, то они не изгибаются и не оказывают влияния на деформацию пластины. Поэтому

$$D_y = D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \qquad (I.71)$$

Рассмотрим теперь цилиндрический изгиб подкрепленной пластины с $b \gg a$ (рис.I.28) при $p = p(x)$. Изогнутую поверхность такой пластины (исключая небольшую область, примыкающую к коротким сторонам) также можно считать цилиндрической, $w = w(x)$.

Рис.I.26. Пластинка, подкрепленная продольным набором

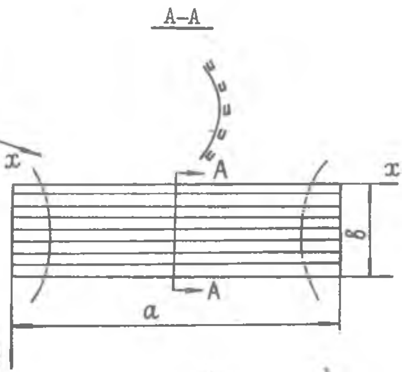

Рис.I.27. Цилиндрический изгиб подкрепленной пластины, вытянутой вдоль оси x

Уравнение (I.36) имеет тогда вид:

$$D_x \cdot \frac{d^4 w}{\partial x^4} = p .$$

Подкрепляющие ребра оказывают существенное влияние на деформацию пластины, так как они изгибаются совместно с ней. Поэтому изгибная жесткость D_x будет складываться из жесткостей

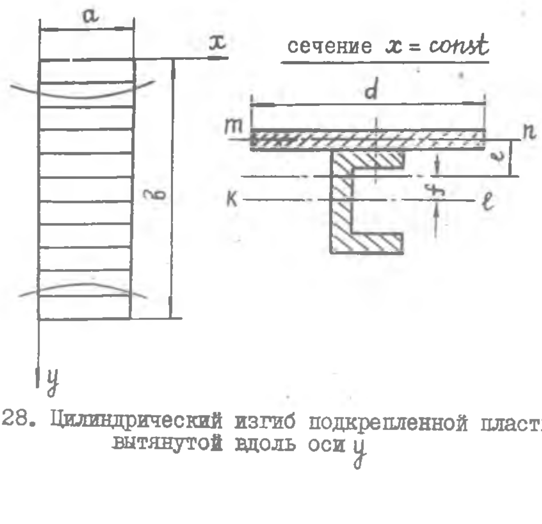

Рис.I.28. Цилиндрический изгиб подкрепленной пластины, вытянутой вдоль оси y

самой пластины и ребра. Учитывая для пластины соотношение (I.42) и имея в виду, что главные центральные оси инерции всего сечения и отдельных элементов не совпадают (рис.I.28), будем иметь

$$D_x = \frac{E}{d}\left(\frac{J_o}{1-\mu^2} + J_1\right), \qquad (I.72)$$

где

$$J_o = \frac{dh^3}{12} + dhe^2,$$

$$J_1 = J_1' + F_1 f^2.$$

Здесь F_1 – площадь поперечного сечения подкрепляющего ребра; J_1' – момент инерции ребра относительно оси $k\ell$, проходящей через его центр тяжести (собственный момент инерции сечения ребра); e и f – расстояния от центра тяжести всего сечения до центров тяжести пластины и ребра (рис.I.28).

Для нахождения коэффициентов D_{xy} рассмотрим пластину с продольным набором, растягиваемую постоянными напряжениями σ_{xx}. Ее деформация может быть найдена из закона Гука (I.II):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_{yy}}{E_y}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\mu_{yx}\frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \frac{\sigma_{yy}}{E_y}.$$

Из этих формул видно, что в нашем случае $\mu_{yx} = \mu$, так как продольный набор не оказывает влияния на поперечное сужение пластины.

Если пластина будет растягиваться вдоль оси y, то можно утверждать, что $\mu_{xy} < \mu$, так как продольные ребра препятствуют развитию деформаций сужения ε_{xx}.

На основании (I.30) мы можем записать

$$D_{xy} = \mu D_y + 2D_k, \qquad (I.73)$$

где D_y вычисляется по формуле (I.7I).

Для гладкой изотропной пластины

$$D_k = \frac{Gh^3}{12}. \qquad (I.74)$$

В теории упругости при рассмотрении кручения тонкой полосы (рис.I.29) связь между крутящим моментом M_k и относительным углом закручивания α имеет вид /I/

$$M_k = C_k\alpha,$$

где $C_к$ – жесткость полосы на кручение

$$C_к = \frac{Gh^3 d}{3}. \qquad (I.75)$$

Сопоставление (I.75) и (I.74) дает

$$D_к = \frac{C_к}{4d}. \qquad (I.76)$$

Если имеется незамкнутый тонкостенный профиль (рис.I.30), то его жесткость на кручение может быть приближенно получена как сумма жесткостей составляющих элементов $C_к = \frac{G}{3}\sum_{i=1}^{3} a_i h_i^3$

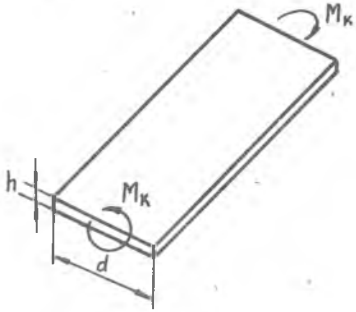

Рис.I.29. Кручение тонкой полосы

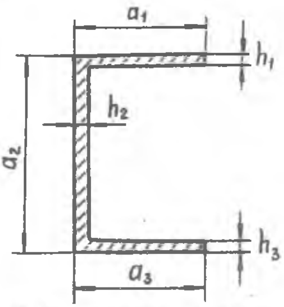

Рис.I.30. Сечение незамкнутого тонкостенного профиля

Таким образом, для пластины с продольным подкреплением, сечение которого показано на рис.I.28, имеем

$$C_к = \frac{G}{3}\left(dh^3 + \sum_{i=1}^{3} a_i h_i^3\right)$$

или

$$D_к = \frac{G}{12}\left(h^3 + \frac{1}{d}\cdot\sum_{i=1}^{3} a_i h_i^3\right). \qquad (I.77)$$

Такой подход возможен, если подкрепляющие ребра при соединении с пластиной не образуют замкнутого контура. Для тонкостенной конструкции с замкнутым контуром поперечного сечения (рис.I.3I) известно, что

$$\alpha = \frac{1}{\Omega}\oint\frac{T\,ds}{Gh}.$$

Если контур однозамкнутый, то $T = \frac{M_к}{\Omega}$ и

$$\alpha = \frac{M_к}{G\Omega^2}\oint\frac{ds}{h},$$

где Ω – удвоенная площадь, ограниченная контуром сечения.

Тогда $\quad c_к = \dfrac{G\Omega^2}{\oint \frac{ds}{h}} = \dfrac{G\Omega^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{h_i}}$.

Так как жесткость на кручение замкнутого сечения значительно больше, чем открытого контура, то первым слагаемым выражения (I.73) можно пренебречь по сравнению со вторым и пользоваться приближенным соотношением

$$D_{xy} \approx 2D_к = \frac{c_к}{2d}.$$

В конструкциях летательных аппаратов находят применение пластины, состоящие из двух слоев, разнесенных друг от друга и связанных между собой поперечными пластинками (рис. I.32). Такие элементы также можно рассматривать как конструктивно ортотропные. Изгибная жесткость D_y, как отмечалось ранее, не зависит от наличия продольных подкрепляющих ребер, ориентированных вдоль оси x . Она будет определяться как сумма изгибных жесткостей двух слоев:

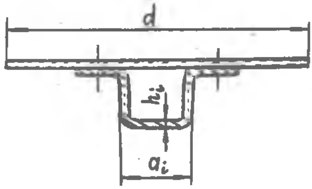

Рис. I.31. Подкрепление пластины, образующее замкнутый контур

$$D_y = 2D = \frac{Eh_1^3}{6(1-\mu^2)}.$$

Что касается изгибной жесткости D_x, то она будет складываться из жесткости двух слоев, поперечной пластинки и соединительных уголков:

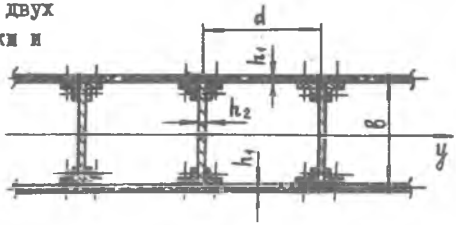

Рис. I.32. Пластина, состоящая из двух слоев, связанных между собой поперечными пластинками

$$D_x = \frac{E}{d}\left(\frac{2J_o}{1-\mu^2} + J_1 + 2J_2\right),$$

где

$$J_o \approx \frac{dh_1^3}{12} + dh_1\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$J_1 = \frac{h_2 \theta^3}{12}$$

$$J_2 \approx \frac{F\theta^2}{4}.$$

Здесь F – площадь поперечного сечения верхних соединительных уголков.

Для нахождения жесткости на кручение воспользуемся формулами для однозамкнутого контура поперечного сечения.

Тогда $C_к = \dfrac{2G d^2 b^2}{\dfrac{d}{h_1} + \dfrac{b}{h_2}}$,

а

$$D_{xy} \approx \frac{G d b^2}{\dfrac{d}{h_1} + \dfrac{b}{h_2}} .$$

К конструктивно ортотропной можно привести и пластину, изготовленную из гофрированного листового материала /5/.

2. ТРЕХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ

2.I. Понятие о трехслойных пластинах

Трехслойные элементы конструкции летательных аппаратов находят все более широкое применение /3/. Трехслойная пластина состоит из двух тонких внешних слоев, изготовленных обычно из высокопрочного материала (несущих слоев), связанных между собой слоем относительно маложесткого и легкого заполнителя. Назначение заполнителя - обеспечить совместную работу и устойчивость внешних слоев. В качестве заполнителя можно использовать пенопласт, бальзовое дерево, пористую резину, металл в виде гофрированного листа или сотовых ячеек и т.д. (рис.2.I).

Расположение внешних несущих слоев на достаточно большом расстоянии друг от друга при соответствующем выборе параметров трехслойной панели во многих случаях позволяет создать конструкции весом, меньшим, чем вес эквивалентных по жесткости панелей со стрингерным подкреплением.

Главное отличие расчета трехслойных конструкций от расчета обычных пластин состоит в учете деформаций сдвига заполнителя. По установившейся терминологии различают трехслойные конструкции с легким заполнителем и конструкции с жестким заполнителем. К конструкциям с легким заполнителем относят такие, у которых продольные силы почти целиком воспринимаются внешними несущими слоями. В конструкции с жестким заполнителем заметную часть продольных усилий воспринимает заполнитель.

В дальнейшем мы будем рассматривать трехслойные пластины с легким заполнителем.

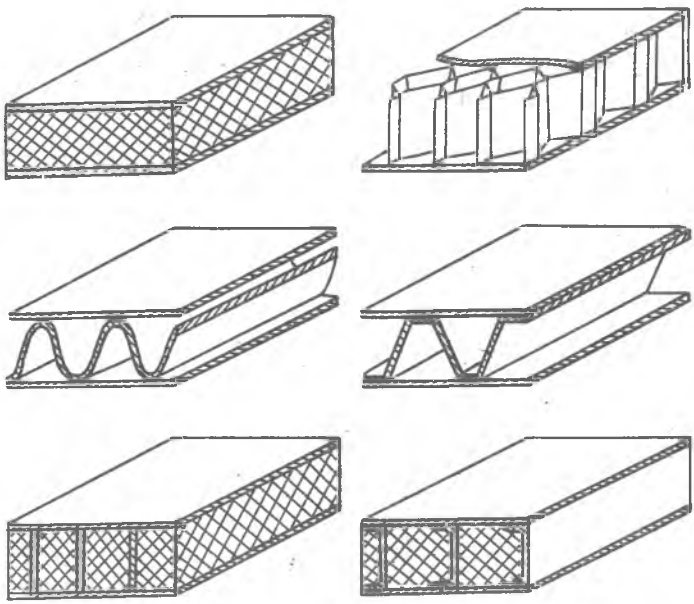

Рис.2.I. Типы трехслойных панелей

2.2. Дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба трехслойной пластины с легким заполнителем

Рассмотрим трехслойную пластину с легким заполнителем (рис.2.2). Обозначим толщину внешних несущих слоев через δ ,а толщину заполнителя через $2h$. При построении теории будем пользоваться следующими гипотезами.

I. Толщина заполнителя намного больше толщины несущих слоев, т.е. $2h \gg \delta$.

2. Модули упругости заполнителя $\bar{E}_x$ и $\bar{E}_y$ значительно

меньше модулей упругости несущих слоев E_x и E_y, вследствие чего можно пренебречь нормальными напряжениями, возникающими в заполнителе.

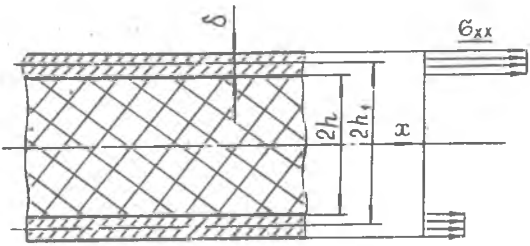

Рис.2.2. Сечение трехслойной пластины с легким заполнителем и эпюра нормальных напряжений

3. Перерезывающие силы воспринимаются только заполнителем.

4. В процессе деформирования расстояние между несущими слоями не меняется. Это эквивалентно утверждению, что модуль упругости заполнителя $\bar{E}_z = \infty$.

В дальнейшем будем предполагать материал несущих слоев изотропным.

В силу принятых гипотез нормальные напряжения в поперечном сечении пластины возникают только в несущих слоях, причем их изменением по толщине будем пренебрегать (см.рис.2.2.). Таким образом, каждый из листов несущего слоя работает в безмоментном напряженном состоянии. Напряжения, возникающие в верхнем и нижнем несущих слоях, будем обозначать через $\sigma_{xx}^{в}$, $\sigma_{yy}^{в}$, $\sigma_{xy}^{в}$ и $\sigma_{xx}^{н}$, $\sigma_{yy}^{н}$, $\sigma_{xy}^{н}$ соответственно. Положительные направления напряжений показаны на рис.2.3.

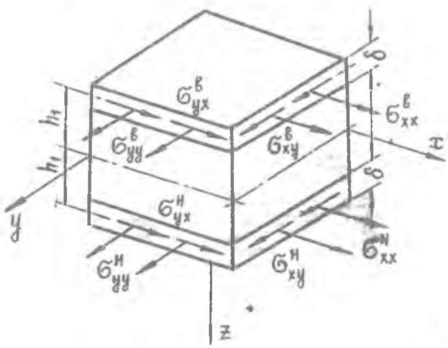

Рис.2.3. Положительные направления напряжений в несущих слоях трехслойной пластины

Напряжения в несущих слоях обусловливают появление изгибающих и крутящих моментов в сечениях трехслойной пластины, которые можно определить следующим образом:

$$M_x = h_1\delta(\sigma_{xx}^{н} - \sigma_{xx}^{в})$$

$$M_y = h_1\delta(\sigma_{yy}^{н} - \sigma_{yy}^{в}) \quad (2.1)$$

$$M_{xy} = h_1\delta(\sigma_{xy}^{н} - \sigma_{xy}^{в}).$$

Напряжения в несущих слоях можно выразить через деформации на основании закона Гука:

$$\sigma_{xx}^{н(в)} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{xx}^{н(в)} + \mu\varepsilon_{yy}^{н(в)}\right)$$

$$\sigma_{yy}^{н(в)} = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{yy}^{н(в)} + \mu\varepsilon_{xx}^{н(в)}\right) \qquad (2.2)$$

$$\sigma_{xy}^{н(в)} = G\varepsilon_{xy}^{н(в)} = \frac{E}{1-\mu^2}\,\frac{1-\mu}{2}\,\varepsilon_{xy}^{н(в)}.$$

Подставляя (2.2) в (2.I), получим:

$$M_x = \frac{Eh_1\delta}{1-\mu^2}\left[\left(\varepsilon_{xx}^{н} - \varepsilon_{xx}^{в}\right) + \mu\left(\varepsilon_{yy}^{н} - \varepsilon_{yy}^{в}\right)\right]$$

$$M_y = \frac{Eh_1\delta}{1-\mu^2}\left[\left(\varepsilon_{yy}^{н} - \varepsilon_{yy}^{в}\right) + \mu\left(\varepsilon_{xx}^{н} - \varepsilon_{xx}^{в}\right)\right] \qquad (2.3)$$

$$M_{xy} = \frac{Eh_1\delta}{1-\mu^2}\,\frac{1-\mu}{2}\left(\varepsilon_{xy}^{н} - \varepsilon_{xy}^{в}\right).$$

Во все формулы (2.3) входят разности деформаций в несущих слоях пластины. Для отыскания этих разностей рассмотрим сечение пластины плоскостью $x = const$ (рис.2.4). Пусть точки срединных плоскостей верхнего и нижнего несущих слоев, лежавшие до деформации на одной нормали к срединной плоскости пакета, сместились на некоторую величину $u_x^{в}$ и $u_x^{н}$ соответственно. В результате этого нормаль повернется на угол α_x, который мы будем предполагать малым. Из геометрических соображений можно записать

$$u_x^{н} - u_x^{в} = 2h_1\alpha_x. \qquad (2.4)$$

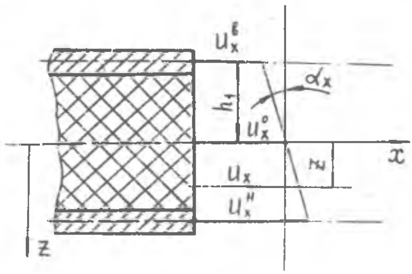

Рис.2.4. Деформирование сечения трехслойной пластины

Аналогично угол поворота α_y сечения пластины плоскостью $y = const$ можно выразить через перемещения точек срединной плоскости несущих слоев:

$$u_y^{н} - u_y^{в} = 2h_1\alpha_y. \qquad (2.5)$$

Дифференцируя (2.4) по x, а (2.5) по y, получим

$$\frac{\partial u_x^н}{\partial x} - \frac{\partial u_x^в}{\partial x} = 2h_1 \frac{\partial \alpha_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y^н}{\partial y} - \frac{\partial u_y^в}{\partial y} = 2h_1 \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} .$$

На основании соотношений Коши эти формулы можно записать

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx}^н - \varepsilon_{xx}^в = 2h_1 \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^н - \varepsilon_{yy}^в = 2h_1 \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} . \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для получения разности деформаций сдвига несущих слоев продифференцируем (2.4) по y , а (2.5) по x , сложим их и воспользуемся соотношениями Коши. В итоге будем иметь

$$\varepsilon_{xy}^н - \varepsilon_{xy}^в = 2h_1 \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) . \tag{2.7}$$

Подставим (2.6) в первую из формул (2.3):

$$M_x = \frac{2Eh_1^2 \delta}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) . \tag{2.8}$$

Вспомним теперь, что цилиндрическая жесткость для изотропной пластины определялась следующим образом:

$$D = \frac{EJ}{1-\mu^2} ,$$

где J - погонный момент инерции поперечного сечения (для изотропной пластины $J = \frac{h^3}{12}$).

Подсчитаем погонный момент инерции трехслойной пластины с легким заполнителем. Согласно вышепринятым гипотезам момент инерции будет складываться из момента инерции только несущих слоев:

$$J_т = 2\delta h_1^2 .$$

Следовательно, коэффициент перед круглой скобкой в (2.8) представляет собой изгибную цилиндрическую жесткость трехслойной пластины с легким заполнителем:

$$D_т = \frac{2Eh_1^2 \delta}{1-\mu^2} . \tag{2.9}$$

Тогда:
$$M_x = D_T\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial x} + \mu\frac{\partial\alpha_y}{\partial y}\right)$$
$$M_y = D_T\left(\frac{\partial\alpha_y}{\partial y} + \mu\frac{\partial\alpha_x}{\partial x}\right) \qquad (2.10)$$
$$M_{xy} = D_T\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial\alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_y}{\partial x}\right).$$

Рассматривая удлинения волокон заполнителя, отстоящих на расстоянии z от срединной плоскости пластины (рис.2.4), получим, что

$$u_x = u_x^\circ + \alpha_x z$$
$$u_y = u_y^\circ + \alpha_y z, \qquad (2.11)$$

где u_x° и u_y° – перемещения точек срединной плоскости трехслойной пластины в направлении осей x и y.

Погонные перерезывающие силы вследствие постоянства касательных напряжений по высоте заполнителя запишутся так:

$$Q_x = 2h\sigma_{xz} = 2h\bar{G}\varepsilon_{xz}$$
$$Q_y = 2h\sigma_{yz} = 2h\bar{G}\varepsilon_{yz}. \qquad (2.12)$$

Здесь $\bar{G}$ – модуль сдвига материала заполнителя.

Вследствие соотношений Коши и (2.11):

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_x + \frac{\partial W}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \alpha_y + \frac{\partial W}{\partial y}. \qquad (2.13)$$

С учетом (2.13) выражения для перерезывающих сил (2.12) примут вид:

$$Q_x = 2h\bar{G}\left(\alpha_x + \frac{\partial W}{\partial x}\right)$$
$$Q_y = 2h\bar{G}\left(\alpha_y + \frac{\partial W}{\partial y}\right). \qquad (2.14)$$

Выделим бесконечно малый элемент трехслойной пластины с размерами в плане $dx\,dy$. Уравнения равновесия, записанные для этого элемента, не будут отличаться от соответствующих уравнений однослойной пластины, выведенных нами в разделе I.3. Перерезывающие силы как и раньше будут выражаться через изгибающие и крутящие моменты:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \qquad (2.15)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Из уравнения равновесия на ось z будем иметь

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\left(p + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right). \qquad (2.16)$$

Величины Q_x, Q_y, M_x, M_y и M_{xy}, входящие в (2.15) и (2.16), определяются по формулам (2.10) и (2.14).

Дифференцируя Q_x по x, а Q_y по y, из (2.15) можно получить:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}.$$

Подставим сюда выражение для изгибающих и крутящих моментов (2.10). После некоторых преобразований будем иметь

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = D_T \nabla^2 \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y}\right). \qquad (2.17)$$

Из формул (2.14) находим:

$$\alpha_x = \frac{1}{2\bar{G}h} Q_x - \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\alpha_y = \frac{1}{2\bar{G}h} Q_y - \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = \frac{1}{2\bar{G}h}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) - \nabla^2 W. \qquad (2.18)$$

Подставим теперь (2.18) в (2.17). Будем иметь

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = D_T \nabla^2 \left[\frac{1}{2\bar{G}h}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) - \nabla^2 W\right]$$

или

$$\left(1 - \frac{D_T}{2\bar{G}h}\nabla^2\right)\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) = -D_T \nabla^2 \nabla^2 W. \qquad (2.19)$$

Окончательный вид дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба трехслойной пластины с легким заполнителем получим, если в (2.19) подставим (2.16):

$$D_T \nabla^2 \nabla^2 W = \left(1 - \frac{D_T}{2\bar{G}h}\nabla^2\right)\left(p + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2T\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right). \qquad (2.20)$$

Отметим, что в предельном случае, когда модуль сдвига заполнителя $\bar{G}$ стремится к бесконечности (это соответствует гипотезе прямых нормалей), уравнение (2.20) превращается в уравнение для тонкой изотропной пластины, состоящей из двух слоев, разнесенных на высоту заполнителя.

В практике расчета могут встретиться случаи и более жестких заполнителей, когда в трехслойной конструкции заполнителем воспринимается заметная часть продольных сил и моментов. В этом случае необходимо учитывать напряжения в заполнителе, направленные параллельно внешним слоям. Соответствующие соотношения можно получить, исходя из линейного закона изменения перемещений по толщине заполнителя и пренебрегая поперечной деформацией последнего. Принципиально этот вывод не будет отличаться от приведенного выше для легких заполнителей: необходимо лишь ввести в выражения для сил и моментов составляющие, обусловленные напряжениями σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy} в заполнителе. Эти уравнения приведены в книге /2/.

2.3. Устойчивость бесконечно широкой трехслойной пластины при сжатии

Рассмотрим бесконечно широкую трехслойную пластину с легким заполнителем, имеющую пролет b и сжатую равномерно распределенными усилиями $N_x = -N$ (рис.2.5). Края пластины будем

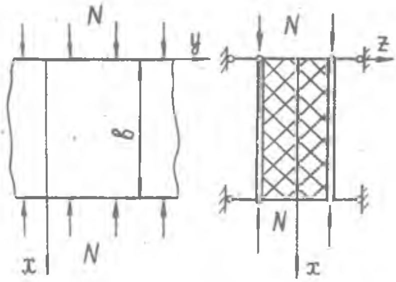

Рис. 2.5. Сжатие бесконечно широкой трехслойной пластины

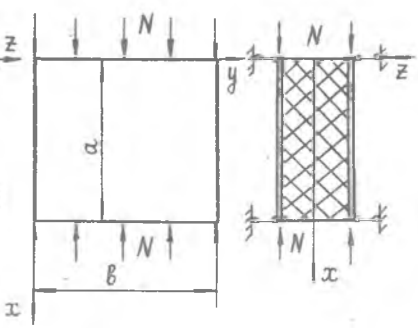

Рис. 2.6. Прямоугольная трехслойная пластина при сжатии в одном направлении

считать свободно опертыми. При потере устойчивости пластина будет изгибаться по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси y. Прогиб пластины будет являться функцией только координаты x ; $W = W(x)$. В силу этого дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба трехслойной пластины (2.20) упростится и будет иметь вид

$$D_T \frac{d^4 W}{dx^4} = -\left(1 - \frac{D_T}{2\bar{G}h}\frac{d^2}{dx^2}\right) N \frac{d^2 W}{\partial x^2}$$

или

$$D_T \frac{d^4 W}{\partial x^4} = -N \frac{d^2 W}{dx^2} + N \frac{D_T}{2\bar{G}h}\frac{d^4 W}{dx^4}. \qquad (2.2I)$$

Решение уравнения (2.2I) должно удовлетворять граничным условиям

при $x = 0$, $x = b$ $W = 0$, $\boxed{M_x = 0}$.

Предположим, что при критическом значении сжимающей нагрузки $N = N_{кр}$ кроме исходной плоской формы появляется новая форма равновесия, которую можно представить в виде функции

$$W = A \sin \frac{\pi m}{b} x, \qquad (2.22)$$

удовлетворяющей граничным условиям.

Подставляя (2.22) в дифференциальное уравнение (2.2I) и приравнивая коэффициенты при синусах, получаем

$$A\left\{D_T\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - N_{кр}\left[1 + \frac{D}{2\bar{G}h}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right]\right\} = 0. \qquad (2.23)$$

Случай $A = 0$ интереса не представляет, так как он соответствует плоской форме равновесия. Следовательно, должно обращаться в нуль выражение, стоящее в фигурной скобке. Из этого условия найдем значение критического усилия

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D_T}{b^2} \frac{1}{\frac{1}{m^2} + \frac{D_T \pi^2}{2\bar{G}hb^2}}. \qquad (2.24)$$

Анализ (2.24) показывает, что для получения минимального значения критической нагрузки необходимо положить $m = I$.

Тогда

$$N_{кр}^{min} = K \frac{\pi^2 D_T}{b^2}, \qquad (2.25)$$

где

$$K = \frac{1}{1 + C}, \qquad C = \frac{\pi^2 D_T}{2\bar{G}hb^2} = \frac{\pi^2}{1-\mu^2}\frac{E}{\bar{G}}\frac{\delta}{h}\left(\frac{h_1}{b}\right)^2.$$

Формулу (2.25) можно записать иначе. Для этого введем жесткость двух несущих слоев на растяжение:

$$B = \frac{2E\delta}{1-\mu^2},$$

через которую, согласно (2.9), выразится изгибная жесткость трехслойной пластины:

$$D_T = Bh_1^2 .$$

Тогда

$$N_{кр}^{min} = K\frac{\pi^2 B}{(b/m)^2} . \qquad (2.26)$$

Для оценки величины коэффициентов C и K рассмотрим трехслойную пластину с несущими слоями из материала Д16 с параметрами $\delta = 0{,}1$ см, $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0{,}3$, $b = 50$ см и легким заполнителем из пенопласта ПХВ-I с $\bar{G} = 20$ МПа и $h = 1$ см. Для такой пластины

$$C \approx 1{,}5, \quad K \approx 0{,}4 .$$

Если взять более плотный заполнитель с $\bar{G} = 120$ МПа, то

$$C \approx 0{,}25, \quad K \approx 0{,}8 .$$

В случае трехслойных пластин с заполнителями типа сот, гофрированных и складчатых элементов, армированных пенопластов и других легких материалов производится приведение жесткостных характеристик к сплошному однородному заполнителю. Эта методика изложена в справочнике /4/.

2.4. Прямоугольная трехслойная пластина с легким заполнителем при сжатии в одном направлении

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину с легким заполнителем, свободно опертую по всему контуру и с размерами $a \times b$ (рис.2.6). Пластина нагружена равномерными сжимающими усилиями $N_x = -N$:

$$N_y = T = p = 0 .$$

Уравнение (2.20) для данного случая нагружения будет иметь вид

$$D_T \nabla^2 \nabla^2 W = -\left(1 - \frac{D_T}{2\bar{G}h} \nabla^2\right) N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} . \qquad (2.27)$$

Решение уравнения (2.27), соответствующее смежной форме равновесия и удовлетворяющее граничным условиям

при $x = 0$ и $x = a$ $\quad W = 0, \quad M_x = 0,$

при $y = 0$ и $y = b$ $\quad W = 0, \quad M_y = 0,$

будем искать в виде функции

$$W = A \sin\frac{\pi m}{a} x \cdot \sin\frac{\pi n}{b} y . \qquad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в уравнение (2.27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим

$$D_T\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^4+2\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{b}\right)^4\right]=N_{кр}\left\{1+\frac{D_T}{2\bar{G}h}\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right]\right\}\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2.$$

Из этого выражения найдем значение критической сжимающей нагрузки

$$N_{кр}=\frac{\pi^2 D_T}{b^2}\,\frac{\left(\frac{m^2}{\gamma^2}+2n^2+\frac{n^4\gamma^2}{m^2}\right)}{1+c\left(\frac{m^2}{\gamma^2}+n^2\right)}, \qquad (2.29)$$

где использованы обозначения

$$\gamma=\frac{a}{b}, \qquad c=\frac{D_T\,\pi^2}{2\bar{G}h\,b^2}.$$

Анализируя формулу (2.29), можно заключить, что для получения минимального значения критической нагрузки следует положить n = I. Формула (2.29) в этом случае примет вид

$$N_{кр}=\frac{\pi^2 D_T}{b^2}K. \qquad (2.30)$$

Здесь

$$K=\frac{\left(\frac{m}{\gamma}+\frac{\gamma}{m}\right)^2}{1+c\left(\frac{m^2}{\gamma^2}+1\right)}. \qquad (2.3I)$$

Если мы рассмотрим предельный случай $\bar{G}\to\infty$ (c = 0), что соответствует, как отмечалось ранее, принятию гипотезы прямых нормалей, то

$$K=\left(\frac{m}{\gamma}+\frac{\gamma}{m}\right)^2.$$

Этот результат совпадает с соотношением (I.6I), полученным ранее для изотропной пластины.

При отношении сторон пластины, равном целому числу $\gamma=m$, величина K может быть вычислена как

$$K=\frac{4}{1+2c}.$$

В других случаях для нахождения значения коэффициента K можно воспользоваться графиками, полученными в соответствии с формулой (2.3I) и приведенными на рис.2.7.

2.5. Симметричная форма потери устойчивости трехслойной пластины с легким заполнителем

При деформировании трехслойной пластины с маложестким заполнителем могут возникнуть существенные взаимные смещения внешних слоев. Это могут быть смещения взаимного сдвига внешних слоев в направлении, параллельном срединной поверхности панели, или смещения, связанные с изменением расстояния между внешними слоями. Эти смещения могут сильно влиять на работу трехслойной пластины и делать неприемлемыми для ее расчета формулы, полученные нами ранее в предположении отсутствия взаимных смещений внешних слоев.

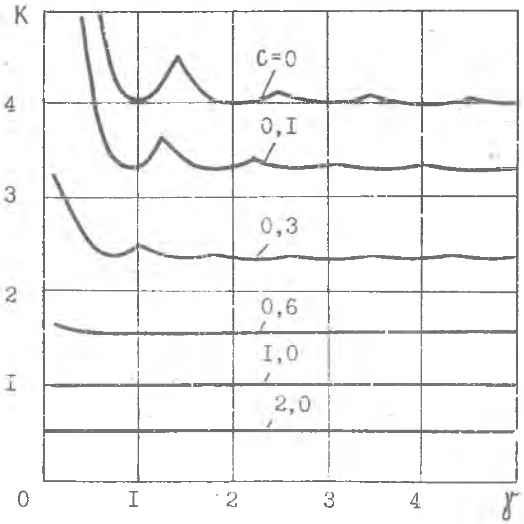

Рис.2.7. Коэффициент K для прямоугольной, свободно опертой трехслойной пластины при сжатии в одном направлении

Рассмотрим трехслойную пластину с легким заполнителем под действием сжимающих сил $N_x = -N$ (рис.2.8). Будем предполагать, что модуль упругости заполнителя $\bar{E}_z$ в направлении оси z мал. При этом возможно симметричное выпучивание несущих слоев, связанное с изменением расстояния между ними. Точки срединной плоскости трехслойной пластины в этом случае не смещаются в поперечном направлении. Происходит потеря устойчивости (местная) каждого из несущих слоев независимо друг от друга. В силу этого задача о симметричной форме потери устойчивости трехслойной пластины с легким заполнителем может быть сведена к решению задачи устойчивости тонкой изотропной пластины толщиной δ , лежащей на упругом основании и сжатой погонными усилиями $N_x = -\frac{N}{2}$. Роль упругого основания играет заполнитель (рис.2.9).

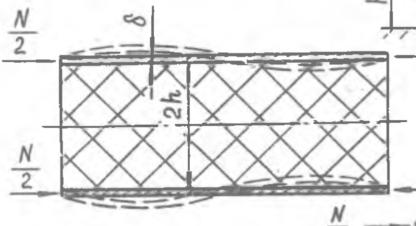

Рис.2.8. Симметричная форма потери устойчивости трехслойной пластины

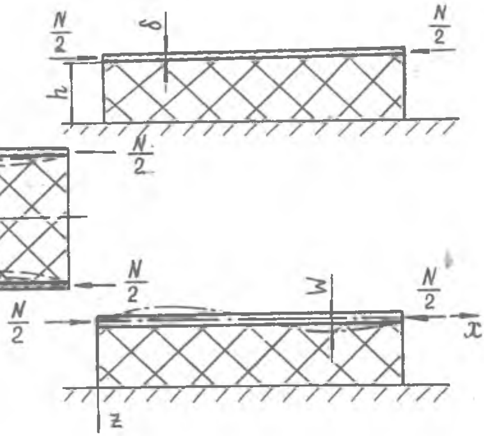

Рис.2.9. Устойчивость тонкой пластины, лежащей на упругом основании

Основание будем считать линейно упругим, то есть силы, действующие со стороны заполнителя, примем пропорциональными прогибу несущих слоев W:

$$p = -\alpha W, \tag{2.32}$$

где α – так называемый "коэффициент постели" упругого основания.

Для решения задачи местной устойчивости несущих слоев мы можем воспользоваться дифференциальным уравнением продольно-поперечного изгиба тонкой изотропной пластины:

$$D \nabla^2 \nabla^2 W = p + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \tag{2.33}$$

Здесь

$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ – изгибная жесткость несущего слоя пластины.

Подставляя в уравнение (2.33)

$$N_x = -\frac{N}{2}, \quad N_y = T = 0$$

и учитывая соотношение (2.32), получим

$$D\nabla^2\nabla^2 W + \frac{N}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha W = 0 . \qquad (2.34)$$

Для нахождения "коэффициента постели" выделим из заполнителя столбик высотой h с площадью поперечного сечения F (рис.2.10). Используя закон Гука, можно записать укорочение столбика, обусловленное действием давления p

$$W = \frac{ph}{E_z} .$$

Сопоставляя это выражение с (2.32), получим, что

$$\alpha = \frac{E_z}{h} . \qquad (2.35)$$

В качестве примера рассмотрим симметричную форму потери устойчивости бесконечно широкой трехслойной пластины с легким заполнителем (рис.2.11). Предположим, что пластина свободно оперта по кромкам и нагружена сжимающими усилиями $N_x = -N$. В силу неограниченности пластины в направлении оси y изгиб несущих слоев при потере устойчивости будет происходить по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси y, то есть

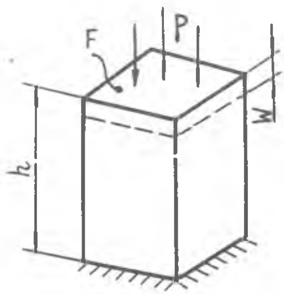

Рис.2.10. Деформация столбика, выделенного из заполнителя

$$W = W(x) , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW}{dx} .$$

Дифференциальное уравнение (2.34) с учетом этого примет вид

$$D\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{N}{2}\frac{d^2 W}{dx^2} + \alpha W = 0 . \qquad (2.36)$$

Функцию прогиба пластины, соответствующую появлению смежной формы равновесия при достижении критического значения сжимающей нагрузки, представим в виде синусоиды

$$W = A \sin\frac{\pi m}{b} x . \qquad (2.37)$$

Выражение (2.37) удовлетворяет граничным условиям на кромках пластины при $x = 0$, $x = b$ $W = 0$, $\frac{d^2W}{dx^2} = 0$.

Подстановка (2.37) в дифференциальное уравнение (2.36) дает

$$A\left[D\left(\frac{\pi m}{b}\right)^4 - \frac{N_{кр}}{2}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \alpha\right] \sin\frac{\pi m}{b}x = 0. \qquad (2.38)$$

Приравнивая нулю выражение, стоящее в квадратных скобках,

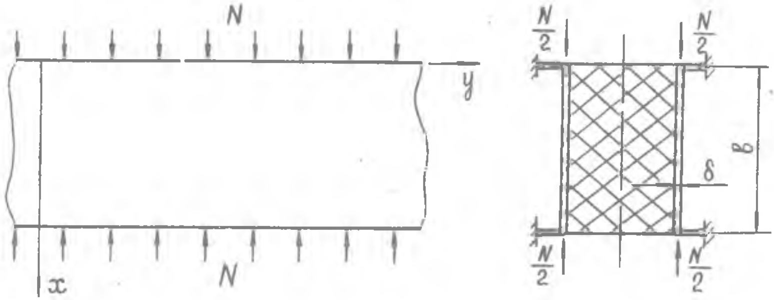

Рис.2.II. Бесконечно широкая трехслойная пластина при сжатии вдоль оси x

получим формулу для критической нагрузки

$$N_{кр} = 2\left[D\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \alpha\left(\frac{b}{\pi m}\right)^2\right]. \qquad (2.39)$$

Если предположить, что параметр m в (2.39) меняется непрерывным образом, то можно найти его значение, обеспечивающее минимум $N_{кр}$, из условия

$$\frac{\partial N_{кр}}{\partial m} = 0.$$

Отсюда получается

$$\left(\frac{\pi m}{b}\right)^4 = \frac{\alpha}{D}. \qquad (2.40)$$

Подставляя найденное выражение (2.40) в (2.39), получим минимальное значение критической нагрузки

$$N_{кр}^{min} = 4\sqrt{\alpha D}. \qquad (2.4I)$$

С учетом соотношения (2.35) и выражения для изгибной жесткости несущего слоя, а также предполагая $\mu = 0{,}3$, формулу (2.4I) можно записать:

$$N_{кр}^{min} = 1,2\,\delta\sqrt{\bar{E}_z E \frac{\delta}{h}}\,. \qquad (2.42)$$

Для минимального критического напряжения из (2.42) будем иметь

$$\sigma_{кр}^{min} = \frac{N_{кр}^{min}}{2\delta} = 0,6\sqrt{\bar{E}_z E \frac{\delta}{h}}\,. \qquad (2.43)$$

Вычисляя значения критических нагрузок, соответствующих общей потере устойчивости и местной, можно определить, какая из этих форм является более опасной для данной трехслойной пластины.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.–М.:Высшая школа, 1968.– 5I2с.

2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.–М.: Гос.издат. физ.–мат. литературы, I963.– 880с.

3. Панин В.Ф. Конструкции с сотовым заполнителем.– М.: Машиностроение, I982.– I52с.

4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах.Том 2./ Под общ.ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко. – М.: Машиностроение, I968.– 464с.

5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.–М.: Гос.издат.физ.-мат. литературы, I963.– 636с.

6. Хазанов Х.С., Савельев Л.М. Метод конечных элементов в приложении к задачам строительной механики и теории упругости.– Конспект лекций, часть I, – Куйбышев: КуАИ, I975.– I28с.

Оглавление

Темплан 1983 г., поз. 24

Леонов Виктор Иванович

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАКОНСТРУКЦИЙ ТИПА
ОРТОТРОПНЫХ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Редактор Л.М.Карпова

Подписано в печать I.I2.I983 г. ЕО 0736I.
Формат 60х84 I/I6. Оперативная печать.
Бумага писчая белая. Физ.п.л. 4,25. Усл.п.л.3,92.
Уч.-изд.л. 3,9. Тираж 700 экз. Заказ 8097
Цена I5 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, I5I.

Областная тип.им. В.П.Мяги, г. Куйбышев, ул.Венцека,60.